计算方法实习题 1

学号：161220026　姓名：崔子寒　2018 年 4 月 18 日

实验提交文件清单：

```
─ 实习题1_161220026
  ├── answer.txt
  ├── src.py
  └── 实习题(1)报告.pdf
```

其中：answer.txt 为实验题目答案导出的结果。

src.py 为算法源文件。

1.实验环境

硬件环境	计算机型号	Window 系统 AMD64 架构计算机
	Cpu	Intel i5 6300HQ 四核处理器
	Cpu 主频	2.30GHZ
软件环境	算法语言	Python
	编译环境	Python2.7 + PyCharm + numpy

实验采用 python2.7 作为实现算法的语言，使用第三方库 numpy 完成有关矩阵的科学计算。

2.实验过程

$$A_1=\left[a_{ij}\right]_{(n+1)\times(n+1)}=\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n+1}a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{2j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{(n+1)j}\end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}$$

$$A_2=\left[a_{ij}\right]_{(n+1)\times(n+1)}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1)\\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n+1)\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n+1}a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{2j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{(n+1)j}\end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}$$

在A_1中取$x_k=1+0.2k,k=0,1,2,\cdots n$以形成矩阵$A_1$. 遇到解

（1）取 n=2:8，分别计算 A_1 和 A_2 的 2-条件数，随 n 增大矩阵的性态变化如何？

解答：矩阵 A 的 2-条件数的计算方法可以使用公式：

$$cond_2(A) = ||A^{-1}||_2 \times ||A||_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}}$$

计算结果如下：

	$cond_2(A1)$	$cond_2(A2)$	CPU 时间（微秒）
n=2	343.537831	524.056778	995.500000
n=3	4525.566840	15513.738739	995.500000
n=4	60973.908130	476607.250246	995.500000
n=5	890170.350288	14951058.642075	995.500000
n=6	14080388.555817	475367356.467742	995.500000
n=7	238889523.536956	15257576321.957924	995.500000
n=8	4316879329.919199	493153786012.416565	995.500000

结果分析：随着 n 的增大，A_1 和 A_2 的 2-条件数也急剧增大，而且 A_2 增大的更快。说明这两个矩阵的病态程度越来越大。

（2）取 n=5，分别求出两个方程组的解向量 x_1，$x_2 \in R^6$。

解答：计算方程组 Ax=b 的解向量可以用公式：$x=A^{-1}b$ 来计算。

计算结果如下：

X_1	$(1,1,1,1,1,1)^T$
X_2	$(1,1,1,1,1,1)^T$
CPU 用时(微秒)	975.000000

（3）取 n=5，b_1 不变，对 A_1 的元素 a_{22} 和 a_{66} 分别加一个扰动 10^{-12}，求第一个方程的解向量$\widetilde{x_1} \in R^6$。

解答：计算结果如下：

$\widetilde{x_1}$	$(1, 1, 1.00000001, 1, 1, 1)^T$
CPU 用时(微秒)	529.500000

可以看出对 A_1 添加扰动几乎对解向量 x_1 没有影响。

（4）取 n=5，b_2 不变，对 A_2 的元素 a_{22} 和 a_{66} 分别加一个扰动 10^{-7}，求出第二个方程的解向量$\widetilde{x_2} \in R^6$；

对 b_2 的最后一个分量加扰动 10^{-4}，求出$\overline{x_2} \in R^6$。

解答：计算结果如下：

$\widetilde{x_2}$	$\begin{bmatrix} 1.00031939 \\ 0.9908345 \\ 1.06270197 \\ 0.8351252 \\ 1.18373632 \\ 0.92700485 \end{bmatrix}$
$\overline{x_2}$	$\begin{bmatrix} 0.7228 \\ 9.316 \\ -57.21200001 \\ 156.23200002 \\ -173.63600002 \\ 70.85440001 \end{bmatrix}$
CPU 用时	1021.000000 微秒

（5）观察和分析系数矩阵 A 和右端向量 b 的微小扰动对解的影响，得出你的结论。

结果分析：

对 A_1 和 A_2 的元素添加轻微扰动对解向量 x_2 只是造成了轻微的扰动，可以理解成它们本身的 2-条件数已经很大，所以是病态的，对矩阵元素添加轻微扰动，不会使$cond_2(A)$发生很大改变，因此对解向量的干扰也是很小的。

而由于 n=5 时，$cond_2(A_2)$=14951058.642075，A_2 是病态的，所以对 b_2 添加轻微扰动会使解发生巨大变化。

结论：对于病态矩阵，对矩阵元素添加微小扰动只会对解向量造成很小的扰动，而对于右端向量的扰动会使解向量产生巨大变化。

（6）根据前面计算的结果分别计算$\frac{||x_1-\widetilde{x_1}||_\infty}{||x_1||_\infty}$，$\frac{||x_2-\widetilde{x_2}||_\infty}{||x_2||_\infty}$，$\frac{||x_2-\overline{x_2}||_\infty}{||x_2||_\infty}$。并与理论估计值比较。

解答：计算结果如下：

$\frac{\|\|x_1-\widetilde{x_1}\|\|_\infty}{\|\|x_1\|\|_\infty}$	$5.355104803571439 \times 10^{-9}$
$\frac{\|\|x_2-\widetilde{x_2}\|\|_\infty}{\|\|x_2\|\|_\infty}$	0.18373632041389465
$\frac{\|\|x_2-\overline{x_2}\|\|_\infty}{\|\|x_2\|\|_\infty}$	174.6359998596497

可以看出：$\frac{||x_1-\widetilde{x_1}||_\infty}{||x_1||_\infty}$和 $\frac{||x_2-\widetilde{x_2}||_\infty}{||x_2||_\infty}$ 的值都接近 0，这与对 A 添加扰动对解产生的扰动很小相符合。

而 $\frac{||x_2-\overline{x_2}||_\infty}{||x_2||_\infty}$ 的值较大，符合对 b 添加扰动会对解产生较大扰动的预期。