普通高校基础数学教材系列

线　性　代　数

主编　刘剑平　施劲松　曹宵临

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 刘剑平等主编 . —上海:华东理工大学出版社,2003 .8

ISBN 7 - 5628 - 1425 - 2

Ⅰ 线 . . . Ⅱ .刘 . . . Ⅲ .线性代数—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ .0151 .2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 057596 号

内 容 提 要

本书是根据教育部 1998 年颁布的全国成人高等教育线性代数课程教育基本要求,结合作者多年的教学经验编写而成的。内容包括矩阵、行列式、线性方程组、向量空间、特征值问题与二次型共 5 章。每章后除配有习题外,还配有自测题(附答案或提示)以测试学生对重点内容、基本方法的掌握程度。另外书后还配有各章习题的解答供学生参考和配有三套模拟考试卷(附答案或提示)用于帮助学生应试复习使用。

本书可作为成人教育本科、专升本、专科学生的线性代数教材,也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的线性代数教材。

普通高校基础数学教材系列

线 性 代 数

主编 刘剑平 施劲松 曹宵临

出版	华东理工大学出版社	开本	787×960 1/ 16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	15 .75
邮编	200237 电话(021)64250306	字数	288 千字
网址	www .hdlgpress .com .cn	版次	2003 年 9 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	印次	2004 年 10 月第 1 次
印刷	江苏句容市排印厂	印数	4051 - 7080 册

ISBN 7 - 5628 - 1425 - 2/ O · 87 定价:21 .00 元

前　言

线性代数是高等院校理、工科和经济学科等专业的一门主要基础课程，也是研究生入学考试的必考内容。随着计算机的日益普及，线性代数的知识作为计算技术的基础也日益受到重视，尤其是用代数方法解决实际问题已渗透到各个领域，显示出其重要性和实用性。

本书是根据教育部1998年颁布的全国成人高等教育线性代数课程教育基本要求，结合作者多年的教学经验编写而成的，可作为成人教育工科线性代数课程的教材，也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的线性代数教材。

工科及理科非数学专业的学生学习本课程的目的，主要在于加强基础及实际应用。考虑到成人教育的特点，我们着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免烦琐的理论推导、证明，力求简明、准确；在内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深、循序渐进。通过配以较多的例子，开阔学生思路，理解所学概念。每章后作一个小结，其中包括内容框图、基本要求、内容概要，以帮助学生认识本章的重点、难点。每章还配有自测题(附答案或提示)以测试学生重点内容、基本方法的掌握程度。另外书后还配有各章习题的解答供学生参考和配有三套模拟考试卷(附答案或提示)用于帮助学生应试复习使用。

本书由华东理工大学成人教育学院组织编写。由刘剑平、施劲松、曹宵临主编。在编写过程中，得到了华东理工大学成人教育学院领导焦家骏、张德振老师以及华东理工大学出版社的大力支持，得到了学院领导王宗尧教授、鲁习文教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢。同时我们还要感谢教学组的张建初教授、方民、倪中新、张新发、李红英、苏纯洁、薛以锋、曹宇烨、孙军、林爱红等老师，他们在本书的编写过程中提出过宝贵的建议。

限于编者的水平，疏漏差错仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正并诚恳邀请您加盟修订本书。

作者的电子信箱是：liujianping60@163.com

刘剑平　施劲松　曹宵临

2003　5

目　　录

1 矩　阵

矩阵是一个重要的数学工具，也是线性代数研究的主要内容之一．本章将介绍矩阵的概念及其运算，进而讨论用途极广的矩阵初等变换和初等矩阵．

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

定义 1 由 $m\times n$ 个元素排成 m 行 n 列的矩形元素表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 维(阶)矩阵．常用英文大写字母 $A, B, \cdots\cdots$ 记．即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 称为矩阵 A 的 (i, j) 元．a_{ij} 中的 i 称作行标，j 称作列标，矩阵 A 可简记作 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $A=[a_{ij}]$，$m\times n$ 维矩阵 A 有时也记作 $A_{m\times n}$．

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵．本书中的矩阵，除特别说明外，都指实矩阵．

1.1.2 若干特殊矩阵

行数与列数都等于 n 的矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们称 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为方阵 A 的主对角元，它们所在的对角线称为主对角线.

称主对角线以上全为零的方阵 $B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为下三角矩阵.称主对角线以下全为零的方阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为上三角矩阵.

既是上三角阵又是下三角阵的方阵 $\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 称为对角矩阵.对角矩阵也记作 $\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$.

称主对角元相同的对角阵 $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 为数量阵(或标量阵).特别地，当 $a=1$ 时，称 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 为单位矩阵，用 I 或 E 记.

只有一行的矩阵 $A=[a_1\ \ a_2\ \cdots\ a_n]$ 称为行矩阵，又称为 n 维行向量.为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

只有一列的矩阵 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 称为列矩阵，又称为 m 维列向量.

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 O.注意不同维的零矩阵是不相等的.

1.1.3　矩阵的应用举例

例 1　某 IT 集团公司向两个代理商发送三种电脑的数量(单位:套)如下表所示:

商品名 / 代理商	WorkPad	Tablet PC	NC
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表格中的数据可列成矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 为该公司向第 i 个代理商发送第 j 种电脑的数量.

这三种电脑的单价及单件重量也可以列成矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种电脑的单价, b_{i2} 为第 i 种电脑的单件重量($i=1,2,3$).

例 2　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数可以表示成一个 $m\times n$ 维矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的系数矩阵.

线性方程组的系数与常数项合并在一起,可以表示成一个 $m\times(n+1)$维矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的增广矩阵 .方程组中未知量及常数项,可以表示成 $n\times 1$ 维和 $m\times 1$ 维矩阵

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{和 } b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.2 矩阵的运算

在研究矩阵的运算之前,我们先给出矩阵相等的定义 .

定义 1 给定两个同维 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$和 $B=[b_{ij}]$,当

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$$

时,称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记作 $A=B$.

1.2.1 矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义 2 数 λ 与矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$,规定为

$$\lambda A=A\lambda=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

即数 λ 乘以矩阵 A 中的每一个元素所得到的矩阵 .显然有

$$0\cdot A=O; \qquad 1\cdot A=A$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 A 是 $m\times n$ 矩阵,λ、μ 为数):

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

矩阵的加法

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$,那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$,规定为

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相加而成的同维矩阵 .

矩阵加法满足下列运算规律(设 A、B、C 都是 $m\times n$ 矩阵,λ 为数):

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

由加法和数乘运算,可以定义矩阵的减法为

$$A-B=A+(-1)B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相减而成的同维矩阵.

矩阵的加法与数乘运算结合起来,统称为矩阵的线性运算.

例 1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,矩阵 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$,试求 $2A-3B$.

解

$$2A=\begin{bmatrix}2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\2\times4 & 2\times5 & 2\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\8 & 10 & 12\end{bmatrix}$$

$$3B=\begin{bmatrix}3\times2 & 3\times0 & 3\times(-1)\\3\times3 & 3\times1 & 3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & -3\\9 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2-6 & 4-0 & 6-(-3)\\8-9 & 10-3 & 12-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 9\\-1 & 7 & 6\end{bmatrix}$$

例 2 求解矩阵方程 $2X-A=B$,其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & -4\\6 & 5\end{bmatrix}$.

解 由 $2X-A=B$,移项得

$$X=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+1 & 0+(-2)\\-2+5 & 4+(-4)\\0+6 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\\frac{3}{2} & 0\\3 & 4\end{bmatrix}$$

1.2.2 矩阵的乘法运算

在上一节的例 1 中,容易看出,$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$ 即为集团公司向代理商乙所发送三种电脑的总重量,而 $a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+a_{i3}b_{31}$ 即为集团公司向第 i 个代理商($i=1,2$)所发送电脑的总价值.于是,可以得到向两个代理商所发送电脑的总价值与总重量矩阵:

$$C=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

考察完这个例子后,我们可以给出两矩阵相乘的定义.

定义 4 设 $A=[a_{ij}]$是一个 $m\times s$ 矩阵, $B=[b_{ij}]$是一个 $s\times n$ 矩阵,那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$,记为 $C=AB$ 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

由定义可知,一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵,也就是一个数,即

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{sj} \end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$$

由此表明乘积矩阵 C 的(i,j)元 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积(即对应位置元素乘积的和) .

必须注意矩阵可以相乘的条件为第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数 .

例 3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,矩阵 $B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,求 AB 与 BA .

解 因为 A 是 2×3 矩阵, B 是 3×1 矩阵,所以 A 与 B 可以相乘,其乘积 AB 是一个2×1矩阵,即

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\times 2+0\times(-1)+(-3)\times 3 \\ (-1)\times 2+(-2)\times(-1)+3\times 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

因为 B 的列数不等于 A 的行数,故而 BA 没有意义 .

例 4 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,求 AB 与 BA .

解 由乘法定义可知

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

例 5 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 的乘积 AB 与 BA .

解 由乘法定义可知

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

由例 3 知道, AB 有意义而 BA 没意义;由例 4 知道, AB、BA 都有意义而不同阶;由例 5 知道, AB、BA 都有意义且同阶,但不相等 总之,矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下, $AB\neq BA$.所以我们称 AB 为 A 左乘 B,而称 BA 为 A 右乘 B .若 $AB=BA$,则称矩阵 A、B 可交换 .

例 5 还表明,矩阵 $A\neq O$, $B\neq O$,但却有 $AB=O$,它说明矩阵乘法不满足消去律,即在一般情况下,由 $AB=O$ 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论;同理,若 $A\neq O$ 而 $AB=AC$,也不能得出 $B=C$ 的结论 .

例 6 试求所有与矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵 .

解 设 $C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}$, 由 $AC=CA$, 即

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\\ c_{11} & c_{12} & c_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{13} & c_{11} & c_{12}\\ c_{23} & c_{21} & c_{22}\\ c_{33} & c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}$$

由矩阵相等的定义,即有 $c_{21}=c_{13}=c_{32}$, $c_{11}=c_{22}=c_{33}$, $c_{23}=c_{12}=c_{31}$, 故与 A 可交换的全体矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}, (a, b, c \text{ 是任意常数})$$

矩阵乘法满足下列的运算规律(假设运算都是可行的):

(1) $(AB)C=A(BC)$;

(2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$,(其中 λ 为常数);

(3) $A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)A=BA+CA$;

(4) $I_m A_{m\times n}=A_{m\times n}=A_{m\times n}I_n$.

这里仅对 $A(B+C)=AB+AC$ 给出证明.

证 设 $A_{m\times s}=[a_{ij}]$, $B_{s\times n}=[b_{ij}]$, $C_{s\times n}=[c_{ij}]$,则可设 $A(B+C)=M=[m_{ij}]_{m\times n}$,以及 $AB+AC=N=[n_{ij}]_{m\times n}$.则按矩阵乘法的定义,恰有

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}c_{kj}=n_{ij}$$

故 $A(B+C)=AB+AC$.

例 7 试证两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵.

证 设 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$是两个 n 阶下三角矩阵,即满足 $i<j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$.设 $C=AB=[c_{ij}]$,则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

在 $i<j$ 时,右端第一个和式中的 $b_{kj}=0$,第二个和式中的 $a_{ik}=0$,从而 $c_{ij}=0$,由此得证 $C=AB$ 为下三角矩阵.

有了矩阵的乘法,就可以定义矩阵的幂.设 A 是 n 阶方阵, k 为正整数,定义 A^k 为 k 个 A 连乘,即

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$$

矩阵的幂运算满足以下运算规律(A 为方阵, k、l 为正整数):

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$; (2) $(A^k)^l=A^{kl}$.

注 由于矩阵乘法不满足交换律,故对于两个 n 阶矩阵 A 与 B,一般而言,不成立$(AB)^k=A^kB^k$.

例 8 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, n 是正整数,求 A^n.

解 $A^2=\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$,所以,有

$$A^n=\begin{cases}(A^2)^{\frac{n}{2}}=I^{\frac{n}{2}}=I & n\text{为偶数}\\ A(A^2)^{\frac{n-1}{2}}=AI^{\frac{n-1}{2}}=AI=A & n\text{为奇数}\end{cases}$$

例 9 计算$(AB)^2$,A^2B^2,其中 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}$.

解 由 $AB=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}$,得

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&14\\-14&32\end{bmatrix}$$

而由 $A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,及 $B^2=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}$,知

$$A^2B^2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10\\-25&30\end{bmatrix}$$

显然,$(AB)^2\neq A^2B^2$.

1.2.3 矩阵的转置

定义 5 将矩阵 A 的行换成同序数的列而得到的一个新矩阵,称为 A 的转置矩阵,记作 A^{T} 或 A' 即若

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\text{则 } A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

矩阵的转置满足下述运算规律(假设运算都是可行的):

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$,$\lambda$是一个实数;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

我们仅对(4)给出证明.

证 设 $A=[a_{ij}]_{m\times s}$,$B=[b_{ij}]_{s\times n}$,于是$(AB)^{\mathrm{T}}$的(i,j)元素为 AB 的(j,i)元素,等于 A 的第 j 行乘 B 的第 i 列,等于 B^{T} 的第 i 行乘 A^{T} 的第 j 列,即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素,故

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

例 10 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\\2&3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&-1\\4&7\end{bmatrix}$,求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为 $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 7 & 15\\ 14 & 19\end{bmatrix}$,所以

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 14\\ -1 & 15 & 19\end{bmatrix}$$

解法 2

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 14\\ -1 & 15 & 19\end{bmatrix}$$

由矩阵转置的概念可以得到以下两个特殊矩阵:

如果 $A^{\mathrm{T}}=A$,即 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$时,称 A 为对称矩阵 .

如果 $A^{\mathrm{T}}=-A$,即 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$时,称 A 为反对称矩阵 .显然反对称矩阵的主对角元均为零 .

例 11 试证明任一方阵均可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和的形式 .

证 显然 A 可表示成两个矩阵之和

$$A=\frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}+\frac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$$

而$\left(\frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$,即$\frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}$为对称阵;

$$\left(\frac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}}-A)=-\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$$

即$\frac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$为反对称阵 .

1.3 逆矩阵

1.3.1 逆矩阵的概念

设给定一个从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \quad\cdots\cdots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}\tag{1.3.1}$$

简写成

$$y = Ax$$

其中

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

如果能从(1.3.1)式中解出

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \cdots + b_{1n} y_n \\ x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \cdots + b_{2n} y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \cdots + b_{nn} y_n \end{cases} \tag{1.3.2}$$

那么,可以得到一个从 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换,称此线性变换(1.3.2)为线性变换(1.3.1)的逆线性变换,简记为

$$x = By$$

这时,$y = Ax = A(By) = ABy$,故 AB 为恒等变换,即 $AB = I$, I 为 n 阶单位阵.又

$$x = By = B(Ax) = BAx$$

故 BA 也是恒等变换,即 $BA = I$,由此可给出逆矩阵的定义.

定义 1 对给定矩阵 A,若存在一个矩阵 B,满足 $AB = BA = I$,则称矩阵 A 可逆,并称矩阵 B 为 A 的逆矩阵,记作 $A^{-1} = B$.

显然,如果 A 的逆矩阵为 B,即 $A^{-1} = B$,则 B 的逆矩阵为 A,即 $B^{-1} = A$.容易验证矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 是可逆的,且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

称不存在逆矩阵的矩阵为不可逆矩阵.

1.3.2 逆矩阵的性质

性质 1 如果矩阵 A 可逆,则 A 的逆矩阵唯一.

证 设 B、C 都是 A 的逆矩阵,即有 $AB = BA = I$ 和 $AC = CA = I$,则有

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

故 A 的逆矩阵是唯一的.

性质 2 如果矩阵 A 可逆,且 $AB = I$,则必有 $BA = I$.

证 由于 A 可逆,即满足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$,又 $AB = I$,于是有

$$BA = I(BA) = (A^{-1}A)(BA) = A^{-1}(AB)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

性质 3 若 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆,且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

性质 4 若 A 可逆,数 $\lambda \neq 0$,则 λA 可逆,且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

以上两条性质,可直接用定义验证,留给学生自己完成.

性质 5 若 A、B 为同阶可逆矩阵,则 AB 也可逆,且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证 因为 A、B 可逆,所以 A^{-1}、B^{-1} 存在,且有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

以及

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B(A^{-1}A)B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$$

由定义 1 可知 AB 是可逆矩阵,且有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

性质 5 可以推广到 n 个可逆矩阵的乘积情况,即若已知 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为同阶可逆矩阵,则

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

性质 6 若 A 可逆,则 A^{T} 也可逆,且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证 由矩阵乘积的转置性质,有

$$(A^{\mathrm{T}})(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})$$

故由可逆矩阵的定义,得 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

例 1 验证矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

证 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

例 2 设方阵 A 满足 $A^2+A-2I=O$,试证 A 可逆,并求 A^{-1}.

解 因为 $A^2+A-2I=O$ 即 $A(A+I)=2I$,同时 $(A+I)A=2I$,即

$$A\left(\frac{A+I}{2}\right)=\left(\frac{A+I}{2}\right)A=I$$

所以 $A^{-1}=\dfrac{A+I}{2}$.

例 3 已知 A、B 及 $A+B$ 均为可逆矩阵,试证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵,并求出其逆矩阵.

解 由逆矩阵的定义、矩阵乘法的分配律以及矩阵加法的交换律,可得

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}I+IB^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

由性质 5 的推广,知 $A^{-1}+B^{-1}$ 为可逆矩阵,且有

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

注 本例中又可由 $A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=B^{-1}I+IA^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$,得到

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$$

这也是正确的,但这并不说明矩阵乘法有交换律,而是利用了加法的交换律.称在表达式中适时地引入单位阵 I,并将 I 表示成某可逆阵与其逆阵的乘积,这种技巧为单位阵技巧.

1.4 矩阵的分块

1.4.1 分块矩阵及其运算

对于行数和列数较大的矩阵 A,运算时常采用在 A 的行间作水平线和在列间作铅垂线把大矩阵划分成小矩阵的分块法,每个小矩阵称为矩阵 A 的子块,以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

例如将 4×3 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}6&-4&0\\3&2&0\\-1&0&2\\0&5&-3\end{bmatrix}$$

分成子块的分法很多,比如:

$$
(\mathrm{i})\ \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right],\ (\mathrm{ii})\ \left[\begin{array}{c|c|c} 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right],\ (\mathrm{iii})\ \left[\begin{array}{c|c|c} 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right].
$$

分法(i)可记作 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$,其中

$$
A_{11}=\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似,分别说明如下:

(1) 设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$,$\lambda$为数,那么 $\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}$;

(2) 设矩阵 A 与 B 的行数相同、列数相同,采用相同的分块法,有

$$
A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}
$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数、列数相同,那么

$$
A=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}
$$

(3) 设 A 为 $m\times l$ 矩阵,B 为 $l\times n$ 矩阵,分块成

$$
A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}
$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots B_{tj}$ 的行数,那么

$$
AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}
$$

其中

$$
C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\qquad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)
$$

(4) 设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$,则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

例 1 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\2&-1&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\\-2&1\end{bmatrix}$,求 AB 及 A^T .

解 令 $A_1=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&1\end{bmatrix}$,利用分块法, A、B 可写成

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 1&1&1&0\\2&-1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}I&O\\A_1&I\end{bmatrix},\quad B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline -1&-1\\-2&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}I\\B_1\end{bmatrix}$$

于是

$$AB=\begin{bmatrix}I&O\\A_1&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\B_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I+OB_1\\A_1I+IB_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}I&O\\A_1&I\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}I^T&A_1^T\\O^T&I^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1.4.2 常用的分块形式及其应用

(1) **设 A 为 n 阶矩阵,若 A 的分块矩阵在主对角线以外均为零子块,且主对角线上的子块 A_i ($i=1,2,\cdots,s$)都是方阵(阶数可以不等),即**

$$A=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{bmatrix}$$

那么称 A 为分块对角矩阵 .

容易验证,若分块对角矩阵中的子块 A_i ($i=1,2,\cdots,s$)都可逆,则有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&&&\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&A_s^{-1}\end{bmatrix}$$

若 $B=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}$，则有 $B^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$ 成立．

(2) 将 $m\times n$ 矩阵 A 按行分块成 $m\times 1$ 的分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \beta_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

其中 $\beta_i^{\mathrm{T}}=[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}]$ 为 A 的第 i 个行向量 $(i=1,2,\cdots,m)$．

(3) 将 $m\times n$ 矩阵 A 按列分块成 $1\times n$ 的分块矩阵

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$$

其中 $\alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ 为 A 的第 j 个列向量 $(j=1,2,\cdots,n)$．

例 2　设方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，试计算 AA^{T} 及 $A^{\mathrm{T}}A$．

解　由分块矩阵的乘法及转置的定义可得

$$AA^{\mathrm{T}}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}$$

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n \end{bmatrix}$$

如果 $A^{\mathrm{T}}A=I$，以后可知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个彼此垂直的单位向量．

例 3　对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

按矩阵的分块法可写成

$$Ax=b$$

其中

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{bmatrix}$$

如果将系数矩阵 A 按行分成 $m\times 1$ 块,则线性方程组 $Ax=b$ 可记作

$$Ax=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\cdots\\\beta_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{bmatrix}$$

这相当于把每个方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 记作

$$\beta_i^{\mathrm{T}}x=b_i\ (i=1,2,\cdots,m),$$

如果把系数矩阵 A 按列分成 n 块,则线性方程组 $Ax=b$ 可记作

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=b$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$$

注　以后称 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是向量 b 可由向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 来线性表示 .

例 4　设 A 的逆矩阵为 B,即满足 $AB=BA=I$.将 B 和 I 都按列分成 $1\times n$ 的分块矩阵,可得

$$A[b_1,b_2,\cdots,b_n]=[e_1,e_2,\cdots,e_n]$$

即

$$Ab_i=e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

其中 e_i 是 n 阶单位矩阵 I 的第 i 列,即 $e_i=[0,\cdots,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$.

注　矩阵 A 的逆矩阵 B 的列向量 b_i 是线性方程组 $Ax=e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的解向量 .

例 5　试证明:设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则对任一 n 维列向量 x, $Ax=0$ 的充分必要条件是 $A=O$.

证 充分性显然成立.下证必要性.

由 n 维列向量 x 的任意性,可取 $x = e_i = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^T$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)(e_i 是 n 阶单位矩阵的第 i 列),将矩阵 A 分块成 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n]$,则由 $Ax = 0$,可得

$$Ae_i = [\alpha_1, \cdots \alpha_i, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_i = 0$$

即矩阵 A 的第 i 列为零向量,由 i 的任意性,可知矩阵 A 的每一列都是零向量,故 $A = O$.

1.5 初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换是矩阵的十分重要的运算,它在解线性方程组、求逆矩阵以及矩阵理论的探讨中都可起到重要的作用.为引进矩阵的初等变换,先来分析用消元法解线性方程组的步骤.

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

解 将第 1 个方程乘(-3)加到第 2 个方程,将第 1 个方程乘 1 加到第 3 个方程,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

对新方程组交换第 2,第 3 个方程,再将第 2 个方程乘 5 加到第 3 个方程,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \\ -12x_3 = 4 \end{cases}$$

解得 $x_3 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = 0$, $x_1 = -\dfrac{1}{3}$.

上例的求解过程中所作的变换不外三类:

①交换方程组中某两个方程的位置;

②用一个非零的常数 λ 乘以方程组中某一个方程;

③方程组中某个方程的 k 倍(k 是常数)加到另一个方程上去.

显然,这三类变换都是可逆的,因此变换前的方程组与变换后的方程组是同解的,我们称这三类变换都是方程组的同解变换.

对线性方程组的求解变换过程,实际上只是对方程组的系数和常数项进行运算,未知量并未参加运算.因此,若记

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

那么对方程组的变换完全可以转换为对矩阵 $\overline{A}$(为方程组的增广矩阵)的变换.把方程组的上述三类同解变换移植到矩阵上,就得到矩阵的三类初等变换.

1.5.1 初等变换与初等矩阵的概念

定义 1 下面三类变换(称为第 1,2,3 类)称为矩阵的初等行、列变换:

(1) 对调矩阵中的任意两行(列)(对调第 i, j 两行(列),记作 $r_{ij}(c_{ij})$);

(2) 以非零常数 λ 乘以矩阵中的某一行(列)中的所有元素(用数 λ 乘以第 i 行(列)记作 $r_i(\lambda)(c_i(\lambda))$);

(3) 把矩阵中某一行(列)的所有元素的 k 倍(k 是常数)加到另一行(列)的对应元素上去(第 i 行(列)k 倍加到第 j 行(列),记作 $r_{ij}(k)(c_{ij}(k))$).

初等行、列变换统称为初等变换.

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B,就称矩阵 A 与 B 等价,记作 $A\sim B$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质:

(1) 反身性 $A\sim A$;

(2) 对称性 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

(3) 传递性 若 $A\sim B$, $B\sim C$,则 $A\sim C$.

数学中把具有上述三条性质的关系称为等价关系.

定义 2 对单位矩阵 I 仅施以一次初等变换后得到的矩阵称为相应的初等矩阵,分别记第 1,2,3 类行(列)初等矩阵为

$$R_{ij}(C_{ij}),\ R_i(\lambda)(C_i(\lambda)),\ R_{ij}(k)(C_j(k)),$$

有

$$R_{ij}=C_{ij}=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

$$R_i(\lambda)=C_i(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

$$R_{ij}(k)=C_{ji}(k)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\i\text{ 行}\\\\j\text{ 行}\\\\\\\end{array}$$

初等矩阵与初等变换有以下定理表示出的一些性质.

定理 1　对 $m\times n$ 矩阵 A,作一次初等行(列)变换所得的矩阵 B,等于以一个相应的 m 阶(n 阶)初等矩阵左(右)乘 A.

证　这里仅对两种情形给出证明.

第一种,设 A 经一次第 2 类初等行变换 $r_i(\lambda)$后变成 B,记作

$$A\overset{r_i(\lambda)}{\sim}B$$

则 B 也是 $m\times n$ 矩阵,定理断言,应成立

$$B=R_i(\lambda)A$$

事实上,若将 A、B 按行分块,应有 $A=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\\vdots\\\beta_i^{\mathrm T}\\\vdots\\\beta_m^{\mathrm T}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\\vdots\\\lambda\beta_i^{\mathrm T}\\\vdots\\\beta_m^{\mathrm T}\end{bmatrix}$.

用矩阵的分块乘法,就有

$$R_i(\lambda)A=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \cdots\\ \beta_i^{\mathrm T}\\ \cdots\\ \beta_m^{\mathrm T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \cdots\\ \lambda\beta_i^{\mathrm T}\\ \cdots\\ \beta_m^{\mathrm T}\end{bmatrix}=B$$

第二种,设 A 经一次第 3 类初等列变换 $c_{ij}(k)$ 后变成 B,记作

$$A\overset{c_{ij}(k)}{\sim}B$$

则矩阵 B 也是 $m\times n$ 矩阵,定理断言,应成立

$$B=AC_{ij}(k)$$

事实上,若将矩阵 A、B 按列分块,应有 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,及

$$B=[\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n]$$

用矩阵的分块乘法,就有

$$AC_{ij}(k)=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n]=B$$

初等变换对应初等矩阵,由初等变换可逆,可知初等矩阵可逆,且此初等变换的逆变换也就对应此初等矩阵的逆矩阵:由变换 r_{ij} 的逆变换就是其本身,得知 $R_{ij}^{-1}=R_{ij}$;由变换 $r_i(\lambda)$ 的逆变换为 $r_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$,得知 $R_i^{-1}(\lambda)=R_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;由变换 $r_{ij}(k)$ 的逆变换为 $r_{ij}(-k)$,得知 $R_{ij}^{-1}(k)=R_{ij}(-k)$.对列初等矩阵也对应成立:$C_{ij}^{-1}=C_{ij}$,$C_i^{-1}(\lambda)=C_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$,$C_{ij}^{-1}(k)=C_{ij}(-k)$.

1.5.2　初等矩阵的一些应用

初等变换常常用在矩阵的标准形分解当中.

定理 2　对任一 $m\times n$ 矩阵 A,必可经过有限次初等变换,化成如下形式的 $m\times n$ 矩阵:

$$N=\begin{bmatrix}I_r&O\\O&O\end{bmatrix}$$

亦即,对任一 $m\times n$ 矩阵 A,必可找到初等矩阵 $R_1,\cdots,R_l,C_1,\cdots,C_s$,使得

$$R_l\cdots R_1AC_1\cdots C_s=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \tag{1.5.1}$$

其中 r 是个随 A 而定的,不超过 $\min(m,n)$ 的非负整数,并约定当 $r=0$ 时,I_0 为零矩阵.我们称

$$N=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的标准形.

证 这是一个构造性的证明.设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,若 $A=O$,则已为式(1.5.1)的形式,此时的初等矩阵就取单位矩阵.

若 $A\neq O$,总可用第 1 类初等变换将 A 变成左上角那个元素不为零的矩阵.故不失一般性,此时可设 $a_{11}\neq 0$.随后将第 1 行的 $\left(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ 倍加到其余各行上去;以及将第 1 列的 $\left(-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}\right)$ 倍加到其余各列上去;再用 $\dfrac{1}{a_{11}}$ 乘以第 1 行;显然,经这一系列初等变换后,即乘以相应的一系列初等矩阵后,A 变成了如下的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & O^{\mathrm{T}} \\ O & A_1 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵.

对 A_1 重复以上的讨论,直到出现的 $(m-r)\times(n-r)$ 阶矩阵 A_r 是零矩阵为止,就证明了定理的结论.

由式(1.5.1)、初等矩阵均可逆以及可逆矩阵的乘积仍为可逆阵,定理 2 可改写为,对任一 $m\times n$ 矩阵 A,必可找到 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q,使成立

$$A=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q \tag{1.5.2}$$

其中 r 是个随 A 而定的,不超过 $\min(m,n)$ 的非负整数.

(1.5.2)称为矩阵 A 的标准形分解.

例 2 试对矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ 建立标准形分解.

解 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\overset{r_{12}}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}\overset{r_{12}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$

$$\underset{r_{21}(2)}{\overset{r_2\left(\frac{1}{5}\right)}{\sim}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\underset{c_{23}(2)}{\overset{c_{13}(1)}{\sim}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=[I_2 \,\vdots\, O]$$

故由上述初等变换及定理 1,可知

$$R_{21}(2)R_2\left(\frac{1}{5}\right)R_{12}(-2)R_{12}AC_{13}(1)C_{23}(2)=[I_2 \mid O]$$

于是,标准形分解式为

$$\begin{aligned}A&=\left[R_{21}(2)R_2\left(\frac{1}{5}\right)R_{12}(-2)R_{12}\right]^{-1}[I_2 \mid O](C_{13}(1)C_{23}(2))^{-1}\\&=R_{12}^{-1}R_{12}^{-1}(-2)R_2^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)R_{21}^{-1}(2)[I_2 \mid O]C_{23}^{-1}(2)C_{13}^{-1}(1)\\&=R_{12}R_{12}(2)R_2(5)R_{21}(-2)[I_2 \mid O]C_{23}(-2)C_{13}(-1)\\&=P[I_2 \mid O]Q\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}P&=R_{12}R_{12}(2)R_2(5)R_{21}(-2)I_2=R_{12}R_{12}(2)R_2(5)\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\\&=R_{12}R_{12}(2)\begin{bmatrix}1&-2\\0&5\end{bmatrix}=R_{12}\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$Q=I_3C_{23}(-2)C_{13}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}C_{13}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

注 (1) 矩阵的标准形共有四种特例:$[I_r \mid O]$, $\begin{bmatrix}I_r\\O\end{bmatrix}$, I_r, O.

(2) 本例中,在化标准形的过程中,可以避免初等行变换,此时的标准形分解式为

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\1&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-4\\1&-2&3\\0&0&1\end{bmatrix}=[I_2 \mid O]Q$$

用初等变换讨论可逆阵,还可导出计算其逆矩阵的有效方法.

定理 3 n 阶矩阵 A 为可逆阵的充分必要条件是 A 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

证 充分性 若 A 可表示为有限个初等矩阵的乘积,由初等矩阵均为可逆阵知 A 为可逆阵.

必要性 由定理 2 知,对于 A,必可找到初等矩阵 $R_1,\cdots,R_l,C_1,\cdots,C_s$,使

$$R_l\cdots R_1AC_1\cdots C_s=\begin{bmatrix}I_r&O\\O&O\end{bmatrix}\tag{1.5.3}$$

因 A 可逆,由可逆矩阵的乘积仍为可逆阵可知标准形也是可逆阵,从而必定有

$r = n$.于是,此时的式(1.5.2)变为

$$A = R_1^{-1} \cdots R_l^{-1} C_s^{-1} \cdots C_1^{-1} \tag{1.5.4}$$

即 A 可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

推论 1 $m \times n$ 矩阵 $A \sim B$ 的充分必要条件是:存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q,使 $PAQ = B$.

推论 2 n 阶矩阵 A 为可逆阵的充分必要条件是 A 可仅通过有限次初等行变换后化为单位矩阵,即方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \overset{r}{\sim} I$.

注 推论 2 对列变换也成立,即 $A \overset{c}{\sim} I$.

由推论 2 可演化出一种仅用初等行变换计算可逆阵之逆矩阵的方法.对于给定的 n 阶矩阵 A,其为可逆阵的充分必要条件是可用初等行变换将 $n \times 2n$ 的分块矩阵 $[A \vdots I]$ 化成 $[I \vdots B]$ 的形式,这时必有 $B = A^{-1}$.这是因为,此时有初等矩阵乘积 R,使成立

$$[I \vdots B] = R[A \vdots I] = [RA \vdots R]$$

由于 $RA = I$,知 $R = A^{-1}$,即有 $B = R = A^{-1}$.

例 3 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$,求 A^{-1}.

解

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{r_{13}(1)}{\overset{r_{12}(-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_{23}}{\overset{r_{32}(5)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{r_{31}(1) \\ r_{32}(3)}}{\overset{r_3\left(-\frac{1}{12}\right)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \end{array}\right]$$

$$\underset{r_{21}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \end{array}\right]$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-2 & 5 & 1\\ 6 & -3 & -3\\ -2 & -1 & -5\end{bmatrix}$$

对于线性方程组 $Ax=b$,若系数矩阵 A 可逆,则可利用初等行变换法求出 A^{-1} 后,在原方程两端左乘 A^{-1},得 $x=A^{-1}b$,此即为方程组的解 .

例如,对节首的那个线性方程组,其系数矩阵 A 的逆矩阵即例 3 中的所求,若记

$$b=[0,\ -1,1]^{T}$$

方程组的解即为

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-2 & 5 & 1\\ 6 & -3 & -3\\ -2 & -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

其实,利用初等行变换求逆矩阵的方法,还可用于直接求矩阵乘积 $A^{-1}B$.由

$$A^{-1}[A\,\vdots\,B]=[I\,\vdots\,A^{-1}B]$$

可知,若对矩阵 $[A\,\vdots\,B]$ 施以初等行变换,当把 A 变为 I 时,B 就变为 $A^{-1}B$.

例 4 求解矩阵方程 $AX=B$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

解 若 A 可逆,则 $X=A^{-1}B$.

$$[A\,\vdots\,B]=\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3\end{array}\right]\underset{r_{13}(-3)}{\overset{r_{12}(-2)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12\end{array}\right]$$

$$\underset{r_{23}(-1)}{\overset{r_{21}(1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{array}\right]\underset{r_{32}(-5)}{\overset{r_{31}(-2)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{array}\right]$$

$$\underset{r_{3}(-1)}{\overset{r_{2}(-\frac{1}{2})}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

因此

$$X=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

本例用初等行变换的方法求得 $X=A^{-1}B$.如果要求解方程组 $YA=C$ 即 $Y=CA^{-1}$,则可对矩阵 $\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix}$ 作初等列变换,使

$$\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}I\\ CA^{-1}\end{bmatrix}$$

即可得 $Y=CA^{-1}$.不过通常都习惯作初等行变换,对 $YA=C$ 两边取转置,得 $A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$,那么可改为对 $[A^{\mathrm{T}} \mid C^{\mathrm{T}}]$ 作初等行变换,使

$$[A^{\mathrm{T}} \mid C^{\mathrm{T}}]\overset{r}{\sim}[I \mid (A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}]$$

即可得 $Y^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}$,从而求得 Y.

例 5　求解矩阵方程 $AXB=D$,其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

解　显然,A、B 均为初等矩阵,由 $AXB=D$,知有 $R_{12}XC_{31}(1)=D$,即得

$$X=R_{12}^{-1}DC_{31}^{-1}(1)=R_{12}DC_{31}(-1)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}C_{31}(-1)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

1.6　本章小结

1.6.1　内容框图

矩阵的定义

矩阵的运算　　矩阵的逆　　矩阵的分块　　矩阵的初等变换

1.6.2　基本要求

(1) 理解矩阵的概念,掌握常用的特殊矩阵及其性质.

(2) 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其运算规律.

(3) 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质及求逆矩阵的方法.

(4) 了解分块矩阵及其运算 .

(5) 熟练掌握矩阵的初等变换, 了解初等矩阵的性质及其与初等变换的关系 .知道矩阵的标准形分解 .

1.6.3 内容概要

1) 矩阵的概念

矩阵是一个由 $m\times n$ 个元素构成的元素表, 常用方括号或圆括号记为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或}\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

本书中的矩阵一般都是指实数矩阵 .

2) 特殊矩阵

特殊矩阵包括方阵、对称阵、反对称阵、上三角阵、下三角阵、对角阵、数量阵、单位阵、列矩阵、行矩阵、零矩阵等 .他们之间具有如下的从属关系

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \text{上三角阵} \arrow[dr, dash] & & & \\ \text{单位阵} \arrow[r] & \text{数量阵} \arrow[r] & \text{对角阵} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & {} \arrow[r] & \text{方阵} \arrow[r] & \text{矩阵} \\ & & & \text{下三角阵} \arrow[ur, dash] & & & \end{tikzcd}$$

3) 矩阵的运算

(1) 加法: 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$;

(2) 数乘: 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, k 为数, 则 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$;

(3) 乘法: 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$, 则 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n) .$$

注　两矩阵可乘的条件: 左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数 .

(4) 转置: 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为 A 的转置阵, 记作 A^{T} 或 A'.

(5) 运算规律:

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A); \quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A .$$

$$A+B=B+A;\quad (A+B)+C=A+(B+C);\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$
$$(A+B)C=A(BC);\quad \lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B);$$
$$A(B+C)=AB+AC;\quad (B+C)A=BA+CA;$$
$$I_m A_{m\times n}=A_{m\times n}=A_{m\times n}I_n.$$
$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A;\quad (A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}};\quad (\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}};\quad (AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$
$$A^k\cdot A^l=A^{k+l};\quad (A^k)^l=A^{kl}.\qquad (k,l\text{ 为正整数})$$

以上所有运算必须关于加法,乘法可行.

注 1　矩阵的乘法不满足交换律,即一般情况下 $AB\neq BA$.**由此得到式子**

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2;\quad A^2-B^2=(A-B)(A+B);\quad (AB)^2=A^2B^2$$

都未必成立,但上述三个式子在 $AB=BA$ **的条件下都成立.例如:**

$$(A+I)^2=A^2+2A+I;\quad A^2-I^2=(A-I)(A+I)$$

注 2　矩阵乘法不满足消去律,即一般情况下,若 $AB=AC$ **不能得到** $B=C$.**由此可知若** $A^2=A$ **不能得到** $A=O$,**或** $A=I$;**若** $A^2=O$ **也不能得到** $A=O$,**但在** A **可逆的条件下,由** $AB=AC$ **必成立** $B=C$.

思考:当 A **可逆时,若** $AB=CA$ **能推出** $B=C$ **吗?**

4) **可逆矩阵**

(1) **概念:**

设矩阵 A、B **满足** $AB=BA=I$,**则称** A **为可逆矩阵,称** B **为** A **的逆矩阵,记为** $A^{-1}=B$.

注 1　可逆矩阵必是方阵.

注 2　**A **若可逆,其逆必唯一,故 A **的逆矩阵记作** A^{-1},**即有**

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

(2) **性质:**

①**若** A **可逆,则** A^{T}, A^{-1} **均可逆,且** $(A^{-1})^{-1}=A$, $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

②**若** A **可逆,数** $k\neq 0$,**则** kA **可逆,且** $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$;

③**若** A, B **是同阶可逆阵,则** AB **可逆,** $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

注　若 A, B **为同阶的可逆矩阵,** $A+B$ **不一定可逆.**

(3) **判别方法:**

①**利用定义:若** $AB=BA=I$,**则必有** A **可逆,且** $A^{-1}=B$;

②**利用初等矩阵:若** A **可分解为有限个初等矩阵之积,则** A **可逆.**

(4) **求法:**

①利用初等变换

$$(A \vdots I) \overset{\text{行}}{\sim} (I \vdots A^{-1}) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \overset{\text{列}}{\sim} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix};$$

注　对 $(A \vdots I) \sim (I \vdots A^{-1})$ 只能用行初等变换.

对 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ 只能用列初等变换.

②利用分块矩阵;

③凑法:当条件中有矩阵方程时,通过矩阵运算规律从矩阵方程中凑出 $AB=I$ 的形式,从而可得 $A^{-1}=B$,这一方法适用于抽象矩阵求逆.

5) 矩阵的分块

(1) 概念:对矩阵 A 用若干条横线和若干条纵线分割成的矩阵称为分块矩阵,其中每个元素是以小矩阵构成的块.

(2) 特殊分块法及其作用:

①将 A 按列分块

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

其中 α_j 是 A 的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n)$,则

$$Ae_j = \alpha_j \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 e_j 为单位阵 I_n 的第 j 列.

②将 A 按行分块

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}$$

其中 β_i^T 为 A 的第 i 行 $(i=1,2,\cdots,m)$,则

$$e_i^T A = \beta_i^T, \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

其中 e_i 为单位阵 I_m 的第 i 列.

注　由①②可得到

$$e_i^T A e_j = a_{ij}$$

③将 A^{-1} 列分块

$$A^{-1} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

则 A^{-1} 的计算也可转化为方程组 $A\alpha_i = e_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的求解问题 .

④将 A 分成块对角阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix} \quad 则\ A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} & & & B_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & B_2 & & \\ B_1 & & & \end{bmatrix} \quad 则\ B^{-1} = \begin{bmatrix} & & & B_1^{-1} \\ & & B_2^{-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ B_n^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

其中假设 $A_i, B_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都可逆 .

6) 初等变换与初等矩阵

(1) 矩阵 A 的初等变换有如下三类:

第一类:将 A 的第 i 行(列)与第 j 行(列)对换,记作 $r_{ij}\ (c_{ij})$.

第二类:以非零常数 λ 乘 A 的第 i 行(列),记作 $r_i(\lambda)\ (c_i(\lambda))$.

第三类:将 A 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去,记作 $r_{ij}(k)\ (c_{ij}(k))$.

(2) 初等矩阵是单位阵 I 经过一次初等变换后得到的矩阵:

$$I \overset{r_{ij}}{\sim} R_{ij}, \quad I \overset{r_i(\lambda)}{\sim} R_i(\lambda), \quad I \overset{r_{ij}(k)}{\sim} R_{ij}(k)$$

$$I \overset{c_{ij}}{\sim} C_{ij}, \quad I \overset{c_i(\lambda)}{\sim} C_i(\lambda), \quad I \overset{c_{ij}(k)}{\sim} C_{ij}(k)$$

其中 $R_{ij} = C_{ij}, R_i(\lambda) = C_i(\lambda), R_{ij}(k) = C_{ji}(k)$.

(3) 初等变换与初等矩阵之间的关系:

初等矩阵左(右)乘 A,相当于对 A 进行一次相应的初等行(列)变换,例如:

$$A \overset{r_{ij}}{\sim} B \quad R_{ij}A = B, \quad A \overset{c_{ij}}{\sim} B \quad AC_{ij} = B$$

注 1　若矩阵 A 经过有限次初等变换得到矩阵 B,则称 A 与 B 等价,此时必成立等式 $R_s \cdots R_1 A C_1 \cdots C_t = B$,其中 $R_1, \cdots, R_s$ 与 $C_1, \cdots, C_t$ 均为初等矩阵 .

注 2　对矩阵 A 进行第二类初等变换时,乘上的数必须非零;对矩阵 A 进行第三类初等行变换 $r_{ij}(k)$ 时,只有原矩阵 A 中的第 j 行变化了,为 A 的第 j 行加上 A 的第 i 行的 k 倍,其余行不变 .如

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},则\ A \overset{r_{21}(-2)}{\sim} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},而不是\ A \overset{r_{21}(-2)}{\sim} B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注 3　**初等矩阵都是可逆阵，且成立** $R_{ij}^{-1}=R_{ij}$，　$C_{ij}^{-1}=C_{ij}$；　$R_i^{-1}(\lambda)=R_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$，$C_i^{-1}(\lambda)=C_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$；　$R_{ij}^{-1}(k)=R_{ij}(-k)$，　$C_{ij}^{-1}(k)=C_{ij}(-k)$．

习 题 一

A 组

1．已知两矩阵 $A=\begin{bmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2u & u \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$相等，求 x, y, z, u 的值．

2．已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

求 $2A, A+B, 2A-3B$．

3．设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$，求 AB, BA 及 A^2．

4．计算下列乘积．

(1) $[1, -2, 3]\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 4 & b & 0 \\ -1 & 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$;

(3) $[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$．

5．已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，试求与 A 可交换的所有矩阵．

6．设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，问:

(1) $AB=BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

7．举反例说明下列命题是错误的．

(1) 若 $A^2=O$，则 $A=O$;

(2) 若 $A^2=A$，则 $A=O$ 或 $A=I$;

(3) 若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$．

8．求矩阵的幂．

(1) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$, 求 A^n (n是正整数);

(2) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$, 求 A^n (n是正整数).

9 . 设 $A=\begin{bmatrix}5&-2&1\\3&4&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$, 求 AB^T 及 BA^T .

10 . A为 n 阶对称矩阵, B为 n 阶反对称矩阵, 证明:

(1) B^2 是对称矩阵;

(2) $AB-BA$ 是对称矩阵, $AB+BA$ 是反对称矩阵 .

11 . 求下列矩阵的逆矩阵 .

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}$; (2) $B=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&7\\0&1&-2\end{bmatrix}$; (3) $C=\begin{bmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{bmatrix}$.

12 . 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A-3I=O$, 求 A^{-1}, $(A+2I)^{-1}$, $(A+4I)^{-1}$.

13 . 作下列分块矩阵乘法, 其中 A、B、I 都是 n 阶方阵 .

(1) $A^{-1}[A \mid I]$; (2) $\begin{bmatrix}A\\I\end{bmatrix}A^{-1}$; (3) $[A \mid I]^T[A \mid I]$;

(4) $\begin{bmatrix}A^{-1}\\I\end{bmatrix}[A \mid I]$; (5) $\begin{bmatrix}I&O\\O&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$.

14 . 已知 $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-3\\4&0&1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=X+\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 求 X .

15 . 求证: A是 $m\times n$ 矩阵, 则对任一 m 维列向量 x, $x^T A=0$ 　 $A=O$.

16 . 解下列矩阵方程 .

(1) $\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{bmatrix}$;

(3) $X\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$.

B 组

1 . 设 A、B 均为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B$ 及 $(A+B)^2 = A+B$, 求证 $AB = O$.

2 . 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, 如果以 $f(A)$ 来表示矩阵多项式, 即

$$f(A) = A^3 - 3A^2 + 3A + 2I$$

那么若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 试求 $f(A)$.

3 . 试证两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵 .

4 . 化简 $(C^{\mathrm{T}} B^{-1})^{\mathrm{T}} - (AB^{\mathrm{T}})^{-1}(C^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} + I)^{\mathrm{T}}$, 其中 A、B 均为可逆阵 .

5 . 把 n 阶矩阵 A 的主对角线元之和定义为它的迹 (trace), 记作 $\mathrm{tr}(A)$, 即 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, 试证:

$$\mathrm{tr}(AA^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

6 . 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = (I + A)^{-1}(I - A)$, 试利用单位阵技巧求 $(I + B)^{-1}$.

7 . 设 n 阶矩阵 A、B 满足 $A + B = AB$.

(1) 证明 $A - I$ 可逆, 且 $AB = BA$;

(2) 若已知 $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

8 . 证明: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 x 是任一 m 维列向量, y 是任一 n 维列向量, 则

$$x^{\mathrm{T}} Ay = 0 \quad A = O$$

自测题一

一、填空题

1．$[a_1, a_2, \cdots, a_m]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} =$ ________．

2．设$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X = X\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，则 $X =$ ________．

3．设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1} =$ ________．

4．设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$k \geq 2$ 为正整数，则 $A^k - 2A^{k-1} =$ ________．

5．若 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则$(A - 2I)^{-1}(A^2 - 4I) =$ ________．

6．若对任意的 $n \times 1$ 矩阵 x 均有 $A_{m \times n} x = 0$，则矩阵 $A =$ ________．

7．若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$，则$(A - 4I)^{-1} =$ ________．

8．设三阶矩阵 A 和 B 满足关系式 $BA = A^{-1}BA - 6A$，已知 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，则

$B =$ ________．

二、选择题

1．设 n 阶矩阵 A、B、C 满足 $ABC = I$，则必有(　　)．

(A) $ACB = I$;　(B) $BCA = I$;　(C) $BAC = I$;　(D) $CBA = I$．

2．若 A 与 B 是可交换的可逆矩阵，则下列结论中错误的是(　　)．

(A) $AB^{-1} = B^{-1}A$;　(B) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(C) $BA^{-1}=AB^{-1}$;　　(D) $A^{-1}B=BA^{-1}$.

3. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22}-a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}-a_{13} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32}-a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若有 $P_1AP_2=B$, 则 $P_2=$( ).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. A、B 都是 n 阶可逆阵, 且满足 $(AB)^2=I$, 则下列不成立的是( ).

(A) $A=B^{-1}$;　(B) $ABA=B^{-1}$;　(C) $(BA)^2=I$;　(D) $BAB=A^{-1}$.

5. 设 A 为 n 阶可逆阵, 则( ).

(A) 若 $BA=BC$, 则 $A=C$;

(B) A 总可以经过初等行变换化为 I;

(C) 对分块矩阵 $[A \mid I]$ 施行若干次初等变换, 当 A 为 I 时, 相应地 I 变为 A^{-1};

(D) 对分块矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ 施行若干次初等变换, 当 A 变为 I 时, 相应地 I 变为 A^{-1}.

6. 设 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 阶反对称阵, 则下列矩阵中为反对称阵的是( ).

(A) $AB-BA$;　(B) $(AB)^2$;　(C) $AB+BA$;　(D) BAB.

7. A、B 是 n 阶方阵, 下列结论正确的是( ).

(A) $A^2=O \quad A=O$;　　(B) $A^2=A \quad A=O$ 或 $A=I$;

(C) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$;　　(D) $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$.

三、已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, 求(1) $A^TB^T-B^TA^T$; (2) A^2-B^2.

四、已知 α **是** 3×1 **矩阵,且** $A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}9&6&3\\6&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}$,**求**(1) $\alpha^T\alpha$; (2) A^n (n **为正整数**) .

五、已知 A、$I+AB$ **均为** n **阶可逆阵,试证明**: $I+BA$ **也是可逆阵** .

六、设 A、B **均为** n **阶方阵,且** $B=B^2$, $A=I+B$,**证明** A **可逆,并求其逆** .

七、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&1\\-2&0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&1\\-2&0&-3\end{bmatrix}$,**且矩阵** X **满足**

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I$$

求 X .

自测题一答案

一、填空题

1．$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m$.

2．设 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,利用矩阵乘法及两矩阵相等,有 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$,$(a,b\in\mathbf{R})$.

3．利用分块可逆矩阵性质 $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & ⋰ & & \\ A_m & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_m^{-1} \\ & & ⋰ & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$ 及

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{bmatrix},$$ 得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4．找规律,因为 $A^2=A\cdot A=2A$,所以

$$A^k-2A^{k-1}=A^2\cdot A^{k-2}-2A^{k-1}=2A\cdot A^{k-2}-2A^{k-1}=2A^{k-1}-2A^{k-1}=O$$

5．$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.利用 $(A-2I)^{-1}(A^2-4I)=(A-2I)^{-1}(A-2I)(A+2I)=A+2I$.

6．O.可取 $x=e_j=[0,\cdots,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,即 e_j 是 n 阶单位阵的第 j 列,则 $Ax=Ae_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}=0$,由 j 的任意性,知 A 的每一列都为 0,即 $A=O$.

7. 利用矩阵减法及初等行变换求逆矩阵的方法,得$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

8. 两边同时右乘 A^{-1},得 $B = A^{-1}B - 6I$,即$(A^{-1} - I)B = 6I$,亦即

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{bmatrix},\text{故 } B = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

二、选择题

1. B (将 $ABC = I$ 中的 BC 当作一个整体即得).
2. C (因为 A、B、D 这三个选项均可由对 $AB = BA$ 左乘或右乘 A^{-1} 或 B^{-1} 得到).
3. D (首先,P_1 及 P_2 均为初等矩阵,再利用"对矩阵 A 作初等行(列)变换等价于用相应的初等矩阵左(右)乘矩阵 A").
4. A (由$(AB)^2 = I$,当然有 $ABAB = I$,即 $ABA = B^{-1}$,即 B 正确;再对 $ABA = B^{-1}$ 左乘 B,即得$(BA)^2 = BABA = I$,即 C 正确;同理 D 也正确,故只能选 A).
5. B (这是现成的性质,C 和 D 中由于没有确定初等行(列)变换,故不正确).
6. C (只要利用反对称阵的定义 $C^T = -C$ 验证一下即得).
7. D (矩阵乘法一般不满足消去律、交换律).

三、

(1) O; (2) $\begin{bmatrix} -13 & 12 & 2 \\ 10 & -21 & 22 \\ -10 & 21 & -22 \end{bmatrix}$.

四、解:(1) 显然 $\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,于是 $\alpha^T\alpha = [3,2,1]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 14$;

(2) $A^n = (\alpha\alpha^T)^n = \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T\cdots\alpha\alpha^T = \alpha(\alpha^T\alpha)^{n-1}\alpha^T = 14^{n-1}\alpha\alpha^T = 14^{n-1}A$.

五、$I + BA = A^{-1}A + IBA = A^{-1}A + A^{-1}ABA = A^{-1}(I + AB)A$,
$(I + BA)^{-1} = A^{-1}(I + AB)^{-1}A$.

六、由 $A = I + B$,得 $B = A - I$,代入 $B^2 = B$,即得 $A^2 - 2A + I = A - I$,整理得

$A(A-3I)=-2I$,且有

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I)$$

七、由 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$,整理得$(A-B)X(A-B)=I$ 即有

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^{2}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

2 行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念,其理论起源于线性方程组的求解,它在自然科学的许多领域都有广泛的应用.本章主要介绍 n 阶矩阵的行列式的定义、性质及其计算方法.此外还要介绍用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

2.1 二、三阶行列式

考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

的求解.当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,由消元法得方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2.1.2}$$

为了便于记忆,引入记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称之为二阶行列式,它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.1.3}$$

按此法则,二元一次方程组(2.1.1)的唯一解(2.1.2)可表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$.

解　计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&3\\2&1\end{vmatrix}=-1,\quad D_1=\begin{vmatrix}3&3\\-1&1\end{vmatrix}=6,\quad D_2=\begin{vmatrix}5&3\\2&-1\end{vmatrix}=-11$$

所以方程组的唯一解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11$$

类似地,对一般的三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{2.1.4}$$

我们可以由前两个方程消去 x_3 而得到一个只含有 x_1, x_2 的方程;同样,可由后两个方程消去 x_3 而得到另一个只含有 x_1, x_2 的方程,针对这两个新的方程,再利用求解二元一次方程组的方法消去 x_2,就可以解得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\=&(b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32})\end{aligned}$$

把 x_1 的系数记作

$$\begin{aligned}D=&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

我们把上式中的记号 D 称为三阶行列式,这是由 3 行 3 列共 9 个元素并由(2.1.5)式计算得到的右端六项的代数和.

对于(2.1.5)式的右端项,可以用图 2.1 的方法记忆.图中实线上三个元素的乘积组成的三项取正号,虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号.这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

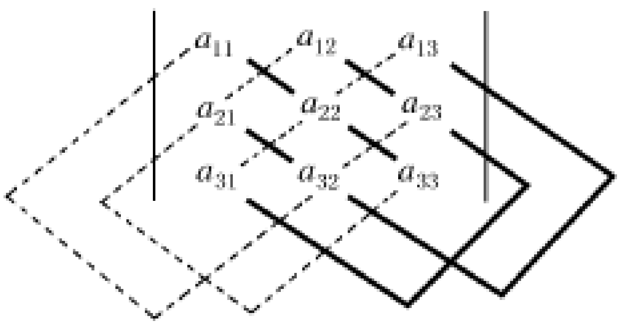


图 2.1

引入三阶行列式之后，三元一次方程组(2.1.4)当 $D\neq 0$ 时有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{2.1.6}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

我们称 D 为方程组(2.1.4)的系数行列式，而 D_1, D_2, D_3 则是将 D 中的第 1, 2, 3 列分别换成常数项列$[b_1, b_2, b_3]^T$ 得到的三阶行列式.

例 2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=-2\\ x_1-x_2-x_3=4\\ -x_1+2x_2+6x_3=1\end{cases}$$

解 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$=3\times(-1)\times 6+1\times 2\times 1+5\times(-1)\times(-1)-1\times(-1)\times(-1)-5\times 1\times 6$$
$$-3\times 2\times(-1)=-36.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1\\ 4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)\times 6+4\times 2\times 1+5\times(-1)\times 1-1\times(-1)\times 1-5\times 4\times 6$$
$$-(-2)\times(-1)\times 2=-108,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & 1 & 6\end{vmatrix}=90,\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-54.$$

由 $D\neq 0$ 知方程组有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{2}$$

从上述讨论可以看出，引入行列式概念之后，二元、三元线性方程组的解可以公式化.为了把这个思想推广到 n 元线性方程组，我们先来引入 n 阶行列式的概念.

2.2 n阶行列式

由三阶行列式的定义(2.1.5),经整理得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2.2.1)$$

可知,由二阶行列式可递推定义三阶行列式.

定义 1 在矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶矩阵的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,$(i, j=1,2,\cdots,n)$.

那么按这个定义,(2.2.1)式可以改写为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

由此推广可定义 n 阶行列式:

定义 2 一阶行列式 $|A| = |a_{11}| = a_{11}$,设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式定义为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \quad (2.2.2)$$

其中 A_{1j} 是元素 a_{1j} 的代数余子式($j=1,2,\cdots,n$),全为 $n-1$ 阶行列式.

注 1 一阶行列式 $|-2| = -2$.

注 2 (2.2.2)式为行列式按第一行的展开定义.事实上,行列式可按任一行或任一列展开定义成

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{或} \quad |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \tag{2.2.3}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式($i, j = 1, 2, \cdots, n$).

例 1 计算下三角矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式(简称下三角行列式)$|A|$.

解 依次按第 1 行展开可得

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

显然,对对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$,也有 $|\Lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.特别地,单位阵 I 的行列式等于 1,即 $|I| = 1$.

例 2 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式 $|A|$.

解 依次按第 1 行展开可得

$$|A| = a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1n} a_{2,n-1} (-1)^{1+n} (-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} (-1)^{n+1+n+\cdots+3}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

例 3　**计算 4 阶矩阵** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$**的行列式 .**

解　**由式**(2 2 3)**可得**

$$|A| = 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 6 \cdot 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -30$$

例 4　**计算 3 阶矩阵** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$**的行列式 .**

解　**由式**(2 2 3)**,按第 1 行展开,有**

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 + 0 + 10 = 12$$

或按第 1 列展开得

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 + 0 + 10 = 12$$

或按第 2 行展开得

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

事实上,用行列式的展开公式计算行列式时,应尽可能地按含零较多的行或列展开 .

2 .3　行列式的性质

在行列式的计算与应用中,以下这些性质或推论极为重要 .这些性质的证明大多可用行列式的展开定义及数学归纳法证得 .

性质 1 方阵 A 的行列式等于其转置矩阵 A^T 的行列式,即 $|A| = |A^T|$.

证 用数学归纳法,对 1 阶行列式显然正确.

假设对任意 $n-1$ 阶行列式,结论正确.现证结论对 n 阶行列式也正确.

对 $|A^T|$,由上节(2.2.3)式,按第 1 行展开,应有

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}^T + a_{21}A_{21}^T + \cdots + a_{n1}A_{n1}^T$$

由于 A_{k1} $(k=1,2,\cdots,n)$是 $n-1$ 阶行列式,按归纳假设,成立 $A_{k1}^T = A_{k1}$.于是

$$\begin{aligned} |A^T| &= a_{11}A_{11}^T + a_{21}A_{21}^T + \cdots + a_{n1}A_{n1}^T \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = |A| \end{aligned}$$

注 式中的 A_{k1}^T $(k=1,2,\cdots,n)$为矩阵 A^T 中 a_{ij} 对应的代数余子式.

据此性质可知,对行列式的“行”成立的一般性质,对“列”也成立,反过来也是对的.

由此性质及上节的例 1 可知上三角行列式的值也是其对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 2 交换某两行(或列)的位置,行列式的值变号.

证 首先证明交换相邻两行的情形,记

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上,对 $|A|$ 按第 i 行展开得

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}$$

对 $|B|$ 按第 $i+1$ 行展开得

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+1+k} M_{ik}$$

显然,有

$$|A| = -|B|$$

对于交换不相邻的两行,不妨设交换 i, j 行,则可理解为通过 $2|i-j|-1$ 奇数次相邻交换而成,故行列式变号.

推论 如果行列式中有两行(或列)相同,则行列式等于零.

证 互换相同的两行,一方面由性质 2 知行列式变号;另一方面,此两行相同,行列式值不变,故 $|A| = -|A|$,得 $|A| = 0$.

性质 3 行列式中某行(或列)元素的公因子可以提到行列式外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上,由展开定义(2.2.3)式,即得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = k\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式同时指出,用数 k 乘以行列式,就等于用 k 乘以行列式中的某一行(或列).

推论 1 一行(或列)元素全为零的行列式等于零.

推论 2 若有两行(或两列)元素对应成比例,则行列式为零.

推论 3 对 n 阶矩阵 A,有 $|kA| = k^n|A|$.

例 1 计算 4 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

解 由性质 3、性质 2 可知

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot 3\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -42$$

性质 4 如果某一行(或列)元素是两组数的和,那么这个行列式就等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行(或列)外全与原行列式的对应的行(或列)一样.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上,只要对等号两边的行列式都按第 i 行展开,这个性质即证.

推论 将某一列(或行)的任意 k 倍加到另一列(或行)上去,行列式的值不变.

证 用列分块法表示矩阵 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n]$,将 α_j 的 k 倍加到 α_i 上去($i \neq j$)所得到的矩阵为 B,则有

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1, \cdots \alpha_i + k\alpha_j, \cdots \alpha_j, \cdots \alpha_n| \\ &= |\alpha_1, \cdots \alpha_i, \cdots \alpha_j, \cdots \alpha_n| + |\alpha_1, \cdots k\alpha_j, \cdots \alpha_j, \cdots \alpha_n| \end{aligned}$$

$$= |A| + 0 = |A|$$

这说明,方阵经过第3类初等变换其行列式的值是保持不变的.为方便计,今后也直接将矩阵初等变换用于行列式.

例2　计算4阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$|A| \overset{r_{12}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \underset{r_{14}(5)}{\overset{r_{13}(-1)}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 6 \\ 0 & -24 & 18 & -23 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_{24}(12)}{\overset{r_{23}(-4)}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 30 & -35 \end{vmatrix} \overset{r_{34}\left(\frac{30}{8}\right)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot (-8) \cdot \frac{5}{2} = 40$$

例3　计算3阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ a+c & b & 1 \\ b+c & a & 1 \end{vmatrix}$.

解　将第2列加到第1列后,由性质3、性质2的推论可知

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ a+c & b & 1 \\ b+c & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+c+b & b & 1 \\ b+c+a & a & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例4　计算4阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

解法1　将第1行乘以(-1)加到2,3,4行后,再将第2,3,4列全加到第1列可得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4+x)x^3;$$

解法 2　**将第** 2, 3, 4 **行全加到第** 1 **行, 提出** $(4+x)$ **后, 再将第** 1 **行乘以** (-1)**加到** 2, 3, 4 **行得**

$$|A| = \begin{vmatrix} 4+x & 4+x & 4+x & 4+x \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (4+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (4+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4+x)x^3$$

解法 3　**将第** 1 **列拆成两列, 记** $D_4 = |A|$, **用性质** 4 **可得**

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1+x & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1+x & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + xD_3 = x^3 + xD_3$$

即

$$D_4 = xD_3 + x^3 = x[x^2 + xD_2] + x^3 = x^2 D_2 + 2x^3 = x^2[x + xD_1] + 2x^3$$
$$= x^3 D_1 + 3x^3 = x^3(4+x)$$

例 5　**证明奇数阶反对称矩阵的行列式必为零** .

证　**设** A **是** n **阶反对称矩阵**, n **是奇数, 则由** $A^{\mathrm{T}} = -A$, **得** $|A^{\mathrm{T}}| = |-A|$, **又由性质** 1 **知**, $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$, **再由性质** 3 **的推论** 3 **知**, $|-A| = (-1)^n|A|$, **即得**

$$|A| = (-1)^n |A|$$

而 n 是奇数,故必有 $|A| = -|A|$,即 $|A| = 0$.

性质 5　对于 n 阶行列式 $|A|$,若 $i \neq k$,则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

若 $j \neq k$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$$

证　这里只证第一个等式 .如果令第 k 行的元素等于另外一行,譬如说,等于第 i 行元素,也就是

$$a_{kj} = a_{ij}, \quad (j = 1, \cdots n, \ k \neq i) .$$

于是按第 k 行展开,有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{array}{c}\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|\end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\ k\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

而等号右端的行列式含有两个相同的行,应该为零,于是性质得证 .这就是说,在行列式中,一行(或列)的元素与另一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和为零 .于是可将上节定义 1、本节性质 5 的结果统一成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} |A| & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} |A| & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \tag{2.3.2}$$

例 6　已知 4 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

试求 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ (其中的 A_{4j} ($j = 1, \cdots, 4$)是元素 a_{4j} 的代数余子式) .

解　由性质 5 可知

$$1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\3&2&7&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

性质 6　设 L **是有如下分块形式的**$(n+p)$**阶矩阵**:

$$L=\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&&&\\\cdots&&\cdots&&O&\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1n}&b_{11}&\cdots&b_{1p}\\\cdots&&\cdots&\cdots&&\cdots\\c_{p1}&\cdots&c_{pn}&b_{p1}&\cdots&b_{pp}\end{bmatrix}$$

则有

$$|L|=|A|\cdot|B|\ .\qquad(2.3.3)$$

证　对$|A|$**作变换** $r_{ij}(k)$,**把**$|A|$**化为下三角行列式,设为**

$$|A|=\begin{vmatrix}u_{11}&&\\\cdots&\ddots&\\u_{n1}&\cdots&u_{nn}\end{vmatrix}=u_{11}\cdots u_{nn}$$

对$|B|$**作变换** $c_{ij}(k)$,**把**$|B|$**化为下三角行列式,设为**

$$|B|=\begin{vmatrix}v_{11}&&\\\cdots&\ddots&\\v_{p1}&\cdots&v_{pp}\end{vmatrix}=v_{11}\cdots v_{pp}$$

于是,对$|L|$**的前** n **行作变换** $r_{ij}(k)$,**再对后** p **列作变换** $c_{ij}(k)$,**就把**$|L|$**化为下三角行列式**

$$|L|=\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_{11}&&&&&\\\cdots&\ddots&&&&\\u_{n1}&\cdots&u_{nn}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1n}&v_{11}&&\\\cdots&&\cdots&\cdots&\ddots&\\c_{p1}&\cdots&c_{pn}&v_{p1}&\cdots&v_{pp}\end{vmatrix}$$

故

$$|L|=u_{11}\cdots u_{nn}\cdot v_{11}\cdots v_{pp}=|A|\cdot|B|$$

由性质 1 知,当 A、B **是方阵时,当然也成立**

$$|U|=\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|\qquad(2.3.4)$$

推论 若 A、B 是同阶方阵,则有

$$|AB| = |A| \cdot |B| \tag{2.3.5}$$

例 7 计算 4 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

解 由 $|A|^2 = |A| \cdot |A| = |A| \cdot |A^T| = |AA^T|$,及

$$AA^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

(其中,$s = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$),即得

$$|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

故而 $|A| = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$,但由行列式的展开定义可知行列式中含有 a^4 项,故

$$|A| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

2.4 行列式的计算举例

在行列式的计算中,除了有时可用行列式的展开定义外,一般情况下必须借助于上节的行列式的性质及其推论,简化后得到解决 .

例 1 计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$$ (未列出的元素全为零)

解法 1 将第 n 行乘以 $(-a)$ 加到第 1 行后再对换第 1,第 n 行得

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & & & 1-a^2 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & & & a \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1-a^2 \end{vmatrix} = -a^{n-2}(1-a^2) = a^{n-2}(a^2-1)$$

解法 2　按第 1 行展开得

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} & & & \\ a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2-1)$$

解法 3　将第 n 行依次换到第 2 行，再将第 n 列依次换到第 2 列，得

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix} = (a^2-1)a^{n-2}$$

解法 3 的方法称作计算行列式的“分块法”.

例 2　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解法 1　按第 1 行展开得

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

故

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1$$

即

$$D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 1 + 1 = D_1 + (n-1) = n+1$$

解法 2 将第 1 列拆成两个分列,用加法性质得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} + D_{n-1} = D_{n-1} + 1 = \cdots = D_1 + n - 1 = n+1$$

上述方法常称作计算行列式的“递推法”.

例 3 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \qquad (2.4.1)$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

证 用数学归纳法.因为

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

所以当 $n=2$ 时命题成立.现在假设(2.4.1)式对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立,要证对 n 阶行列式也成立.

为此,设法把 V_n 降价;从第 n 行开始,后一行减去前一行的 x_1 倍,有

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开,并把每列的公因子$(x_i - x_1)$提出,就有

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式,按归纳假设,它等于所有$(x_i - x_j)$因子的乘积,其中 $2 \leq j < i \leq n$.故

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\leq j<i\leq n}(x_i - x_j) = \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)$$

例 4　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & (a-1) & \cdots & (a-n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解　将 D_{n+1} 的第 $n+1$ 行与第 1 行交换,第 n 行与第 2 行交换,…;同时,将 D_{n+1} 的第 $n+1$ 列与第 1 列交换,第 n 列与第 2 列交换,…,再由范德蒙德行列式可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = n!(n-1)!\cdots 2! = \prod_{1\leq j<i\leq n+1}(i-j).$$

例 5　求下列方程的根

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

解　由性质 1 及(2.4.1)式知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 4 & x^2 \\ 1 & -1 & 8 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-1)(2-1)(2+1)(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

于是,得

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

2.5 行列式的应用

2.5.1 逆矩阵公式

有了行列式的定义后,可以更清楚地了解方阵的一些特性.可逆阵及其逆矩阵是矩阵理论中的重要概念,利用行列式可以给出判别可逆阵的一个简单条件,并给出逆矩阵的一个计算公式.

定理 1 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

即 $A^* = [A_{ij}]^{\mathrm{T}}_{n\times n}$,称为矩阵 A 的伴随矩阵(或记作 adj$A$)成立

$$AA^* = A^* A = |A| I \tag{2.5.1}$$

证 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$,记 $AA^* = [b_{ij}]_{n\times n}$,则由式(2.3.1)知

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases}$$

即有 $AA^* = |A| I$.

同理由式(2.3.2)可得 $A^* A = |A| I$.结论得证.

推论 当$|A| \neq 0$ 时,有$|A^*| = |A|^{n-1}$.

证 由 $AA^* = |A| I$,两边取行列式得

$$|A| \cdot |A^*| = |AA^*| = ||A| I| = |A|^n \cdot |I| = |A|^n$$

则两边同除以$|A|$,即得

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

事实上,$|A| = 0$ 时,也有$|A^*| = |A|^{n-1}$(以后证明).

由定理 1 及逆矩阵的定义可得 A^{-1} 的表达式.

定理 2 A 是可逆矩阵的充分必要条件是$|A| \neq 0$,且此时有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \tag{2.5.2}$$

证 必要性 因为 A 可逆,即存在 A^{-1},使 $AA^{-1} = I$ 成立,故$|A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$,所以$|A| \neq 0$.由此可顺便推出

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

充分性 由式(2.5.1),即 $AA^* = A^*A = |A|I$ 知,当 $|A| \neq 0$ 时,可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$$

由逆矩阵的定义,即知(2.5.2)式是成立的,即

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

同时可得

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

当 $|A| \neq 0$ 时,我们称矩阵 A 为非奇异矩阵或非退化矩阵;若 $|A| = 0$,则称其为奇异矩阵或退化矩阵.显然,可逆矩阵就是非奇异矩阵.

利用(2.5.2)式,可以通过伴随矩阵及行列式的值求出逆矩阵.

例 1 求方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵及 A^* 的逆矩阵.

解 由 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$,知 A 可逆.再计算

$$A_{11} = (-1)^{1+1}4 = 4,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-3) = 3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1$$

得

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

且

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

例 2 设 A 是 3 阶矩阵,且 $|A| = 3$,试求 $\left|(3A)^{-1} - |A^{-1}|A^*\right|$.

解 由 $|A| = 3$ 知 $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$,又由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$,知 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$,于是,有

$$\left|(3A)^{-1}-|A^{-1}|A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-\frac{1}{3}A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-\frac{1}{3}|A|A^{-1}\right|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{3}-1\right)A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|A^{-1}|=-\frac{8}{81}$$

2.5.2 克拉默法则

现在我们来讨论 $n\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{2.5.3}$$

解的公式.

对 $i=1,2,\cdots,n$,在第 i 个方程两边乘以代数余子式 A_{ik},然后相加,得

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1k}+a_{21}A_{2k}+\cdots+a_{n1}A_{nk})x_1+\cdots+\\&(a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk})x_k+\cdots+\\&(a_{1n}A_{1k}+a_{2n}A_{2k}+\cdots+a_{nn}A_{nk})x_n\\&=b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

由(2.3.2)式可知,上式中对 $j\neq k$ 的 x_j,其系数为

$$(a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk})=0,$$

而 x_k 的系数即为系数行列式 $|A|$(按第 k 行的展开式)(记作 D),而(2.5.4)式的右端可写成

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&b_1&\cdots&a_{1n}\\\cdots&&\cdots&&\cdots\\a_{k1}&\cdots&b_k&\cdots&a_{kn}\\\cdots&&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&\cdots&b_n&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

这是在系数行列式 $|A|$ 中,用方程组的常数项列代换第 k 列的结果,记作 D_k,于是(2.5.4)式可写成

$$Dx_k=D_k$$

让 k 取遍 $1,2,\cdots,n$,则得

$$\begin{cases}Dx_1=D_1\\Dx_2=D_2\\\quad\cdots\\Dx_n=D_n\end{cases}$$

故知,通称为克拉默法则的以下定理是成立的.

定理 3 对 $n\times n$ 线性方程组 $A_{n\times n}x_n = b$(以下简记作 $Ax = b$),当系数行列式 $D\neq 0$ 时,有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ \cdots \\ x_n = \dfrac{D_n}{D} \end{cases} \tag{2.5.5}$$

定理 4 的逆否定理为:

“如果线性方程组(2.5.3)无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.”

称常数项全为零的线性方程组 $Ax = 0$ 为齐次线性方程组.从定理 3 可以得到关于 $n\times n$ 齐次线性方程组的两个明显结论.

推论 1 对于 $n\times n$ 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

当系数行列式 $|A|\neq 0$ 时,只有一个零解(未知数全取零的解)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \cdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

称零解为齐次线性方程组的平凡解,而称 x_i 不全为零的那种解为非零解或非平凡解.

推论 2 若 $n\times n$ 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

有非零解,则必有

$$|A| = 0$$

推论 2 说明系数行列式 $|A| = 0$ 是齐次线性方程组有非零解的必要条件.在第三章中还将证明这个条件也是充分的.

例 3 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (-2-\lambda)x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (-2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解,问 λ 应取何值?

解 由推论 2 可知,若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式 $D=0$.故由

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 4 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & -6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda-14)=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+7)=0$$

得

$$\lambda=2 \text{ 或 } \lambda=-7$$

例 4 解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3=1\\ x_1+bx_2+b^2x_3=1\\ x_1+cx_2+c^2x_3=1\end{cases}$$

其中 a, b, c 互不相等 .

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$$

由克拉默法则知方程组有唯一解,且

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=D;\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & b^2\\ 1 & 1 & c^2\end{vmatrix}=0;\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=0$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=0$$

2.6 本章小结

2.6.1 内容框图

$\rightarrowtail$ 行列式的定义 $\longrightarrow$

行列式的性质 $\longrightarrow$ 行列式的计算 $\longrightarrow$ 行列式的应用

2.6.2 基本要求

(1) 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.
(2) 了解 n 阶行列式的定义.
(3) 知道行列式的性质.
(4) 掌握行列式的计算方法.
(5) 掌握克莱姆法则.

2.6.3 内容概要

1) 行列式的定义

一阶行列式 $|A| = |a_{11}| = a_{11}$, 设 $n-1$ 阶行列式已经定义, 则 n 阶行列式定义为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

其中 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

注 1 一阶行列式 $|-5| = -5$.

注 2 行列式是方阵 A 对应的一个数, 用 $|A|$ 记, 不同阶行列式可能相同, 如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

但不同阶矩阵必不相同.

2) 特殊行列式的值

(1) 上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) **下三角行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) **对角行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \cdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(5)
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(6)
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(7) **范德蒙德行列式**:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

其中$\prod$为连乘积的符号 .

3) **行列式的性质**

(1) **方阵 A 的行列式与其转置的行列式相同,即**

$$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$$

注　所有对列成立的行列式性质,对行也成立 .

(2) **互换行列式中两列(或行)的位置,行列式变号 .**

推论　如果行列式的两列(或行)相同,则行列式为零 .

(3) **某数 λ 乘行列式,等于用数 λ 乘它的某一列(或行)的所有元素,即**

$$\lambda|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n| = |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_i, \cdots, \alpha_n| \qquad (*)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维的列向量 .

注　在(*)式的右端,数 λ 只能乘某一列(或行),其余列(或行)不变 .

推论 1　数 λ 乘方阵 A 的行列式等于 λ^n 乘 A 的行列式,即

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

推论 2　如果行列式的一列(或行)为零,则行列式为零 .

推论 3　如果行列式的两列(或行)对应成比例,则行列式为零 .

(4) **A 的行列式中某一列(或行)可分成两个向量之和,则 A 的行列式等于分别由这两个列(或行)向量取代 $|A|$ 中这一列(或行)构成行列式之和,即**

$$\begin{aligned}&|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k + \beta_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n|\\ = &|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n| .\end{aligned} \qquad (**)$$

注　式(* *)称为行列式的加法性质 .

推论　将行列式的某一列(或行)的任意 λ 倍加到另一列(或行)上去,行列式不变 .

(5) **对于方阵 A 的行列式,有**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(6) **设 A、B 为 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, A^{-1} 为 A 的逆矩阵,有**

① $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;　② $|AB| = |A||B|$;　③ $|A^*| = |A|^{n-1}$

(7) **设 A 为 n 阶方阵, B 为 m 阶方阵,有**

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

注 1　数乘 λA 的结果为用数 λ 乘 A 的每一个元素,而 $\lambda|A|$ 的结果为用数 λ 乘 A 的某一行或某一列的行列式值 .如 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$,应为

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

注 2　$A+B$ 为同维矩阵对应元素相加而成 .但式子 $|A| + |B| = |A+B|$ 一般不成立 .例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}$$

而不是

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

注 3　性质 4 的推论是计算行列式的有效工具,即若 $A \overset{r_{ij}(k)}{\sim} B$,则 $|A| = |B|$.其中 $|B|$ 中的第 i 行仍为 $|A|$ 中的第 i 行, $|B|$ 中的第 j 行为 $|A|$ 中的第 j 行加上 $|A|$ 中的第 i 行的 k 倍 .如

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_{21}(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} \text{ 而不是 } \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

几次运算一起做时应注意次序,如

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_{21}(-1)]{r_{12}(-1)} \begin{vmatrix} 4 & -17 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} \text{ 而不是 } \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_{12}(-1)]{r_{21}(-1)} \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 4 & 19 \end{vmatrix} .$$

4) **行列式的计算**

(1) 利用行列式的定义计算 .

(2) 利用行列式的性质直接计算 .

(3) 利用行列式的性质化为上(下)三角行列式计算 .

(4) 利用递推法计算 .

(5) 利用范德蒙德行列式计算 .

注　计算行列式一般是利用行列式的性质,化原行列式为特殊行列式计算,或由递推公式计算 .

5) **行列式的应用**

(1) n 阶方阵 A 为可逆阵的充分必要条件是 $|A| \neq 0$,此时,有逆阵公式

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \qquad (***)$$

其中 $A^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}$ 为 A 的伴随阵, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式 .

注 1 (* * *)**式由公式** $AA^* = A^* A = |A| I$ **导出,其具有一定的理论价值**.

注 2 $(A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$.

(2) **克莱姆**(Gramer)**法则**

对于线性代数方程组 $Ax = b$, **当** $|A| \neq 0$ **时,方程组有唯一解** $x_i = \dfrac{D_i}{|A|}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, **其中** D_i **为用右端列** b **取代** A **的第** i **列所得的行列式**.

特别,当 $|A| \neq 0$ **时**, $Ax = 0$ **只有零解;要使得** $n \times n$ **齐次线性方程组** $Ax = 0$ **有非零解,必须** $|A| = 0$.

习 题 二

A 组

1．利用对角线法则计算下列二、三阶行列式．

(1) $\begin{vmatrix} 2a & a+b \\ a+b & 2b \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$．

2．求方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 4 & 10 & x+6 \end{vmatrix}=0$ 的根．

3．利用行列式的展开定义计算下列各行列式．

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$．

4．证明下列各题．

(1) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ acd & b & b^2 & b^3 \\ abd & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ (其中 $abcd\neq0$)．

5．计算下列行列式．

(1) $D_4=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$; (2) $D_5=\begin{vmatrix}a & 0 & a & 0 & a\\ b & 0 & c & 0 & d\\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2\\ 0 & ab & 0 & bc & 0\\ 0 & cd & 0 & da & 0\end{vmatrix}$.

6 . **计算下列 n 阶行列式** .

(1) $D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}$; (2) $D_n=\begin{vmatrix}x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & y\\ y & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix}2 & 2 & \cdots & 2 & n\\ 2 & 2 & \cdots & n & 2\\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots\\ 2 & n & \cdots & 2 & 2\\ n & 2 & \cdots & 2 & 2\end{vmatrix}$.

7 . **若有自然数** k,**使成立** $A^k=O$,**则称** A **是幂零阵** .**试证**:

(1) **幂零阵必是不可逆矩阵**;

(2) $I-A$ **必可逆**,**且有**

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

8 . **已知** $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$,**试求伴随矩阵** A^* .

9 . **设** α_i **为四阶行列式的第** i **列**, $i=1,2,3,4$ **若已知行列式** $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=m$,**求行列式** $|\alpha_2,-2\alpha_4,3\alpha_1,-\alpha_3|$.

10 . A **为** n **阶矩阵**, $A^{\mathrm{T}}A=I$,**且** $|A|<0$,**证明**: $|I+A|=0$.

11 . **用克拉默法则求解下列线性方程组** .

(1) $\begin{cases}2x+3y=1\\ x+2y=2\end{cases}$; (2) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=1\\ 2x_1-3x_2+x_3=10\\ x_1+4x_2-2x_3=-8\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}4x_1+x_2=5\\ x_1+4x_2+x_3=4\\ x_2+4x_3+x_4=-2\\ x_3+4x_4=3\end{cases}$.

12．试求一个 2 次多项式 $f(x)$，满足 $f(1)=1$，$f(-1)=9$，$f(2)=3$．

13．问 λ、μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

B 组

1．计算下列三阶行列式．

(1) $D_3=\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$； (2) $D_3=\begin{vmatrix} -ab & bd & bf\\ ac & -cd & cf\\ ae & de & -ef\end{vmatrix}$．

2．计算下列行列式．

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$； (2) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b\\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a\end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-1 & n & \cdots & n & n & n\\ n & n & \cdots & n & n & n\end{vmatrix}$．

3．证明下列各题．

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$．

4．**已知** A **为** 3 **阶方阵，且** $|A| = \dfrac{1}{3}$，**求** $\left|\left(\dfrac{1}{7}A\right)^{-1} - 12A^{*}\right|$ **的值**．

5．**设** $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，$B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$ **均为** 4 **阶方阵，而且** $\alpha_i = \beta_i\ (i = 1, 2, 3)$，$\alpha_4 = 7\beta_4$，$|A + B| = 64$，**求** $|A|$ **的值**．

6．**用数学归纳法证明**：
$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha .$$

自测题二

一、填空题

1．如果 5 阶行列式 D_5 中每一列上的 5 个元素之和等于零，则 $D_5 =$ ________．

2．$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ ________．

3．若 $a_i \neq 0,(i=1,2,3,4)$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ ________．

4．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A| = 3$，则 $|A^{T}A| =$ ________，$|2A^{-1}| =$ ________，
$\left| |A| A^{*} \right| =$ ________，$|(A^{*})^{*}| =$ ________，$|3A^{-1} - 2A^{*}| =$ ________．

5．设方阵 $A = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，且 $|A| = 2$，$|B| = -7$，则行列式 $|A+B| =$ ________．

6．已知 4 阶行列式 D 中第二行上的元素分别为 $-1,0,2,4$，第四行上的元素的余子式分别为 $5,10,a,4$，则 a 的值为________．

7．$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ ________．

8．齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k =$ ________．

9．设 $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，则 $f(A) =$ ________．

二、选择题

1．A、B 是 n 阶方阵，则下列运算中，正确的是(　　)．

(A) $|-A| = -|A|$；　　(B) $|A+B| = |A| + |B|$；

(C) $|kA| = k|A|$;　　(D) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

2．设 A 为 n 阶方阵，若 A 经过若干次初等变换变成矩阵 B，则成立(　　)．

(A) $|A| = |B|$;　　(B) 若 $|A| = 0$，则必有 $|B| = 0$;

(C) $|A| \neq |B|$;　　(D) 若 $|A| > 0$，则必有 $|B| > 0$.

3．设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A^*| = a \neq 0$，则 $|A|$ 等于(　　)．

(A) a;　　(B) $\dfrac{1}{a}$;　　(C) $a^{\frac{1}{n-1}}$;　　(D) $a^{\frac{1}{n}}$.

4．设 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，则 $|A| =$ (　　)．

(A) $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1|$;　　(B) $|-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3|$;

(C) $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1|$;　　(D) $|\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3|$.

5．$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & & \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & & & \\ & -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ & & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$ 的值为(　　)．

(A) 1;　　(B) 0;　　(C) a_n;　　(D) $a_1 a_2 \cdots a_n$.

三、计算下列行列式的值

1．$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & k & l \end{vmatrix}$;　　2．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

3．$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;　　4．$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & & & & \\ 2 & 7 & 5 & & & \\ & 2 & 7 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 7 & 5 \\ & & & & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

四、证明以下各恒等式

1. $\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} = 0;$

2. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0 .$

五、求下列方程的根

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

六、用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = c \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = d \end{cases}$$

自测题二答案

一、填空题

1．$D_5=0$ （**将其余各列全加到第 1 列即可**）．

2．$(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$ （**将第 4 行先后与第 3 行、第 2 行交换，再将第 4 列先后与第 3 列、第 2 列交换，得**

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(-1)^2(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}\text{)}.$$

3．$\left(a_1-\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}\right)a_2a_3a_4$ （**将 2，3，4 列分别乘以**$\left(-\dfrac{1}{a_2}\right)$、$\left(-\dfrac{1}{a_3}\right)$、$\left(-\dfrac{1}{a_4}\right)$**后加到第 1 列即可**）．

4．$|A^{\mathrm{T}}A|=|A^{\mathrm{T}}|\cdot|A|=|A|^2=9$；$|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=2^3|A|^{-1}=\dfrac{8}{3}$；

$||A|A^*|=|A|^3\cdot|A^*|=27\cdot|A|^{3-1}=243$；

$|(A^*)^*|=|A^*|^{3-1}=\left(|A|^{3-1}\right)^2=81$；

$|3A^{-1}-2A^*|=\left|3\dfrac{A^*}{|A|}-2A^*\right|=|(-1)A^*|=(-1)^3|A^*|=-9$．

5．$|A+B|=-20$ （$|A+B|=\begin{vmatrix} x_1+y_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ x_2+y_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ x_3+y_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} x_1+y_1 & b_1 & c_1 \\ x_2+y_2 & b_2 & c_2 \\ x_3+y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$=4\left[|A|+|B|\right]=4(2+(-7))=-20$）．

6．$\dfrac{21}{2}$ （**利用第 2 行的元素与第 4 行元素的代数余子式的乘积等于零，即**

$(-1)(-1)^{4+1}5+0+2(-1)^{4+3}a+4(-1)^{4+4}4=0$，**即得** $a=\dfrac{21}{2}$）．

7．$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=-14$．

8．$k=1$ **或** $k=-2$ （**利用克拉默法则的逆否定理**）．

9．$-6I$ （$f(x)=(x-1)^2$，$f(A)=(A-I)^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^2=-6I$）．

二、选择题

1．D;

2．B （对 A 作初等变换，等价于在 A 的左边乘上一些初等行矩阵，在 A 的右边乘上一些初等列矩阵，简写成 $RAC=B$，若 $|B|\neq 0$，即 B 可逆，于是由 $A=R^{-1}BC^{-1}$ 知 A 可逆，而这与 $|A|=0$ 矛盾，故只能是 $|B|=0$）．

3．C （利用 $|A^*_{n\times n}|=|A|^{n-1}$）．

4．D （行列式的某列的倍数加到另一列上行列式的值不变）．

5．A （将第 1 行加到第 2 行，再将新的第 2 行加到第 3 行，…，直到将新的第 n 行加到第 $n+1$ 行，成为主对角元全为 1 的上三角行列式）．

三、

1．0 （因为 1，2 两列对应元素成比例）．

2．$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 .$$

3．$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow[r_{31}(1)]{r_{21}(1)} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(b+a+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(c+a+b) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 .$$

4．$$D_n = \begin{vmatrix} 5+2 & 5 & & & & \\ 0+2 & 7 & 5 & & & \\ & 2 & 7 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 7 & 5 \\ & & & & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
5 & 5 & & & & \\
0 & 7 & 5 & & & \\
 & 2 & 7 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 7 & 5 \\
 & & & & 2 & 7
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
2 & 5 & & & & \\
2 & 7 & 5 & & & \\
 & 2 & 7 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 7 & 5 \\
 & & & & 2 & 7
\end{vmatrix}
$$

$$
=5D_{n-1}+\begin{vmatrix}
2 & 5 & & & & \\
0 & 2 & 5 & & & \\
 & 0 & 2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 2 & 5 \\
 & & & & 0 & 2
\end{vmatrix}
=5D_{n-1}+2^{n}.
$$

即

$$
\begin{aligned}
D_n &= 5D_{n-1}+2^{n}\\
5D_{n-1} &= 5^{2}D_{n-2}+2^{n-1}\cdot 5\\
5^{2}D_{n-2} &= 5^{3}D_{n-3}+2^{n-2}\cdot 5^{2}\\
&\cdots\\
5^{n-2}D_{2} &= 5^{n-1}D_{1}+2^{2}\cdot 5^{n-2}
\end{aligned}
$$

所有等式相加,得

$$
D_n=2^{n}+2^{n-1}\cdot 5+\cdots+2^{2}\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+5^{n}
$$

四、证明以下各恒等式 .

1 . **将第** 1 **列的**(- 1)**倍分别加到第** 2, 3 **列上,即得**

$$
\text{左式}=\begin{vmatrix}
a-x & x-y & x-z\\
b-x & x-y & x-z\\
c-x & x-y & x-z
\end{vmatrix}=0=\text{右式};
$$

2 . **提示:第** 1 **列乘**(- 1)**加到第** 2**、第** 3**、第** 4 **列后,再第** 2 **列乘**(- 2)**到节第** 3 **列,第** 2 **列乘**(- 3)**到第** 4 **列,得**

$$
\begin{vmatrix}
a^{2} & (a+1)^{2} & (a+2)^{2} & (a+3)^{2}\\
b^{2} & (b+1)^{2} & (b+2)^{2} & (b+3)^{2}\\
c^{2} & (c+1)^{2} & (c+2)^{2} & (c+3)^{2}\\
d^{2} & (d+1)^{2} & (d+2)^{2} & (d+3)^{2}
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
a^{2} & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9\\
b^{2} & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9\\
c^{2} & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9\\
d^{2} & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9
\end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

五、解: **左** $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

得 $x=1$ **或** $x=2$ **或** $x=3$.

六、由克拉默法则, **及**

$D=8$, $D_1=4(a+d)$, $D_2=4(c-d)$, $D_3=4(b-c)$, $D_4=4(a-b)$, **得解为**

$$x_1=\frac{a+d}{2},\ x_2=\frac{c-d}{2},\ x_3=\frac{b-c}{2},\ x_4=\frac{a-b}{2}$$

3

矩阵的秩与线性方程组

本章从提出矩阵秩的概念开始,然后利用矩阵的秩讨论齐次线性方程组有非零解的充分必要条件和非齐次线性方程组有解的充分必要条件;并介绍用初等变换解线性方程组的方法 .

3.1 矩阵的秩

3.1.1 基本概念

定义 1 在 $m\times n$ 矩阵 A 中,任取 k 行与 k 列($k\leq m$, $k\leq n$),位于这些行列交叉处的 k^2 个元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式,称为矩阵 A 的 k 阶子式 .

定义 2 设在矩阵 A 中有一个非零的 r 阶子式 D,且所有的 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于零,那么 D 称为矩阵 A 的一个最高阶非零子式,数 r 称为矩阵 A 的秩,记作 $\operatorname{rank}(A)$,简记为 $r(A)$.并规定,零矩阵 O 的秩 $r(O)=0$.

例 1 求下列矩阵的秩

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -5\\ 2 & -4 & 8 & -10\\ 13 & 6 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

解 因为 $b_{34}=0$,所以由 $\begin{vmatrix}b_{11} & b_{14}\\ b_{31} & b_{34}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 13 & 0\end{vmatrix}\neq 0$,知 $r(B)\geq 2$;另外,因为 B 没有 4 阶子式,所以又有 $r(B)\leq 3$.还可以看出,矩阵 B 的第 1,2 行元素是对应成比例的,而 B 的任何一个 3 阶子式必然同时含有 B 的第 1,2 行的部分,即有两行元素对应成比例 .按行列式的性质知,B 的任一 3 阶子式皆等于零,故 $r(B)<3$.于是,有 $r(B)=2$.

从定义及上例的讨论过程可以看出:

(1) 当且仅当 A 是零矩阵时, $r(A)=0$;

(2) 若 A 有一个 k 阶子式不为零,则 $r(A)\geq k$;

若 A 的所有 $k+1$ 阶子式均为零,则 $r(A)\leq k$;

(3) 对任意 $m\times n$ 矩阵 A,必有

$$r(A)=r(A^{T})\tag{3.1.1}$$

(4) 若 A 是 $m\times n$ 矩阵,则必有

$$r(A)\leq\min(m,n)\tag{3.1.2}$$

特别地,若 A 是 n 阶矩阵,则 $r(A)\leq n$;当且仅当 $|A|\neq 0$ 时 $r(A)=n$.故也将行列式不为零的矩阵(即非退化阵)称为满秩阵,并称退化阵为降秩阵.

$m\times n$ 矩阵 A 共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个 k 阶子式.

显然,若按定义来求 $m\times n$ 矩阵 A 的秩,在 m、n 较大时,会很不方便.为此,我们有必要引出更好的求矩阵秩的方法.

3.1.2　矩阵秩的计算

定义 3　称满足以下两个条件的 $m\times n$ 矩阵为行阶梯形矩阵:

(1) 第$(k+1)$行的首非零元(如果有的话)前的零元个数大于第 k 行的这种零元个数$(k=1,2,\cdots,m-1)$;

(2) 如果某行没有非零元,则其下所有行的元素全是零.

若行阶梯形矩阵的非零行的首非零元均为 1,且这些首非零元 1 所在列的其它元素都是零,则称其为行最简形矩阵.

例 2　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

的秩 $r(A)$.

解　A 是一个行阶梯形矩阵,其非零行有 3 行,即知 A 的所有 4 阶子式全为零.而以三个非零行的首非零元为主对角元的 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}$$

是一个上三角行列式,它显然不等于零,因此 $r(A)=3$.

从本例可知,对于行阶梯形矩阵,它的秩就等于非零行的行数,一看便知.因

此,自然想到:① 能否用初等变换把任一矩阵变为行阶梯形矩阵?② 两个等价的矩阵的秩是否相等?下面的两个定理对这些问题作出了肯定的回答.其证明可以在认为必要时再去读.

定理 1 任一 $m\times n$ 矩阵 A 必可以通过有限次初等行变换而化成行阶梯形矩阵.

证 设给定 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$.

若 A 是零矩阵,则它已为行阶梯形矩阵.

若 A 是非零矩阵,则可自第一列开始依次寻查下去直到找到非零列为止,不妨设这是第 j 列 α_j,然后对这一列的元素,自 a_{1j} 开始依次寻查,直到找到第一个非零元为止,设这个元素是 a_{ij},这时作第一类初等行变换,把 A 的第 i 行换成第 1 行,不妨将此变换的结果仍用 A 来记,于是 $a_{1j}\neq 0$ 是 A 的第 1 行的首非零元,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 都是全零列.接着用第三类初等行变换将第 j 列除 a_{1j} 外的元素全消成零,并仍把这样得到的矩阵记作 A.

若把 A 除去第 1 行后的子矩阵记为 A_1,对 A_1 重复以上的过程,得到 A_2 等等.如此反复,或者进行了这样的过程 m 次,或者在第 k 次 $(1\leq k\leq m)$ 面临着的 A_k 已经是零子矩阵.这就将 A 变成了行阶梯形矩阵.

定理 2 若 $A\sim B$,则 $r(A)=r(B)$.

证 先证明:若 A 经一次初等行变换变为 B,则 $r(A)\leq r(B)$.

设 $r(A)=r$,且 A 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$.

当 $A\overset{r_{ij}}{\sim}B$ 或 $A\overset{r_i(k)}{\sim}B$ 时,在矩阵 B 中总能找到与 D_r 相对应的子式 $\bar{D}_r$,由于 $\bar{D}_r=D_r$ 或 $\bar{D}_r=-D_r$ 或 $\bar{D}_r=kD_r$,因此 $\bar{D}_r\neq 0$,从而 $r(B)\geq r$.

当 $A\overset{r_{ji}(k)}{\sim}B$ 时,分三种情形讨论:①D_r 中不含第 i 行; ②D_r 中同时含第 i 行和第 j 行;③D_r 中含第 i 行但不含第 j 行.对①②两种情形,显然 B 中与 D_r 对应的子式 $\bar{D}_r=D_r\neq 0$,故 $r(B)\geq r$;对情形③,由

$$\bar{D}_r=\begin{vmatrix}\cdots\\ r_i+kr_j\\ \cdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cdots\\ r_i\\ \cdots\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}\cdots\\ r_j\\ \cdots\end{vmatrix}=D_r+k\hat{D}_r$$

若 $\hat{D}_r\neq 0$,则因 $\hat{D}_r$ 中不含第 i 行知 A 中有不含第 i 行的 r 阶非零子式,从而根据情形①知 $r(B)\geq r$;若 $\hat{D}_r=0$,则 $\bar{D}_r=D_r\neq 0$,也有 $r(B)\geq r$.

以上证明了若 A 经过一次初等行变换变为 B,则 $r(A)\leq r(B)$.由于 B 经过一次初等行变换也可变为 A,故也有 $r(B)\leq r(A)$.因此,$r(A)=r(B)$.

经过一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经过有限次初等行变换矩阵的秩仍不变.

若 A 经过列初等变换变为 B，也就是 A^T 经过初等行变换变为 B^T，这样由上段可以知道 $r(A^T)=r(B^T)$，又 $r(A)=r(A^T)$，$r(B)=r(B^T)$，因此 $r(A)=r(B)$.

总之，若 A 经过初等变换变为 B(即 $A\sim B$)，则 $r(A)=r(B)$.

推论 1　设 A 是任一 $m\times n$ 矩阵，而 P、Q 分别是 m 阶、n 阶满秩阵，则必有

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ) \tag{3.1.3}$$

证　由于满秩矩阵(即可逆矩阵) P、Q 可分解成有限个初等矩阵之乘积，这样，乘积矩阵 PA(或 AQ 或 PAQ)可以看作是对 A 作有限次的初等行(或列)变换的结果，由定理 2 得知此推论成立.

可以用一句话概括这个有用的推论："用满秩矩阵去乘以一个矩阵时不改变这个矩阵的秩."

推论 2　若已知任一 $m\times n$ 矩阵 A 的标准形分解为

$$A=PNQ=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q$$

则必有 $r(A)=r$(即单位矩阵 I_r 的阶数).

证　因 P、Q 均为满秩阵，故由推论 1 知 $r(A)=r(N)$，且容易看出 $r(N)=r$，即有

$$r(A)=r$$

根据定理 1，定理 2，为求矩阵的秩，只要把矩阵用初等行变换变成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为该矩阵的秩.

例 3　设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $r(A)$.

解　对 A 作初等行变换将其变成行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{r_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{r_{13}(-2)}{\overset{r_{12}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{r_{23}(-1)}{\overset{r_2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有两个非零行，所以 $r(A)=2$.

例 4　**求** $n\times n$ **矩阵**

$$A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

的秩 .

解　**将第** 1 **行乘以**(- 1) **加到以下各行后再将第** 2, 3, …, n **列全加到第** 1 **列,得**

$$A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ & a-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{bmatrix}$$

当 $a\neq b$ **且** $a+(n-1)b\neq 0$ **时**, $r(A)=n$;

当 $a\neq b$ **且** $a+(n-1)b=0$ **时**, $r(A)=n-1$;

当 $a=b\neq 0$ **时**, $r(A)=1$;

当 $a=b=0$ **时**, $r(A)=0$.

例 5　**设矩阵** $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **求** $r(AB)$.

解法 1　**因为** $AB=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 13 \\ 0 & 6 & 2 \\ 10 & -2 & 16 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 6 & 9 & 13 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -17 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 6 & 9 & 13 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **所以** $r(AB)=2$.

解法 2　**因为** $|A|=8\neq 0$, **所以** $r(A)=3$; **而** $r(B)=2$, **于是由**(3 .1 .3) **式知**

$$r(AB)=r(B)=2$$

下两节我们利用矩阵的秩来讨论齐次线性方程组的通解和非齐次线性方程组有无解的判断以及有解时解的情况 .

3 .2　齐次线性方程组

$m\times n$ **的齐次线性方程组为**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

或写成矩阵形式

$$Ax = 0 \tag{3.2.2}$$

其中 m×n 矩阵 $A = [a_{ij}]$为方程组的系数矩阵,$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 是 n 维未知数向量,而 m 维零向量 0 是常数项向量.

因为齐次线性方程组(3 2 2)有个明显的零解 $x = 0$,称其为平凡解.于是,对于齐次线性方程组,只需研究其在何种情况下有非零解(非平凡解),以及在有非零解的条件下,怎样表示出其所有的解.

利用系数矩阵 A 的秩,可方便地讨论齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解,其结论是:

定理 1 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 有非零解的充分必要条件是其系数矩阵的秩 $r(A) < n$,且其通解式中带有 $n - r(A)$个任意参数.

证 必要性 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解,要证 $r(A) < n$.用反证法,设 $r(A) = n$,则在 A 中应有一个 n 阶非零子式 D_n,从而 D_n 所对应的 n 个方程只有零解(根据克拉默法则),这与原方程组有非零解相矛盾,因此 $r(A) = n$ 不能成立,即 $r(A) < n$.

充分性 设 $r(A) = r < n$,则 A 的行阶梯形矩阵中只含有 r 个非零行,从而知道其有 $n - r$个自由未知量.任取一个自由未知量为 1,其余自由未知量为 0,即可得方程组的一个非零解.若令这 $n - r$ 个自由未知量分别等于 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$,可得含 $n - r$ 个参数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 的解,这些参数可任意取值,因此这时方程组有无限多个解.下一章中将说明这个含 $n - r$ 个参数的解可表示出方程组的任一解,因此这个解称为齐次线性方程组的通解.

注 本定理所述条件 $r(A) < n$的必要性是克拉默法则的推广(克拉默法则只适应于$m = n$的情形),其充分性包含了克拉默法则的逆定理.

定理 1 的逆否命题即为“n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 仅有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(A) = n$.”

对于齐次线性方程组,只需把它的系数矩阵化成行最简形矩阵,便能写出它的通解.

例 1 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解　对系数矩阵 A 施行初等行变换变为行最简形矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \underset{r_{13}(-1)}{\overset{r_{12}(-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{r_{21}(1)}{\overset{r\left(\frac{1}{2}\right)\; r_{23}(1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$,可得通解为

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

或写成向量形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (c_1, c_2 \in \mathrm{R})$$

例 2　已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

有非平凡解,求 λ 的值.

解　齐次线性方程组有非平凡解,必有系数矩阵 A 的秩 $r(A) < 3$.而

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & -6 \\ 4 & 8 & \lambda \end{bmatrix} \underset{r_{13}(-4)}{\overset{r_{12}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 8 \end{bmatrix}$$

为了使 $r(A) < 3$,必须 $\lambda + 8 = 0$ 即 $\lambda = -8$.

由此可知当 $\lambda \neq -8$ 时,本题只有平凡解 $x = 0$.事实上,本题也可通过计算 $|A| = 0$ 得到 $\lambda = -8$.

3.3 非齐次线性方程组

一般的 $m\times n$ 非齐次线性方程组的矩阵形式为

$$Ax=b \tag{3.3.1}$$

称 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 为方程组的系数矩阵,分块形式的 $m\times(n+1)$ 矩阵 $\overline{A}=[A \mid b]$ 为方程组的增广矩阵,$x=[x_1,x_2,\cdots x_n]^{\mathrm{T}}$ 是 n 维未知数向量,$b=[b_1,b_2,\cdots b_n]^{\mathrm{T}}$ 是 m 维非零常数项向量.

与齐次线性方程组不同,非齐次线性方程组不一定有解,而有如下重要的定理:

定理 1 n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $\overline{A}=[A \mid b]$ 的秩.

证 **必要性** 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解,要证 $r(A)=r(\overline{A})$.用反证法,设 $r(A)<r(\overline{A})$,则 $\overline{A}$ 的行最简形矩阵中最后一个非零行对应矛盾方程 $0=1$,这与方程组有解相矛盾.因此 $r(A)=r(\overline{A})$.

充分性 设 $r(A)=r(\overline{A})$,要证非齐次线性方程组有解,把 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵,设 $r(A)=r(\overline{A})=r\quad(r\leq n)$,则 $\overline{A}$ 的行阶梯形矩阵中含 r 个非零行,把这 r 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由未知量,其余 $n-r$ 个作为自由未知量,并令 $n-r$ 个自由未知量全取 0,即可得方程组的一个解.

推论 对矩阵方程 $AX=B$,它有解的充分必要条件是 $r(A)=r(A \mid B)$.

事实上,由定理 1 的证明知道,当 $r(A)=r(\overline{A})=n$ 时,方程组没有自由未知量,只有唯一解.当 $r(A)=r(\overline{A})<n$ 时,方程组有 $n-r$ 个自由未知量,若令这 $n-r$ 个自由未知量分别等于 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$,可得含 $n-r$ 个参数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 的解,此即非齐次线性方程组的通解,这些参数可任意取值,因此这时方程组有无限(或无穷)多个解.于是,在实际使用时,定理 1 常写成另一种形式:

定理 1′ 对 n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有如下结论:

(1) 当 $r(A)=r(\overline{A})$ 时,方程组有解.这时,

若 $r(A)=r(\overline{A})=n$,则方程组有唯一解;

若 $r(A)=r(\overline{A})<n$,则方程组有无限多个解,且其通解式中带有 $n-r(A)$ 个任意参数.

(2) 当 $r(A)<r(\overline{A})$ 时,方程组无解.

例 1 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解 **对增广矩阵**$\overline{A}$**施行初等行变换,**

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right] \underset{r_{13}(-2)}{\overset{r_{12}(-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{r_{23}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

可见 $r(A) = 2$, $r(\overline{A}) = 3$,**故方程组无解**.

例 2 **求解非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

解 **对增广矩阵进行初等行变换,**

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{r_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_{13}(-2)}{\overset{r_{12}(-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{r_{23}(-1)}{\overset{r_{21}(2)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$,**可得通解为**

$$\begin{cases} x_1 = 5c_1 + c_2 - 1 \\ x_2 = 4c_1 - 1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

写成向量形式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (c_1, c_2 \in \mathrm{R})$$

事实上,若令 $x_1 = c_1, x_2 = c_2$,可得通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathrm{R}) .$$

这样就可看出,在方程组具有无限多个解时,其通解的形式不是唯一确定的 .但是,通解中所带参数的个数却是确定的,均等于 $n - r(A)$;而且,对非齐次线性方程组而言,其结构也是确定的 .学过下一章后,对这些说法可有更准确的理解 .

例 3　设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

问 k 取何值时,此方程组(1)有唯一解;(2) 无解;(3) 有无限多个解 .并在有无限多个解时求其通解 .

解法 1　对增广矩阵 $\overline{A} = [A \mid b]$ 作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵,有

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \underset{r_{13}(-1)}{\overset{r_{13} \atop r_{12}(1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & k-1 & 3 & k^2-4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_{23}\left(-\frac{k-1}{2}\right)}{\overset{r_{23}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{(k-4)(k+1)}{2} & k(k-4) \end{array}\right]$$

于是,

(1) 当 $k \neq 4$ 且 $k \neq -1$ 时,$r(A) = r(\overline{A}) = 3$,方程组有唯一解;

(2) 当 $k = -1$ 时,$r(A) = 2$,$r(\overline{A}) = 3$,方程组无解;

(3) 当 $k = 4$ 时,$r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$,方程组有无限多个解 .此时,

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

由此便得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$, **得通解为**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (c \in \mathbf{R})$$

解法 2 **根据方程组是“** $n\times n$ **”的特点,常利用行列式进行讨论** .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & -2 & 2-k \end{vmatrix} = (k+1)(4-k)$$

(1) **按克拉默法则,系数行列式不为零时方程组有唯一解** .**所以当** $k\neq 4$ **且** $k\neq -1$**时**, $r(A) = r(\overline{A}) = 3$,**方程组有唯一解**;

(2) **当** $k = -1$ **时,方程组成为**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

此时,

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

由最后的行阶梯形矩阵可以看出 $r(A) = 2 < r(\overline{A}) = 3$, **故方程组无解** .

(3) **当** $k = 4$ **时,方程组成为**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

此时,

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

由此便得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$,则得通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (c \in \mathbf{R})$$

注 1　本例中增广矩阵 $\overline{A}$ 是一个含参数的矩阵,由于 $(k-1)$、$(k-2)$ 等因式可以等于 0,故不宜作诸如 $r_{21}\left(-\frac{2}{k-1}\right)$ 这样的变换.如果必须作这种变换,则需对 $(k-1)=0$ 的情形另作讨论.

注 2　事实上,方程组有唯一解时可以按克拉默法则求解,也可从解法 1 中增广矩阵的行阶梯形矩阵出发,回代求解,即当 $k \neq 4$ 且 $k \neq -1$ 时,由 $-\frac{(k-4)(k+1)}{2}x_3 = k(k-4)$,得 $x_3 = -\frac{2k}{k+1}$,代入 $2x_2 + (k-2)x_3 = 8$,又得 $x_2 = \frac{k^2+2k+4}{k+1}$,再代入 $x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$,得 $x_1 = \frac{k(k+2)}{k+1}$.

例 4　已知方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$$

有无穷多个解,求 a 的值及无穷多个解时的通解.

解法 1　对增广矩阵 $\overline{A} = [A \mid b]$ 作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵,有

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right] \overset{r_{13}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{r_{13}(-a)}{\overset{r_{12}(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{array}\right]$$

$$\overset{r_{23}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 2(2+a) \end{array}\right]$$

因为原方程组有无穷多个解,故必须满足 $r(A) = r(\overline{A}) < 3$,这时必须 $a = -2$.于是

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由此便得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

令 $x_3=c$,则得通解为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad (c\in\mathbf{R})$$

解法 2　因为方程组有无穷多个解,所以由克拉默法则知其系数行列式必须为 0,即

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0$$

解得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时,

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right]$$

方程组无解,舍去.

当 $a=-2$ 时,

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\1&-2&1&1\\-2&1&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&-3&3&3\\0&3&-3&-3\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-1\end{cases}$$

令 $x_3=c$,则得通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad (c\in\mathbf{R})$$

3.4 本章小结

3.4.1 内容框图

矩阵的秩

齐次线性方程组 ⟶ 解的结构 ⟵ 非齐次线性方程组

3.4.2 基本要求

(1) 知道矩阵秩的概念,掌握矩阵秩的计算法.

(2) 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件.

(3) 理解非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

(4) 熟练掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法.

3.4.3 内容概要

1) 秩的定义

设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式,且所有的 $r+1$ 阶子式(如果有的话)全等于零,称 r 为矩阵 A 的秩,记为 $r(A)=r$.

注 若 A 有 r 阶子式非零,则 $r(A)\geq r$;若 A 的所有 $r+1$ 阶子式全为零,则 $r(A)\leq r$.

2) 秩的性质

(1) $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$; (2) $r(\lambda A)=r(A)$,其中 $\lambda\neq 0$;

(3) $r(A)=0 \quad A=O$; (4) $r(A_{m\times n})\leq\min(m,n)$;

(5) 设 A 为方阵,则 $|A|\neq 0 \quad r(A)=n$;

(6) 初等变换不改变矩阵的秩,即

$$\text{若 } A\sim B,\text{则 } r(A)=r(B)$$

(7) 矩阵乘上一个可逆阵不改变原矩阵的秩,即当 A 可逆时,有

$$r(AB)=r(B);\qquad r(BA)=r(B)$$

3) 秩的求法

(1) 用定义;

(2) 用初等变换;

(3) 用性质.

4) **齐次线性方程组**

齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$.

(1) **齐次线性方程组有解的条件**:

$x=0$ 为 $Ax=0$ 的平凡解;

当 $r(A)=n$(变量个数)时, $Ax=0$ 只有零解;

当 $r(A)<n$(变量个数)时, $Ax=0$ 有含 $n-r(A)$ 个参数的无穷多个解.

注 $Ax=0$ 有非零解 $r(A)<n$.

(2) **齐次线性方程组解的求法**:

将系数矩阵经过行初等变换化为行标准形矩阵后求解.

(3) **解的性质**:

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 为 $Ax=0$ 的解,则 $t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_k\xi_k$ 仍为 $Ax=0$ 的解,其中 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 为任意常数.

5) **非齐次线性方程组**

非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b(\neq 0)$

(1) **非齐次线性方程组有解的条件**:

当 $r(A\mid b)=r(A)=n$(变量个数)时,方程组有唯一解;

当 $r(A\mid b)=r(A)<n$(变量个数)时,方程组有含 $n-r(A)$ 个参数的无穷多个解;

当 $r(A\mid b)\neq r(A)$ 时,方程组无解.

(2) **非齐次线性方程组解的求法**:

将增广矩阵 $(A\mid b)$ 经过行初等变换化为行标准形矩阵后求解.

(3) **解的性质**:

若 ξ_1,ξ_2 为 $Ax=b$ 的解,则 $\xi_1-\xi_2$ 为其导出方程组 $Ax=0$ 的解.

注 $\dfrac{\xi_1+\xi_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的一个解,而 $\xi_1+\xi_2$ 不再是 $Ax=b$ 的解.

注 1 当 A 为 n 阶方阵时,满足

$$r(A)=n \quad |A|\neq 0 \quad A\sim I \quad A=P_1P_2\cdots P_t\text{(初等阵乘积)}$$

注 2 求解非齐次方程组 $A_{n\times n}x=b$,在 $|A|\neq 0$ 时,可用

(1) 克拉默法则;

(2) 逆矩阵法 $x=A^{-1}b$;

(3) 初等变换法 $(A\mid b)\overset{\text{行}}{\sim}(I\mid x)$.

注 3 解矩阵方程 $AX=B$ 在 A 可逆时,可用 (1) $X=A^{-1}B$; (2) $(A\mid B)\overset{\text{行}}{\sim}(I\mid X)$;

解矩阵方程 $XA=B$ 在 A 可逆时,可用

(1) $X=BA^{-1}$;

(2) $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \overset{列}{\sim} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$,**或用**$(A^{T} \mid B^{T}) \overset{行}{\sim} (I \mid (A^{T})^{-1}B^{T})$,**即**

$$X=\left[(A^{T})^{-1}B^{T}\right]^{T}=BA^{-1}$$

注 4　带参数的线性方程组解的讨论尤为重要,在初等行变换时应尽可能用数字去消参数,避免参数出现在分母上,因为参数的取值可能导致分母为零 .

习 题 三

A 组

1．在秩为 r 的矩阵中，是否一定没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式？是否一定没有等于 0 的 r 阶子式？

2．只用初等行变换把下列矩阵化成行最简形．

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$； (2) $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$； (4) $D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$．

3．确定下列矩阵的秩 r，并给出一个 r 阶非零子式．

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$； (2) $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ -5 & -4 & -6 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$．

4．已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & k & -2 \\ -2 & 2k & -2 & 4k \\ 3k & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$，问 k 为何值时，可使

(1) $r(A)=1$； (2) $r(A)=2$； (3) $r(A)=3$．

5．讨论下列齐次线性方程组是否有非平凡解(即非零解)？若有，则求出其通解．

(1) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+7x_3=0 \\ -x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_2-3x_3=0 \\ x_1-2x_2+5x_3=0 \\ -2x_1+x_3=0 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_3 = -5x_2 \\ x_1 + 4x_2 = 3x_3 \end{cases}$.

6．**求解下列非齐次线性方程组．**

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$.

7．**设** a_1、a_2、a_3 **是互不相同的常数，证明下面的方程组无解．**

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = a_1^2 \\ x_1 + a_2 x_2 = a_2^2 \\ x_1 + a_3 x_2 = a_3^2 \end{cases}$$

8．**证明：线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$，**并在有解的情况下，求出它的通解．**

9．**问 λ 取何值时方程组有唯一解、无穷多个解、无解？并在有无穷多个解时求出其通解．**

(1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} 2x_1 + (4-\lambda)x_2 + 7 = 0 \\ (2-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6 - \lambda = 0 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$.

B 组

1. 构造一个秩为 3 的方阵 A，使它的两个行向量分别是 $[1, -1, 0, 0]$、$[0, 2, -3, 0]$.

2. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{bmatrix}$的秩.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$，求 $r(A)$及 $r(A^2)$.

4. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，β是 m 维列向量，试说明 $r(A)\leq r(A \vdots \beta)\leq r(A)+1$，其中$[A \vdots \beta]$是分块矩阵.

5. 设 A 是 m 阶满秩矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，试证明

$$ABx=0 \quad 与 \quad Bx=0$$

是等价方程组 并进一步利用齐次线性方程组的有关定理，说明 $r(AB)=r(B)$.

自测题三

一、填空题

1．已知方程组$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$无解,则 $a=$__________．

2．设 A 为 4×3 矩阵,且 $r(A)=2$,又 $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$,则 $r(AB)-r(A)=$__________．

3．设方程组$\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$有无穷多个解,则 $a=$__________．

4．设 A 为 3 阶方阵,且 $r(A)=1$,又 $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & k\end{bmatrix}$,满足 $AB=O$,则 $k=$__________．

5．矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3\\ 4 & 0 & 0 & 8 & 4\\ 7 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$的秩 = __________．

二、选择题

1．设 A 为 $m\times n$ 矩阵,P、Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵,则下列非齐次方程组中与方程组 $Ax=b$ 同解的是(　　)．

(A) $PAx=Pb$;　(B) $PAx=b$;　(C) $AQx=b$;　(D) $PAQx=b$．

2．已知 A 为 $m\times n$ 矩阵,且 $r(A)=r$,则 A 中必成立(　　)．

(A) 没有等于零的 $r-1$ 阶子式,至少有一个 r 阶子式不为零;

(B) 有等于零的 $r-1$ 阶子式,没有不等于零的 $r+1$ 阶子式;

(C) 有不等于零的 r 阶子式,也有 $r-1$ 阶不等于零的子式;

(D) 任何 r 阶子式都不等于零,任何 $r+1$ 阶子式都等于零．

3．设 A 是 $m\times n$ 矩阵,$Ax=0$ 是 $Ax=b$ 的对应齐次方程组,则下列结论正确的是(　　)．

(A) 若 $Ax=0$ 仅有零解,则 $Ax=b$ 有唯一解;

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解,则 $Ax=b$ 有无穷多个解;

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解,则 $Ax=0$ 仅有零解;

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解,则 $Ax=0$ 有非零解.

4. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 当( ).

(A) $r=m$ 时有解;

(B) $r=n$ 时有唯一解;

(C) $m=n$ 时有唯一解;

(D) $r<n$ 时有无穷多个解.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$, $Ax=b$ 有解的充分必要条件为( ).

(A) $a_1=a_2=a_3=a_4$;

(B) $a_1=a_2=a_3=a_4=1$;

(C) $a_1+a_2+a_3+a_4=0$;

(D) $a_1-a_2+a_3-a_4=0$.

三、求下列矩阵的秩

1. $A=\begin{bmatrix}2&3&4&4\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\-1&0&-2&1\end{bmatrix}$;

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&2k&-2&4k\\1&-1&k&-2\\k&-1&1&-2\end{bmatrix}$,问 k 为何值时,可使

(1) $r(A)=1$; (2) $r(A)=2$; (3) $r(A)=3$.

四、证明题

1．**设** A **为** n **阶非零矩阵,证明存在一个** n **阶方阵** $B \neq O$,**使得** $AB = O \quad |A| = 0$．

2．**设** A **为** n **阶方阵,又** $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$f(0) = 0$,**试证** $r(f(A)) \leq r(A)$．

五、齐次方程组求解

1．**已知** 3 **阶非零矩阵** B **的每一列都是方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解,求 λ **的值**．

2．**设线性方程组**

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - (1+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

问 λ **为何值时,此齐次线性方程组有非零解?并在有非零解时,求其通解**．

六、非齐次方程组求解

1 . 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda\end{cases}$$

问 λ取何值时,方程组有唯一解;无解;有无穷多个解,并在有无穷多个解时求出通解 .

2 . 设非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1\\ 2x_1 + 4x_2 + (\lambda-5)x_3 = \lambda+1\\ -2x_1 + (\lambda-5)x_2 + 4x_3 = -2\end{cases}$$

问 λ为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解,并在有无穷多个解时求出其通解 .

自测题三答案

一、填空题

1．无解即 $r(A)\neq r(\overline{A})$，而 $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right]\sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a+1)(a-3)&a-3\end{array}\right]$，故只能有

$a=-1$．

2．因 $|B|\neq0$，知 B 是可逆阵，而可逆阵与任何矩阵相乘，不改变该矩阵的秩，所以 $r(AB)-r(A)=0$．

3．有无穷多个解，即 $r(A)=r(\overline{A})<3$，而 $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&-2\end{array}\right]\sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&1-a&1-a^2&2a+1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&0&(1-a)(2+a)&2(a+2)\end{array}\right]$，故只能有 $a=-2$．

4．显然 $|B|=0$，否则一方面有 $r(AB)=r(A)=1$，另一方面 $r(AB)=r(O)=0$，矛盾，解 $|B|=0$，即得 $k=1$．

5．4．

二、选择题

1．A　（$Ax=b$ 两边左乘 P 即得）．

2．C　（矩阵秩的定义）．

3．D　（根据非齐次线性方程组与其对应齐次方程组解的关系）．

4．A　（$Ax=b$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(A\,\vdots\,b)$）．

5．D　（$Ax=b$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(A\,\vdots\,b)$，而

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&a_3\\1&0&0&1&a_4\end{array}\right]\underset{r_{34}(-1)}{\overset{r_{12}(-1)\\ r_{23}(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&a_1\\-1&0&1&0&a_2-a_1\\1&0&0&1&a_3-a_2+a_1\\0&0&0&0&a_4-a_3+a_2-a_1\end{array}\right]$$

故必有 $\alpha_4-\alpha_3+\alpha_2-\alpha_1=0$,即 $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0$).

三、

1. $r(A)=2$(利用初等行变换将 A 化成行阶梯形即可).

2. $$B\underset{r_2\left(\frac{1}{2}\right)}{\overset{r_{12}}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & -1 & k & -2\\ -1 & k & -1 & 2k\\ k & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & k & -2\\ 0 & k-1 & k-1 & 2(k-1)\\ 0 & k-1 & 1-k^2 & 2(k-1)\end{bmatrix}\overset{r_{23}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & k & -2\\ 0 & k-1 & k-1 & 2(k-1)\\ 0 & 0 & (2+k)(1-k) & 0\end{bmatrix}$$

所以,当 $k=1$ 时,$r(A)=1$;当 $k=-2$ 时 $r(A)=2$;当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 时,$r(A)=3$.

四、

1. "　" 依题意,B 的每一列(至少有一个非零列)均为 $Ax=0$ 的解,即 $Ax=0$ 有非零解,故而 $|A|=0$;

"　" $|A|=0$,即 $r(A)<n$,亦即 $Ax=0$ 有非零解,以 n 个非零解构成 B 即可.

2. 由 $f(0)=0$,知 $a_0=0$,所以 $f(A)=A(a_1I+a_2A+\cdots+a_nA^{n-1})=AB$,于是

$$r(f(A))=r(AB)\leq\min(r(A),r(B))\leq r(A)$$

五、

1. 依题意,B 的每个列向量(至少有一个非零列)均为方程组的解,即方程组有非零解,故系数行列式 $D=0$,即

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

解之即得 $\lambda=1$.

2. 齐次方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零,所以,由

$$0=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -3 & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{r_{23}(3)}\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 6-3\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{c_{32}(-3)}\begin{vmatrix}3-\lambda & -4 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -4\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6+4)=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$.

①当 $\lambda=-1$ 时，$A=\begin{bmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-3&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-9&-3\\0&9&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$，故通解为

$$x=c\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix},(c\in\mathrm{R})$$

②当 $\lambda=2$ 时，$A\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，故通解为

$$x=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},(c_1,c_2\in\mathrm{R})$$

六、

1．解 $\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda+3)\lambda^2$，所以，

①当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程有唯一解；

②当 $\lambda=0$ 时，$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$，由 $r(A)\neq r(\overline{A})$ 知方程组无解．

③当 $\lambda=-3$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&3&-3&-6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

由 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$，知方程组有无穷多个解，且解为 $\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=-2+x_3\end{cases}$，

令 $x_3=c$，则通解为

$$x=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},(c\in\mathrm{R})$$

2．**类似于题 1，由系数行列式**

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 4 & \lambda-5\\ -2 & \lambda-5 & 4\end{vmatrix}\xrightarrow{r_{32}(1)}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ -2 & \lambda-5 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & \lambda-5 & 4\end{vmatrix}\xrightarrow{c_{23}(-1)}(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & \lambda-5 & 9-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -2 & 9-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)$$

可得

①**当** $\lambda\neq1$ **且** $\lambda\neq10$ **时，有唯一解；**

②**当** $\lambda=10$ **时，无解；**

③**当** $\lambda=1$ **时，有无穷多个解，且通解为**

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},(c_1,c_2\in\mathrm{R})$$

4 向量空间

向量空间的理论起源于对线性方程组解的研究.本章讨论向量组的线性相关性,并利用矩阵的秩研究向量组的秩和最大无关组,在此基础上建立向量空间的概念,并讨论向量空间中的基变换和坐标变换.最后利用向量组与向量空间的理论,研究线性方程组解的结构.

4.1 向量组的线性相关与线性无关

一些同维数的列向量(或行向量)所组成的集合叫做向量组.例如一个 $m\times n$ 维矩阵 $A=[a_{ij}]$,它有 n 个 m 维列向量

$$\alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ (j=1,2,\cdots,n)$$

它们组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为矩阵 A 的列向量组.

$m\times n$ 矩阵 A 又有 m 个 n 维行向量

$$\beta_i^T=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}],\ (i=1,2,\cdots,m)$$

它们组成的向量组 $\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$ 称为矩阵 A 的行向量组.

反之,由有限个向量所组成的向量组也可以构成一个矩阵:

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}$$

我们常把 m 个方程 n 个未知数的线性方程组写成矩阵形式 $Ax=b$,从而方程组可以与它的增广矩阵 $\overline{A}=[A\mid b]$ 一一对应.这种对应若看成一个方程对应一个($\overline{A}$中的)行向量,则方程组与增广矩阵 $\overline{A}$ 的行向量组对应.但若把方程组写

成向量形式

$$Ax=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$$

则可见方程组与$\overline{A}$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$之间也有着对应的关系.

4.1.1 基本概念

定义1 给定向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,及任意$m$个实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,称向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

为向量组(Ⅰ)的一个线性组合,$k_1,k_2,\cdots,k_m$称为这个线性组合的系数.

又对给定向量b,若存在一组数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使$b=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$,则称向量$b$能由向量组(Ⅰ)线性表示(或线性表出).

例如$b=[2,-1,1]^T$,$\alpha_1=[1,0,0]^T$,$\alpha_2=[0,1,0]^T$,$\alpha_3=[0,0,1]^T$,显然有$b=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$,即$b$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合,或者说$b$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

一般地,对任意一个n维向量$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$及单位向量组$e_1=[1,0,\cdots,0]^T$,$e_2=[0,1,\cdots,0]^T$,$\cdots$,$e_n=[0,0,\cdots,1]^T$,必有$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$,故$\alpha$是$e_1,e_2,\cdots,e_n$的线性组合.

例1 设$\beta=\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix}$,$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$,$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$,$\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$,问$\beta$可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?

解 β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示即可找到数$x_1,x_2,x_3$,使

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta \tag{*}$$

成立,也即

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\beta$$

若令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,$x=[x_1,x_2,x_3]^T$,则问题化为方程组$Ax=\beta$是否有解.现

$$\overline{A}=[A \mid \beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&9&5\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&9&5\\0&-6&-12&-9\\0&10&20&15\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&9&5\\0&2&4&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

得 $r(A)=r(\overline{A})=2$.

所以 $Ax=\beta$ 也即(*)式有解,即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 .

可见,一个向量可否由一组向量线性表示可转化为非齐次线性方程组是否有解的问题 .

事实上,由定义知向量 b 能由向量组(Ⅰ)线性表示,即方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=b$$

有解,亦即线性方程组 $A_{n\times m}x=b$ 有解 .由 3 .3 节中定理 1,立刻得

定理 1 向量 b 可以由向量组(Ⅰ): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$ 的秩等于 $\overline{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \mid b]$ 的秩 .

例 2 已知三个向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\-1\end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix}-5\\6\\-5\\9\end{bmatrix}$$

证明向量 b_1 可由向量组 α_1,α_2 线性表示,并写出表示式 .

证 由定义 1,即要证存在一个 2 维列向量 $[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}$,使 $[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=b_1$ 成立 .类似于线性方程组求解的方法,对增广矩阵 $[\alpha_1,\alpha_2 \mid b_1]$ 施行初等行变换变为行最简形矩阵:

$$[\alpha_1,\alpha_2 \mid b_1]=\left[\begin{array}{cc|c}2&3&-5\\0&-2&6\\-1&1&-5\\3&-1&9\end{array}\right]\overset{\substack{r_{13}\\r_{13}(2)}}{\underset{r_{14}(3)}{\sim}}\left[\begin{array}{cc|c}-1&1&-5\\0&-2&6\\0&5&-15\\0&2&-6\end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{r_2\left(-\frac{1}{2}\right)\\r_{23}(-5)}}{\underset{r_{24}(-2)}{\sim}}\left[\begin{array}{cc|c}-1&1&-5\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]\overset{r_{21}(-1)}{\underset{r_1(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

即得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

亦即 $b_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2$.当然向量 b_1 可由向量组 α_1,α_2 线性表示.

定义 2 设有两个向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及(Ⅱ):$b_1,b_2,\cdots,b_s$,若(Ⅱ)组中的每一个向量都能由向量组(Ⅰ)线性表示,则称向量组(Ⅱ)能由向量组(Ⅰ)线性表示.若向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)能相互线性表示,则称这两个向量组等价.

定义 3 给定向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \tag{4.1.1}$$

则称向量组(Ⅰ)是线性相关的;相反,当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时才成立式(4.1.1),则称向量组(Ⅰ)是线性无关的.

例如向量组 $e_1 = [1,0,0]^T,e_2 = [0,1,0]^T,e_3 = [0,0,1]^T$ 是线性无关的,向量组 $e_1,e_2,e_3,\alpha = [a_1,a_2,a_3]^T$ 是线性相关的,因为

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = [k_1,k_2,k_3]^T = 0$$

所以

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

故 e_1,e_2,e_3 线性无关;而 $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 - \alpha = 0$,故 e_1,e_2,e_3,α 线性相关.

从定义可见,对于单个向量,当且仅当它为零向量时是线性相关的.对于两个向量 α_1,α_2 构成的向量组,它线性相关的充分必要条件是 α_1,α_2 的分量对应成比例,其几何意义是两向量共线.3 个向量线性相关的几何意义是三向量共面.

例 3 判断向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\\3\end{bmatrix},\alpha_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\alpha_3 = \begin{bmatrix}4\\-1\\5\\5\end{bmatrix}$ 的线性相关性.

解 据定义,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性相关也即能否找到不全为零的数 x_1,x_2,x_3,使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \tag{*}$$

成立,也即

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

令 $A = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],x = [x_1,x_2,x_3]^T$.则问题化为方程组 $Ax = 0$ 是否有非零解.现

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}2&0&4\\-1&1&-1\\3&-1&5\\3&-1&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&2&2\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $r(A)=2<3$.

所以 $Ax=0$ 即(*)式有非零解,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.可见,判断一组向量是否线性相关可转化为判断一齐次线性方程组有无非零解的问题.

向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$,向量组(Ⅰ)线性相关,就是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0,\text{即 } Ax=0$$

有非零解.由3.2节定理1,即可得

定理2 向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是由它所构成的矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$ 的秩小于向量个数 m;向量组线性无关的充分必要条件是 $r(A)=m$.

推论 m 个 m 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m|=0$;$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m|\neq 0$.

例4 给定向量组 $\alpha_1=[2,-1,7]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,4,11]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[3,-6,3]^{\mathrm{T}}$,试讨论它的线性相关性.

解法1 利用定理2,构造 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,利用初等行变换将其变为行阶梯形矩阵,有

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&4&-6\\7&11&3\end{bmatrix}\overset{\substack{r_{12}\\r_{12}(2)}}{\underset{r_{13}(7)}{\sim}}\begin{bmatrix}-1&4&-6\\0&9&-9\\0&39&-39\end{bmatrix}\overset{r_1(-1)}{\underset{r_2\left(\frac{1}{9}\right)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-4&6\\0&1&-1\\0&39&-39\end{bmatrix}\overset{r_{21}(4)}{\underset{r_{23}(-39)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

因为 $r(A)=2<3$(向量个数),所以向量组线性相关.若要具体找出一组不全为零的 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,可解齐次线性方程组 $Ak=0$,得同解方程组

$$\begin{cases}k_1+2k_3=0\\k_2-k_3=0\end{cases}$$

如令 $k_3=1$,则得 $k_1=-2,k_2=1$,于是有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=-2\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$$

解法2 由

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & -9 \\ -1 & 4 & -6 \\ 0 & 39 & -39 \end{vmatrix} = 0$$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

另外,从式(4.1.2)中可以看出,矩阵$[\alpha_1,\alpha_2]$的秩为 2,故向量组 α_1,α_2 线性无关.

例 5　设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$,问 t 取何值时,向量组线性无关;t 又取何值时,向量组线性相关?

解　由定理 2 的推论,有

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = 2t-3$$

所以,当 $2t-3\neq 0$ 即 $t\neq \dfrac{3}{2}$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;当 $2t-3=0$ 即 $t=\dfrac{3}{2}$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

以上的讨论,显示了向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解及矩阵秩三者之间的联系.

例 6　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,而

$$b_1 = \alpha_1+\alpha_2,\ b_2 = \alpha_1-\alpha_2,\ b_3 = \alpha_3+\alpha_4,\ b_4 = \alpha_3-\alpha_4$$

试证明向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 亦线性无关.

证法 1　从定义出发,考察

$$k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3+k_4b_4 = 0 \tag{4.1.3}$$

由于

$$\begin{aligned} & k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3+k_4b_4 \\ = & k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_3-\alpha_4) \\ = & (k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+(k_3+k_4)\alpha_3+(k_3-k_4)\alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,故 $k_1+k_2 = k_1-k_2 = k_3+k_4 = k_3-k_4 = 0$,解出

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

结合式(4.1.3),由定义可知 b_1,b_2,b_3,b_4 线性无关.

证法 2　利用 n 维向量的特点,以矩阵方法来解决更为简捷.

用分块乘法,可将已知的线性表示关系合成一个矩阵等式为

$$[b_1, b_2, b_3, b_4] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

记矩阵 $B = [b_1, b_2, b_3, b_4]$, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $C = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$,因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,故 $r(A) = 4$;因为 $|C| = 4 \neq 0$,即 C 满秩,所以 $r(C) = 4$;这时由 3.1 节的定理 2 的推论 1 知 $r(B) = r(AC) = r(A) = 4$,由定理 2 得 b_1, b_2, b_3, b_4 线性无关.

4.1.2 向量组的线性相关性质

本节讨论向量组的线性相关、线性无关的一些有用性质.

性质 1 任何含有零向量的向量组必线性相关.

由定义立刻证得.

性质 2 任何 m 个 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$,当 $m > n$ 时,此向量组必线性相关.

证 将 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 拼成一个 $n \times m$ 矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$,显然 $r(A) \leq \min(n, m) = n < m$,由定理 2 知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

性质 3 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \cdots, \alpha_n$ 必线性相关.

证 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,由定义可知存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$,这时,$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \cdots + 0\alpha_n = 0$,其系数也不全为零,由此知道 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 也线性相关.

性质 3 的逆否命题为:若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关.

性质 4 设 $\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}]^{\mathrm{T}}$, $\beta_j = [a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}, a_{r+1,j}]^{\mathrm{T}}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$.若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,则"拉长"后的向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 也线性无关.

证 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$, $B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m]$,显然有 $r(A) \leq r(B)$,而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,故 $r(A) = m$,此时有 $r(B) \geq r(A) = m$;而 B 只有 m 个列,故 $r(B) \leq m$;所以 $r(B) = m$,即 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关.

性质 4 的逆否命题为:若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关,则"截短"后的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.

例 7 讨论向量组 $\alpha_1=[1,0,0,3,1]^T$,$\alpha_2=[0,1,0,1,-1]^T$,$\alpha_3=[0,0,1,-3,1]^T$ 的线性相关性.

解法 1 从定义出发,考察 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,即

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 3k_1+k_2-3k_3 \\ k_1-k_2+k_3 \end{bmatrix}=0$$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$,知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

解法 2 由

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $r(A)=3$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

解法 3 对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别删去第 4、第 5 个分量后成为向量组 e_1,e_2,e_3,由于行列式 $|e_1,e_2,e_3|=1\neq0$,知 e_1,e_2,e_3 线性无关,由性质 4 知"拉长"后的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关.

解法 4 增加两个向量 $\alpha_4=[0,0,0,1,0]^T$,$\alpha_5=[0,0,0,0,1]^T$,则因为

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关,由性质 3 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关.

4.1.3 线性表示、线性相关、线性无关之间的关系

本节用定理形式给出线性表示、线性相关、线性无关之间的关系.

定理 3 向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geq2)$线性相关的充分必要条件是其中

至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证 充分性 若向量组(Ⅰ)中有某个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示,不妨设 α_s 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m$ 线性表示,即有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1},\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_m$ 使得 $\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}+\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m$ 成立,于是

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}+(-1)\alpha_s+\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1},(-1),\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_m$ 这 m 个数不全为零(至少 $-1\neq 0$),所以向量组(Ⅰ)线性相关.

必要性 若向量组(Ⅰ)线性相关,则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

因为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,不妨设 $k_s\neq 0$,于是有

$$\alpha_s=-\frac{1}{k_s}(k_1\alpha_1+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}+k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_m\alpha_m)$$

即 α_s 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

值得注意的是,向量组(I)线性相关,并不能得出(I)中任一向量均可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.例如 $\alpha_1=[0,0]^T$,$\alpha_2=[1,-2]^T$,显然,有 $3\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2=0$,即 α_1,α_2 线性相关,但只有 $\alpha_1=0\cdot\alpha_2$,而 α_2 无论如何不能由 α_1 线性表示.

定理 3 的逆否命题为:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任一个 α_i 都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

定理 4 向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,向量组(Ⅱ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b$ 线性相关的充分必要条件是向量 b 能由向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,且表示式唯一.

证 记矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$,矩阵 $B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b]$,则有 $r(A)\leq r(B)$.

必要性 因为向量组(Ⅰ)线性无关,由定理 2 知 $r(A)=m$;又因为向量组(Ⅱ)线性相关,有 $r(B)<m+1$.所以 $m=r(A)\leq r(B)<m+1$,即 $r(B)=m$.

由 $r(A)=r(B)=m$,根据 3.3 节定理 1 知方程组

$$Ax=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]x=b$$

有唯一解,即向量 b 能由向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,且表示式唯一.

充分性 因为向量 b 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 唯一线性表示,由 3.3 节定理 1 知 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]x=b$ 有唯一解,即 $r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b]=r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]=m$,由定理 2 知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b$ 线性相关.

例 8 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,问(1) α_1 可否由 α_2,α_3 线性表示?为什么?(2) α_4 是否可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?为什么?

解 (1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,由性质 3 知 α_2,

α_3 线性无关,而已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,由定理 4 知 α_1 可由 α_2,α_3 唯一线性表示.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.若不然,α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,由(1)知 α_1 可由 α_2,α_3 线性表示,所以 α_4 可由 α_2,α_3 线性表示,由定理 3 知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,这与 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关矛盾,所以 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

4.2 向量组的秩

上节的定理 2 显示,在讨论向量组的线性相关性时,矩阵的秩起了十分重要的作用.下面把秩的概念引进到向量组中.

定义 1 设有向量组(Ⅰ),如果在(Ⅰ)中能选出 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,满足

(1) 向量组(Ⅰ_0):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组(Ⅰ)中任意 $r+1$ 个向量(如果(Ⅰ)中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,那么称向量组(Ⅰ_0)是向量组(Ⅰ)的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组或极大无关组).最大无关组中所含向量个数 r 称为向量组(Ⅰ)的秩.

只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为零.

例 1 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}$,求 A 的列向量组与行向量组的最大无关组及秩.

解 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}\beta_1^{T}\\\beta_2^{T}\\\beta_3^{T}\end{bmatrix}$,则由于

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $r(A)=2<3$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

同样,由于$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=A^{T}$,所以

$$r[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=r(A^{T})=r(A)=2<3$$

所以 $\beta_1^{T},\beta_2^{T},\beta_3^{T}$ 线性相关.

又显然 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}$线性无关;$\beta_1^{T}=[1,0,2]$,$\beta_2^{T}=[1,2,4]$线性无关,

所以 α_1, α_2 与 β_1^T, β_2^T 分别是 A 的列向量组与行向量组的最大无关组,从而这两个向量组的秩均为 2 .由例 1 可见, A 的行、列向量组的秩与 A 的秩相等,这一结论对任一矩阵均成立 .

定理 1 矩阵的秩既等于它的列向量组的秩(即矩阵的列秩),也等于它的行向量组的秩(即矩阵的行秩) .

向量组的最大无关组一般不是唯一的 .例如上节例 4

$$[a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

由 $r[a_1, a_2] = 2$,知 a_1, a_2 线性无关;由 $r[a_1, a_2, a_3] = 2$ 知 a_1, a_2, a_3 线性相关,因此 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组 .

此外,由 $r[a_1, a_3] = 2$ 及 $r[a_2, a_3] = 2$ 可知 a_1, a_3 和 a_2, a_3 都是向量组 a_1, a_2, a_3 的最大无关组 .

由定义 1 可知,向量组的最大无关组具有如下性质:

性质 1 向量组的最大无关组和向量组本身等价 .

性质 2 向量组的任两个最大无关组等价 .

对给定的一个向量组,如何求出它的一个最大无关组,并把不属于最大无关组的其它向量用这个最大无关组线性表示呢 ?

由于向量组的秩与矩阵有着密切的关系,所以我们将通过矩阵与齐次线性方程组的解之间的联系来回答以上问题 .

记

$$[a_1, \cdots, a_n] = A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \cdots \\ \alpha_m^T \end{bmatrix}, \quad [b_1, \cdots, b_n] = B = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}$$

如果矩阵 A 经过初等行变换变为 B,即 $A \overset{r}{\sim} B$,则 A 的行向量组 $\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T$ 与 B 的行向量组 $\beta_1^T, \cdots, \beta_m^T$ 等价,从而齐次方程 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解,即

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 \text{ 与 } x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n = 0$$

同解,于是知列向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 与 $b_1, \cdots, b_n$ 有相同的线性相关性 .

如果矩阵 B 是矩阵 A 的行最简形,则从矩阵 B 容易看出向量组 $b_1, \cdots, b_n$ 的最大无关组,并可看出 b_i 列用最大无关组线性表示的表示式 .由于 $a_1, \cdots, a_n$ 与 $b_1, \cdots, b_n$ 有相同的线性相关性,因此对应可得向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 的最大无关组及 a_i 列用最大无关组线性表示的表示式 .

由此,提供了一种求给定向量组的一个最大无关组的方法.

例 2　已知向量组 $\alpha_1=[1,-2,5,-3]^T$, $\alpha_2=[4,-1,-2,3]^T$, $\alpha_3=[5,4,-19,15]^T$, $\alpha_4=[-10,-1,16,-15]^T$,求这个向量组的一个最大无关组,并把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

解　用给出的 4 个向量为列构作矩阵

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & -10\\ -2 & -1 & 4 & -1\\ 5 & -2 & -19 & 16\\ -3 & 3 & 15 & -15\end{bmatrix}$$

对矩阵 A 仅施行初等行变换将其变为行阶梯形矩阵 B

$$A\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & -10\\ 0 & 7 & 14 & -21\\ 0 & -22 & -44 & 66\\ 0 & 15 & 30 & -45\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & -10\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

知 $r(A)=r(B)=2$,故列向量组的秩为 2,即列向量组的最大无关组含 2 个向量.而两个非零行的首非零元在 1、2 两列,故 b_1,b_2 为矩阵 B 的列向量组的最大无关组,而矩阵 A、B 的列向量组具有相同的线性相关性,所以 α_1,α_2 即为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组.

且显然有,

$$\alpha_3=-3\alpha_1+2\alpha_2,\quad \alpha_4=2\alpha_1-3\alpha_2$$

定理 2　设向量组(Ⅰ)能由向量组(Ⅱ)线性表示,则向量组(Ⅰ)的秩不大于向量组(Ⅱ)的秩.

证　设向量组(Ⅰ)的秩为 s,它有一个极大无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$;向量组(Ⅱ)的秩为 t,它有一个极大无关组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,要证 $s\leq t$.由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 能由向量组(Ⅰ)线性表示,向量组(Ⅰ)能由向量组(Ⅱ)线性表示,向量组(Ⅱ)能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示,即

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\overset{c}{\sim}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\mid 0,\cdots,0]$$

则 $r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]=t$,而显然

$$r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\mid\alpha_1,\cdots,\alpha_s]\geq r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=s$$

所以,$s\leq t$

由定理 2 立刻得到

推论 1　等价的向量组的秩相等.

证 设向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)的秩分别为 s、r,因两个向量组等价,即两个向量组相互线性表示,故 $r\leq s$ 与 $s\leq r$ 同时成立,所以 $s=r$.

这个推论也给向量组的秩的意义提供了保证.因为同一个向量组的不同最大无关组均通过与原向量组等价而相互等价,因此虽然最大无关组可以有多个,但它们的秩却相等.

虽然向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价必等秩,但反之等秩未必等价.例如 $\alpha=[1,0]^T$ 与 $\beta=[0,1]^T$ 等秩,但不等价.

推论 2 (最大无关组的等价定义)

设向量组(Ⅱ)是向量组(Ⅰ)的部分组,若向量组(Ⅱ)线性无关,且向量组(Ⅰ)能由向量组(Ⅱ)线性表示,则向量组(Ⅱ)是向量组(Ⅰ)的一个最大无关组.

证 设向量组(Ⅱ)含有 r 个向量,则它的秩为 r.因向量组(Ⅰ)能由向量组(Ⅱ)线性表示,故(Ⅰ)组的秩 $\leq r$,从而(Ⅰ)组中任意 $r+1$ 个向量线性相关,所以向量组(Ⅱ)满足定义 1 所规定的最大无关组的条件.

推论 3 向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,且(Ⅰ)中向量个数大于(Ⅱ)中向量个数,则向量组(Ⅰ)必线性相关.

利用矩阵秩的两种解释,可以说明在矩阵的代数运算中,矩阵的秩保持以下定理所述的关系.

定理 3 若 A、B 是两个任意的 $m\times n$ 矩阵,k 是不等于零的常数,则

$$r(kA)=r(A) \tag{4.2.1}$$

$$r(A+B)\leq r(A)+r(B) \tag{4.2.2}$$

若 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times p$ 矩阵,则有

$$r(AB)\leq \min(r(A),r(B)) \tag{4.2.3}$$

以及

$$r(A)+r(B)-n\leq r(AB) \tag{4.2.4}$$

证 略.

例 3 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-3I=O$,试证 $r(A-3I)+r(A+I)=n$.

证 因为 $A^2-2A-3I=O$ 即 $(A-3I)(A+I)=O$,由式(4.2.1)(4.2.2)(4.2.4)可知

$$n=r(4I)\leq r(3I-A)+r(A+I)=r(A-3I)+r(A+I)\leq n+r[(A-3I)(A+I)]=n$$

所以 $r(A-3I)+r(A+I)=n$ 成立.

例 4 已知两个向量组 $\alpha_1=[1,1,0,0]^T$,$\alpha_2=[1,0,1,1]^T$ 以及 $\beta_1=[0,1,-1,-1]^T$,$\beta_2=[2,-1,3,3]^T$,$\beta_3=[2,0,2,2]^T$,证明向量组 α_1,α_2 与向量组

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价 .

证法 1 因为 β_1, β_2 线性无关,而 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$ 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关,故向量组 β_1, β_2 为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 一个最大无关组,即 β_1, β_2 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价 .

对增广矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即知 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$,故 β_1, β_2 可由 α_1, α_2 线性表示,其矩阵形式为

$$[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,故 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 可逆,即

$$[\alpha_1, \alpha_2] = [\beta_1, \beta_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

于是,α_1, α_2 可由 β_1, β_2 线性表示,说明 α_1, α_2 与 β_1, β_2 等价,即 α_1, α_2 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价 .

证法 2 若记 $A = [\alpha_1, \alpha_2]$, $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$,由两向量组等价即互相线性表示,知问题转化为方程 $AX = B$ 及 $BY = A$ 同时有解,由 3. 3 节定理 1 的推论,知 $AX = B$ 及 $BY = A$ 有解的充要条件是 $r(A) = r(A \mid B)$ 及 $r(B) = r(B \mid A)$,亦即 $r(A) = r(B) = r(A \mid B)$.现由

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $r(A)=r(B)=r(A\,\vdots\,B)=2$,故有 α_1,α_2 与 β_1,β_2,β_3 等价.

4.3 向量空间

4.3.1 基本概念

定义 1 设 V 为 n 维向量的非空集合,且集合 V 对于加法及数乘两种运算(又称为线性运算)封闭,那么就称集合 V 为向量空间.

所谓封闭,是指在集合 V 中进行加法和数乘两种运算后的向量仍在 V 中.具体地说,就是:若 $a\in V$, $b\in V$,则 $a+b\in V$;若 $a\in V$, $\lambda\in\mathrm{R}$,则 $\lambda a\in V$.

例 1 三维向量的全体 R^3,就是一个向量空间.因为任意两个 3 维向量之和仍然是 3 维向量,数 λ 乘 3 维向量也仍然是 3 维向量,它们都属于 R^3.我们可以用有向线段形象地表示 3 维向量,从而向量空间 R^3 可形象地看作以坐标原点为起点的有向线段的全体.

类似地,n 维向量的全体 R^n,也是一个向量空间.

例 2 集合

$$V=\{x=[0,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathrm{R}\}$$

是一个向量空间.因为若 $a=[0,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\in V$, $b=[0,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\in V$,则

$$a+b=[0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}\in V,\quad \lambda a=[0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n]^{\mathrm{T}}\in V$$

集合

$$V=\{x=[1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathrm{R}\}$$

不是向量空间.因为若 $a=[1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\in V$, $b=[1,b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\in V$,则

$$a+b=[2,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]\notin V$$

例 3 设 α、β 是两个已知的 n 维向量,则集合

$$V=\{x=\lambda\alpha+\mu\beta\mid\lambda,\mu\in\mathrm{R}\}$$

是一个向量空间.因为若 $x_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta$, $x_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta$,则有

$$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\mu_1+\mu_2)\beta\in V$$

$$kx_1=(k\lambda_1)\alpha+(k\mu_1)\beta\in V$$

这个向量空间称为由向量 α、β 所生成的向量空间.

一般地,由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所生成的向量空间为

$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathrm{R}\}\qquad(4.3.1)$$

记作 $\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

定义 2 设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1 \subset V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间．

例如任何由 n 维向量所组成的向量空间 V，总有 $V \subset R^n$，所以这样的向量空间总是 R^n 的子空间．

4.3.2 向量空间的基和维

定义 3 给定向量空间 V 的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，若满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量 α 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，即有数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使成立

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r \tag{4.3.2}$$

那么，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 就称为向量空间 V 的一个基，其中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 称为基向量，而称式(4.3.2)中的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为向量 α 在这个基下的坐标，称基向量的个数 r 为向量空间 V 的维数，用 $\dim V = r$ 记，并称 V 为 r 维向量空间．

如果向量空间 V 没有基，那么 V 的维数为 0，这时，向量空间 V 只含一个零向量．

例 4 已知向量组 $e_1 = [1, 0]^T$，$e_2 = [0, 1]^T$ 和向量组 $\alpha_1 = [1, 1]^T$，$\alpha_2 = [1, 0]^T$ 以及向量 $\alpha = [4, 3]^T$．(1) 试证 e_1, e_2 为 R^2 的一个基；α_1, α_2 也为 R^2 的一个基；(2) 分别求 α 在基 e_1, e_2 和 α_1, α_2 下的坐标．

解 (1) 因为 e_1, e_2 不对应成比例，所以 e_1, e_2 线性无关，而任一向量 $v \in R^2$，由 4.1 节的性质 2 知 e_1, e_2, v 线性相关，再由 4.1 节的定理 4 可知 v 可由 e_1, e_2 线性表示，满足定义 3 的条件，故 e_1, e_2 为 R^2 的一个基．同理可证 α_1, α_2 也是 R^2 的一个基．

(2) 由 $\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4e_1 + 3e_2$ 知 α 在基 e_1, e_2 下的坐标为 $[4, 3]^T$；

由 $\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\alpha_1 + \alpha_2$ 知 α 在基 α_1, α_2 下的坐标为 $[3, 1]^T$．

从以上讨论可知向量空间 R^2 的基可以不唯一，但每个基的基向量个数(即向量空间的维数)是唯一确定的；同一向量在不同基下的坐标一般是不同的．

若将向量空间看作向量集(组)，则比较 4.2 节中定理 2 的推论 2 和 4.3 节的定义 3 可知，V 的基就是向量组的最大无关组，V 的维数就是向量组的秩．

显然，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 所生成的向量空间

$$V = \{ x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathrm{R} \}$$

与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价,所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的最大无关组就是 V 的一个基,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩就是 V 的维数.

由此可知,对向量空间 V,只要找到 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$($V$ 中的维数个线性无关的向量),即有

$$V=\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$

这就较清楚地显示出了向量空间 V 的构造.

4.3.3 基变换与坐标变换

事实上,由向量组的任两个最大无关组等价知向量空间的任两个基等价.

定义 4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维向量空间 V 的两个基,且满足

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P \tag{4.3.3}$$

其中 P 为 n 阶可逆阵,称式(4.3.3)为基变换公式,称 P 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵,且 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$.

定理 1 设 n 维向量空间 V 中元素 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm T}$, $y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm T}$,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 P,则有坐标变换公式

$$x=Py \text{ 或 } y=P^{-1}x$$

成立.

证 因为 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]x=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]y$,所以

$$x=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]y=Py$$

或 $y=P^{-1}x$ 成立.

例 5 已知两个三维向量组 $\alpha_1=[1,1,1]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[1,1,0]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[1,0,0]^{\mathrm T}$,以及 $\beta_1=[6,5,3]^{\mathrm T}$, $\beta_2=[2,2,1]^{\mathrm T}$, $\beta_3=[1,1,1]^{\mathrm T}$.(1) 试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 以及 β_1,β_2,β_3 均为 R^3 的基;(2) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P;(3) 若 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为$[2,-1,3]$,求 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解 (1) 因为 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq0$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,又 R^3 为三维向量空间,故 3 个线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基.

同理 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}6&2&1\\5&2&1\\3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&0\\2&1&0\\3&1&1\end{vmatrix}=1\neq0$,故 β_1,β_2,β_3 也是 R^3 的

一个基.

(2) 由$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P$知$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$,因

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\text{则}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix},\text{故}$$

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&1\\5&2&1\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(3) 因为 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]y$,所以

$$y=P^{-1}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-7\\0\end{bmatrix}$$

4.4 线性方程组解的结构

在3.2节中,我们已经介绍了用矩阵的初等变换解线性方程组的方法,并建立了两个重要定理,即

(1) n元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有无穷多个解的充分必要条件是其系数矩阵的秩$r(A)<n$,且无穷多个解的通解式中含 $n-r(A)$个任意参数.

(2) n元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩,且当 $r(A)=r(\overline{A})=n$ 时,方程组有唯一解;当 $r(A)=r(\overline{A})<n$时,方程组有无穷多个解,且其通解式中带有 $n-r(A)$个任意参数.

下面我们用向量组线性相关的理论来讨论线性方程组的解,尤其是线性方程组有无穷多个解的时候其解的结构.先讨论齐次线性方程组.

4.4.1 齐次线性方程组解的结构

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{4.4.1}$$

或写成矩阵形式

$$Ax = 0 \tag{4.4.2}$$

其中 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 为方程组的系数矩阵, $x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 是 n 维未知数向量,而 m 维零向量 0 是常数项向量.

我们先来看一个例子.

例 1 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&3&4&-2\\1&1&0&2\end{bmatrix}$,求齐次方程 $Ax=0$ 的通解.

解 将 A 通过初等行变换化为行最简形

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&3&4&-2\\1&1&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&1&2&-2\\0&-1&-2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&4\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=c_1$, $x_4=c_2$,则通解

$$x=c_1\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-4\\2\\0\\1\end{bmatrix}, (c_1, c_2\in\mathrm{R})$$

令 $\alpha_1=[2,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=[-4,2,0,1]^{\mathrm{T}}$,则解集为 $\mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2)$.

由上例可得齐次线性方程组有如下性质:

性质 1 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 为 $Ax=0$ 的解,则 $c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_t\xi_t$ 仍为 $Ax=0$ 的解,其中 $c_1, c_2, \cdots, c_t$ 为任意常数.

证 因为 $A(c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_t\xi_t)=c_1A\xi_1+c_2A\xi_2+\cdots+c_tA\xi_t=0$,所以 $c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_t\xi_t$ 为 $Ax=0$ 的解.

由此性质知道,对齐次方程组 $Ax=0$ 的任意两个解 x、y, $x+y$ 和 λx 仍为此齐次方程组的解.即 $Ax=0$ 的解集 $N(A)$ 为向量空间,称它为齐次方程组(4.4.2)的解空间.

由向量空间的构造知道,我们只要找到 $N(A)$ 的一个基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$,即可得齐次方程组的解空间 $N(A)=\{x \mid x=c_1\xi_1+\cdots+c_t\xi_t, c_1, c_2, \cdots, c_t\in\mathrm{R}\}$.

定理 1 设齐次方程组 $Ax=0$ 有 n 个未知量,且 $r(A)=r<n$,则 $Ax=0$ 的解空间维数 $\dim N(A)=n-r$.

证 略.

齐次方程组解空间的基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 又称为基础解系,它满足(1) 解向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关;(2) 任一 $Ax=0$ 的解可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示.

齐次方程(4.4.1)的解可以表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 为任意实数.上式称为方程组(4.4.1)的通解.此时,解空间可表示为

$$N(A) = \{x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} \mid k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathrm{R}\} = \mathrm{span}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}) \tag{4.4.3}$$

回顾本节的例 1 可得 $r(A) = 2$, $n = 4$,只要找到 $n - r(A) = 2$ 个线性无关的解即可.

令 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$; 令 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$,故 $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为此齐次方程组的基础解系,所以通解

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathrm{R})$$

若令 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; 令 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.故 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 也为此齐次方程组的基础解系,所以通解为

$$x = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathrm{R})$$

显然,基础解系可以不同,但维数 $n - r(A)$ 一定相等,生成的解空间也一样.

4.4.2 非齐次线性方程组解的结构

一般的 $m \times n$ 的非齐次线性方程组的矩阵形式为

$$Ax = b \tag{4.4.4}$$

称与之具有相同系数矩阵的方程组 $Ax = 0$ 为其对应(导出)的齐次线性方程组.

方程组 $Ax = b$ 具有如下性质:

性质 2 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为 $Ax = b$ 的解,令 $\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_t\eta_t$,当

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 0$$

时,η 为 $Ax = 0$ 的解;当

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 1$$

时,η 为 $Ax = b$ 的解.

证 因为 $A\eta = A(c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_t\eta_t) = c_1A\eta_1 + c_2A\eta_2 + \cdots + c_tA\eta_t$

$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_t)b$$

所以当 $c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 0$ 时,$A\eta = 0$;当 $c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 1$ 时,$A\eta = b$.

特别当 η_1, η_2 为 $Ax = b$ 的解,则 $\eta_1 - \eta_2$ 为 $Ax = 0$ 的解,$\dfrac{\eta_1 + \eta_2}{2}$ 为 $Ax = b$ 的解.

性质 3 设 ξ 为 $Ax = 0$ 的解,η 为 $Ax = b$ 的解,则 $x = \xi + \eta$ 仍为 $Ax = b$ 的解.

证 因为 $Ax = A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b$,所以 $x = \xi + \eta$ 为 $Ax = b$ 的解.

性质 3 告诉我们任一非齐次方程组的解可表示成它的某一个解与其对应的齐次线性方程组的一个解之和的形式.当 $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次方程组的通解时,非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的任一解可表示为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta, (c_1, c_2, \cdots, c_{n-r} \in \mathbf{R})$$

称此解为非齐次线性方程组的通解.

由于非齐次线性方程组的解集对于加法和数乘不封闭,故不是向量空间,所以只能记非齐次线性方程组的解集为 $\{x \mid x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta, c_1, c_2, \cdots, c_{n-r} \in \mathbf{R}\}$,其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系,η 为 $Ax = b$ 的一个特解.解的结构为

$$x_g = x_h + x_p$$

其中 x_g 为 $Ax = b$ 的通解,x_h 为 $Ax = 0$ 的通解,x_p 为 $Ax = b$ 的一个特解.

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$,求 $Ax = b$ 的通解.

解　本节例 1 已求出 $Ax=0$ 的通解

$$x_h = c_1\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-4\\2\\0\\1\end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

对比 A 的第 2 列及 b 知 $Ax=b$ 有一个特解 $x_p=[0,1,0,0]^{\mathrm{T}}$, 由解的结构知 $Ax=b$ 的通解

$$x_g = x_h + x_p = c_1\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-4\\2\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

注　由于对应本例的齐次线性方程组的通解已求出及非齐次线性方程组的特解容易看出,否则仍需使用第三章的初等变换法求解.

下面的例子必须用解的结构才能得以解决.

例 3　已知非齐次线性方程组的系数矩阵之秩为 3, 又已知该方程组有三个解向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 其中 $\alpha_1=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2+\alpha_3=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$, 试求该方程组的通解.

解　设方程组的系数矩阵为 A, 按所给条件知该非齐次线性方程组是 4 元方程组, 且其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有

$$\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$$

故若求得 $N(A)$ 的一个基向量, 以及非齐次线性方程组的某个解 x_p, 即可写出 $Ax=b$ 的通解. 明显地, 可取 $x_p=\alpha_1$. 同样, 可验证 $\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1$ 必满足对应的齐次线性方程组. 现因

$$\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{bmatrix} \neq 0$$

故它即可作为 $N(A)$ 的一个基向量, 从而可写出所讨论的非齐次线性方程组的通解为

$$x = \alpha_1 + c(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{bmatrix}, (c \in \mathbf{R})$$

由例 3 可知, 线性方程组解的结构在系数矩阵或增广矩阵未知时, 将突显出其作

用.

4.5 向量的内积

4.5.1 向量的内积

定义1 设有 n 维向量 $x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, $y=[y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$,称

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

为向量 x 与 y 的内积.

内积是向量的一种运算,若用矩阵记号表示,当 x 与 y 都是列向量时,有

$$\langle x, y\rangle = x^T y$$

内积具有下列性质(其中 x, y, z 为 n 维向量,λ 为实数):

(1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = y^T x$;

(2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

(3) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

定义2 令 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的长度(或范数).

称满足 $\|\alpha\|=1$ 的 n 维向量 α 为单位向量;对 n 维非零向量 α,称向量 $\alpha^0 = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为 α 的规范化向量,这个过程称作向量的规范化(或单位化).

向量的长度具有下述性质:

(1) 非负性 当 $x\neq 0$ 时,$\|x\|>0$;当且仅当 $x=0$ 时,$\|x\|=0$;

(2) 齐次性 $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$;

(3) 三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

向量的内积满足

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

上式称为施瓦茨不等式.

当 $\langle x, y\rangle = 0$ 时,称 x 与 y 正交或垂直,记作 $x\perp y$.显然,若向量 $x=0$,则 x 与任何向量都正交.

例1 给定 R^4 中的两个向量

$$x=[4, 1, 2, 3]^T, y=[-2, 3, 1, 4]^T$$

问向量 x, y 是否正交?并将向量 x, y 规范化.

解 可算出

$$\langle x, y\rangle = x^{\mathrm{T}} y = -8+3+2+12=9$$

所以 x 与 y 不正交.而

$$\|x\| = \sqrt{16+1+4+9} = \sqrt{30}, \quad \|y\| = \sqrt{4+9+1+16} = \sqrt{30}$$

规范化得

$$x^0 = \frac{x}{\|x\|} = \left[\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$y^0 = \frac{y}{\|y\|} = \left[-\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}\right]^{\mathrm{T}}$$

例 2 证明 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$.

证 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量.接下来通过证明方程组 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 是同解方程组来证明这个结论.

若 x 满足 $Ax=0$,则有两边左乘 A^{T} 得 $A^{\mathrm{T}}(Ax)=0$,即$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$;

若 x 满足 $(A^{\mathrm{T}}A)x=0$,则有两边左乘 x^{T} 可得 $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x = x^{\mathrm{T}}0=0$,即 $(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=0$,亦即 $\|Ax\|=0$,由向量范数的非负性,推知必有 $Ax=0$ 成立.

综上可知,方程组 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 是同解方程组,因此, $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$.

4.5.2 正交向量组

下面讨论正交向量组的性质.以下的这个定理揭示了正交性与线性无关性这两个概念之间的关系.

定理 1 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 必线性无关.

证 设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0$$

以 α_i^{T} $(i=1,2,\cdots,r)$左乘上式两端,利用已知条件,得

$$\lambda_i\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i = 0$$

因 $\alpha_i\neq 0$,故 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i = \|\alpha_i\|^2 \neq 0$,从而必有 $\lambda_i = 0 \quad (i=1,2,\cdots,r)$.于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

例 3 已知 3 维向量空间 R^3 中两个向量

$$\alpha_1 = [1,1,1]^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_2 = [0,-1,1]^{\mathrm{T}}$$

正交,试求一个非零向量 α_3,使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

解 记 $A = \begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$,所求 α_3 应满足 $\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_3=0, \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3=0$,即满足齐次线性方程组 $Ax=0$,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\text{由 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

得$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$,从而有基础解系$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 取 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$即符合所求 .

我们常常采用正交向量组作为向量空间的基,这时,称此基为向量空间的正交基 .更进一步,有:

定义 3 设 n 维向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 是向量空间 $V(V \quad R^n)$的一个基,若 ε_1, $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 两两正交,且都是单位向量,则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 为 V 的一个规范正交基 .

例如 n 个两两正交的 n 维非零向量,即可构成向量空间 R^n 的一个正交基,而 n 维向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 则是向量空间 R^n 的一个规范正交基,其中 e_i 是单位矩阵 I_n 的第 i 列($i = 1, 2, \cdots, n$),常称 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 R^n 的自然基 .

又例如,例 3 中的三个向量经规范化后得到的 $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$就是 R^3 的一个规范正交基 .

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基,要求 V 的一个规范正交基,也就是要找一组两两正交的单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$,使 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价 这样一个问题,称为把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 这个基规范正交化 .下面的定理给出了具体的正交化方法 .

定理 2 (施密特 Schmidt 正交化方法)设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是定义了内积的向量空间 V 的一个基 .若令

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\langle \beta_j, \alpha_r \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle}\beta_j$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 就为 V 的正交基 .

若进一步对 $i = 1, 2, \cdots, r$,令

$$\varepsilon_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 就是 V 的一个规范正交基.

事实上,正交化过程写成矩阵形式即为

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]P$$

其中 P 为对角元全为 1 的上三角矩阵,故 P 可逆,所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价,且知 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的确两两正交.

例 4 设矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,试用施密特正交化方法将矩阵 A 的列向量组规范正交化,并将其扩充成 R^4 的一组规范正交基.

解 令 $\beta_1=\alpha_1=[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\beta_1,\alpha_2\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}-\dfrac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\beta_1,\alpha_3\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\beta_2,\alpha_3\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\\\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

再规范化,得

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

为扩充为 R^4 的一组规范正交基,取 β_4 满足 $\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_4=0$,$\beta_2^{\mathrm{T}}\beta_4=0$,$\beta_3^{\mathrm{T}}\beta_4=0$,即

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\-x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\beta}_4 = [0, -1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$, 规范化为 $\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$, 得 R^4 的一组规范正交基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4$.

例 5 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交 .

解法 1 依题意, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 应满足方程 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} x = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

把基础解系正交化, 即符合所求 . 亦即取

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 \rangle} \boldsymbol{\xi}_1$$

其中 $\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 \rangle = 2$, 于是得

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解法 2 在解法 1 中求出基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

后, 为了避免使用施密特正交化方法, 可以使用下述方法:

显然, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的通解为 $x = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 = [c_1, c_2, -c_1 - c_2]^{\mathrm{T}}$ $(c_1, c_2 \in \mathrm{R})$ 取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$ 所要求的 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必须分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交, 现在通解 x 已经与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交, 所以, 能同时与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交亦即满足 $\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} x = 0$ 的 x 即可取作 $\boldsymbol{\alpha}_3$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} x = 0$, 得 $2c_1 = -c_2$, 取 $c_1 = 1$, 即得 $x = [1, -2, 1]^{\mathrm{T}}$, 令 $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1, -2, 1]^{\mathrm{T}}$, 则它即为所求 .

现在再讨论正交矩阵与这里的正交向量组之间的关系 .

定义 4 如果 n 阶矩阵 A 满足

$$A^{\mathrm{T}} A = I \qquad (\text{即 } A^{-1} = A^{\mathrm{T}})$$

那么称 A 为正交矩阵 .

上式用 A 的列向量表示,即是

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

亦即

$$\alpha_i^{\mathrm{T}} \alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

这就说明:方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的列向量组是规范正交向量组 .

考虑到 $A^{\mathrm{T}} A = I$ 与 $AA^{\mathrm{T}} = I$ 等价,所以上述结论对 A 的行向量组亦成立 .

由此可见,正交矩阵 A 的 n 个列(行)向量构成向量空间 R^n 的一个规范正交基 .

以例 4 中得到的 R^4 的一组规范正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为列构成的矩阵为

$$Q = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

显然它是一个正交矩阵 .

例 6 验证矩阵

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

是正交阵 .

证法一 因为 $AA^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = I$,所以 A 是正交阵 .

证法二 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$,容易验算得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是单位向量,且两两正交,所以 A 是正交阵.

正交矩阵具有以下性质:

(1) 正交矩阵的行列式为±1;

(2) 正交矩阵的转置仍是正交矩阵;

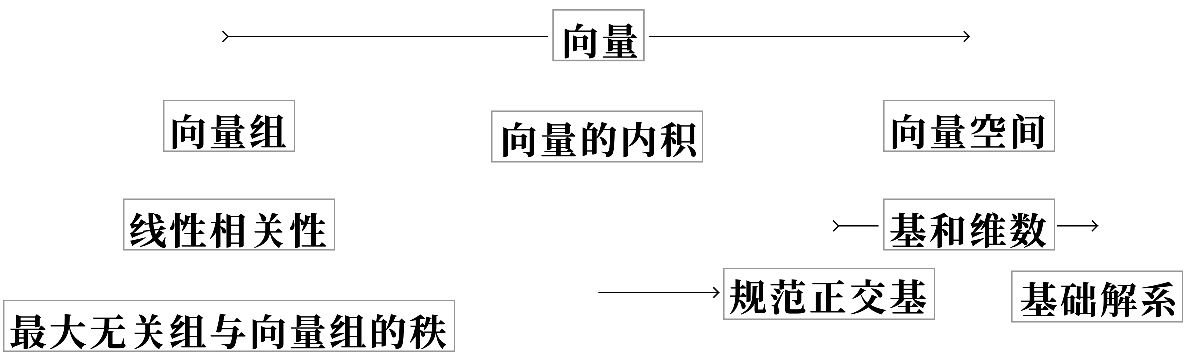
(3) 正交矩阵的逆阵仍是正交矩阵;

(4) 两个正交矩阵的乘积仍是正交矩阵.

以上性质的证明可通过定义直接证明,留给读者自己完成.

4.6 本章小结

4.6.1 内容框图



4.6.2 基本要求

(1) 理解 n 维向量的概念.

(2) 理解线性表示,线性相关,线性无关的定义.了解有关的重要结论.

(3) 理解向量组的最大无关组与秩的概念,并会求向量组的最大无关组与秩.

(4) 了解向量组等价的概念,向量组的秩与矩阵的秩的关系.

(5) 知道向量空间、子空间、生成空间、基和维数等概念.

(6) 了解正交向量与规范正交基的概念,会用施密特正交化方法,了解正交矩阵的概念与性质.

(7) 了解齐次线性方程组的基础解系,知道线性方程组解的结构.

4.6.3 内容概要

1) 线性表示、线性相关性及线性方程组的关系

(1) β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示　线性方程组$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]x=\beta$有解　矩阵$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$的秩等于矩阵$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta]$的秩.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关　齐次线性方程组$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]x=0$ 有非零解　矩阵$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$的秩小于 m.

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关　齐次线性方程组$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]x=0$ 只有零解　矩阵$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$的秩等于 m.

2) 向量的线性相关性的有关结论

(1) 仅含一个向量 α的向量组线性相关　$\alpha=0$.

(2) 任何含有零向量的向量组必线性相关.

(3) 含线性相关部分组的向量组必线性相关,即线性无关向量组的任一部分组必线性无关.

(4) 线性无关的向量组的各向量扩充分量后仍线性无关,即线性相关向量组的各向量减少分量后仍线性相关.

(5) 任意 m个 n 维向量,当 $m>n$时必线性相关.

(6) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq2)$线性相关　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

(7) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关　β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,且表达式唯一.

(8) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,则 $r\leq s$.

(9) 不含零向量的正交向量组必线性无关.

3) 向量组的最大无关组与秩

(1) 性质:

①线性无关向量组的最大无关组即为其本身.

②向量组与其任一最大无关组等价.

③向量组的任意两个最大无关组等价.

④等价向量组等秩,但其逆不成立.

⑤若向量组的秩为 r,则其中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个最大无关组.

⑥对任一矩阵 A, A 的秩, A 的列向量组的秩, A 的行向量组的秩,三者相等.

(2) 计算:

将向量组中各向量作为矩阵 A的列.

①对 A 进行初等行变换化为行阶梯形阵;

②在每个阶梯上取一列;

则对应的向量所构成的向量组即为最大无关组,而 A 的秩即为向量组的秩.

4) 正交矩阵:

(1) A 为正交阵的定义是:A 满足 $AA^{T}=A^{T}A=I$ 或 $A^{T}=A^{-1}$.

(2) A 为正交阵　A 的列(行)向量组为规范正交向量组.

(3) 正交阵性质:

若 A 为正交阵,则 $|A|=\pm 1$,且 A^{T}、A^{-1}、A^{*} 均为正交阵.若 B 也为正交阵,则 AB 也是正交阵.

5) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间(A 为 $m\times n$ 矩阵):

$Ax=0$ 若有非零解,则其全体解构成的向量空间称为 $Ax=0$ 的解空间,记作 $N(A)$.

(1) $Ax=0$ 的一个基础解系即为 $N(A)$ 的一组基,故基础解系不唯一.

(2) $Ax=0$ 的每一个基础解系所含向量个数 $n-r(A)$ 即为 $\dim N(A)$ 是固定的.

(3) 若已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r(A)}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系,则

$$N(A)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r(A)}\}$$

从而 $Ax=0$ 的通解

$$x=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{n-r(A)}\alpha_{n-r(A)}$$

其中 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-r(A)}$ 为任意常数.

习 题 四

A 组

1．设 $\alpha=[2,1,0]^{T}$，$\beta=[0,1,-1]^{T}$，$\gamma=[3,5,2]^{T}$，求 $\alpha-\beta$，$3\alpha+\beta-2\gamma$．

2．已知 $2\alpha+3\beta=[1,3,2,-1]^{T}$，$3\alpha+4\beta=[2,1,1,2]^{T}$，求 α、β．

3．已知向量 γ_1,γ_2 能被向量 β_1,β_2,β_3 线性表示，且表示式为

$$\gamma_1=3\beta_1-\beta_2+\beta_3,\ \gamma_2=\beta_1+2\beta_2+4\beta_3$$

向量 β_1,β_2,β_3 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式为

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2-5\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=-\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$$

求向量 γ_1,γ_2 由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示时的表示式．

4．判别向量 $\beta=[1,1,1]^{T}$ 能否由下列向量组线性表示，若能，请表示出来．

(1) $\alpha_1=[2,3,0]^{T}$，　$\alpha_2=[1,-1,0]^{T}$，　$\alpha_3=[7,5,0]^{T}$；

(2) $\alpha_1=[1,2,0]^{T}$，　$\alpha_2=[2,3,0]^{T}$，　$\alpha_3=[0,0,1]^{T}$．

5．判断下列各组向量的线性相关性．

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$；　(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix}$；

(3) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$．

6．已知向量 $\alpha_1=[1,2,3]^{T}$，$\alpha_2=[2,1,0]^{T}$，$\alpha_3=[3,4,a]^{T}$，问 a 取何值时，α_1，α_2，α_3 线性相关；a 取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

7．若 α_1,α_2 线性无关，β 是另外一个向量，问 $\alpha_1+\beta$ 与 $\alpha_2+\beta$ 是否线性无关？说明理由．

8．已知向量组 α_1,α_2，若有另一向量组 $\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=-\alpha_1+3\alpha_2$，试证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关．

9．设 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，…，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关．

10．求下列向量组的秩，并求出一个最大无关组．

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$;

(2) $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\beta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$.

11.**证明下列两个向量组是等价的.**

(1) $\alpha_1=[1,-1,4]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[1,0,3]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[0,1,-1]^{\mathrm T}$;

(2) $\beta_1=[1,1,2]^{\mathrm T}$, $\beta_2=[0,-1,1]^{\mathrm T}$.

12.**称满足** $A^2=I$ **的矩阵** A **为对合阵,试证对任一** n **阶对合阵** A,**有**

$$r(A-I)+r(A+I)=n$$

13.**设** $V_1=\{x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm T}\mid x_1+x_2+x_3=0\}$, $V_2=\{x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm T}\mid x_1+x_2+x_3=1\}$,**问** R^3 **的这两个子集,对** R^3 **的线性运算是否构成向量空间,为什么?**

14.**试求由** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **生成的向量空间** $V=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$**的一个基及** V **的维数** $\dim V$,**其中** $\alpha_1=[1,-1,4]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[1,0,3]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[0,1,-1]^{\mathrm T}$.

15.**已知一个 4 维向量组** $\alpha_1=[2,1,3,-1]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[3,-1,2,0]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[1,3,4,-2]^{\mathrm T}$, $\alpha_4=[4,-3,1,1]^{\mathrm T}$, (1)**求** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **的一个最大无关组及秩**; (2)**将其余向量用这个最大无关组来线性表示**; (3)**增加向量扩充此最大无关组为** R^4 **的一个基.**

16.**验证** $\alpha_1=[1,-1,0]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[2,1,3]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[3,1,2]^{\mathrm T}$ **为** R^3 **的一个基,并把向量** $\beta_1=[5,0,7]^{\mathrm T}$, $\beta_2=[-9,-8,-13]^{\mathrm T}$ **用这个基线性表示.**

17.**已知向量组** $\alpha_1=[5,2,0,0]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[2,1,0,0]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[0,0,8,5]^{\mathrm T}$, $\alpha_4=[0,0,3,2]^{\mathrm T}$ **为向量空间** R^4 **的一个基,向量组** $\beta_1=[1,0,0,0]^{\mathrm T}$, $\beta_2=[0,2,0,0]^{\mathrm T}$, $\beta_3=[0,1,2,0]^{\mathrm T}$, $\beta_4=[1,0,1,1]^{\mathrm T}$ **为另一个基,求**(1)**从基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **到基** $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ **的过渡矩阵** P; (2) $\beta=3\beta_1+2\beta_2+\beta_3$ **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **下的坐标.**

18.**求下列齐次线性方程组的基础解系.**

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

19 . 设 A、B 都是 n 阶矩阵, 且 $AB = O$, 试证 $r(A) + r(B) \leq n$.

20 . 求下列非齐次线性方程组的一个特解及对应的齐次线性方程组的基础解系 .

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 6 \end{cases}$$

21 . 已知非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3, 又已知该非齐次线性方程组的三个解向量为 x_1, x_2, x_3, 试求出该方程组的通解, 其中 $x_1 = [4, 3, 2, 0, 1]^T$, $x_2 = [2, 1, 1, 4, 0]^T$, $x_3 = [2, 8, 1, 1, 1]^T$.

22 . 将向量组 $\alpha_1 = [0, 1, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, 0, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 1, 0]^T$ 规范正交化 .

23 . 判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$ 是否为正交阵, 并说明理由 .

24 . 设 A, B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵 .

B 组

1 . 已知向量 $\alpha_1 = [\lambda, \lambda, \lambda]^T$, $\alpha_2 = [\lambda, 2\lambda - 1, \lambda]^T$, $\alpha_3 = [2, 3, \lambda + 3]^T$, $\beta = [1, 1, 2\lambda - 1]^T$, 问 λ 取何值时: (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表达式唯一? (2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表达式不唯一? (3) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

2 . 已知 4 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 且其中任意 3 个向量都线性无关, 试证: 必有全不为零的 4 个数 k_1, k_2, k_3, k_4, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ 成立 .

3 . 确定向量 $\beta_3 = [2, a, b]^T$, 使向量组 $\beta_1 = [1, 1, 0]^T$, $\beta_2 = [1, 1, 1]^T$, β_3 与向量组 $\alpha_1 = [0, 1, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, 2, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 0, -1]^T$ 的秩相同, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 .

4．设非齐次线性方程 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩 $r(A_{5\times 3})=2$，η_1、η_2 是该方程组的两个解，且有 $\eta_1+\eta_2=[1,3,0]^{\mathrm{T}}$，$2\eta_1+3\eta_2=[2,5,1]^{\mathrm{T}}$，求该方程组的通解．

5．已知向量 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 为 $A_{m\times n}x=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解，且 $r(A)=r$，试证 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系．

6．设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使 $AB=O$，且 $r(B)=2$．

7．设向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3；向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 4，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4．

8．已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 n 维规范正交向量组，且 $\beta_1=\alpha_1+2\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+\lambda\alpha_3$，问：$\lambda$ 为何值时，向量 β_1,β_2 正交？当它们正交时，求出 $\|\beta_1\|$，$\|\beta_2\|$．

9．设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示，问向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 是否等价？说明理由．

10．若 A、B 是 n 阶正交矩阵，且 $|A|=-|B|$，试证：$|A+B|=0$．

自测题四

一、填空题

1．两个向量 $\alpha=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 与 $\beta=[b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$ 线性相关的充要条件是__________．

2．已知向量组 $\alpha_1=[1,2,-1,1]^T, \alpha_2=[2,0,t,0]^T, \alpha_3=[0,-4,5,-2]^T$ 的秩为 2,则 $t=$__________．

3．已知 R^3 的一个基为 $\alpha_1=[1,1,0]^T, \alpha_2=[1,0,1]^T, \alpha_3=[0,1,1]^T$,则向量 $\beta=[2,0,0]^T$在上述基下的坐标为__________．

4．已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 3,则向量组 $\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2$ 的秩为__________．

5．设 x_1 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, x_2 是 $Ax=0$ 的一个解,则 x_1-x_2 是__________的一个解．

6．设 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & y & -\frac{2}{3} \\ x & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 为正交阵,则 $x=$__________, $y=$__________．

二、选择题:

1．设 A 与 B 都是 n 阶方阵,则 $r(A+B)$(　　)．

(A) $\geq \max\{r(A), r(B)\}$;　　(B) $\leq \min\{r(A), r(B)\}$;

(C) $> r(A)+r(B)$;　　(D) $\leq r(A)+r(B)$．

2．设 α_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系,则有(　　)．

(A) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关;

(B) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(C) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合都是 $Ax=b$ 的解;

(D) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合都是 $Ax=0$ 的解．

3．设 A 为 n 阶方阵, $r(A)=n-3$,且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的三个线性无关的解向量,则 $Ax=0$的基础解系为(　　)．

(A) $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$;　　(B) $\alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$;

(C) $2\alpha_2-\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$;　　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_3$．

4．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则(　　)．

(A) 必定 $r<s$；

(B) 向量组中任意小于 r 个向量的部分组线性无关；

(C) 向量组中任意 r 个向量线性无关；

(D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量必线性相关．

三、设 $\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\4\\5\end{bmatrix},\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix}$，问 a 取何值时，β 可唯一地表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合，并写出此表示式．

四、4 维向量组 $\alpha_1=[-1,4,0,2]^T,\alpha_2=[5,-11,3,0]^T,\alpha_3=[3,-2,4,-1]^T,\alpha_4=[-2,9,-5,0]^T,\alpha_5=[0,3,-1,4]^T$，求此向量组的秩与一个最大无关组．

五、给定两组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3$，其中

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}-3\\-1\\-2\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

(1) 试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 β_1,β_2,β_3 分别线性无关．

(2) 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，若有 $A=BC$，问 C 是否可逆？若可逆，求出 C^{-1}．

六、已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有特解 $\eta_1=[1,0,2]^T$, $\eta_2=[-1,2,-1]^T$, $\eta_3=[1,0,0]^T$, $r(A)=1$, 求 $Ax=b$ 的通解.

七、证明题

1. 证明:若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 中的一组规范正交基, A 为 n 阶正交矩阵, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 也是 R^n 的一组规范正交基.

2. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$, $\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$, 证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

自测题四答案

一、填空题

1．下标相同的元素对应成比例:即向量 α 与 β 平行．

2．$t=3$ $\left([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-4&-4\\-1&t+2&5\\1&-2&-2\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-4&0\\-1&t+2&3-t\\1&-2&0\end{bmatrix}\right.$

由 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$,即知必有 $3-t=0$)．

3．$(1,1,-1)$ $\left([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right]\overset{r}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&-1&1&-2\\0&0&2&-2\end{array}\right]\sim\right.$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&-1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]$ 即 $\beta=1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2-1\cdot\alpha_3$)．

4．2 (若秩为 1,不妨设 $\alpha_3-\alpha_2=k\alpha_1$,即 $k\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$,这与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3 相矛盾)．

5．$Ax=b$ (根据 $Ax=b$ 与对应齐次方程组 $Ax=0$ 的解的关系即得)．

6．$-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}$ (记原矩阵的列分块形式为 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必两两正交且为规范向量,由 $\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_3=0$,可得 $y=\dfrac{2}{3}$;再由 $\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_3=0$,可得 $x=-\dfrac{2}{3}$)．

二、选择题

1．D (由于 $A+B$ 的列向量组可由 A、B 的列向量组线性表示,进而可由 A、B 列向量组的最大无关组线性表示)．

2．B (根据 $Ax=b$ 与对应齐次方程组 $Ax=0$ 的解的关系即得)．

3．A (只要证明该组向量线性无关即可,对(A),有

$$[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C.$$

显然 C 可逆,结合 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关)．

4．D (由最大无关组中所含向量个数即为向量组的秩这个定义即得)．

三、$a\neq-1$ 时,β 可唯一地表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合,且

$$\beta = -\frac{2}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+2}{a+1}\alpha_2 + \frac{1}{a+1}\alpha_3$$

解:若记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$,则问题转化为方程组 $Ax=\beta$ 只有唯一解的问题.而

$$[A\mid\beta]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&4\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right]\overset{r}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&2\\0&2&-2&a+5&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&1\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right]$$

为了使 $r(A)=r(A\mid\beta)$,只能 $a+1\neq 0$,即 $a\neq -1$,此时

$$[A\mid\beta]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-\dfrac{2}{a+1}\\0&1&0&0&\dfrac{a+2}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{1}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

即 $\beta = -\dfrac{2}{a+1}\alpha_1 + \dfrac{a+2}{a+1}\alpha_2 + \dfrac{1}{a+1}\alpha_3 + 0\alpha_4$.

四、秩为4,最大无关向量组可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (构造矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]$,对其只进行初等行变换,将其化为行阶梯形即得).

五、

(1) 依(2)的记号,由 $|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$,即知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 β_1,β_2,β_3 均线性无关;

(2) $C^{-1}=A^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\1&2&2\end{bmatrix}$.

六、$x=\eta_1+t_1(\eta_1-\eta_3)+t_2(\eta_2-\eta_3)$, $(t_1,t_2\in\mathbf{R})$.

解:显然对应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有 $3-r(A)=3-1=2$ 个解向量,又由 $A(\eta_1-\eta_3)=0$ 及 $A(\eta_2-\eta_3)=0$,及 $A\eta_1=b$,结合 $Ax=b$ 的通解的结构,便知 $Ax=b$ 的通解 x 等于它的一个特解 η_1,加上 $Ax=0$ 的基础解系 $(\eta_1-\eta_3)$、$(\eta_2-\eta_3)$ 的线性组合.

七、

1.证:因为 A 为正交阵,所以 $A^{T}A=I$.由

$$(A\alpha_i)^{T}(A\alpha_j)=\alpha_i^{T}A^{T}A\alpha_j=\alpha_i^{T}\alpha_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\1 & i=j\end{cases}$$

即知命题得证.

2 . **证**: 因 $[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **而** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

所以 $r\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\} < 4$, **结论得证**(**其中** $r\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ **表示向量组** $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ **的秩**) .

5 特征值问题与二次型

本章将介绍矩阵的特征值、特征向量的概念;进而导出矩阵可对角化的条件、方法.在指出实对称矩阵和二次型的对应关系后,得到了化二次型为标准形的正交变换法;进一步介绍了惯性律及正定矩阵的概念和判别法.

5.1 方阵的特征值与特征向量

5.1.1 特征值与特征向量的概念

在求常系数线性微分方程组、机械振动、电磁振荡等实际问题中,常可归结为求一个方阵的特征值与特征向量的问题.

定义 1 设 A 是 n 阶方阵,若存在数 λ 和 n 维非零列向量 x,使得

$$Ax=\lambda x \tag{5.1.1}$$

成立,则称数 λ 是矩阵 A 的特征值;非零列向量 x 为矩阵 A 的对应于(或属于)λ 的特征向量.

式(5.1.1)等价地改写成

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{5.1.2}$$

事实上,n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组式(5.1.2)有非零解的充分必要条件为

$$|A-\lambda I|=0$$

将 n 阶行列式 $|A-\lambda I|$ 展开得到关于 λ 的一元 n 次多项式

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

称为 A 关于 λ 的特征多项式.将 $|A-\lambda I|=0$ 称为矩阵 A 关于 λ 的特征方程.特

征方程的根就是 A 的特征值,也称为 A 的特征根.代数基本定理告诉我们:一元 n 次代数方程必有 n 个根,其中可能有重根和虚根.

5.1.2　特征值与特征向量的求法

求 n 阶方阵 A 的特征值及对应特征向量的步骤如下:

(1)利用行列式计算特征多项式 $|A-\lambda I|$,求出特征方程的全部根,即 A 的全部特征值.

(2)对每一个特征值 λ_i,求出对应的特征向量,即解出齐次线性方程组 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的一个基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$,则对应 λ_i 的全部特征向量为

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_t\xi_t \qquad (c_1,c_2,\cdots,c_t \text{ 不全为零}).$$

显然 A 的特征值 λ_i 对应的全部特征向量不构成一个向量空间,但只要添上一个零向量即构成了向量空间,称为对应于 λ_i 的特征子空间,即为齐次线性方程组 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的解空间,记作 $N(A-\lambda_i I)$.我们称 $N(A-\lambda_i I)$ 的维数 $\dim N(A-\lambda_i I)=n-r(A-\lambda_i I)$ 为 λ_i 的几何重数,用 ρ_{λ_i} 记,而称特征值 λ_i 在特征方程 $f(\lambda)=0$ 中出现的重数为代数重数,用 m_{λ_i} 记.

例 1　试求上三角矩阵 A 的特征值和特征向量,其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

解　由 $|A-\lambda I|=0$,即

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

得 A 的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=1$,解方程组 $(A-\lambda_1 I)x=0$,由

$$(A-I)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得全部特征向量为 $x=c[1,0,0]^{\mathrm{T}},(c\neq 0)$.

对于 $\lambda_2=2$,由

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得全部特征向量 $x=c[1,1,0]^T,(c\neq 0)$.

对于 $\lambda_3=3$,由

$$(A-3I)=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得全部特征向量 $x=c[0,1,1]^T,(c\neq 0)$.

这个例子表明上三角矩阵的特征值即为其主对角线上的 n 个元素.同理,对下三角矩阵乃至对角矩阵,均有同样的结论.

例 2 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&8&-2\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 求特征方程

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&8&-2-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-4&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(2+\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=-(2+\lambda)(\lambda-1)^2=0$$

得 $\lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=1$.

对于 $\lambda_1=-2$,解 $(A-(-2)I)x=0$,由

$$(A+2I)=\begin{bmatrix}5&1&0\\-4&1&0\\4&8&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5&1&0\\1&2&0\\0&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-9&0\\0&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=[0,0,1]^T$,这时 $m_{-2}=\rho_{-2}=1$.全部特征向量为

$$x=c[0,0,1]^T,(c\neq 0)$$

对于 $\lambda_{2,3}=1$,解 $(A-I)x=0$,由

$$(A-I)=\begin{bmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&8&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&0\\0&6&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=[-\frac{1}{2},1,2]^T$;这时 $m_1=2,\rho=1$(代数重数 > 几何重数).全部特征向量为

$$x=c[-\frac{1}{2},1,2]^T,(c\neq 0)$$

例 3 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 求特征方程

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&5-\lambda&5-\lambda\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-(1+\lambda)&0\\0&0&-(1+\lambda)\end{vmatrix}=(5-\lambda)(1+\lambda)^2=0$$

得 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=-1$.

对于 $\lambda_1=5$,解 $(A-5I)x=0$,由

$$(A-5I)=\begin{bmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-6&6\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=c$,则特征向量为

$$x=c[1,1,1]^{\mathrm{T}},\ (c\neq 0)$$

对于 $\lambda_{2,3}=-1$,解 $(A+I)x=0$,由

$$(A+I)=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_2=c_1$, $x_3=c_2$,则特征向量为

$$x=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ (c_1,c_2\text{ 不全为零})$$

这时 $m_5=\rho_5=1$; $m_{-1}=\rho_{-1}=2$(代数重数 = 几何重数).

5.1.3 特征值与特征向量的性质

性质 1 若 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则必有

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|; \tag{5.1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A). \tag{5.1.4}$$

证 根据多项式因式分解与方程根的关系,有如下恒等式

$$|A-\lambda I| = f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

以 $\lambda=0$ 代入上述恒等式,即得式(5.1.3).为证式(5.1.4),可以比较以上恒等式两端$(-\lambda)^{n-1}$项的系数.看右端,$(-\lambda)^{n-1}$的系数为 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$;看左端,含$(-\lambda)^{n-1}$的项必来自于$|A-\lambda I|$的对角线元素的乘积项

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

因而$(-\lambda)^{n-1}$的系数是 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$,这就是矩阵的迹,记作 $\mathrm{tr}(A)$.因恒等式两边同次幂的系数必相等,故而得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$$

性质 2 设方阵 A 有特征值 λ 及对应的特征向量 x,则 A^2 有特征值 λ^2,对应的特征向量仍为 x.

证 由题意可知 $Ax=\lambda x$,左乘 A 得 $A^2x=\lambda Ax$,即 $A^2x=\lambda^2x$ 知 A^2 有特征值 λ^2 及对应的特征向量 x.

推广 设方阵 A 有特征值 λ 及对应的特征向量 x,则 A 的多项式

$$\varphi(A) = a_0I + a_1A+\cdots+a_mA^m$$

有特征值 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$,对应的特征向量仍为 x.

性质 3 方阵 A 与 A^{T} 有相同的特征值,但特征向量未必一样.

证 因为$|A^{\mathrm{T}}-\lambda I| = |A^{\mathrm{T}}-(\lambda I)^{\mathrm{T}}| = |(A-\lambda I)^{\mathrm{T}}| = |A-\lambda I| = 0$,所以 A 与 A^{T} 有相同的特征值.

令 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,则特征值为 $\lambda_{1,2}=0$,特征向量为 $x=c[1,0]^{\mathrm{T}}$,$(c\neq0)$;而 $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,特征值也为 $\lambda_{1,2}=0$,但特征向量却为 $x=c[0,1]^{\mathrm{T}}$,$(c\neq0)$,两特征向量不同.

性质 4 可逆方阵 A 有特征值 λ,对应特征向量 x 的充分必要条件是 A^{-1} 有特征值$\dfrac{1}{\lambda}$,对应的特征向量为 x.

证 事实上,若 $Ax=\lambda x$,两边左乘 A^{-1} 且同除以 λ 得 $A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$;若 $A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$,两边左乘 A 且同乘以 λ 得 $Ax=\lambda x$.

推论 可逆方阵 A 有特征值 λ,对应特征向量 x 的充分必要条件 A^* 有特征

值$\frac{|A|}{\lambda}$,对应的特征向量为 x .

性质 5 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个互不相同的特征值,$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是分别与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 对应的特征向量,则 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关 .

证 对特征值的个数作数学归纳法 .

由于特征向量是不为零的,所以单个的特征向量必然线性无关 .现在假设对应于 k 个不同特征值的特征向量线性无关,我们证明对应于 $k+1$ 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\lambda_{k+1}$ 的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 也线性无关 .

假设有关系式

$$t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_kx_k+t_{k+1}x_{k+1}=0 \tag{5.1.5}$$

成立 .等式两端乘以 λ_{k+1},得

$$t_1\lambda_{k+1}x_1+t_2\lambda_{k+1}x_2+\cdots+t_k\lambda_{k+1}x_k+t_{k+1}\lambda_{k+1}x_{k+1}=0 \tag{5.1.6}$$

式(5. 1. 5)两端左乘 A 得 $A(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_{k+1}x_{k+1})=0$ 即

$$t_1\lambda_1x_1+t_2\lambda_2x_2+\cdots+t_k\lambda_kx_k+t_{k+1}\lambda_{k+1}x_{k+1}=0 \tag{5.1.7}$$

式(5 .1 .7)减去式(5 .1 .6),得

$$t_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})x_1+t_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})x_2+\cdots+t_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})x_k=0$$

根据归纳假设,$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性无关,于是

$$t_i(\lambda_i-\lambda_{k+1})=0,(i=1,2,\cdots,k)$$

但$(\lambda_i-\lambda_{k+1})\neq0(i=1,2,\cdots,k)$,所以 $t_i=0$.此时,式(5 .1 .5)变成 $t_{k+1}x_{k+1}=0$,因为 $x_{k+1}\neq0$,所以 $t_{k+1}=0$.这就证明了向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 线性无关 .

5 .2 相似矩阵

定义 1 对 n 阶矩阵 A,B,若存在 n 阶满秩矩阵 P,使得成立

$$B=P^{-1}AP \tag{5.2.1}$$

则称 A 与 B 相似,或称 A 相似于 B .

相似矩阵有以下性质:

性质 1 A 与 A 相似(反身性) .

性质 2 若 A 与 B 相似,则 B 与 A 相似(对称性) .

性质 3 若 A 与 B 相似,B 与 C 相似,则 A 与 C 相似(传递性) .

性质 4 若 A 与 B 相似,则 A^T 与 B^T,A^m 与 B^m(m 为任一正整数)相似 .

性质 5 若可逆阵 A 与 B 相似,则 A^{-1} 与 B^{-1} 也相似 .

性质 6 若 A 与 B 相似,则 A 与 B 的特征多项式相同,从而有相同的特征

值.

证 这里我们仅证明性质 5,性质 6,其余留给学生完成.

因为可逆矩阵 A 与 B 相似,则存在满秩矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$ 成立,两边求逆可得 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,所以 A^{-1} 与 B^{-1} 相似.这样证明了性质 5.下面来证性质 6.

因为 A 与 B 相似,则存在可逆阵 P,使得 $B=P^{-1}AP$,这时有

$$|B-\lambda I|=|P^{-1}AP-\lambda I|=|P^{-1}(A-\lambda I)P|=|P^{-1}||A-\lambda I||P|=|A-\lambda I|$$

所以 A 与 B 的特征多项式相同,从而 A 与 B 有相同的特征值.联系式(5.1.3)、(5.1.4)可知:相似矩阵具有相同的迹及相同的行列式.

注意,这个性质的逆命题不成立.即若 A 与 B 的特征多项式或所有的特征值都相同,A 却不一定与 B 相似.这可参看下例:

例如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.容易算出 A 与 B 的特征多项式均为 $(\lambda-1)^2$,但事实上,A 是一个单位矩阵,对任意的可逆矩阵 P 有

$$P^{-1}AP=P^{-1}IP=P^{-1}P=I$$

因此若 B 与 A 相似,则 B 必是单位矩阵;而现在 B 不是单位矩阵.

定义 2 如果矩阵 A 相似于一个对角阵,则称矩阵 A 可对角化.

定理 1 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证 必要性 如矩阵 A 可对角化,即存在可逆阵 P 及对角阵 Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$,则 $AP=P\Lambda$,令 $P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$,则 $x_i\neq 0$,且 $AP=P\Lambda$ 可写成

$$A[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$$

即

$$Ax_i=\lambda_i x_i,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

所以,λ_i 为 A 的特征值,对应 λ_i 的特征向量为 x_i.由于 P 可逆,故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关.

充分性 设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $Ax_i=\lambda_i x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$.令 $P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 可逆,则

$$AP=A[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots,\lambda_nx_n]$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = P\Lambda$$

所以

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

由定理 1 及 5.1 节中的性质 5 可得以下推论:

推论 1　如果 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互不相同,则 A 必可对角化.

推论 2　设 n 阶方阵 A 有 m 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,其几何重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_m$,且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$,即对应 r_i 重特征值 λ_i 有 r_i 个线性无关的特征向量($i = 1, 2, \cdots, m$),则 A 可对角化.

推论 1 和推论 2 是判断方阵 A 是否可对角化的常用条件,且推论 1 的条件是充分的,而推论 2 的条件是充分必要的,将推论 2 写成另一形式为:

推论 2′　n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件为其每一特征值的代数重数等于几何重数,即对每个 λ 有 $m_\lambda = \rho_\lambda$.

事实上,对每一个 λ 必有 $1 \leq \rho_\lambda \leq m_\lambda$,故对特征单根必满足 $m_\lambda = \rho_\lambda$,有重根时,如有一个 λ 成立 $\rho_\lambda < m_\lambda$,则 A 必不可对角化.

例 1　下列矩阵中,哪些可以对角化,哪些不可对角化,对于可对角化的矩阵,求出可逆阵 P,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};\quad (2)\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix};\quad (3)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

解　以上三个矩阵就是上节中的例 1,例 2,例 3 中的矩阵,由此可知:

(1)因为 A 的三个特征值互不相同,由推论 1 知必可对角化.记对应于特征值 1、2、3 的特征向量分别为 $x_1 = [1,0,0]^T$, $x_2 = [1,1,0]^T$, $x_3 = [0,1,1]^T$,令

$$P = [x_1, x_2, x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$ 则必有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(2)由于 B 的特征值 1 为 2 重根,但对应的几何重数为 1 即 $\rho_1 = 1 < 2 = m_1$,故由推论 2′知 B 不可对角化.

(3)由于矩阵 C 的 3 个特征值分别为 5, -1, -1,对应的 3 个线性无关的特征向量可取 $x_1 = [1,1,1]^T$, $x_2 = [-1,1,0]^T$, $x_3 = [-1,0,1]$,故由推论 2′知, C

必可对角化,令

$$P=[x_1, x_2, x_3]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

必有 $P^{-1}CP=\Lambda$ 成立 .

例 2 已知矩阵 A 与 B 相似,其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$$

(1) 求 a, b 的值; (2) 求可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=B$; (3) 求 A^n(n 正整数) .

解 (1) 由相似矩阵具有相同的特征值及式(5 .1 .3)和式(5 .1 .4)可知 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$,即 $2+a+3=2+1+b$; $|A|=|B|$,即 $2(3a-4)=2b$;故 $b=a+2$, $b=3a-4$ 得 $a=3, b=5$.

(2) 对 $\lambda=2$,求得 $(A-2I)x=0$ 的基础解系 $[1,0,0]^{\mathrm{T}}$;

对 $\lambda=1$,求得 $(A-I)x=0$ 的基础解系 $[0,-1,1]^{\mathrm{T}}$;

对 $\lambda=5$,求得 $(A-5I)x=0$ 的基础解系 $[0,1,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,则 $P^{-1}AP=B$ 成立 .

(3) 因 $A=PBP^{-1}$,有 $A^n=PB^nP^{-1}$,由 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,解得

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

故

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & \frac{5^n+1}{2} & \frac{5^n-1}{2}\\ 0 & \frac{5^n-1}{2} & \frac{5^n+1}{2}\end{bmatrix}$$

5.3 实对称矩阵的对角化

正如上一节所讨论的那样,一般的方阵并不都可对角化,但对于在应用中经常遇到的实对称矩阵而言一定可以对角化,这是由于实对称矩阵的特征值和特征向量具有一些特殊的性质.

性质 1 n阶实对称矩阵 A 的特征值全是实数.

性质 2 n阶实对称矩阵 A 的每一特征值λ,都有代数重数等于几何重数,即 $m_\lambda = \rho_\lambda$.

性质 3 设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A的两个不同的特征值,x_1, x_2 是对应的特征向量,则 x_1 与 x_2 正交.

这里仅证性质 3.

证 由已知 $\lambda_1 x_1 = Ax_1, \lambda_2 x_2 = Ax_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$.因为 A对称,故

$$\lambda_1 x_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 x_1)^{\mathrm{T}} = (Ax_1)^{\mathrm{T}} = x_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = x_1^{\mathrm{T}} A.$$

右乘 x_2,得

$$\lambda_1 x_1^{\mathrm{T}} x_2 = x_1^{\mathrm{T}} Ax_2 = x_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2 x_2) = \lambda_2 x_1^{\mathrm{T}} x_2 .$$

整理得$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^{\mathrm{T}} x_2 = 0$,但$(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$,故 $x_1^{\mathrm{T}} x_2 = 0$,即 x_1 与 x_2 正交.

由性质 2 可知实对称矩阵必可对角化,即存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 成立.进而,实对称矩阵是否可以正交对角化,即找到正交阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$成立?回答是肯定的.

当实对称阵 A的 n个特征值互不相同时,由性质 3 知对应的特征向量必正交,只要对每个向量规范化,即得 n个彼此正交的单位向量,拼成的矩阵 Q即为正交阵.

当实对称阵 A 有重根时,通过对重根对应的基础解系进行施密特正交化后,再对每个特征向量规范化即得 n个彼此正交的单位向量,拼成的矩阵 Q即为正交阵.

下面我们举例说明对实对称阵如何正交对角化.

例 1 对于下列实对称阵 A,求正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}AQ$为对角阵.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

解 (1) 因为$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - (1-\lambda)$

$$=(1-\lambda)(\lambda-3)\lambda=0$$

所以三个特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$ 是互不相同的.可分别对应求出三个特征向量: $x_1=[-1,-1,1]^T$, $x_2=[-1,1,0]^T$, $x_3=[1,1,2]^T$, 它们是两两正交的,再规范化后可得 $\varepsilon_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=[-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$, $\varepsilon_2=\frac{x_2}{\|x_2\|}=[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]^T$, $\varepsilon_3=\frac{x_3}{\|x_3\|}=[\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}]^T$, 则有正交阵 $Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

(2) 因为 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 4 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda-14)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+7)=0$$

所以 $\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=-7$.

当 $\lambda_{1,2}=2$ 时, $(A-2I)=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 令 $x_2=c_1$, $x_3=c_2$, 得通解 $x=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$, ($c_1$, c_2 不全为零), 取基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$, 进行施密特正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\beta_1,\alpha_2\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{(-4)}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}$$

再规范化可得 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3=-7$ 时,

$$(A+7I)=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-18&-18\\0&9&9\\2&4&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

令 $x_1=c$,得通解 $x=c\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},(c\neq0)$.取基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$,规范化得

$\varepsilon_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$,则有正交阵 $Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{45}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{\sqrt{45}}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$,使成立

$$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}.$$

例 2 假设 6、3、3 为实对称矩阵 A 的特征值,且属于特征值 6 的特征向量为 $\eta=[1,-1,1]^T$,(1) 求属于特征值 3 的特征向量;(2) 求矩阵 A.

解 (1) 因为 A 为实对称阵,所以属于不同特征值的特征向量必正交,那么属于 3 的特征向量 x 应满足 $\eta^T x=[1,-1,1]x=0$,即 $x_1-x_2+x_3=0$,令 $x_2=c_1$, $x_3=c_2$,得对应于 3 的全部特征向量

$$x=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},(c_1,c_2\text{ 不全为零})$$

(2) 由(1)取基础解系 $\alpha_1=[1,1,0]^T$, $\alpha_2=[-1,0,1]^T$,施密特正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=[1,1,0]^T,\ \beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\beta_1,\alpha_2\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right]^T$$

规范化得 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\varepsilon_3 = \frac{\eta}{\|\eta\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, 令 $Q = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$, 则有 $Q^{-1}AQ = \Lambda$, 即

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

事实上, 若取 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \eta] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, 由

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

也可得到

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

5.4 二次型及其标准形

在平面解析几何中,为了便于研究二次曲线

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1 \tag{5.4.1}$$

的几何性质,我们可以选择适当的坐标变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

把方程化成标准形式

$$mx'^2 + ny'^2 = 1 .$$

由 m, n 的符号很快能判断出此二次曲线表示的是一个椭圆或者双曲线 .

式(5.4.1)的左边是一个二次齐次多项式,从代数学观点看,就是通过满秩线性变换,将一个二次齐次多项式化为只含平方项的多项式 .这样的问题,在许多理论问题或实际应用中常会遇到 现在我们把这类问题一般化,讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题 .

5.4.1 二次型的定义

定义 1 称含 n 个变量的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11} x_1^2 &+ 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2a_{1n} x_1 x_n \\ &+ a_{22} x_2^2 + \cdots + 2a_{2n} x_2 x_n \\ &+ \cdots \\ &+ a_{nn} x_n^2 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

为 n 元二次型,简称为二次型 .

当 a_{ij} 为实数时,称 f 为实二次型;当 a_{ij} 为复数时,称 f 为复二次型 .本书仅讨论实二次型 .

称只含有平方项的二次型为标准形二次型,简称为标准形 .

令 $a_{ij} = a_{ji}$,则有 $2a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i$,式(5.4.2)可改写成

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_1^2 &+ a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{1n} x_1 x_n \\ &+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{2n} x_2 x_n \\ &+ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ &+ a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 \end{aligned}$$

或简写成

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{5.4.3}$$

其矩阵形式为

$$f = x^{\mathrm{T}} A x \tag{5.4.4}$$

其中 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} = A$.

由此可知,n 个变量的二次型 f 与实对称矩阵 A 有一一对应关系,称实对称矩阵 A 为二次型 f 的矩阵,称 f 为实对称阵 A 的二次型.显然,标准形二次型的矩阵是个对角矩阵.

例 1 试写出二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 - x_3^2$$

的矩阵.

解 这是一个含 3 个变量的二次型,其对应的实对称矩阵的对角元 a_{ii} 应为 x_i^2 的系数,对非对角元,由于 $a_{ij} = a_{ji}$,故取 $x_i x_j$ 系数的一半.于是有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

但如果二次型为 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 - x_3^2$,其对应的实对称矩阵应为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注 一般不特别指明一个二次型的变量个数时,以式中出现的个数为准.

在二次型的研究中,中心问题之一是要对给定的二次型(5.4.4),确定一个满秩矩阵 P,使得通过满秩线性变换

$$x = Py \tag{5.4.5}$$

将 f 化简成关于新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的标准形

$$f = \sum_{i=1}^{n} d_i y_j^2 = y^{\mathrm{T}} D y \tag{5.4.6}$$

其中

$$D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$$

把式(5.4.5)代入式(5.4.4),得

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} A x = (Py)^{\mathrm{T}} A (Py) = y^{\mathrm{T}} (P^{\mathrm{T}} A P) y$$

故若能找到满秩矩阵 P,使

$$P^{\mathrm{T}}AP = D \tag{5.4.7}$$

其中 D 为对角阵,则式(5.4.6)随之可得.

定义 2 对 n 阶方阵 A 和 B,若存在 n 阶满秩矩阵 P,使成立

$$B = P^{\mathrm{T}}AP$$

则称 A 与 B 合同.

由于上式中的 P 满秩,故 A 与 B 合同时,B 亦必合同于 A.而且若存在两个可逆矩阵 P, Q,分别使 A 合同于 B, B 合同于 C,即有 $B = P^{\mathrm{T}}AP$, $C = Q^{\mathrm{T}}BQ$,则有 $C = (PQ)^{\mathrm{T}}A(PQ)$,即 A 合同于 C 这说明合同具有对称性和传递性.

于是,化实二次型成标准形的问题可归结为由式(5.4.7)表出的矩阵问题,即实对称矩阵合同于实对角阵的问题.由 5.3 节的实对称矩阵的正交对角化方法(正交相似即正交合同),可得到化二次型为标准形的现成方法——正交变换法.

5.4.2 正交变换法化二次型为标准形

定理 1 任一个二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 均可经过一个正交变换 $x = Qy$,使得二次型化成标准形 $f = y^{\mathrm{T}}\Lambda y$.

证 由 5.3 节知任一实对称矩阵 A 必可正交对角化,即存在正交阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$,将 $x = Qy$ 代入二次型 $f(x)$ 得 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax = (Qy)^{\mathrm{T}}A(Qy) = y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQy = y^{\mathrm{T}}\Lambda y = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$,其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值.

需要指出的是,式(5.4.5)中的满秩矩阵不仅一定可以找到,而且满足条件的这种矩阵 P 还不止一个 这样,就导致一个二次型会有不同形式的标准形,即标准形不唯一.但从式(5.4.6)可见,标准形的非零系数个数即秩 $r(D)$ 等于 $r(A)$,故称二次型 f 之矩阵 A 的秩为二次型的秩,即其任一标准形中非零系数的个数.

对正交变换 $x = Qy$ 而言,正交变换将保持向量的范数(或长度)不变,即在 $x = Qy$ 时,必有

$$\| x \|^2 = \| y \|^2$$

事实上,有

$$\| x \|^2 = \langle x, x \rangle = \langle Qy, Qy \rangle = (Qy)^{\mathrm{T}}(Qy) = y^{T}Q^{\mathrm{T}}Qy = y^{\mathrm{T}}y = \langle y, y \rangle = \| y \|^2$$

在几何及统计等方面的应用中,当需用变量变换的方法处理二次型时,因希望能保持长度不变,而常使用正交变换的方法.

例 2 试确定一个正交变换,化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

为标准形,并问 $f=1$ 为何曲面.

解　二次型 f 的实对称阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

令 $|A-\lambda I|=0$,来求 A 的特征值,由

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$+(-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$=4\lambda-(1-\lambda)(2-\lambda)\lambda+4(\lambda-2)=(\lambda-1)(8+2\lambda-\lambda^2)$$

$$=(\lambda-1)(4-\lambda)(2+\lambda)=0$$

得 $\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

对于 $\lambda_1=4$,解方程组 $(A-4I)x=0$,由

$$(A-4I)=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_1=[2,-2,1]^{\mathrm T}$,规范化得 $\varepsilon_1=\frac{1}{3}[2,-2,1]^{\mathrm T}$.

对于 $\lambda_2=1$,解方程组 $(A-I)x=0$,由

$$(A-I)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_2=[2,1,-2]^{\mathrm T}$,规范化得 $\varepsilon_2=\frac{1}{3}[2,1,-2]^{\mathrm T}$.

对于 $\lambda_3=-2$,解方程组 $(A+2I)x=0$,由

$$(A+2I)=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_3=[1,2,2]^{\mathrm T}$,规范化得 $\varepsilon_3=\frac{1}{3}[1,2,2]^{\mathrm T}$ 则

$$Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

为正交阵,正交变换 $x=Qy$ 化

$$f=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3=4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$$

当 $f=1$ 时,表示三维空间中的单叶双曲面.

例 3　假设二次型 $f=ax_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经过正交变换 $x=Qy$,化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$,求 a,b 及正交矩阵 Q.

解　二次型 f 的实对称矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&0&b\\1&b&0\end{bmatrix}$$

由正交变换化二次型为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$,知 $1,1,-2$ 即为 A 的三个特征值,由 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 及 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 可知 $a=1+1-2$ 及 $b(2-ab)=-2$得

$$a=0,\quad b=-1$$

对于 $\lambda_{1,2}=1$,解方程组$(A-I)x=0$,由

$$(A-I)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=[1,0,1]^{T}$,正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\beta_1,\alpha_2\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right]^{\mathrm{T}}$$

规范化得 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,2]$.

对于 $\lambda_3=-2$,解方程组$(A+2I)x=0$,由

$$(A+2I)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_3=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$,规范化得 $\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$,则

$$Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

为正交阵,即为所求 .

5.4.3 配方法(拉格朗日法)化二次型为标准形

上一节我们证明了任一个二次型都可以通过正交变换化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其标准形中的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 恰是二次型 f 对应的实对称矩阵 A 的 n 个特征值,且满足长度不变性,即 $\|x\|=\|y\|$.如果仅要求可逆变换化二次型为标准形,则有很多种方法,这里仅介绍配方法化二次型为标准形的实例 .

例 1 用配方法求可逆变换 $x=Py$ 化二次型

$$f=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$$

为标准形 .

解 对二次型 f 配方得

$$\begin{aligned}f&=2(x_1-x_2)^2-x_2^2-4x_2x_3\\&=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2\end{aligned}$$

若令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2+2x_3\\y_3=x_3\end{cases}$,即 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2-2y_3\\x_2=y_2-2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$ 为可逆线性变换,其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

则可化二次型为标准形

$$f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

若令 $\begin{cases}y_1=\sqrt{2}(x_1-x_2)\\y_2=2x_3\\y_3=x_2+2x_3\end{cases}$,即 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-y_2+y_3\\x_2=-y_2+y_3\\x_3=\frac{1}{2}y_2\end{cases}$ 为可逆线性变换,其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

则可化二次型为标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 2 用配方法求可逆变换 $x = Py$ 化二次型

$$f = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - x_2 x_3$$

为标准形 .

解 先用可逆线性变换让二次型出现平方项,再配方 .

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

为可逆线性变换,它化二次型

$$\begin{aligned} f &= x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - x_2 x_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2) y_3 - (y_1 - y_2) y_3 \\ &= y_1^2 + y_1 y_3 - y_2^2 + 3y_2 y_3 = \left(y_1 + \frac{1}{2} y_3\right)^2 - y_2^2 + 3y_2 y_3 - \frac{1}{4} y_3^2 \\ &= \left(y_1 + \frac{1}{2} y_3\right)^2 - \left(y_2 - \frac{3}{2} y_3\right)^2 + 2y_3^2 \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2} y_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{3}{2} y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$,即 $\begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{1}{2} z_3 \\ y_2 = z_2 + \frac{3}{2} z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$ 亦即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

为可逆线性变换,它化 f 为标准形

$$f = z_1^2 - z_2^2 + 2z_3^2$$

这时可逆变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P_1 P_2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

5.5 正定二次型与正定矩阵

从 5.4 节的讨论,我们知道化二次型为标准形的过程中,可逆变换 $x = Py$ 不唯一,对应的标准形也不唯一,但标准形中非零系数个数,正系数个数,负系数个数都是不变的,这就是下述的惯性定理.

定理 1 设二次型 $f = x^T Ax$,秩为 r,经过两个可逆线性变换

$$x = Py \quad 及 \quad x = Qz$$

分别化二次型为标准形

$$f = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \cdots + t_r y_r^2 \quad (t_i \neq 0) \text{ 及}$$

$$f = k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2 + \cdots + k_r z_r^2 \quad (k_i \neq 0) \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

则 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 中正数的个数与 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数相等.这里正数个数称为正惯性指数,负数个数称为负惯性指数,非零系数个数称为秩,分别记作 π, υ, r.

规定二次型 f 的规范形为 $f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$,其系数依次为 $1, 1, \cdots, 1, -1, -1, \cdots, -1, 0, 0, \cdots, 0$(如果有的话),显然规范形是唯一的.

比较常用的二次型是标准形的系数为全正(或全负)的情形,我们来定义正定(或负定)二次型.

定义 1 设 $f = x^T Ax$ 为 n 元实二次型,若对任意一组不全为零的实数 x_1, $x_2, \cdots, x_n$,总有

$f > 0$,则称这个二次型为正定二次型,对应的实对称阵为正定矩阵,用 $A > 0$ 记;

$f < 0$,则称这个二次型为负定二次型,对应的实对称阵为负定矩阵,用 $A < 0$ 记;

f 可正,可负,称二次型 f 为不定型.

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 为正定二次型, $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$ 为负定二次型, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$ 为不定型.

给出一个二次型,如果它是标准形,那么它正定的充分必要条件是它的 n 个平方项的系数全为正.对于一般的二次型,怎样来判断其是否为正定呢?利用惯性定理可得:

定理 2　n 个变量的实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定的充分必要条件是其正惯性指数 π 等于变量个数 n.

证　充分性　因为有满秩线性变换

$$x = Py$$

可将二次型化成标准形

$$f = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n > 0$,对任一 $x \neq 0$,必有 $y = P^{-1}x \neq 0$(否则与 $x \neq 0$ 矛盾),使

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 > 0$$

故 $f(x)$ 为正定二次型.

必要性　用反证法.设 $\pi < n$,则可找到满秩线性变换

$$x = Py$$

将 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 化成标准形 $f = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$,且其中有某个系数 $d_s \leq 0$,取 $y = e_s = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$,就有 $x = Pe_s \neq 0$,此时

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = e_s^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APe_s = d_s \leq 0$$

与 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定矛盾.故必有 $\pi = n$.

推论　n 阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是矩阵 A 具有 n 个正的特征值.

因此,可得下面正定的判别定理:

定理 3　设实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$,则下列四条正定的结论等价:

(1) 对任意的 n 维非零向量 x,有 $f = x^{\mathrm{T}}Ax > 0$;

(2) 二次型 f 的实对称矩阵的特征值全为正数;

(3) 存在可逆阵 P,使得 $A = P^{\mathrm{T}}P$;

(4) 实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}(-A)x$ 为负定二次型.

证　由定理 2 的证明中取可逆变换 $x = Py$ 为正交变换 $x = Qy$,这时,标准形中的 n 个平方项系数恰为 A 特征值,故(1)与(2)等价;

由定理 2 的证明中取特殊可逆变换 $x = Cy$,化二次型为规范形,故 A 正定的充分必要条件是规范形为 $y^{\mathrm{T}} I y$,故 $C^{\mathrm{T}} AC = I$(合同于单位阵),令 $P = C^{-1}$ 可得(1)与(3)等价;

由定义 1 及 $f = x^{\mathrm{T}}(-A)x = -x^{\mathrm{T}}Ax$ 可知,对任意非零向量 x,$x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ 的充分必要条件是 $x^{\mathrm{T}}(-A)x < 0$,故(1)与(4)等价 .

注 只有当 A 是实对称阵时,才能考虑其正定性 .

例 1 若 A 为正定矩阵,则 $a_{ii} > 0$;若 A 为负定矩阵,则 $a_{ii} < 0$.

证法 1 因为 A 为正定矩阵,所以对非零向量 $x = e_i = [0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$,有

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = e_i^{\mathrm{T}}Ae_i = a_{ii} > 0, \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

成立 .

同理,A 为负定矩阵,则对非零向量 $x = e_i = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$ 有

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = e_i^{\mathrm{T}}Ae_i = a_{ii} < 0, \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

成立 .

证法 2 设 A 为正定矩阵,由定理 3 知存在可逆阵 P 使 $A = P^{\mathrm{T}}P$,由于 P 可逆,所以 P 的每个列向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都是非零向量,故

$$a_{ii} = p_i^{\mathrm{T}} p_i = \| p_i \|^2 > 0$$

同理可得,A 为负定矩阵时,$a_{ii} < 0$ 成立 .

例 2 实对称阵 A 正定,则 A^{-1},A^* 也正定 .

证法 1 因为 A 正定,所以 $A^{\mathrm{T}} = A$,于是 $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1}$,即 A^{-1} 是对称阵;再由定理 3 知 A 的所有特征值全大于零,故 A^{-1} 的所有特征值为 A 的所有特征值的倒数,也全大于零,所以 A^{-1} 也正定 .进而 $|A|$ 为特征值的乘积也大于零,且

$$(A^*)^{\mathrm{T}} = (|A| A^{-1})^{\mathrm{T}} = |A| (A^{-1})^{\mathrm{T}} = |A| A^{-1} = A^*$$

即 A^* 为对称阵,故 $A^* = |A| A^{-1}$ 的特征值全大于零,于是 A^* 也正定 .

证法 2 因为 A 正定,所以存在可逆阵 P,使得 $A = P^{\mathrm{T}}P$,这时,

$$A^{-1} = P^{-1}(P^{\mathrm{T}})^{-1} = Q^{\mathrm{T}}Q$$

其中 $Q = (P^{\mathrm{T}})^{-1}$ 可逆阵,故 A^{-1} 正定 .而伴随阵 $A^* = |A| A^{-1} = R^{\mathrm{T}}R$,其中 $R = \sqrt{|A|}(P^{\mathrm{T}})^{-1}$ 为可逆阵,故 A^* 也正定 .

例 3 试问 t 为何值时,

$$f = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_3^2 + 8x_2x_3 + t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

为正定二次型 .

解　二次型 $q = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_3^2 + 8x_2x_3$ 的实对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

令 $|A - \lambda I| = 0$,求出三个特征值为 2,2,-7,必有正交变换将二次型 q 化为标准形

$$q = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$$

同时,由正交变换保持长度不变性知,该正交变换将二次型 f 化为标准形

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2 + t(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (2+t)y_1^2 + (2+t)y_2^2 + (t-7)y_3^2$$

为了使二次型 f 正定,必须 $2 + t > 0$, $2 + t > 0$, $t - 7 > 0$,故得 $t > 7$.

若称对角线元是 A 的前 k 个对角线元 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{kk}$ 的 k 阶子式为矩阵 A 的 k 阶顺序主子式(或前主子式),则可以利用实对称矩阵的各阶顺序主子式的值来判定其是否为正定,这里不加证明地给出下面判别正定的定理.

定理 4　n 阶实对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式皆为正数,即

$$D_1 > 0,\quad D_2 > 0,\quad \cdots,\quad D_n > 0 \tag{5.5.1}$$

其中

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

值得着重指出的是,将式(5.5.1)改为

$$D_1 < 0,\quad D_2 < 0,\quad \cdots,\quad D_n < 0$$

不是 A 为负定的充分必要条件.事实上,根据定理 4 可得到:

推论　n 阶实对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是

$$(-1)^k D_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.5.2}$$

其中 D_k 是 A 的 k 阶顺序主子式.

证　对于 $(-f) = x^{\mathrm{T}}(-A)x$ 而言,矩阵 $-A$ 的 k 阶顺序主子式 $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{22} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & -a_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^k D_k > 0$$

是 $-A$ 为正定的充分必要条件,也就是 A 为负定的充分必要条件.

例 4　**判断二次型** $f = -5x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 4xy + 4xz$ **的负定性**.

解　**因为二次型** f **的实对称矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

而 $a_{11} = -5 < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0$, $|A| = -80 < 0$, **由定理 4 的推论可知** f **为负定二次型**.

注　**本题也可通过判断** $-A$ **为正定阵来解决**.

例 5　**求 λ 的取值,使二次型**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$$

为正定二次型.

解　**二次型** f **的实对称矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ -1 & \lambda & 3 \end{bmatrix}$$

由于 f **为正定二次型,故所有顺序主子式全大于零,即**

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad |A| > 0$$

解出　$-(1+\sqrt{2}) < \lambda < \sqrt{2} - 1$, **即为所求**.

5.6　本章小结

5.6.1　内容框图

矩阵的特征值与特征向量　　二次型

矩阵的对角化　　二次型的矩阵表示 ⟶

实对称矩阵对角化 ⟶ 用正交变换化二次型为标准形　　正定矩阵

5.6.2　基本要求

(1) **理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质,并掌握其求法**.

(2) 了解相似矩阵的概念与性质,知道矩阵可对角化的充要条件,会将实对称矩阵正交对角化.

(3) 了解二次型及其矩阵表示.会用正交变换化二次型为标准形.

(4) 知道二次型的秩、惯性律,了解二次型和对应矩阵的正定性及其判别方法.

5.6.3　内容概要

1) 特征值与特征向量

(1) 概念:

设 A 是 n 阶方阵,满足 $Ax=\lambda x(x\neq 0)$ 的数 λ 称为 A 的特征值,x 为对应的特征向量,行列式 $f(\lambda)=|A-\lambda I|$ 为 A 的特征多项式.

(2) 求法:

①方程 $|A-\lambda I|=0$ 的所有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即为 A 的全部特征值.

②齐次方程组 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的任一非零解即为对应于 λ_i 的特征向量,一般取基础解系.

(3) 性质:

①设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A),\quad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$$

②属于不同特征值的特征向量线性无关.

③A 可逆　A 没有零特征值.

④特征值 λ 的几何重数 ρ_λ 与代数重数 m_λ 满足:

$$1\leq\rho_\lambda\leq m_\lambda$$

⑤若 λ 是方阵 A 的特征值,x 是对应的特征向量,k 为常数,m 为正整数,则 $k\lambda,\lambda^m,\lambda+k,\dfrac{1}{\lambda}$ 及 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$ 分别是矩阵 $kA,A^m,A+kI,A^{-1}$ 及 $f(A)$ 的特征值,而 x 是对应的特征向量.

⑥A 与 A^{T} 有相同的特征值,但特征向量未必相同.

2) 矩阵对角化

(1) 相似矩阵的性质:

若 $P^{-1}AP=B$ 即 A 相似于 B,则有

①$|A|=|B|$.

②$|A-\lambda I|=|B-\lambda I|$,从而 A 和 B 有相同的特征值.

③$r(A)=r(B)$.

(2) n 阶矩阵 A 可对角化的条件:

①A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

②若 A 有 n 个互不相等的特征值,则 A 可对角化.

③A 可对角化的充要条件是对 A 的任一特征值 λ,有

$$m_\lambda = \rho_\lambda$$

(3) 实对称矩阵的正交对角化:

设 A 是实对称矩阵,则有

①A 的特征值都是实数.

②A 的任一特征值 λ 均有 $\rho_\lambda = m_\lambda$.

③A 的不同特征值对应的特征向量必正交.

由①②③可得,实对称矩阵 A 可正交对角化,即 A 正交相似于一实对角阵,即存在正交阵 Q,使 $Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$ 成立.其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

(4) 将 A 对角化方法:

①求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,其中互不相等的特征值为 $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_r}$ $(r \leq n)$.

②若 A 可对角化,则 k 重特征值 λ 必对应 k 个线性无关的特征向量,求出每一个齐次方程组 $(A - \lambda_{i_k} I)x = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$ 的基础解系,合并后必可得到 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

③令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$,则 P 可逆,且有

$$P^{-1}AP = \Lambda \text{ 或 } A = P\Lambda P^{-1}$$

④若 A 是实称阵,则在②的基础上对 A 的 $k(k > 1)$ 重特征值 λ,将求出的 $(A - \lambda I)x = 0$ 的基础解系正交化.这样合并后得到的 n 个特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 必相互正交,再将每一个 α_i 单位化,则可得到规范正交特征向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots$, η_n.令 $Q = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$,则 Q 为正交阵,且满足 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$,即 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

3) 关于二次型

(1) 二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 的矩阵 A 是对称阵, $r(A)$ 也称为二次型 f 的秩.当 A 是对角阵时, f 为标准形.

(2) 对任一二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$,总可找到满秩线性变换 $x = Py$ 化二次型为标

准形,即

$$f = x^{T}Ax = y^{T}P^{T}APy = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $r = r(A)$.

(3) 正交变换法:对二次型 $f = x^{T}Ax$,由于 A 是对称阵,故按实对称矩阵正交对角化的方法总可找到正交阵 Q,使

$$Q^{T}AQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

所以由正交变换 $x = Qy$ 可得

$$f = x^{T}Ax = y^{T}Q^{T}AQy = y^{T}\Lambda y = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

注　重点掌握正交变换法 .在用正交变换得到的标准形平方项前的系数必为 A 的特征值 .

(4) 惯性律

对一个二次型 $f = x^{T}Ax$,用不同的满秩线性变换将其化成标准形,标准形的形式可以是不同的,但标准形中平方项前正系数个数 p 和负系数个数 $r - p$ 都是唯一确定的 .

(5) 正定矩阵的判别法

设 A 是 n 阶实对称矩阵 .

①若 A 的正惯性指数等于 n,则 A 正定 .

②若 A 的特征值全是正的,则 A 正定 .

③若 A 的各阶顺序主子式均大于零,则 A 正定 .

④用定义,若 " $x \neq 0, x \in R^n$, $f = x^{T}Ax > 0$,则 A 正定 .

注　以上各条均为实对称矩阵 A 正定的充要条件 .

习 题 五

A 组

1 . 求下列矩阵的特征值与特征向量 .

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$; (2) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$; (3) $A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$.

2 . 已知 λ 是 A 的特征值, 试证 $\lambda+a$ 是 $A+aI$ 的特征值 .

3 . 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$, (1) 求 A 的特征值, (2) 求 $I+A^{-1}$ 的特征值 .

4 . 试证:若 $B=P^{-1}AP$, λ_0 是 A 的某个特征值, 又知 g 是 A 的属于 λ_0 的特征向量, 则 $P^{-1}g$ 是 B 的属于 λ_0 的特征向量 .

5 . 设矩阵 A 满足 $A^2=A$(称这样的 A 为幂等阵), 试证:

(1) A 的特征值只能是 1 或 0;

(2) $A+2I$ 必为满秩阵 .

6 . 设 η_1, η_2 分别是矩阵 A 属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 试证 $\eta_1+\eta_2$ 不是 A 的特征向量 .

7 . 问下列矩阵能否与对角矩阵相似? 为什么?

(1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}-2&0&-4\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$.

8 . 已知

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$$

若已知 A 与 B 相似, 试求 a、b 的值及矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$.

9 . 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&x&1\end{bmatrix}$ 可以对角化, 求参数 x 及 A^n .

10 . 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $|A|\neq 0$, 证明 AB 与 BA 相似 .

11．设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$；对应的特征向量依次为

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\quad u_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

求 A．

12．设三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，求：

(1) $B=A^2-4A+3I$ 的特征值；　(2) $|B|$；　(3) $|A-5I|$．

13．求正交矩阵 Q，将下列矩阵正交对角化．

(1) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$；　(2) $B=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$．

14．写出下列二次型的矩阵．

(1) $f(x,y)=4x^2-6xy-7y^2$．

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$．

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&5\end{bmatrix}x$．

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&2\\7&4&5\end{bmatrix}x$．

15．写出与下列矩阵对应的二次型

(1) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1&1&2&0\\1&2&3&0\\2&3&3&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$．

16．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，分别作下列可逆线性变换，求新二次型．

(1) $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&1&-1\\0&1&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$．

17．用正交变换化下列二次型为标准形，并求所用的正交变换矩阵．

(1) $f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

(2) $f=2x_1x_2-2x_3x_4$.

18. 已知二次型 $f=5x^2-2xy+6xz+5y^2-6yz+cz^2$ 的秩为 2,求参数 c;并指出 $f=1$ 表示何种曲面.

19. 判定下列二次型的正定性.

(1) $f=3x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+16x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$;

(3) $f=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$.

20. 问参数 t 取何值时,下列二次型 f 正定.

(1) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+2x_2^2+(1-t)x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$.

B 组

1. 已知 n 阶满秩矩阵 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及对应的特征向量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$,试求伴随矩阵 A^* 的特征值及对应的特征向量.

2. 已知三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$ 的行列式为 -1,且与 A 对应的伴随矩阵 A^* 有一个特征向量 $[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 的值.

3. 已知三阶矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的三个特征向量分别为 $\alpha_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,2,4]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,3,9]^{\mathrm{T}}$,向量 $\beta=[1,1,3]^{\mathrm{T}}$.

(1) 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 来表示 β;(2) 求矩阵 A;(3) 求 $A^n\beta$.

4. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$,$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$,求出正交阵 Q 与对角阵 Λ,使 $Q^{-1}f(A)Q=\Lambda$.

5. 已知二次型

$$f=9x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+16x_1x_3-20x_2x_3+k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

通过正交变换 $x=Qy$ 化成标准形

$$-7y_1^2+11y_2^2+20y_3^2$$

(1) 试求出 k 的值及正交矩阵 Q;

(2) 试求出使 f 为正定二次型的 k 的取值范围.

6. 已知矩阵 A,B 都是正定矩阵,试证矩阵 $A+B$ 也是正定矩阵.

自测题五

一、填空题

1．已知 $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{bmatrix}$的特征值$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=12$，则 $x=$__________．

2．设 n 阶方阵 A 的特征值为 $2,4,\cdots,2n$，则行列式$|A-3I|=$__________．

3．若 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$与 $\Lambda=\begin{bmatrix}y & & \\ & z & \\ & & -4\end{bmatrix}$相似，则 $x=$__________，$y=$__________，$z=$__________．

4．二次型 $f(x,y,z)=3x^2-2y^2+3xz-2yz$ 的矩阵表示式为__________，其秩为__________．

5．设 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\0\end{bmatrix}$，$A=(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})^2$，若 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，则 $f(\beta)=$__________．

6．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+(k-3)x_2^2+(k-5)x_3^2$，当 k__________时正定．

二、选择题

1．设$\lambda=2$是非奇异方阵 A 的一个特征值，则$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值为(　　)．

(A) $\frac{4}{3}$；　(B) $\frac{3}{4}$；　(C) $\frac{1}{2}$；　(D) $\frac{1}{4}$．

2．$B=P^{-1}AP$，λ_0 是 A、B 的一个特征值，α是 A 的关于λ_0 的特征向量，则 B 的关于λ_0 的特征向量是(　　)．

(A) α；　(B) $P\alpha$；　(C) $P^{-1}\alpha$；　(D) $P^{\mathrm{T}}\alpha$．

3．下列二阶矩阵可对角化的是(　　)．

(A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 5\end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}$；　(C) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$．

4．使实二次型$[x,y,z]\begin{bmatrix}k & k & 1\\ k & k & 0\\ 1 & 0 & k^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$正定的参数 k 应该是(　　)．

(A) $k>0$；　(B) $k^2>0$；　(C) $k<0$；　(D) 不存在．

三、给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$,试求出 A 的特征值,问 x,y 满足什么条件时,矩阵 A 可对角化,为什么?

四、已知向量 $\xi=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量,求常数 k 的值.

五、设 3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i\quad(i=1,2,3)$,且

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\quad\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

求矩阵 A.

六、求一个正交变换 $x=Qy$,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形,并判断是否为正定二次型.

七、设 U **为可逆矩阵**, $A = U^{\mathrm{T}} U$, **证明**: $f = x^{\mathrm{T}} Ax$ **为正定二次型** .

自测题五答案

一、填空题

1．$x=4$ （由 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$ 即得）；

2．$-(2n-3)!!$ （$A-3I$ 的特征值为 $2-3,4-3,\cdots,2n-3$，再由 $|A-3I|=(2-3)\cdot(4-3)\cdots\cdots(2n-3)$ 即得）；

3．$x=4,y=5,z=5$ （相似矩阵有相同的特征值，故而 -4 是 A 的特征值，即有 $|A-(-4)I|=0$，解得 $x=4$，再由 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\Lambda)$ 及 $|A|=|\Lambda|$，即可解得 $y=5,z=5$）；

4．$[x,y,z]\begin{bmatrix}3 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & -2 & -1\\ \frac{3}{2} & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$，秩为 3；

5．270 （$f(\beta)=\beta^{\mathrm{T}}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\beta=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)$）；

6．$k>5$ （由二次型的各阶顺序主子式均大于零即得）．

二、选择题

1．B （A 有一个特征值 2，故 $\frac{1}{3}A^2$ 有一个特征值 $\frac{4}{3}$，$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值 $\frac{3}{4}$）；

2．C （由 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，及 $PBP^{-1}=A$，可得 $PBP^{-1}\alpha=A\alpha=\lambda_0\alpha$，亦即 $B(P^{-1}\alpha)=P^{-1}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(P^{-1}\alpha)$）；

3．C （两特征值互不相等，必可对角化）；

4．D （因为其 2 阶顺序主子式为零）．

三、解：由 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ x & 1-\lambda & y\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$．为使 A 可对角化，必须使特征值 1 的代数重数（二重）等于其几何重数（即其对应的线性无关特征向量的个数），即必需有 $r(A-\lambda_1 I)=1$，于是，即得 $x+y=0$ 时，A 可对角化．

四、解：设 $A^{-1}\xi=\lambda\xi$，即 $A\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$，记 $t=\frac{1}{\lambda}$，则有

$$A\boldsymbol{\xi} = t\boldsymbol{\xi}.$$

即

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+k \\ 2+2k \\ 3+k \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ tk \\ t \end{bmatrix},$$

由对应元素相等解得 $k = -2$ 或 $k = 1$.

五、$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{bmatrix}$(提示:显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交,若令

$Q = \left[\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}, \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}, \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\right]$,则 Q 为正交阵,且有 $A = Q\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}Q^T$).

六、

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$, $x = Qy$ 得 $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,不正定.

七、证明: " $x \neq 0$, $f = x^T A x = x^T U^T U x = (Ux)^T (Ux) = \|Ux\|^2$.因为 U 可逆,且 $x \neq 0$,所以向量 $Ux \neq 0$,故而 $\|Ux\|^2 > 0$,即 f 正定.

附录 1

习题解答与提示

习题一解答

A 组

1．由 $A=B$ 知 $x=2u, 2y=u, z=1, 2x=-8$，即 $x=-4, y=-1, z=1, u=-2$．

2．$2A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 10 & -2 & 12 \end{bmatrix}$；$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 4 \end{bmatrix}$；$2A-3B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 4 & 1 & 18 \end{bmatrix}$．

3．$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；$BA=\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$．

4．(1) $[2, -1]$；(2) $\begin{bmatrix} a+5 & -6 & b-30 & 15 \\ -3 & 6 & 18 & -9 \\ 2a-7 & 22 & 2b+42 & -21 \end{bmatrix}$；

(3) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$．

5．$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$（其中 a、b、c 均为任意实数）．

解：（待定系数法）设与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$，则

$AB=\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$．由 $AB=BA$，即得 $d=g=h=0$，$e=i=a$，

$f=b$，故而 $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$．

6．(1)、(2)、(3) 均不成立．

对 (1) 而言，只要求出 AB、BA 即得，因为 (1) 不成立，故而 (2)、(3) 不成立．

7．(1) 取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$；(2) 取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) 取 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

8. (1) 因为 $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1,1]$, 所以 $A^n=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1,1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1,1]\cdots\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1,1]$

$$=\left([1,1,1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1,1]=6^{n-1}A=6^{n-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix};$$

(2) 因为 $A^2=4I, A^3=4A$, 所以

当 n 为偶数时, $A^n=(A^2)^{\frac{n}{2}}=(2^2I)^{\frac{n}{2}}=2^nI$;

当 n 为奇数时, $A^n=A^{n-1}A=(2^{n-1}I)A=2^{n-1}A$.

9. $AB^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5&-2&1\\3&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-2\\2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19&-9\\-1&-7\end{bmatrix}$;

$BA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-3&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\-2&4\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19&-1\\-9&-7\end{bmatrix}$.

10. (1) $(B^2)^{\mathrm{T}}=(BB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=(-B)(-B)=B^2$;

(2) $(AB-BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}-(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=-BA+AB=AB-BA$;

$(AB+BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}+(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=-BA-AB=-(AB+BA)$.

11. (1) $[A \mid I]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\-3&4&0&1\end{array}\right]\overset{r_{12}(3)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&10&3&1\end{array}\right]$

$$\overset{r_2(\frac{1}{10})}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{3}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right]\overset{r_{21}(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&\frac{3}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right], \text{故 } A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{3}{10}&\frac{1}{10}\end{bmatrix};$$

(2) $B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-11&4&-8\\4&-2&1\\2&-1&2\end{bmatrix}$; (3) $C^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}$.

12. 因 $A+2A-3I=O$, 即 $A(A+2I)=3I$, 故 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)$, $(A+2I)^{-1}=\frac{1}{3}A$;

又由 $A^2+2A-3I=O$, 得 $(A+4I)(A-2I)=-5I$, 故

$$(A+4I)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2I)$$

13 . (1) $\left[\, I \mid A^{-1} \right]$; (2) $\begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}A & A^{\mathrm{T}} \\ A & I \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} I & A^{-1} \\ A & I \end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$.

14 . **移项**, **得** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **所以** $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

15 .“ ”**显然**;

“ ”**取** $x = e_i = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, **由** $x^{\mathrm{T}} A = 0$ **知** $e_i^{\mathrm{T}} A = 0$, **即** $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] = 0$, **由** i **的任意性**, **得** $A = O$.

16 . (1)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{r_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{array}\right] \overset{r_{12}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \end{array}\right] \underset{r_2(-1)}{\overset{r_{21}(3)}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right], \text{故 } X = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix};$$

(2) **显然**, **原题即** $R_{12} X C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, **于是**

$$X = R_{12}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} C_{23}^{-1} = R_{12} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} C_{23}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} C_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

(3) **两边取转置**, **得** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, **由**

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \underset{r_{23}(1)}{\overset{r_{21}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \underset{r_{23}}{\overset{r_{12}}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right] \underset{r_3(\frac{1}{3})}{\overset{r_{21}(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \overset{r_{31}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

得 $X^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} -2 & -\frac{8}{3} \\ 2 & 5 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$，即 $X=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

B 组

1．$(A+B)^2=A+B$，即 $A^2+AB+BA+B^2=A+B$，再由 $A^2=A, B^2=B$ 知

$$AB+BA=O \tag{$*$}$$

$(*)$式两边左乘 A 得

$$A^2B+ABA=AB+ABA=O$$

$(*)$式两边右乘 A 得

$$ABA+BA^2=ABA+BA=O$$

综合即得 $AB=BA$，再由$(*)$式知 $AB=O$.

2．$f(A)=(A-I)^3+3I=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3+3I=3I$.

3．参见例 8.

4．$(C^{\mathrm{T}}B^{-1})^{\mathrm{T}}-(AB^{\mathrm{T}})^{-1}(C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+I)^{\mathrm{T}}=(B^{-1})^{\mathrm{T}}C-(B^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}(AC+I)$

$=(B^{-1})^{\mathrm{T}}C-(B^{\mathrm{T}})^{-1}C-(B^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}=(B^{-1})^{\mathrm{T}}C-(B^{-1})^{\mathrm{T}}C-(B^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}$

$=-(B^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}$.

5．由 AA^{T} 的第(i,j)元素为$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$，知 AA^{T} 的(i,i)元素为$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2$，故

$$\mathrm{tr}(AA^{\mathrm{T}})=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2 .$$

6．$(I+B)^{-1}=\left[I+(I+A)^{-1}(I-A)\right]^{-1}$

$=\left[(I+A)^{-1}(I+A)+(I+A)^{-1}(I-A)\right]^{-1}$

$=\left[(I+A)^{-1}(I+A+I-A)\right]^{-1}=\frac{1}{2}(A+I)$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.$$

7．(1) 由 $A+B=AB$ 得 $(A-I)(B-I)=I$，即 $(A-I)^{-1}=B-I$，于是

$$(B-I)(A-I)=BA-A-B+I=I$$

即 $BA=A+B$，所以 $AB=BA$；

(2) 由 $A-I=(B-I)^{-1}$ 知

$$A=I+(B-I)^{-1}=I+\begin{bmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{-1}=I+\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

8．“　”显然．

“　”取 $x=e_i=[0,\cdots,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，$y=e_j=[0,\cdots,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，由 $x^{\mathrm{T}}Ay=0$ 知 $e_i^{\mathrm{T}}Ae_j=a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，故 $A=O$．

习题二解答

A 组

1．(1) $-(a-b)^2$；(2) -4；(3) 18；(4) $1+a+b+c$；(5) -1．

2．利用对角线法则，

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 4 & 10 & x+6 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)(x-7)(x+6)+(-2)\cdot 2\cdot 10+4\cdot(-4)\cdot 4\\
&\quad -2\cdot 4\cdot(x-7)-4\cdot(-2)\cdot(x+6)-(x-1)\cdot 10\cdot(-4)\\
&=(x-1)(x^2-x-42)-40-64-8x+56+8x+48+40x-40\\
&=(x-1)(x^2-x-42)+40(x-1)\\
&=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x-2)(x+1)=0\,.\end{aligned}$$

得 $x=1$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$．

3．(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}+10(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}\\
&=4\left(2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)-\left(4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)\\
&\quad+10\left(2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}+2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)\\
&=4(28+6)-(12-56)+10(-20+2)=0\end{aligned}$$

(2) $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}+3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-3\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2+30=32\,.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 7(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-4) = -56$

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= a\left(b\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix} \right) - \left((-1) \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} \right)$

$= a(bcd + b + d) - (-cd - 1) = abcd + ab + ad + cd + 1$

4.(1) **将第 2、3 两列全加到第 1 列,即证;**

(2) **左式** $= \dfrac{1}{abcd} \begin{vmatrix} abcd & a^2 & a^3 & a^4 \\ abcd & b^2 & b^3 & b^4 \\ abcd & c^2 & c^3 & c^4 \\ abcd & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} =$ **右式**

(**最后一个等式利用了** $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ **这个性质**).

5.(1) $D_4 \xlongequal[r_{43}(-1)]{r_{21}(-1)} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_{32}(-1)]{r_{14}(-1)} xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2 y^2;$

(2) $D_5 = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a & a & 0 & 0 \\ b & c & d & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & bc \\ 0 & 0 & 0 & cd & da \end{vmatrix}$

$$= -a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix} = -a(d-b)(d-c)(c-b) \cdot bd\begin{vmatrix} a & c \\ c & a \end{vmatrix}$$

$$= abd(d-b)(d-c)(c-b)(c^2-a^2).$$

6. (1) **将第 3 行的 (-1) 倍分别加到其余各行，再按第 3 列展开，即得**

$D_n = 6(n-3)!$

(2) **按第 1 列展开，即得**

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

(3) **将其余各列全加到第 1 列，提取公因子之后，再将第 1 行的 (-1) 倍加到其余各行，得**

$$D_n = (3n-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 & n \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 2-n \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 2-n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2-n \end{vmatrix}$$

$$= (3n-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & n-2 & 2-n \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ n-2 & \cdots & 0 & 2-n \\ 0 & \cdots & 0 & 2-n \end{vmatrix}$$

$$= (3n-2) \cdot (2-n)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \iddots & \cdots \\ n-2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (3n-2)(2-n) \cdot (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(n-2)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(3n-2)(n-2)^{n-1}.$$

7. (1) **由** $A^k = O$ **知** $|A^k| = |A|^k = 0$，**即** $|A| = 0$；

(2) $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(I-A) = I - A^k = I$.

8. **由** $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，**知** $A^* = |A|A^{-1}$，**又** $|A|^{-1} = |A^{-1}|$，**故**

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{(-1)} = -1,$$

所以 $A^* = -A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

9. $|\alpha_2, -2\alpha_4, 3\alpha_1, -\alpha_3| \xRightarrow[c_{24}]{c_{13}} |3\alpha_1, -\alpha_3, \alpha_2, -2\alpha_4|$

$\xRightarrow{c_{23}} -|3\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, -2\alpha_4| = -3\cdot(-1)\cdot(-2)|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = -6m$.

10. 由 $A^{\mathrm{T}}A = I$ 得 $|A| = \pm 1$, 又 $|A| < 0$, 故 $|A| = -1$, 因为

$|I+A| = |A^{\mathrm{T}}A + A| = |(A^{\mathrm{T}} + I)A| = |A^{\mathrm{T}} + I||A| =$

$|(A+I)^{\mathrm{T}}||A| = |A+I||A| = -|A+I|$, 所以 $|I+A| = 0$.

11. (1) $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -4, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 3;$$

(2) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 5$, $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 10 & -3 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10$,

$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -5$; $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 10 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 15$, 所以 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$;

(3) $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 224 - 15 = 209$,

$D_1 = 209$, $D_2 = 209$, $D_3 = -209$, $D_4 = 209$, 所以

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

12. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则有

$$\begin{cases} 1^2 a + 1\cdot b + c = 1 \\ (-1)^2 a + (-1)b + c = 9 \\ 2^2 a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

由克拉默法则, 解得 $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$, 故

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

13. 由克拉默法则的逆否命题, 知必有

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$$，解之即得 $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$.

B 组

1 . (1) $$D_3 \xrightarrow[c_{31}(1)]{c_{21}(1)} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_{13}(-1)]{r_{12}(-1)} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)[(b-c)(c-b)-(a-c)(a-b)] = 3abc - a^3 - b^3 - c^3;$$

(2) $$D_3 = bce\begin{vmatrix} -a & d & f \\ a & -d & f \\ a & d & -f \end{vmatrix} = abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_{13}(1)]{r_{12}(1)} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef .$$

2 . (1) $$D_n \xrightarrow[i\neq 1]{c_{i1}(1)} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i\neq 1]{r_{1i}(-1)} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1};$$

(2) 将第 $2n$ 行逐次与上一行交换直至换到第 2 行，将第 $2n$ 列逐次与前一列交换直至换到第 2 列，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ b & a & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & b & a & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & b & & & & & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}D_{2(n-1)}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}$$

$$=(a^2-b^2)(a^2-b^2)D_{2(n-2)}=\cdots=(a^2-b^2)^{n-1}D_2=(a^2-b^2)^n;$$

(3) 从第 $n-1$ 列起,每一列的 (-1) 倍加到后一列上去,一直进行到第 1 列,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$$

3. (1) 第 2 列乘以 $(-x)$ 加到第 1 列后,第一列提出 $(1-x^2)$,再将第 1 列的 $(-x)$ 倍加到第 2 列即可;

(2) 加一行一列得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行列式}]{\text{范德蒙德}}(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

“=”左端按第 5 列展开后,比较两端 x^3 的系数即得证.

4. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, $|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2=\frac{1}{9}$,

$$\left|\left(\frac{1}{7}A\right)^{-1}-12A^*\right|=|7A^{-1}-12A^*|=\left|7\cdot\frac{1}{|A|}A^*-12A^*\right|$$

$$=|21A^*-12A^*|=|9A^*|=9^3\cdot|A^*|=9^3\cdot\frac{1}{9}=81.$$

5. $64=|A+B|=\left|2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{8}{7}\boldsymbol{\alpha}_4\right|=\frac{64}{7}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\frac{64}{7}|A|$,所以

$|A| = 7$.

6．**证**:1°　**当** $n = 1, 2$ **时,命题显然成立**;

2°　**设对阶数小于等于** $n-1$ **时命题都成立,那么对** D_n **按第** n **列展开,有**

$$D_n = 1 \cdot (-1)^{n-1+n} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} + 2\cos\alpha D_{n-1}$$

$$= -D_{n-2} + 2\cos\alpha D_{n-1} = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

$$= \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha$$

习题三解答

A 组

1．否;否．

2．(1) $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&-1&-2\\-1&-2&2\end{bmatrix}\overset{r_{12}(2)}{\underset{r_{13}(1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&-1&2\end{bmatrix}\overset{r_{21}(-1)}{\underset{r_{23}(1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$;

(2) $B=\begin{bmatrix}2&0&3&1&4\\3&-5&4&2&7\\1&5&2&0&1\end{bmatrix}\overset{r_{31}(-2)}{\underset{r_{32}(-3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&-10&-1&1&2\\0&-20&-2&2&4\\1&5&2&0&1\end{bmatrix}$

$$\overset{r_{13}}{\underset{r_2\left(-\frac{1}{20}\right)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&2&0&1\\0&1&\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{5}\\0&-10&-1&1&2\end{bmatrix}\overset{r_{21}(-5)}{\underset{r_{23}(10)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&2\\0&1&\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix};$$

(3) $C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{r_{12}(-1)}{\underset{r_{23}(-1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{r_{41}(-1)}{\underset{\substack{r_{42}(1)\\r_{43}(-1)}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$;

(4) $D=\begin{bmatrix}1&1&-1\\3&1&0\\2&4&-5\\4&3&2\end{bmatrix}\overset{r_{12}(-3)}{\underset{\substack{r_{13}(-2)\\r_{14}(-4)}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-2&3\\0&2&-3\\0&-1&6\end{bmatrix}\overset{r_{24}}{\underset{\substack{r_{34}(1)\\r_2(-1)}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-6\\0&2&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\overset{r_{23}(-2)}{\underset{r_{21}(-1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&-6\\0&0&9\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{r_3\left(\frac{1}{9}\right)}{\underset{\substack{r_{31}(-5)\\r_{32}(6)}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

3．(1) $A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\-1&2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-4\\2&-3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-4\\0&1&9\end{bmatrix}$

所以 $r(A)=2$,可取 $\begin{vmatrix}2&-3\\-1&2\end{vmatrix}$ 为 2 阶非零子式;

(2) $B=\begin{bmatrix}0&1&3&-2\\2&2&-1&1\\4&5&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&2&-1&1\\0&1&3&-2\\0&1&3&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&2&-1&1\\0&1&3&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $r(B)=2$,**且可取** $\begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix}$ **为 2 阶非零子式**;

(3) $C=\begin{bmatrix}3&2&2\\6&4&4\\-5&-4&-6\\10&7&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&2&2\\-5&-4&-6\\0&-1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}6&4&4\\-5&-4&-6\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\sim$

$\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&-4&-16\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

所以 $r(C)=2$,**且可取** $\begin{vmatrix}3&2\\-5&-4\end{vmatrix}$ **为 2 阶非零子式**.

4. $A=\begin{bmatrix}1&-1&k&-2\\-2&2k&-2&4k\\3k&-3&3&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&k&-2\\0&2(k-1)&2(k-1)&4(k-1)\\0&3(k-1)&3(1-k^2)&6(k-1)\end{bmatrix}$

①**当** $k=1$ **时**, $A\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,**此时** $r(A)=1$;

②**当** $k\neq1$ **时**, $A\sim\begin{bmatrix}1&-1&k&-2\\0&1&1&2\\0&1&-(1+k)&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&k&-2\\0&1&1&2\\0&0&-2-k&0\end{bmatrix}$,

所以　当 $k=-2$ **时**, $r(A)=2$;**当** $k\neq-2$ **时**, $r(A)=3$.

综合可得,**当** $k=1$ **时**, $r(A)=1$;**当** $k=-2$ **时**, $r(A)=2$;**当** $k\neq1$ **且** $k\neq-2$ **时**, $r(A)=3$.

5. (1) $A=\begin{bmatrix}2&4&7\\-1&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以,**解为** $\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_3=0\end{cases}$,**令** $x_2=c$,**则通解为** $x=c\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$, $(c\in\mathrm{R})$;

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\1&-2&5\\-2&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&-1&3\\0&-2&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以方程组只有零解,即 $x=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

(3) $A=\begin{bmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&5&3\\1&-2&-1&-1\\0&0&7&5\end{bmatrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1&-1\\0&0&7&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以,方程组的解为$\begin{cases}x_1=2x_2+\dfrac{2}{7}x_4\\x_3=-\dfrac{5}{7}x_4\end{cases}$,**令** $x_2=c_1$, $x_4=c_2$,**则通解为**

$$x=c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{bmatrix},(c_1,c_2\in\mathrm{R})$$

(4) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&-3\\1&4&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以,解为$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\end{cases}$,**令** $x_3=c$,**则通解为** $x=c\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $(c\in\mathrm{R})$.

6 . (1) $\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&5&5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&4&4\end{array}\right]$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以,解为 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$,**令** $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$,**则通解为**

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathrm{R})$$

(2) $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ **知** $r(A) = 2 \neq 3 = r(\overline{A})$,**故无解**;

(3) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 7 & -9 & 16 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{25}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

所以,有唯一解 $x = \begin{bmatrix} -\frac{25}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -2 \end{bmatrix}$;

(4) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & 4 & 19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

所以,解为 $\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 \\ x_2 = -1 + x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$,**令** $x_3 = c$,**则通解为**

$$x=\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},\ (c\in\mathbf{R})$$

7. $\overline{A}=\left[\begin{array}{cc|c}1 & a_1 & a_1^2\\1 & a_2 & a_2^2\\1 & a_3 & a_3^2\end{array}\right]$，显然 $r(A)=2$，但由 $|\overline{A}|=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\neq 0$

即 $r(\overline{A})=3$，知方程组无解．

8. $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{5}a_i\end{array}\right]$

故有解的充要条件即为 $r(A)=r(\overline{A})$，即 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$；

此时 $\overline{A}\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2+a_3+a_4\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3+a_4\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，即通解为

$$x=\begin{bmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ (c\in\mathbf{R})$$

9. (1) $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

①当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，由克拉默法则知方程组只有零解；

②当 $\lambda=1$ 时，方程组变为 $x_1+x_2+x_3=0$，此时方程组有无穷多个解，通解为

$$x=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ (c_1,c_2\in\mathbf{R})$$

③当 $\lambda=-2$ 时，$A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

此时由 $r(A)=2<3$ 知方程组有无穷多个解，且通解为

$$x=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ (c\in\mathbf{R})$$

(2) 解：由于系数矩阵不是方阵，所以只能使用初等行变换法来进行讨论.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cc|c}2&4-\lambda&-7\\2-\lambda&2&-3\\2&5&\lambda-6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}2&4-\lambda&-7\\-\lambda&\lambda-2&4\\0&\lambda+1&\lambda+1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}2&4-\lambda&-7\\0&\lambda+1&\lambda+1\\0&\dfrac{-\lambda^2+6\lambda-4}{2}&\dfrac{-7\lambda+8}{2}\end{array}\right]$$

①当 $\lambda=-1$ 时，$\overline{A}\sim\left[\begin{array}{cc|c}2&5&-7\\0&-\dfrac{11}{2}&\dfrac{15}{2}\\0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&\dfrac{5}{2}&-\dfrac{7}{2}\\0&1&-\dfrac{15}{11}\\0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-\dfrac{1}{11}\\0&1&-\dfrac{15}{11}\\0&0&0\end{array}\right]$

即方程组有唯一解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{11}\\-\dfrac{15}{11}\end{bmatrix}$；

②当 $\lambda\neq-1$ 时，$\overline{A}\sim\left[\begin{array}{cc|c}2&4-\lambda&-7\\0&1&1\\0&\dfrac{-\lambda^2+6\lambda-4}{2}&\dfrac{-7\lambda+8}{2}\end{array}\right]$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}2&4-\lambda&-7\\0&1&1\\0&0&\dfrac{(\lambda-1)(\lambda-12)}{2}\end{array}\right]$$

1°　当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq12$ 时，原方程组无解；

2°　当 $\lambda=1$ 时，原方程组有唯一解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$；

3° 当 $\lambda=12$ 时,原方程组有唯一解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

(3) 解: $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \\ 0 & -3 & 3 & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 3 & -3 & 2(\lambda^2-1) \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \\ 0 & -3 & 3 & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1) \end{array}\right]$$

①当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时,原方程组无解;

②当 $\lambda=-2$ 时, $\overline{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

由 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$,知此时方程组有无穷多个解,且通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ (c \in \mathbf{R})$$

③当 $\lambda=1$ 时, $\overline{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

由 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$,知此时方程组有无穷多个解,且通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ (c \in \mathbf{R})$$

B 组

1. 可取 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,显然 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 是个 3 阶非零子式.

2. $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix}$

①当 $a=-8$ 且 $b=-2$ 时, $r(A)=2$;

②当 $a\neq -8$ 且 $b=-2$ 时, $r(A)=3$;当 $a=-8$ 且 $b\neq -2$ 时, $r(A)=3$;

③当 $a\neq -8$ 且 $b\neq -2$ 时, $r(A)=4$.

3 . 因 $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1, b_2, \cdots, b_n]$, 知 A 的任两行对应成比例, 即所有 2 阶子式全为零, 得 $r(A)\leq 1$, 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为零或 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时, $r(A)=0$, 否则 $r(A)=1$.而

$$A^2=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1, b_2, \cdots, b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1, b_2, \cdots, b_n]=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) A$$

故

$$r(A^2)=\begin{cases} 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i=0 \\ 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\neq 0 \end{cases}$$

4 . 设 $r(A)=r$, 即 A 中有一个 r 阶非零子式, 显然 $[A \mid \beta]$ 中也有该非零子式, 故

$$r(A \mid \beta)\geq r=r(A)$$

假若 $r(A \mid \beta)>r+1$, 则从 $[A \mid \beta]$ 中划去 β 及 A 中线性无关行向量组中的某一行后, 必然得出还存在一个 r 阶的非零子式, 而这将与 $r(A)=r$ 矛盾 .

5 . 显然 $Bx=0$ 的解都是 $ABx=0$ 的解; 又 A 为满秩阵, 即可逆阵, 故

$$A^{-1}(ABx)=A^{-1}0, \text{即 } Bx=0$$

这说明 $ABx=0$ 的解也都是 $Bx=0$ 的解, 即 $ABx=0$, $Bx=0$ 是同解方程组 . 故它们俩通解表达式中必含有相同数量的未知参数个数, 即

$$n-r(AB)=n-r(B)$$

亦即

$$r(AB)=r(B)$$

习题四解答

A 组

1．$[2,0,1]^T,[0,-6,-5]^T$．

2．$[2,-9,-5,10]^T,[-1,7,4,-7]^T$．

3．$\gamma_1=4\alpha_1+4\alpha_2-17\alpha_3,\gamma_2=23\alpha_2-7\alpha_3$　(只需将第二组表示式代入第一组表示式即可)．

4．解:(1) 若记矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,则问题转变为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$是否有解,故只需判断 $r(A)$是否等于 $r(A\vdots\beta)$．

而$[A\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&7&1\\3&-1&5&1\\0&0&0&1\end{array}\right]$,显然 $r(A)=2\neq3=r(A\vdots\beta)$,故 $Ax=\beta$无解,即β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示．

(2) 由$[A\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\2&3&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$得 $r(A)=r(A\vdots\beta)$,故β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,且

$$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

5．(1) 解:因为存在 $k_1=0$ 及 $k_2=1$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$成立,所以这两向量线性相关．

(2) 解:构造矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&3&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$,则因为 $r(A)=3=$向量个数,知此三个向量线性无关．

(3) 解:构造矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}$,则由 $r(A)=2<3$,即秩小于向量个数,知此三个向量线性相关．

6．解:构造矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,因为 A是方阵,所以可由 A的行列式是否等于零来判断向量组的线性相关性．

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&-6&a-9\end{vmatrix}=15-3a=3(5-a)$$

①若 $a=5$,则由 $|A|=0$ 知向量组线性相关.

②若 $a\neq5$,则由 $|A|\neq0$ 知向量组线性无关.

7.不一定.取 $\beta=-\alpha$,则有 $\alpha+\beta=0$,从而二者线性相关.

8.证:用线性相关的定义来证明.设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \qquad (*)$$

即 $k_1(2\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(-\alpha_1+3\alpha_2)=0$,亦即

$$(2k_1+k_2-k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2+3k_3)\alpha_2=0 \qquad (**)$$

显然,齐次线性方程组

$$\begin{cases}2k_1+k_2-k_3=0\\-k_1+k_2+3k_3=0\end{cases}$$

因方程个数小于未知数个数而有非零解,即存在不全为零的三个数 k_1,k_2,k_3 使(**)式成立,亦即使(*)式成立,故 β_1,β_2,β_3 线性相关.

另解:由 β_1,β_2,β_3 可由 α_1,α_2 线性表示,即

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&1&3\end{bmatrix}$$

由矩阵秩的不等式 $r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))$,即得 $r[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\leqslant2<3$,故 β_1,β_2,β_3 线性相关.

9.证:依题意,有

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1\neq0$,所以 $r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r]=r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]=r$,

即 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

10.(1) 解:构造矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$,则由

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&1\\1&0&2&0\\0&1&1&1\\1&0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $r(A)=3$,即向量组的秩为 3,并可取非零行首非零元所在列对应的原向量作为最大无关组,取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 即可.

(2) 解:由 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&-2&0\\0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 知 $r(B)=3$,即向量组的秩为 3,且最大无关组即向量组本身.

11. 证:若记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,$B=[\beta_1,\beta_2]$,再由两向量组等价即可以互相线性表示,知问题转化为矩阵方程 $AX=B$ 及 $BY=A$ 同时有解,由非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 解的理论知 $AX=B$ 及 $BY=A$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(A\mid B)$ 及 $r(B)=r(B\mid A)$,亦即

$$r(A)=r(B)=r(A\mid B)$$

现由

$$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&0&1&0\\-1&0&1&1&-1\\4&3&-1&2&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&0&1&0\\0&1&1&2&-1\\0&-1&-1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&0&1&0\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

知 $r(A)=r(B)=r(A\mid B)=2$,即向量组(1)与(2)等价.

12. 证:由 $A^2=I$,一方面知 A 是满秩阵;另一方面得 $(A+I)(A-I)=O$.由矩阵秩的不等式,一方面,有 $0=r(O)=r((A-I)(A+I))\geq r(A-I)+r(A+I)-n$,即

$$r(A-I)+r(A+I)\leq n \qquad ①$$

另一方面,

$$n=r(A)=r(2A)=r((A-I)+(A+I))\leq r(A-I)+r(A+I)$$

即

$$r(A-I)+r(A+I)\geq n \qquad ②$$

综合①,②,得

$$r(A-I)+r(A+I)=n$$

13．解：按向量空间理论，只需验证每个子集对 R^3 的线性运算是否满足封闭性．

先看 V_1，$\forall x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}, y=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}\in V_1$，及常数 k，有

$$x+y=[x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3]^{\mathrm{T}}$$

及

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=0+0=0$$

即对加法满足封闭性；而 $kx=[kx_1,kx_2,kx_3]^{\mathrm{T}}$，及

$$kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2+x_3)=0$$

亦即对数乘满足封闭性．故 V_1 构成向量空间．

再看 V_2，$\forall x,y\in V_2$，有 $x+y=[x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3]^{\mathrm{T}}$，但

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=1+1=2$$

即 $x+y\notin V_2$，亦即对加法不满足封闭性，故 V_2 不构成向量空间．

14．解：由于 V 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的生成子空间，故 V 的基及维数完全等价于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的最大无关组及秩．由

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\4&3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知可取 α_1,α_2 为 V 的一个基，且 $\dim V=2$．

15．解：构造矩阵 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 并进行初等行变换，由

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&3&-3\\0&5&-5&10\\0&5&-5&10\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-1&3&-3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知

(1) 秩为 2，可取 α_1,α_2 为一个最大无关组；

(2) 由初等行变换的结果矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，知

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$$

(3) 为构成 R^4 的一个基，只需加入两个向量 β_1,β_2，使 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线

性无关即可,故可取 $\beta_3 = [0,0,1,0]^T = e_3$, $\beta_4 = [0,0,0,1]^T = e_4$.

16. $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$,故 α_1, α_2, α_3 是 R^3 的一个基.

对下列矩阵作初等行变换

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

故得 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3$.

17. 解:(1) 由 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4] = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]P$ 知过渡矩阵

$$P = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) 显然,向量 β 在基 β_1, β_2, β_3, β_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,由基变换及坐标变换的理论,若设 β 在 α_1, α_2, α_3, α_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

18 . (1) 解: 由 $A=\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

即 $r(A)=3<4$,知方程组有非零解,且基础解系中含有 $4-r(A)=1$ 个线性无关解向量 .由解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{4}{3}x_4\\x_2=-3x_4\\x_3=\dfrac{4}{3}x_4\end{cases}$$

即知基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\left[\frac{4}{3},-3,\frac{4}{3},1\right]^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\xi}_1=\left[-4,\frac{3}{4},1,0\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\left[0,\frac{1}{4},0,1\right]^{\mathrm{T}}$.

19 . 证: 由矩阵秩的不等式 $r(A_{m\times n}B_{n\times s})\geq r(A)+r(B)-n$, 知

$$0=r(O)=r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$$

即

$$r(A)+r(B)\leq n$$

另证: 因为 $AB=O$, 所以 B 的列向量都是线性方程组 $Ax=0$ 的解向量, 可知 $Ax=0$ 的解空间的维数为 $n-r(A)$, 而 B 的线性无关的列向量个数不会超过 $n-r(A)$, 即 $r(B)\leq n-r(A)$, 得

$$r(A)+r(B)\leq n$$

20 . 解: $\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&1&2\\1&-3&0&1&-1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&1&2\\0&-3&-3&0&-3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{array}\right]$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

由 $r(A)=r(\overline{A})=3<4$, 可知方程组有无穷多个解, 对应齐次线性方程组的基础解系中只含 $4-3=1$ 个解向量, 且解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$,则得通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c \in \mathbf{R})$$

由非齐次线性方程组与对应齐次线性方程组的解之间的关系,知原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta} = [1, 1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$,对应齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi} = [-3, -1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$.

21 . 解:由方程组未知数个数为 5 及系数矩阵的秩为 3,知其对应的齐次线性方程组的基础解系中只含两个线性无关解向量.再由“非齐次线性方程组两个解的差必为其对应齐次线性方程组的解”,以及 $x_1 - x_2 = [2, 2, 1, -4, 1]^{\mathrm{T}}$,$x_1 - x_3 = [2, -5, 1, -1, 0]^{\mathrm{T}}$ 线性无关,知非齐次线性方程组的通解等于它自身的一个特解加上它对应齐次线性方程组的通解,即通解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= x_1 + c_1(x_1 - x_2) + c_2(x_1 - x_3) \\ &= [4, 3, 2, 0, 1]^{\mathrm{T}} + c_1[2, 2, 1, -4, 1]^{\mathrm{T}} + c_2[2, -5, 1, -1, 0]^{\mathrm{T}}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

22 . 解:利用施密特正交化公式,即得 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = [0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$;

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}\boldsymbol{\beta}_1 = [1, 0, 1]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[0, 1, 1] = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle}\boldsymbol{\beta}_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

再进行单位化,即得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}[2, -1, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, -1]^{\mathrm{T}}$$

23 . 是正交阵(由 $AA^{\mathrm{T}} = I$ 或列向量组是规范正交向量组即得).

24 . $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, $B^{-1} = B^{\mathrm{T}}$,推出 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}}$,即 AB 为正交阵.

B 组

1．解:记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,则问题转变为判断非齐次方程组 $Ax=\beta$ 是否有唯一解、有无穷多个解以及无解．由 $[A\,\vdots\,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & \lambda & 2 & 1\\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 & 1\\ \lambda & \lambda & \lambda+3 & 2\lambda-1\end{array}\right]$ 及 A 是方阵,知可通过 $|A|$ 来讨论 $Ax=\beta$ 解的情况．

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & 2\\ \lambda & 2\lambda-1 & 3\\ \lambda & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1 & \lambda & 2\\ 0 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

①当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq1$ 时,由克拉默法则知 $Ax=\beta$ 有唯一解,即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示;

②当 $\lambda=0$ 时,$[A\,\vdots\,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}\end{array}\right]$

即 $r(A)\neq r(A\,\vdots\,\beta)$,亦即 $Ax=\beta$ 无解,故 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

③$\lambda=1$ 时,$[A\,\vdots\,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

即 $r(A)=r(A\,\vdots\,\beta)=2<3$,亦即 $Ax=\beta$ 有无穷多个解,故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不唯一地线性表示;

④$\lambda=-1$ 时,$[A\,\vdots\,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right]$

即 $r(A)\neq r(A\,\vdots\,\beta)$,故 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

综合上述得

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq1$ 时,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示;(2) 当 $\lambda=1$ 时,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,且表达式不唯一;(3) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$ 时,β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

2．证:由已知,必存在不全为零的 4 个数 k_1,k_2,k_3,k_4 使成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$$

下证任一个系数均不为零.假设存在某一系数 $k_j=0$, $j\in\{1,2,3,4\}$则上式中可去除 k_j 对应的一项,进而得出余下的三个向量线性相关,而这与已知的任意 3 个向量都线性无关相矛盾,故 k_1,k_2,k_3,k_4 全不为零.

3. $a=2, b=0$.

解:记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,则 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,即等价于

$$r(A)=r(A \mid \beta_3).$$

而

$$[A \mid \beta_3]=\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&2\\1&2&0&a\\1&1&-1&b\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&b\\0&1&1&a-b\\0&1&1&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&b\\0&1&1&a-b\\0&0&0&2-a+b\end{array}\right]$$

故必有

$$2-a+b=0 \qquad ①$$

由上述过程同时知 $r(A)=2$,再由 β_1,β_2,β_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩相同,可知 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$,即

$$0=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&a\\0&1&b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&b\\0&0&a-2\end{vmatrix}=2-a \qquad ②$$

联立①,②两式,即得 $a=2, b=0$.

4. 解:依题意,非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组的基础解系中只含 $3-r(A)=1$ 个解向量,按照非齐次线性方程组与其对应齐次线性方程组两者解的结构及相互关系,可取 $\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$ 为 $Ax=b$ 的一个特解,可取 $\frac{1}{5}(2\eta_1+3\eta_2)-\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$ 为对应齐次线性方程组的基础解系,则 $Ax=b$ 的通解为

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)+c\left[\frac{1}{5}(2\eta_1+3\eta_2)-\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\right]\\&=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right]^{\mathrm{T}}+c\left[-\frac{1}{10},-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right]^{\mathrm{T}}, \qquad (c\in\mathbf{R})\end{aligned}$$

5. 证:依题意,只要证明 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 是 $Ax=0$ 的线性无关的解向量即可.而它们是 $Ax=0$ 的解向量是很显然的,故下证 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 线性无关.考虑

$$k_1(\eta_1-\eta_0)+k_2(\eta_2-\eta_0)+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_0)=0$$

即

$$-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$$

由 $\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关,知必有

$$\begin{cases} -(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}) = 0 \\ k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ k_{n-r} = 0 \end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,故而 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 线性无关.

6.可取 $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$(因为 $r(A)=2$,未知数个数为 4,所以只需求出 $Ax=0$ 的一个基础解系,即可作为矩阵 B).

7.证:因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 4,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关,由性质知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,由结论知 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示,设 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$,则

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ 及 $r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5]=4$ 知 $r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4]=4$.

8.解:正交即内积为零,为使 β_1,β_2 正交,必有 $\langle\beta_1,\beta_2\rangle=0$,亦即

$$\begin{aligned}\langle\beta_1,\beta_2\rangle &= \beta_1^T\beta_2=(\alpha_1+2\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3)^T(\alpha_1+\alpha_2+\lambda\alpha_3) \\ &= \alpha_1^T\alpha_1+2\lambda\alpha_2^T\alpha_1+\lambda\alpha_3^T\alpha_1+\alpha_1^T\alpha_2+2\lambda\alpha_2^T\alpha_2+\lambda\alpha_3^T\alpha_2 \\ &\quad+\lambda\alpha_1^T\alpha_3+2\lambda^2\alpha_2^T\alpha_3+\lambda^2\alpha_3^T\alpha_3 \\ &= 1+2\lambda+\lambda^2=(1+\lambda)^2=0\end{aligned}$$

(注意,化简过程中利用了 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为规范正交向量组)

故当 $\lambda=-1$ 时,β_1 与 β_2 正交.此时,$\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$,$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$,故

$$\|\beta_1\|=\sqrt{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}=\sqrt{\beta_1^T\beta_1}=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6};$$

$$\|\beta_2\| = \sqrt{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} = \sqrt{\beta_2^{\mathrm{T}} \beta_2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

9. **是**.(**只需考虑** α_r **能否由** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$ **线性表示**.**由于** $\beta = t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 + \cdots + t_r \alpha_r$,**若** $t_r = 0$ **则与** β **不能由** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ **线性表示矛盾**,**所以** $t_r \neq 0$,**从而**

$$\alpha_r = -\frac{t_1}{t_r}\alpha_1 - \frac{t_2}{t_r}\alpha_2 - \cdots - \frac{t_{r-1}}{t_r}\alpha_{r-1} + \frac{1}{t_r}\beta$$

即 α_r **可由** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$ **线性表示**,**所以两组向量等价**).

10. **证**:**依题意**,**有** $AA^{\mathrm{T}} = I, B^{\mathrm{T}} B = I$,**且** $|A|^2 = 1 = |B|^2$.**于是**

$$\begin{aligned} |A + B| &= |AI + IB| = |AB^{\mathrm{T}} B + AA^{\mathrm{T}} B| = |A(B^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}) B| \\ &= |A| \cdot |B + A| \cdot |B| = |A| \cdot |B| \cdot |A + B| \\ &= -|B|^2 \cdot |A + B| = -|A + B| \end{aligned}$$

即得

$$|A + B| = 0$$

习题五解答

A组

1．(1) 解：$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{bmatrix}$，由 $|A-\lambda I|=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)=0$ 得特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=4$$

以 $\lambda_1=-1$ 代入方程 $(A-\lambda I)x=0$，由 $A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\quad (c\neq 0)$$

亦即对应于 $\lambda_1=-1$ 的全体特征向量．

以 $\lambda_2=4$ 代入方程 $(A-\lambda I)x=0$，由 $A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=c'\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\quad (c\neq 0)$$

亦即对应于 $\lambda_2=4$ 的全体特征向量．

(2) 解：$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}$，由 $|A-\lambda I|=(2-\lambda)^3=0$ 得特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

以 $\lambda_{1,2,3}=2$ 代入方程 $(A-\lambda I)x=0$，由 $A-2I=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (c_1 c_2 \neq 0)$$

它即对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ **的全体特征向量**.

(3) **解**: $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$, **由**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & \lambda^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+3) \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$$

得 $\lambda_1 = -3, \lambda_{2,3,4} = 1$.

$$\text{由} \quad A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得对应于 $\lambda_1 = -3$ **的全部特征向量为** $\eta_1 = c[1, -1, -1, 1]^{\mathrm{T}}, (c \neq 0)$.

$$\text{由} \ A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{得对应于}$$

$\lambda_{2,3,4} = 1$**的全体特征向量为** $\eta = c_1\eta_2 + c_2\eta_3 + c_3\eta_4$, $(c_1 c_2 c_3 \neq 0)$, **其中**

$$\eta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \eta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \eta_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

2. 设 $Ax=\lambda x\quad(x\neq 0)$,则 $(A+aI)x=Ax+aIx=\lambda x+ax=(\lambda+a)x$.

3. (1) A 的特征值为 $-5,1,1$;

(2) $I+A^{-1}$ 的特征值为 $\frac{4}{5},2,2$.

(由 A 的特征值为 $-5,1,1$,即知 A^{-1} 的特征值为 $-\frac{1}{5},1,1$,进而 $I+A^{-1}$ 的特征值即为 $1-\frac{1}{5}$、$1+1$、$1+1$).

4. 证:依题意,有

$$Ag=\lambda_0 g$$

而由 $B=P^{-1}AP$,得 $BP^{-1}=P^{-1}A$,两边右乘 g,则得

$$BP^{-1}g=P^{-1}Ag=P^{-1}(\lambda_0 g)=\lambda_0(P^{-1}g)$$

亦即 $P^{-1}g$ 是 B 的属于 λ_0 的特征向量.

5. 证:(1) 设 λ 是 A 的特征值,对应于 λ 的特征向量是 ξ,则有 $A\xi=\lambda\xi$,两边左乘 A,得 $A^2\xi=\lambda^2\xi$,再由 $A^2=A$,即得 $(\lambda^2-\lambda)\xi=0$,因为 $\xi\neq 0$,所以 $\lambda(\lambda-1)=0$,即特征值只能是 0 或 1.

(2) 由 $A\xi=\lambda\xi$ 及 $2I\xi=2\xi$,可得 $(A+2I)\xi=(\lambda+2)\xi$,即 $\lambda+2$ 是矩阵 $A+2I$ 的特征值,由(1)知,$A+2I$ 的特征值只能是 $0+2=2$ 或 $1+2=3$,再由方阵的行列式等于其所有特征值的乘积,即知 $|A+2I|\neq 0$,亦即 $A+2I$ 为满秩阵.

6. 证:(反证法)　设 $\eta_1+\eta_2$ 是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量,即有

$$A(\eta_1+\eta_2)=\lambda_0(\eta_1+\eta_2)=\lambda_0\eta_1+\lambda_0\eta_2$$

另一方面,又有

$$A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2$$

综合即得 $(\lambda_0-\lambda_1)\eta_1+(\lambda_0-\lambda_2)\eta_2=0$,再由定理“矩阵对应于不同特征值的特征向量是线性无关的”知必有 $\lambda_0-\lambda_1=\lambda_0-\lambda_2=0$,即得 $\lambda_1=\lambda_2$,而这与已知条件 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾.命题得证.

7. 解　(1) $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\0 & 1-\lambda & 0\\1 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$,由 $|A-\lambda I|=(1-\lambda)\lambda(\lambda-2)=0$ 得 A 有三个互不相同的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$,故 A 相似于对角阵

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

解 (2) $A-\lambda I=\begin{bmatrix} -2-\lambda & 0 & -4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$,由 $|A-\lambda I| = -(2-\lambda)^2(\lambda+1)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-1$.再由 $A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 知方程组 $(A-\lambda_1 I)x=0$ 有两个线性无关的特征向量;而单根 $\lambda_3=-1$ 必有另一特征向量,由不同特征值对应的特征向量是线性无关的知此三阶矩阵因有三个线性无关的特征向量而能够相似于对角阵 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

解 (3) $A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{bmatrix}$,由

$$|A-\lambda I| = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$.再由

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知方程组 $(A-\lambda_1 I)x=0$ 只有一个线性无关的特征向量,即三阶方阵没有三个线性无关的特征向量,故它不能相似于任何对角矩阵.

8.解:由相似矩阵的必要条件 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ 及 $|A|=|B|$,只能得到 $a=b+2$,为了寻找第二个方程,只能另寻它法.由相似矩阵具有相同的特征值知:

$$0=|A-(-1)I| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2a, \text{即 } a=0, \text{代入 } b=a-2 \text{ 得 } b=-2.$$

于是 A 的三个特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$,分别求解方程 $(A-\lambda_i I)x=0$,得对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量分别为 $\xi_1=[0,-2,1]^T$, $\xi_2=[0,1,1]^T$, $\xi_3=[-1,0,1]^T$.令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则必

有 $P^{-1}AP = B$.

9 . 解: $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & x & 1-\lambda \end{bmatrix}$, 由 $|A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.因为 A 可对角化, 所以对应特征值 $\lambda_{2,3} = 1$, 必定有两个线性无关特征向量, 即必有 $r(A - \lambda_2 I) = 1$, 而 $A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1-1 & 1 & 0 \\ -2 & 2-1 & 0 \\ 4 & x & 1-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故只能有 $2 + x = 0$, 即 $x = -2$.

于是, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 由方程 $(A - \lambda_i I)x = 0$, 分别求出对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 若令

$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 即 $A = P\Lambda P^{-1}$,

而 $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 故

$$A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & & \\ & 1^n & \\ & & 1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

10 . 提示: $AB = A(BA)A^{-1}$.

11 . $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 容易验证 u_1, u_2, u_3 是一组正交向量组, 将其规范化即得

$$e_{u_1} = \frac{u_1}{\| u_1 \|}, e_{u_2} = \frac{u_2}{\| u_2 \|}, e_{u_3} = \frac{u_3}{\| u_3 \|}$$

令 $Q=[e_{u_1}, e_{u_2}, e_{u_3}]$, 则 Q 为正交阵, $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}$, 则必有

$$A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

12 . 解: (1) 设 A 的特征值是 λ, 对应于 λ 的特征向量为 ξ, 则有 $A\xi=\lambda\xi$, 于是

$$B\xi=(A^2-4A+3I)\xi=A^2\xi-4A\xi+3\xi=\lambda^2\xi-4\lambda\xi+3\xi=(\lambda^2-4\lambda+3)\xi$$

即 B 的特征值为 $\lambda^2-4\lambda+3$, 亦即 $\lambda_1=0, \lambda_2=8, \lambda_3=-1$.

(2) $|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\cdot 8\cdot(-1)=0$.

(3) 类似于(1), 知 $A-5I$ 的特征值是 $\lambda-5$, 即 (-4)、(-6)、(-3), 故

$$|A-5I|=(-4)\cdot(-6)\cdot(-3)=-72$$

13 . 解: (1) $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}$, 由 $|A-\lambda I|=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=5$. 求解方程组 $(A-\lambda_i I)x=0$, 得对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量分别为 $\xi_1=[0, -1, 1]^{\mathrm{T}}, \xi_2=[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \xi_3=[0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$. 由于 A 是实对称矩阵, 故对应于不同特征值的特征向量必两两正交, 于是只需对 ξ_1, ξ_2, ξ_3 进行单位化即可 . 而

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 1]^{\mathrm{T}}, \eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$$

若令 $Q=[\eta_1, \eta_2, \eta_3]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, 则必有 Q 为正交阵, 且

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{bmatrix}$$

解: (2) $B-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}$, 由 $|B-\lambda I|=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3)=0$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=3$. 求齐次方程 $(B-\lambda_i I)x=0$, 得对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量分别为 $\xi_1=[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}, \xi_2=[-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \xi_3=[-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$.

显然 ξ_1 与 ξ_2,ξ_3 正交,但 ξ_2,ξ_3 不正交,还需使用施密特正交化:

$$\eta_2 = \xi_2 = [-1,1,0]^{\mathrm{T}}$$

$$\eta_3 = \xi_3 - \frac{\langle \xi_3, \eta_2 \rangle}{\langle \eta_2, \eta_2 \rangle}\eta_2 = [-1,0,1]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[-1,1,0]^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]^{\mathrm{T}}$$

再对 ξ_1,η_2,η_3 进行单位化:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^{\mathrm{T}},\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1,-1,2]^{\mathrm{T}}$$

若令 $Q = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$,则必有 Q 为正交阵,且

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

14.(1) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$;(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

15.(1) $f = x_2^2 + 2x_1x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

16.(1) $f = 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$;

(若记 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$,$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,则 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$,以 $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$ 代入 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 即得);

(2) $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$;(以 $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} y$ 代入 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$,即得).

17 .解:(1) $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$,由

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)=-(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.求解齐次方程 $(A-\lambda_i I)x=0$ 得对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量分别为 $\xi_1=[\frac{1}{2},1,1]^T$, $\xi_2=[-1,-\frac{1}{2},1]^T$, $\xi_3=[2,-2,1]^T$.

单位化后得 $\varepsilon_1=\frac{1}{3}[1,2,2]^T$, $\varepsilon_2=\frac{1}{3}[-2,-1,2]^T$, $\varepsilon_3=\frac{1}{3}[2,-2,1]^T$.

令 $Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$,则 Q 为正交阵且有

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{bmatrix}$$

即若令 $x=Qy$,则

$$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$$

解:(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$,由 $|A-\lambda I|=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2=0$ 得 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$$

求解方程 $(A-\lambda_i I)x=0$ 得对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的特征向量分别为 $\xi_1=[-1,1,0,0]^T$, $\xi_2=[0,0,1,1]^T$, $\xi_3=[1,1,0,0]^T$, $\xi_4=[0,0,-1,1]^T$.容易看出, ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是两两正交的,单位化可得 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0,0]^T$,

$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,1,1]^T$, $\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0,0]^T$, $\varepsilon_4=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,-1,1]^T$.

令 $Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$，则 Q 是正交阵且有

$$Q^{T}AQ=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

若令 $x=Qy$，则

$$f=-y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2$$

18．解：$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-5&3\\0&24&-12\\0&12&c-9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-5&3\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{bmatrix}$，由 $r(A)=2$，知 $c-3=0$，即 $c=3$．

于是 $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}$，由 $|A-\lambda I|=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$，即必存在正交阵 Q，使得在正交变换 $x=Qy$ 下二次型

$$f=0y_1^2+4y_2^2+9y_3^2$$

$f=1$ 表示椭圆柱面．

19．(1) 解：$A=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&1&1\\3&1&0\end{bmatrix}$，由二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}3&3\\3&1\end{vmatrix}<0$ 知 f 不是正定二次型，事实上，若令 $x=[0,1,-1]^{T}$，代入得 $f<0$；令 $x=[0,1,1]^{T}$，代入得 $f>0$，故 f 为不定型．

(2) 解：$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&16\end{bmatrix}$，$|1|=1>0$，$\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0$，$|A|=6>0$，故 f 是正定二次型．

(3) 解：因为 $-f=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 对应的实对称矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

其顺序主子式: $|5|>0$, $\begin{vmatrix}5 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}=26>0$, $|A|=80>0$,故 $-f$ 为正定二次型,即 f 为负定二次型 .

20 . 解: (1) 利用正定矩阵的充要条件是其各阶顺序主子式均大于零 .

由 $A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$,得必有 $\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}>0$ 及 $|A|>0$ 同时成立,即

$$\begin{cases}1-t^2>0\\ -5t^2-4t>0\end{cases}$$

解得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

解: (2) 由 $A=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{bmatrix}$,得必有顺序主子式全大于零, 即 $\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 2\end{vmatrix}>0$, $|A|>0$

亦即

$$\begin{cases}2-t^2>0\\ t(t+1)(t-2)>0\end{cases}$$

解得 $-1<t<0$.

B 组

1 . 解:依题意,有 $Au_i=\lambda_i u_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$,两边同时左乘 A^*,即得

$$|A|u_i=A^*Au_i=\lambda_i A^*u_i$$

又由 A 满秩及 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 即得 $\lambda_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$, 于是,有

$$A^*u_i=\frac{|A|}{\lambda_i}u_i$$

而这恰说明 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$,对应的特征向量为 $u_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

2 . 解:设 $u=[-1,-1,1]^{\mathrm T}$ 是 A^* 属于特征值 λ_0 的特征向量,即 $A^*u=\lambda_0 u$,两边左乘 A,得

$$AA^* u = \lambda_0 Au$$

由于 $AA^* = |A| I = -I$，于是得

$$-u = \lambda_0 Au$$

即

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) = 1 & ① \\ \lambda_0(-5-b+3) = 1 & ② \\ \lambda_0(-1+c-a) = -1 & ③ \end{cases}$$

①+③，得 $2\lambda_0(c-a)=0$，又 $\lambda_0 \neq 0$（因为 $|A| = -1 \neq 0$），故得 $c=a$，代入①即得 $\lambda_0 = 1$．把 $\lambda_0 = 1$ 代入②，得 $b=-3$．再由 $|A| = -1$，$c=a$，有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a - 3 = -1$$

得 $a=c=2$．所以 $a=2$，$b=-3$，$c=2$．

3．解：(1) 记 $P=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，则问题转化为求解非齐次线性方程组 $Px=\beta$，

$$[P \mid \beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

于是，解得 $x=[2, -2, 1]^{\mathrm{T}}$，即

$$\beta = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$$

解：(2) 依题意，有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$，即 $A = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}P^{-1}$，由初等变换法，易求得 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，于是求得 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$．

解：(3) 由(2)，$A = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}P^{-1}$，所以 $A^n = P\begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{bmatrix}P^{-1}$，进而

$$A^n\beta = P\begin{bmatrix}1^n & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n\end{bmatrix}P^{-1}\beta = P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2^n & 3^n\\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1}\\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\ 2-2^{n+2}+3^{n+1}\\ 2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$$

注 (3) **也可用** $A^n\beta = A^n(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) = 2\lambda_1^n\alpha_1 - 2\lambda_2^n\alpha_2 + \lambda_3^n\alpha_3 = \begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\ 2-2^{n+2}+3^{n+1}\\ 2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$ **求得**.

4 . $Q=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & -\frac13\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac23\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac23\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -729\end{bmatrix}$.

提示:首先求得 A **的特征值为** $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-8$;

再求得对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-8$ **的特征向量,进行正交规范化后可得**

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\\ 0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3\sqrt5}\\ \frac{4}{3\sqrt5}\\ \frac{5}{3\sqrt5}\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix}-\frac13\\ -\frac23\\ \frac23\end{bmatrix}$$

令 $Q=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$**,则** Q **正交,且有** $A=Q\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -8\end{bmatrix}Q^{-1}=QDQ^{-1}$**,于是**

$$Q^{-1}f(A)Q = Q^{-1}\left(QD^3Q^{-1} - 3QD^2Q^{-1} + 3QDQ^{-1} - I\right)Q$$
$$= D^3 - 3D^2 + 3D - I$$
$$=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -729\end{bmatrix}$$

5 . **解**: (1) $A=\begin{bmatrix}9+k & 2 & 8\\ 2 & k & -10\\ 8 & -10 & 3+k\end{bmatrix}$**,因正交变换化成的标准形系数即为** A **的**

特征值,即 A 相似于 $\begin{bmatrix} -7 & & \\ & 11 & \\ & & 20 \end{bmatrix} = \Lambda$, 由 $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\Lambda)$,即得

$$12 + 3k = 24 \text{ 即 } k = 4 .$$

此时, $A = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -10 \\ 8 & -10 & 7 \end{bmatrix}$, 三个特征值为 $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 20$, 分别求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i I)x = 0$, 得对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量分别为 $\xi_1 = [-1, 2, 2]^{\mathrm{T}}, \xi_2 = [-2, -2, 1]^{\mathrm{T}}, \xi_3 = [2, -1, 2]^{\mathrm{T}}$.

单位化后,可得 $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}[-1, 2, 2]^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2 = \frac{1}{3}[-2, -2, 1]^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3 = \frac{1}{3}[2, -1, 2]^{\mathrm{T}}$, 令 $Q = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 Q 即为所求之正交矩阵 .

(2) 因为由(1)可知 $k = 4$ 及 f 的实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-7, 11, 20$, 故二次型 $q = 9x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 16x_1x_3 - 20x_2x_3$ 的实对称矩阵 B 的三个特征值分别为 $-11, 7, 16$, 这是由于正交变换的长度不变性 $\|x\| = \|y\|$ 的缘故 所以

$$f = 9x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 16x_1x_3 - 20x_2x_3 + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

可通过(1)中的正交变换化为 $f = (k - 11)y_1^2 + (k + 7)y_2^2 + (k + 16)y_3^2$, 为了使 f 正定, 必须有 $k - 11 > 0$, $k + 7 > 0$, $k + 16 > 0$, 综合得 $k > 11$.

6 . 证: $\forall x \neq 0$, 因为 A 正定, B 也正定, 所以有

$$x^{\mathrm{T}}Ax > 0, \quad x^{\mathrm{T}}Bx > 0$$

从而

$$x^{\mathrm{T}}(A + B)x = x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}Bx > 0$$

得证 $A + B$ 正定 .

附录 2

模拟试题

模拟考试卷(第一套)

一、填空题(每题 4 分,共 20 分)

1．设矩阵 $A=[1,0,-1]$,矩阵 $B=[1,1,1]$,则 $A^{T}B=$ ________ .

2．若 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$,则 $A^{-1}=$ ________ .

3．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 均为三维列向量,矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, $B=[\beta,\alpha_1,\alpha_3]$ 且 $|A|=1$, $|B|=2$,则 $|A+B|=$ ________ .

4．已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A-3I=O$,则 $(A+4I)^{-1}=$ ________ .

5．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$ 的列向量线性相关,则 $t=$ ________ .

二、选择题(每题 4 分,共 20 分)

1．设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r>1$,则(　　)

(A) A 有一个 r 阶子式不为 0,且所有的 $r-1$ 阶子式都为 0;

(B) A 有一个 r 阶子式不为 0,且所有的 $r-1$ 阶子式都不为 0;

(C) A 有一个 r 阶子式不为 0,且有一个 $r-1$ 阶子式不为 0;

(D) A 有一个 r 阶子式不为 0,且有一个 $r-1$ 阶子式为 0 .

2．对 n 阶矩阵 A,B,下列各式中必然成立的是(　　)

(A) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;　　(B) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$;

(C) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$;　　(D) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

3．设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\2a_{21}&2a_{23}&2a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{bmatrix}$, 且 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$，则 $B=($　　$)$

(A) P_1P_2A;　　(B) P_2AP_1;　　(C) AP_2P_1;　　(D) P_1AP_2 .

4 . 设 A 是 n 阶方阵，且方程组 $Ax=0$ 有无穷多个解，则方程组 $A^{T}Ax=0$(　　)

(A) 有无穷多个解;　　(B) 无解;　　(C) 有唯一解;　　(D) 仅有零解 .

5 . 若 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=5$，则 $|2AA^{T}|=($　　$)$

(A) 100;　　(B) 50;　　(C) 20;　　(D) $25\cdot 2^{n}$.

三、计算下列行列式(每题 5 分，共 10 分)

(1) $$\begin{vmatrix}2&1&3&2\\3&0&1&-2\\1&-1&4&3\\2&2&-1&1\end{vmatrix};$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

四、(12 分)设 $\alpha_1=[1,0,0,3]^{T}$，$\alpha_2=[1,1,-1,2]^{T}$，$\alpha_3=[1,2,a-3,1]^{T}$，$\alpha_4=[1,2,-2,a]^{T}$，$\beta=[0,1,b,-1]^{T}$，问 a,b 取何值时，

(1) β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表达式唯一;

(2) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示;

(3) β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，但表达式不唯一 .

五、(8 分)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&6\\1&6&1\end{bmatrix}$ 满足 $AX+I=A^{2}+X$，求矩阵 X .

六、(10 分)已知非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 3$,且它有三个不同的解 $x_1 = [4,3,2,0,1]^T$, $x_2 = [2,1,1,4,0]^T$, $x_3 = [2,8,1,1,1]^T$,试求

(1) $Ax = b$ 对应的齐次方程组的一个基础解系;

(2) $Ax = b$ 的通解 .

七、(12 分)求一个正交矩阵 Q,将实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

化为对角矩阵,并写出该对角矩阵 .

八、(8 分)称满足 $A^2 = I$(I 是单位矩阵)的矩阵 A 为对合阵,试证:对任一个 n 阶对合阵 A,有

$$r(A + I) + r(A - I) = n .$$

模拟考试卷(第二套)

一、填空题(每题 4 分,共 20 分)

1．对于 $m\times n$ 维矩阵 A 和 $r\times t$ 维矩阵 B,矩阵乘积 $A^T B^T$ 有意义的条件是________．

2．设 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,则 $(A-2I)^{-1}=$________．

3．已知 $\alpha=[1,2,3]^T$, $\beta=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]^T$,设 $A=\alpha\beta^T$,则 $A^n=$________．

4．已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的,则 t 的取值范围是________．

5．若 A、B 均为 n 阶方阵$(n\geq 3)$, $Ax=b$ 只有一个解, B 的秩为 3,则矩阵乘积 BA 的秩等于________．

二、选择题(每题 4 分,共 20 分)

1．设 A、B、C 均为 n 阶矩阵,且 $ABC=I$,则下列矩阵中一定是单位阵的是(　　)

(A) ACB;　(B) CBA;　(C) BAC;　(D) BCA．

2．下列矩阵中,不是初等矩阵的是(　　)

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$;　(B) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$;　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$;　(D) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$．

3．若 3 阶矩阵 A 有 3 个不同的特征值,则 A 必相似于一个 3 阶(　　)

(A) 正交矩阵;　(B) 对角矩阵;　(C) 非奇异矩阵;　(D) 正定矩阵．

4．下列矩阵中,正定矩阵是(　　)

(A) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&2\\0&2&3\end{bmatrix}$;　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$;　(D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$．

5. A是2阶矩阵,以下四个结论中有3个是等价的,而不与其它3个等价的结论是(　　)

(A) $|A| \neq 0$;　　(B) A的两行线性无关;

(C) A中必有一行或一列为零;　　(D) A的两列线性无关.

三、(6分)试求出下列方程的全部根

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

四、(10分)已知向量组 $\alpha_1 = [0, 1, 1, 2]^T$, $\alpha_2 = [1, 2, 3, 5]^T$, $\alpha_3 = [-5, 3, -2, 1]^T$, $\alpha_4 = [4, -1, 3, 2]^T$,

(1) 求向量组的秩;

(2) 给出一个最大无关组,并将其余向量用该最大无关组表示出来.

五、(8分)设三阶矩阵 A、B满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$,已知

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$,试求矩阵 B.

六、(8 分)已知向量 $\alpha_1=[1,1,1]^T$,试求向量 α_2,α_3,使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 成为空间 R^3 的一个基.

七、(12 分)试问参数 λ 取何值时,下列方程组有唯一解、有无穷多个解、无解?在有无穷多个解时求出其通解.

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

八、(8 分)已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

相似,求 x、y 的值.

九、(8 分)**已知** n **维向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,**且** $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, $\beta_4 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$,**试证明**:$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ **线性相关**.

模拟考试卷(第三套)

一、选择题(每题 4 分,共 20 分)

1．设向量 η_1,η_2 是 $m\times n$ 线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$的两个解,则(　　).

(A) $\eta_1+\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解;　　(B) $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=b$ 的解;

(C) $\eta_1+\eta_2$ 是 $Ax=b$ 的解;　　(D) $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

2．设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$为分块矩阵,其中的 $A_{ij}(i,j=1,2)$是子块,则 $A^{\mathrm{T}}=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{12}^{\mathrm{T}} \\ A_{21}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$;　　(B) $\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{11}^{\mathrm{T}} \\ A_{22}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix} A_{21}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \\ A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{12}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

3．若 n 阶矩阵 A、B、C 满足 $AB=CB$,则必有(　　).

(A) $A=C$;　　(B) $r(AB)=r(C)$;

(C) $B=O$;　　(D) 若 A、B、C 皆可逆,则 $\frac{1}{|A|}=\frac{1}{|C|}$.

4．n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值是 A 可对角化的(　　).

(A) 充分但不是必要条件;　　(B) 充分必要条件;

(C) 必要但不是充分条件;　　(D) 既非充分也不是必要的条件.

5．矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的特征值是(　　).

(A) 1,1,0;　　(B) 1,1,1;　　(C) -1,1,1;　　(D) 1,-1,-1.

二、填空题(每题 4 分,共 20 分)

1．若$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,则 $X=$_________.

2．若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,则与 A 可交换的所有矩阵是_________.

3．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} =$ ________．

4．设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A| = 3$，则 $|3A^{-1} - 2A^*| =$ ________．

5．已知 A、B 都是 3 阶非零矩阵，$r(A) = 2$，$AB = O$，则 $r(B) =$ ________．

三、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1．对任意可逆矩阵 A 和 B，都有 $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$．　　(　　)

2．设 A 为任一 $m \times n$ 维实矩阵，则 $(A^{\mathrm{T}}A)^2$ 必为实对称阵．　　(　　)

3．设 A 为 3 阶实对称矩阵，其特征值为 1，2，3，则 A 为正定矩阵．　　(　　)

4．若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则 α_4 可能能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示．　　(　　)

5．若 n 阶方阵 A 和 B 的特征多项式相同，则必有 $|A| = |B|$．　　(　　)

四、行列式计算（每题 5 分，共 10 分）

1．$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；　　2．$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$．

五、（12 分）设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，－1，2，求

(1) $B = A^2 - 4A + 3I$ 的特征值；

(2) $|B|$；

(3) $|A - 5I|$．

六、(8 分)**设向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关,问** l,m **满足什么条件,向量组** $l\alpha_2-\alpha_1$, $m\alpha_3-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ **线性相关**?

七、(12 分)**试求 3 阶正交矩阵** Q,**使正交变换** $x=Qy$ **能将二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$$

化成标准形.

八、(8 分)**设** A、B **分别是** $n\times n$ **及** $n\times m$ **维矩阵**$(n\leq m)$,**已知** $AB=B$ **以及** $r(B)=n$.**试证** $A=I$.

附录 3

模拟试题答案

模拟考试卷(第一套)答案

一、填空题

1 . $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.　　2 . $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3 . 12 .($|A+B| = |\alpha_1+\beta, 2\alpha_2, 2\alpha_3| = |\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3| + |\beta, 2\alpha_2, 2\alpha_3|$
$= 4|A| + 4|B| = 12$) .

4 . $-\frac{(A-2I)}{5}$.　　5 . -3 (**由** $|A|=0$ **即得**) .

二、选择题

1 . C;　2 . B;　3 . B;　4 . A;　5 . D .

三、计算下列行列式

1 . -55 .　　2 . $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

四、(1) $a\neq 1, b\in R$;　　(2) $a=1, b\neq -1$;　　(3) $a=1, b=-1$.

(**原问题即非齐次线性方程组** $Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \beta$ **有唯一解、无解及有无穷多个解的讨论问题,即分别讨论**① $r(A) = r(A \mid \beta) = 4$; ② $r(A) \neq r(A \mid \beta)$; ③ $r(A) = r(A \mid \beta) < 4$ **的问题**)

五、

$$X = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(**由** $AX + I = A^2 + X$,**及** $(A-I)X = A^2 - I = (A-I)(A+I)$,**容易验证** $A-I$ **可逆**,

故 $X = A + I)$.

六、

(1) 基础解系为 $\eta_1 = x_1 - x_2 = [2,2,1,-4,1]^T$, $\eta_2 = x_1 - x_3 = [2,-5,1,-1,0]^T$.

(2) $Ax = b$的通解为

$$\begin{aligned}\eta &= x_1 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2\\ &= [4,3,2,0,1]^T + c_1[2,2,1,-4,1]^T + c_2[2,-5,1,-1,0]^T \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) .\end{aligned}$$

(对 $A_{m\times n}x = b$ 而言,其对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中所含解向量的个数等于 $n - r(A)$;对本题而言,即 $5 - 3 = 2$.再由 $Ax = b$ 的两个解的差是其对应齐次方程组$Ax = 0$的解,即可解出 .)

七、

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad Q^T AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

(先求出 A 的特征值,$\lambda_{1,2} = 1$,$\lambda_3 = -2$;再求出对应的特征向量,对同属于 $\lambda_{1,2} = 1$ 的两个特征向量进行正交化,最后再对两两正交的三个特征向量规范化得 ε_1, ε_2, ε_3, 令 $Q = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$即为所求,而对角阵$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$) .

八、证:由 $A^2 = I$,知 A 为满秩阵,即 $r(A) = n$,于是

$$n = r(A) = r(2A) = r[(A + I) + (A - I)] \leq r(A + I) + r(A - I) \qquad ①$$

另一方面,由 $A^2 = I$,得 $A^2 - I = (A + I)(A - I) = O$,于是

$$0 = r(O) = r[(A + I)(A - I)] \geq r(A + I) + r(A - I) - n$$

即

$$r(A + I) + r(A - I) \leq n \qquad ②$$

综合①,②,命题得证 .

模拟考试卷(第二套)答案

一、填空题

1 . $t = m$.

2 . $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3 . $3^{n-1}A = 3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

4 . $-\frac{4}{5} < t < 0$.

5 . 3 .

二、选择题

1 . D; 2 . B; 3 . B; 4 . D; 5 . C .

三、$x = -4$, $x = 0$.

四、(1) **秩为** 2;

(2) **可取** α_1, α_2 **为最大无关组**;**则** $\alpha_3 = 13\alpha_1 - 5\alpha_2$, $\alpha_4 = -9\alpha_1 + 4\alpha_2$.

五、$B = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

六、$\alpha_2 = [-1, 1, 0]^T$, $\alpha_3 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1]^T$.

七、(1) **当** $\lambda \neq -2$ **且** $\lambda \neq 1$ **时**,**方程组有唯一解**;

(2) **当** $\lambda = -2$ **时**,**方程组无解**;

(3) **当** $\lambda = 1$ **时**,**方程组有无穷多个解**,**且通解为**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in R)$$

(**由** $|A| = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$,**然后对** $|A| \neq 0$ **或** $|A| = 0$ **展开讨论**)

八、$x = 0$, $y = 1$(**利用相似矩阵性质**,**得** $tr(A) = tr(B)$ **及** $|A| = |B|$,**即** $2 + x = 2 + y + (-1)$, $-2 = -2y$,**故得** $x = 0$, $y = 1$) .

九、证:**依条件**,**向量组** $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ **可由向量组**,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **线性表示**,**那么**,**向量**

组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩就小于等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩,而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩显然小于等于其向量个数3,故向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩也小于等于3,进而由向量组的秩小于向量组所含向量个数知,向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性相关.

模拟考试卷(第三套)答案

一、选择题

1.D;　2.B;　3.D;　4.A;　5.C.

二、填空题

1.$X=\begin{bmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{bmatrix}$.

2.$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix},(a,b\in\mathbf{R})$.

3.$(y-x)(z-x)(z-y)$.

4.-9.

5.1.

三、判断题

1.×　2.√　3.√　4.×　5.√

四、1.$D_4=x^4$.

2.$D_n=6!(n-3)!$　(用第3行的(-1)倍加到其余各行,再按第3列展开).

五、

(1) B的特征值是$0,8,-1$.

(2) $|B|=0$.

(3) -72.

六、$lm=1$.

(由$[l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ l & -1 & 0\\ 0 & m & -1\end{bmatrix}$,知只有系数矩阵$C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ l & -1 & 0\\ 0 & m & -1\end{bmatrix}$不可逆时,才有向量组$l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性相关.由$|C|=0$,即得$lm=1$.)

七、$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

八、证法 1:由 $AB=B$,得$(A-I)B=O$,于是,有

$$0=r(O)=r((A-I)B)\geq r(A-I)+r(B)-n=r(A-I)+n-n$$

即

$$r(A-I)\leq 0$$

又 $r(A-I)\geq 0$,故有

$$r(A-I)=0$$

即

$$A=I$$

证法 2:若记 $B=[b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots, b_m]$,则 $AB=B$ 即为

$$A[b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots, b_m]=[b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots, b_m]$$

由 $r(B)=n$,不妨设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 B 的线性无关的 n 列,则有

$$Ab_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 A 对应于特征值 1 有 n 个线性无关的特征向量.故 A 相似于对角阵 I,即存在可逆阵 P 使

$$A=P\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}P^{-1}=I$$

证法 3:由 $AB=B$,得$(A-I)B=O$,若记 $B=[b_1, b_2, \cdots, b_m]$,则有

$$(A-I)[b_1, b_2, \cdots, b_m]=O$$

由 $r(B)=n$,不妨设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 线性无关,则方程组$(A-I)x=0$ 有 n 个线性无关的解向量 b_i,$(i=1,2,\cdots,n)$,故而,由 $n-r(A-I)=n$,即得

$$r(A-I)=0$$

亦即

$$A=I$$

参 考 文 献

[1] 刘剑平等 . 工程数学 . 上海: 华东理工大学出版社, 2003
[2] 刘剑平等 . 线性代数复习与解题指导 . 上海: 华东理工大学出版社, 2001
[3] 刘剑平等 . 工程数学习题解答与复习指南 . 上海: 华东理工大学出版社, 2003
[4] 谢国瑞 . 线性代数及应用 . 北京: 高等教育出版社, 1999
[5] 同济大学数学教研室 . 工程数学(第三版) . 北京: 高等教育出版社, 1999
[6] 教育部高等教育司组编 . 线性代数 . 北京: 高等教育出版社, 1999
[7] 胡金德等 . 线性代数辅导(第二版) . 北京: 清华大学出版社, 1994
[8] 陈维新 . 线性代数简明教程 . 北京: 科学出版社, 2001
[9] Strang G . 侯自新等译 . 线性代数及其应用 . 天津: 南开大学出版社, 1990