自动驾驶控制算法第三讲

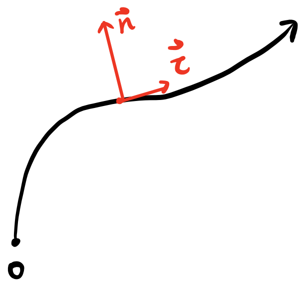
运动学方程 $\dot{x}=v\cos\varphi$

$\dot{y}=v\sin\varphi$

$\dot{\varphi}=\frac{v\tan\delta}{L}$ $\quad \dot{\varphi}=\frac{v}{R} \Rightarrow \frac{1}{R}=\frac{\tan\delta}{L} \quad \tan\delta=\frac{L}{R}$

动力学方程：考虑轮胎特性

当选取 Frenet 坐标系时，可以将纵向控制与横向控制解耦



$\vec{v}=\frac{dS}{dt}$ $\quad \vec{a_\tau}=\frac{d^2S}{dt^2}$ $\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{v^2\tan\delta}{L}$

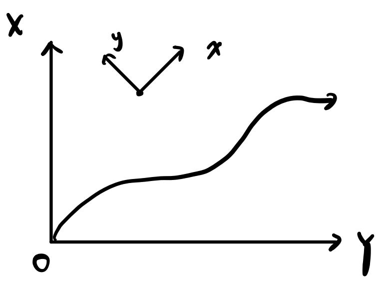
S 与 a_τ 直接相关 $\quad a_n$ 与 v, δ 有关，当纵向控制稳定以后，v 变化不大

a_n 与 δ 有关

运动学 $\begin{cases} \dot{x}=v\cos\varphi \\ \dot{y}=v\sin\varphi \\ \dot{\varphi}=v\frac{\tan\delta}{L} \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} v \\ \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dot{\varphi} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi \\ v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{Y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$

动力学 + Frenet 坐标系 $\begin{matrix} a_\tau \Rightarrow s \\ \delta \Rightarrow d \end{matrix}$ 解耦

$a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}$ $\qquad d=f(v, \delta)$



首先建立 $y=f(v, \delta)$
动力学方程

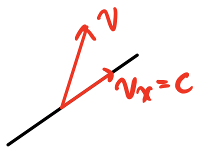
再建立 $y=g(d)$
坐标变换

$\Rightarrow d=h(v, \delta)$

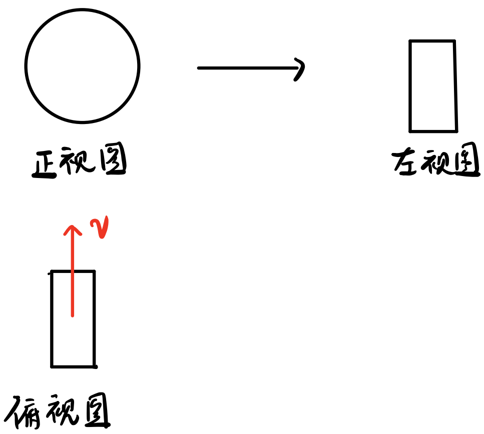
x	s
y	d
$\dot{x}$	$\dot{s}$
$\dot{y}$	$\dot{d}$

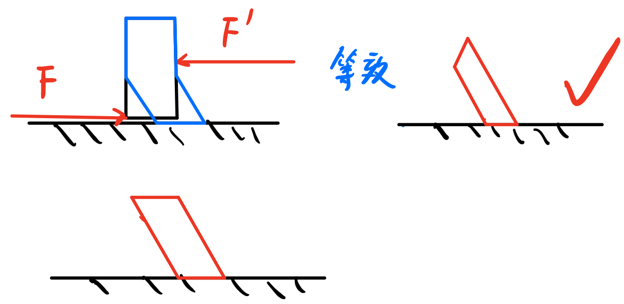
二自由度车辆动力学方程

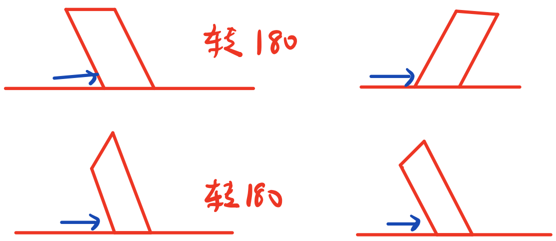
假设前轮转角 δ 较小，假设 $v_x=C$

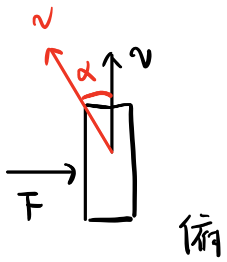


轮胎的侧偏特性







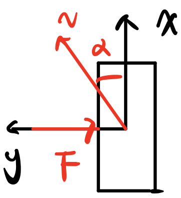


α 侧偏角　　定义 $F=C\alpha$　　C 侧偏刚度

侧偏刚度 × 侧偏角 = 侧偏力

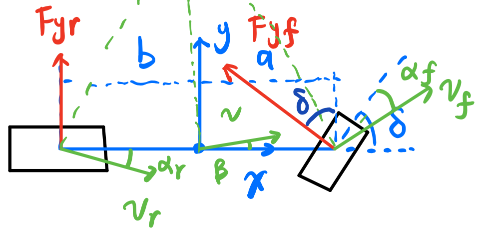
汽车在行驶过程中，由于路面的倾斜、侧向风或曲线行驶时的离心力等的作用，车轮中心沿Y轴方向将作用有侧向力Fy，相应地在地面上产生地面侧向反作用力，也称为侧偏力。

侧偏刚度一定是负数



负的侧偏力 ⇒ 正的侧偏角

自行车模型



f: front   r: rear

α_r α_f 都是负的

$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow m a_y = F_{yf}\cos\delta + F_{yr}$$

$$\Sigma M = I\ddot{\varphi} \Rightarrow F_{yf}\cos\delta \cdot a - F_{yr}\cdot b = I\ddot{\varphi}$$

假设 δ 较小 $\cos\delta \approx 1$

$$m a_y = F_{yf} + F_{yr} = C_{\alpha f}\alpha_f + C_{\alpha r}\alpha_r$$

$$I\ddot{\varphi} = F_{yf}\cdot a - F_{yr}\cdot b = aC_{\alpha f}\alpha_f - bC_{\alpha r}\alpha_r$$

a_y 与 y 的关系，以及 α_f, α_r 的具体表达式

$v_y = \dot{y}$ $a_y = \ddot{y} + v_x\dot{\varphi}$

其中，a_y 为车辆重心处y轴方向的惯性加速度，F_{yf} 和F_{yr} 为前后轮横向受到的力。平动过程中，有两种力共同作用于加速度a_y：车辆延y轴产生的惯性加速度$\ddot{y}$和车辆绕旋转中心O旋转产生的向心加速度$a_c = V_x\dot{\psi}$。

$$a_y = \ddot{y} + V_x\dot{\psi} \tag{2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y)}{dt}$$

将公式(2)带入公式(1)得

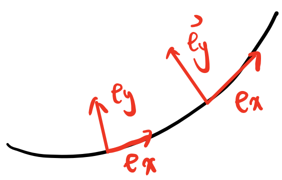
$$m(\ddot{y} + V_x\dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \tag{3}$$

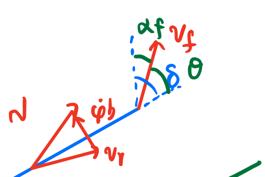
在直角坐标系中 $\vec{e}_x$. $\vec{e}_y$ 为常矢量 $\dot{\vec{e}}_x, \dot{\vec{e}}_y = 0$

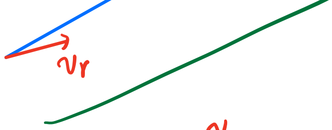
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + v_x\cdot\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + v_y\cdot\frac{d\vec{e}_y}{dt} \neq 0$$

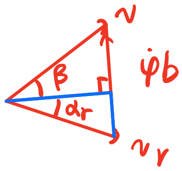
在直角坐标 $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{e}_x + \dot{v}_y\vec{e}_y$ ∴ $a_y = \dot{v}_y$

在车身坐标 $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ 不是常矢量 (Frenet 公式)(非惯性系)





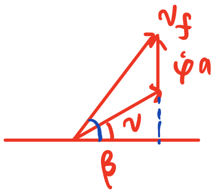




$$v\cos\beta = v_x$$

$$\dot{\varphi} b - v\sin\beta = \dot{\varphi} b - v_y$$

$$\tan\alpha_r = \frac{\dot{\varphi} b - v_y}{v_x} \approx \alpha_r \quad \because \alpha_r \text{ 是负的} \quad \therefore \alpha_r = \frac{v_y - \dot{\varphi} b}{v_x}$$



$$\tan\theta = \frac{\dot{\varphi} a + v_y}{v_x} \qquad \alpha_f = \theta - \delta = \frac{\dot{\varphi} a + v_y}{v_x} - \delta$$

$$m a_y = C_{\alpha f}\alpha_f + C_{\alpha r}\alpha_r \Rightarrow m(\dot{v}_y + v_x\dot{\varphi}) = C_{\alpha f}\left(\frac{\dot{\varphi} a + v_y}{v_x} - \delta\right) + C_{\alpha r}\left(\frac{v_y - \dot{\varphi} b}{v_x}\right)$$

$$I\ddot{\varphi} = a C_{\alpha f}\alpha_f - b C_{\alpha r}\alpha_r \Rightarrow I\ddot{\varphi} = a C_{\alpha f}\left(\frac{\dot{\varphi} a + v_y}{v_x} - \delta\right) - b C_{\alpha r}\left(\frac{v_y - \dot{\varphi} b}{v_x}\right)$$

$$v_y \Leftrightarrow \dot{y}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha r}}{m v_x} & \frac{a C_{\alpha f} - b C_{\alpha r}}{m v_x} - v_x \\ \frac{a C_{\alpha f} - b C_{\alpha r}}{I v_x} & \frac{a^2 C_{\alpha f} + b^2 C_{\alpha r}}{I v_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{C_{\alpha f}}{m} \\ -\frac{a C_{\alpha f}}{I} \end{pmatrix} \delta \uparrow}$$

$$\Uparrow$$

设 $X = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$ $u = \delta$ $\dot{X} = AX + Bu$ 通过控制 δ，实现对 y, φ 的控制