Lista III

Metode Numerice

2021

Ordinul metodelor Runge-Kutta explicite:
O metodă Runge-Kutta explicită cu 3 stagii poate fi scrisă sub forma

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3)$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + hc_2, y_n + ha_{21}k_1) \\ k_3 &= f(x_n + hc_3, y_n + ha_{31}k_1 + ha_{32}k_2) \end{aligned}$$

Pentru ca metoda să fie convergentă trebuie ca

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

şi

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} + a_{32} = c_3$$

Avem

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + hc_2, y_n + hc_2 k_1) \\ k_3 &= f(x_n + hc_3, y_n + h(c_3 - a_{32})k_1 + ha_{32}k_2) \end{aligned}$$

Introducând notaţiile

$$f = f(x, y),\ f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

şi

$$F = f_x + ff_y, \quad G = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}$$

putem scrie

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x_n) &= f \\ y^{(2)}(x_n) &= f_x + f_y y' = f_x + ff_y = F \\ y^{(3)}(x_n) &= f_{xx} + f_{xy}f + f(f_{yx} + f_{yy}f) + f_y(f_x + ff_x) = \\ &= f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y) = \\ &= G + f_y F \end{aligned}$$

Mai mult,

$$\begin{aligned} k_2 &= f + hc_2F + \frac{1}{2}h^2c_2^2G + O(h^3) + O(h^3) \\ k_3 &= f + hc_3F + h^2(c_2a_{32}Ff_y + \frac{1}{2}c_3^2G) + O(h^3) \end{aligned}$$

În final obţinem

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n) + O(h^4) = \\ &= y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}F + \frac{h^3}{6}(Ff_y + G) + O(h^4) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y(x_n) + h(b_1 + b_2 + b_3)f + h^2(b_2c_2 + b_3c_3)F + \\ &+ \frac{h^3}{2}[2b_3c_2a_{32}Ff_y + (b_2c_2^2 + b_3c_3^2)G] + O(h^4) \end{aligned}$$

Eroarea de trunchiere va fi dată de

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1},$$

unde se presupune că $y(x_i) = y_i$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$. Ordinul metodei va fi cel mai mare număr natural p pentru care

$$T_{n+1} = O(h^{p+1})$$

1. Metode cu un stagiu ($b_2 = b_3 = 0$). Avem

$$y_{n+1} = y(x_n) + hb_3f + O(h^4)$$

   Pentru $b_3 = 1$ obţinem $T_{n+1} = O(h^2)$. În concluzie, există o singură metodă Runge-Kutta explicită cu un stagiu de ordin 1 şi anume metoda Euler explicită.

2. Metode cu două stagii ($b_3 = 0$). Avem

$$y_{n+1} = y(x_n) + h(b_1 + b_2)f + h^2b_2c_2F + \frac{h^3}{2}b_2c_2^2G + O(h^4)$$

   Putem avea ordinul doi, *i.e.* $T_{n+1} = O(h^3)$ dacă

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2c_2 = \frac{1}{2}.$$

   Ordinul 3 nu poate fi atins. Având un sistem de 2 ecuaţii cu 3 necunoscute deducem că există o familie infinită de metode Runge-Kutta de ordin 2 cu 2 stagii. Cazuri cunoscute $b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$ şi $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$.

3. Metode cu trei stagii. Avem ordinul 3, *i.e.* $T_{n+1} = O(h^4)$, dacă

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 &= \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= \frac{1}{3} \\ b_3c_2a_{32} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   Avem 4 ecuaţii cu 6 necunoscute. În concluzie există o dublă infinitate de soluţii., *i.e.* o dublă infinitate de metode Runge-Kutta de ordin 3 cu 3 stagii (depind de 2 parametri)

1. **Se consideră problema Cauchy**

$$\begin{cases} y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Folosiţi metoda dezvlotă rii în serie de puteri pentru a determina coeficienţii puterilor $x^0, x^1, \dots, x^5$ din dezvoltarea soluţiei $y(x)$.

Rezolvare: Avem

$$\begin{aligned} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y'' &= -3 + 2x + y + (1+x)y' \\ y^{(3)} &= 2 + 2y' + (1+x)y'' \\ y^{(4)} &= 3y'' + (1+x)y^{(3)} \\ y^{(5)} &= 4y^{(3)} + (1+x)y^{(4)} \end{aligned}$$

Deducem că

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 2 \\ y''(0) &= 0 \\ y^{(3)}(0) &= 6 \\ y^{(4)}(0) &= 6 \\ y^{(5)}(0) &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &\approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 = \\ &= 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 \end{aligned}$$

2. **Să se determine metodele Runge-Kutta de ordin 3**

Rezolvare: Metodele Runge-Kutta cu 3 stagii explicite

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3)$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + hc_2, y_n + ha_{21}k_1) \\ k_3 &= f(x_n + hc_3, y_n + ha_{31}k_1 + ha_{32}k_2) \end{aligned}$$

pot fi scrise compact în felul următor (tabloul Butcher)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Pentru a fi convergente şi pentru a obţine ordinul 3 trebuie să fie îndeplinite condiţiile

$$c_2 = a_{21}, \quad a_{31} = c_3 - a_{32}$$

şi

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ & b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \\ & b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3} \\ & b_3c_2a_{32} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. **Să se calculeze**

$$[0, 1, 2, \ldots, 100; 5x^{102} + 2015]$$

Rezolvare: Pentru nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definim polinomul de grad $n + 1$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

care se poate scrie sub forma

$$\omega(x) = x^{n+1} - S_1x^n + S_2x^{n-1} + \ldots$$

unde $S_1, S_2, \ldots$ sunt sumele Viète. Folosind relaţiile

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^k] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; \alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)] + \beta[x_0, x_1, \ldots, g(x)]$$

deducem că

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \ldots, x_n; \omega(x)] &= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] - S_1[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^n] \\ &= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] - S_1 \end{aligned}$$

Mai mult, din faptul că

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}$$

obţinem următoarele egalităţi

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; \omega(x)] = 0$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x\omega(x)] = 0$$

Aşadar, avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] = S_1 = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$$

şi

$$0 = [x_0, x_1, \ldots, x_n; x\omega(x)] = [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2} - S_1' x^{n+1} + S_2' x^n - \ldots] =$$

$$= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] - S_1'[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] + S_2'[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^n] + 0 =$$

$$= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] - S_1' S_1 + S_2'$$

unde $S_1', S_2', \ldots$ sunt sumele Viète pentru polinomul $x\omega(x)$ Dar $S_1' = 0 + x_0 + x_1 + \ldots x_n = S_1$ şi $S_2' = S_2$. Atunci deducem că

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] = S_1^2 - S_2$$

Pentru $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n$ obţinem

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = \sum_{1=i<j=n} ij = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot n) + (2 \cdot 3 + \ldots 2 \cdot n) + \ldots + (n-1) \cdot n =$$

$$= \frac{(1 + 2 + \ldots n)^2 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Deducem că

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] = S_1^2 - S_2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{24}$$

În final avem

$$\begin{aligned}[0,1,2,\ldots,100; 5x^{102}+2015] &= 5[0,1,2,\ldots,100; x^{102}] + [0,1,2,\ldots,100; 2015] = \\ &= 5\frac{100 \cdot 101 \cdot (3 \cdot 100^2 + 100 - 1)}{24}\end{aligned}$$

4. **Să se calculeze** $[1,2,3,4,5; f]$ **unde**

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)x^{2013} - 5\sin(\pi x).$$

Rezolvare:

Pentru nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}$$

unde $w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.
Pentru cazul nostru avem

$$[1,2,3,4,5; f] = \sum_{i=1}^{5} \frac{f(i)}{w'_5(i)}$$

unde $w_5(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. Cum $f(i) = 0, \forall\, i = \overline{1,5}$ deducem că

$$[1,2,3,4,5; f] = 0$$

5. **Se consideră problema Cauchy**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

şi metoda numerică

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})]$$

Determinaţi eroarea de trunchiere a metodei de mai sus.

Rezolvare: Eroarea de trunchiere este definită prin

$$T_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

presupunând că $y(t_i) = y_i$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$. Folosind această ipoteză deducem că

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})] = y_n + \frac{h}{2}[3f(t_n, y(t_n)) - f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))]$$

Utilizând dezvoltarea în serie Taylor avem

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \ldots$$

$$y'(t_n) = y'(t_{n-1} + h) = y'(t_{n-1}) + hy''(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2!}y'''(t_{n-1}) + \ldots$$

$$y''(t_n) = y''(t_{n-1} + 1) = y''(t_{n-1}) + hy'''(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2!}y^{(4)}(t_{n-1}) + \ldots$$

Eroarea de trunchiere devine

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}[3f(t_n, y(t_n)) - f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))] = \\
&= \left(y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n)\right) - y(t_n) - \frac{3h}{2}y'(t_n) + \frac{h}{2}y'(t_{n-1}) + \ldots = \\
&= -\frac{h}{2}y'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h}{2}y'(t_{n-1}) + \ldots \\
&= -\frac{h}{2}\left(y'(t_{n-1}) + hy''(t_{n-1})\right) + \frac{h^2}{2}\left(y''(t_{n-1}) + hy'''(t_{n-1})\right) + \frac{h}{2}y'(t_{n-1}) + \ldots = \\
&= \frac{h^3}{2}y'''(t_{n-1}) + O(h^4)
\end{aligned}$$

6. **Să se determine α şi β astfel încât ordinul erorii de trunchiere al metodei**

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\beta f(t_n, y_n) + \frac{3}{4}f\big(t_n + \alpha h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n, y_n)\big)\Big)$$

să fie 3.

Rezolvare: Metoda se poate scrie sub următoarea formă

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \alpha h, y_n + \frac{2}{3}hk_1)
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\beta k_1 + \frac{3}{4}k_2)$$

Este o metodă Runge-Kutta explicită cu două stagii $b_1 = \beta$, $b_2 = \frac{3}{4}$, $c_2 = \alpha$ şi $a_{21} = \frac{2}{3}$ Din cele prezentate mai sus deducem

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \frac{3}{4} = 1 \\ \frac{3}{4}\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$$

7. **Polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a, b se poate da sub forma**

$$H_3(f)(x) = H_3(f; a, a, b, b)(x) = \big(1 + 2\frac{x-a}{b-a}\big)\big(\frac{b-x}{b-a}\big)^2 f(a) +$$

$$+\big(1 + 2\frac{b-x}{b-a}\big)\big(\frac{x-a}{b-a}\big)^2 f(b) + \frac{(x-a)(b-x)^2}{(b-a)^2} f'(a) -$$

$$-\frac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2} f'(b)$$

   (a) Verificaţi că polinomul de mai sus este polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a şi b

   (b) Arătaţi că

$$H_3(f)(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2[a, a, b; f] +$$

$$+(x-a)^2(x-b)[a, a, b, b; f]$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$H_3'(f)(x) = \frac{2}{b-a}\big[\big(\frac{b-x}{b-a}\big)^2 - \big(1 + 2\frac{x-a}{b-a}\big)\frac{b-x}{b-a}\big] f(a) +$$

$$+\frac{2}{b-a}\big[-\big(\frac{x-a}{b-a}\big)^2 + \big(1 + 2\frac{b-x}{b-a}\big)\frac{x-a}{b-a}\big] f(b) +$$

$$+\frac{1}{(b-a)^2}\big[(b-x)^2 - 2(x-a)(b-x)\big] f'(a) -$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\big[2(x-a)(b-x) - (x-a)^2\big] f'(b)$$

Un calcul simplu arată că

$$H_3(f)(a) = f(a)$$
$$H_3(f)(b) = f(b)$$
$$H_3'(f)(a) = f'(a)$$
$$H_3'(f)(b) = f'(b)$$

(b) Din definiţia diferenţelor divizate cu noduri duble avem

$$[a, a; f] = f'(a)$$

$$[a, a, b; f] = \frac{[a, b; f] - [a, a; f]}{b - a} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)}{(b - a)^2}$$

$$[a, a, b, b; f] = \frac{[a, b, b; f] - [a, a, b; f]}{b - a} = \frac{2f(b) - 2f(a) - (b - a)(f'(a) + f'(b))}{(b - a)^3}$$

Folosind forma Newton a polinomului Hermite cu noduri duble obţinem

$$H_3(f)(x) = f(a) + (x - a)[a, a; f] + (x - a)^2[a, a, b; f] + (x - a)^2(x - b)[a, a, b, b; f] =$$

$$f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2\frac{f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)}{(b - a)^2} +$$

$$+(x - a)^2(x - b)\frac{2f(b) - 2f(a) - (b - a)(f'(a) + f'(b))}{(b - a)^3} =$$

$$= f(a)\big(1 - \big(\frac{x - a}{b - a}\big)^2 - 2\frac{(x - a)^2(x - b)}{(b - a)^3}\big) +$$

$$+f(b)\big(\big(\frac{x - a}{b - a}\big)^2 + 2\frac{(x - a)^2(x - b)}{(b - a)^3}\big) +$$

$$+f'(a)\big((x - a) - \frac{(x - a)^2(b - a)}{(b - a)^2} - \frac{(x - a)^2(x - b)(b - a)}{(b - a)^3}\big) -$$

$$-f'(b)\frac{(x - a)^2(x - a)(b - a)}{(b - a)^3} =$$

$$= \big(1 + 2\frac{x - a}{b - a}\big)\big(\frac{b - x}{b - a}\big)^2 f(a) +$$

$$+\big(1 + 2\frac{b - x}{b - a}\big)\big(\frac{x - a}{b - a}\big)^2 f(b) + \frac{(x - a)(b - x)^2}{(b - a)^2}f'(a) -$$

$$-\frac{(x - a)^2(b - x)}{(b - a)^2}f'(b)$$

8. **Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, Δ o diviziune a interalului $[0,1]$ şi $s_\Delta(f)$ spline-ul liniar de interpolare a lui f relativ la diviziunea Δ. Să se calculeze**

$$(s_\Delta \circ s_\Delta \circ \ldots \circ s_\Delta)(f)$$

Rezolvare: Fie $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ diviziune a intervalului $[0,1]$. Funcţia spline liniară în raport cu Δ poate fi scrisă

$$s_\Delta(f)(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}$$

Avem $s_\Delta(f)(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Mai mult,

$$\begin{aligned}
(s_\Delta \circ s_\Delta)(f)(x) &= s_\Delta(s_\Delta(f))(x) = \\
&= s_\Delta(f)(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + s_\Delta(f)(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \\
&= f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \\
&= s_\Delta(f)(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]
\end{aligned}$$

9. **Fie $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ noduri distincte. Considerăm funcţiile de interpolare**

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kx}.$$

Să se arate că există $c_0, c_1, \ldots, c_n$ unic determinaţi astfel încât

$$G_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

oricare ar fi numerele reale $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Rezolvare: Din condiţiile

$$G_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kx_i} = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

obţinem sistemul

$$\begin{cases} c_0 + c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} + c_3 e^{3x_0} + \dots c_{n-1} e^{(n-1)x_0} + c_n e^{nx_0} = y_0 \\ c_0 + c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} + c_3 e^{3x_1} + \dots c_{n-1} e^{(n-1)x_1} + c_n e^{nx_1} = y_1 \\ c_0 + c_1 e^{x_2} + c_2 e^{2x_2} + c_3 e^{3x_2} + \dots c_{n-1} e^{(n-1)x_2} + c_n e^{nx_3} = y_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ c_0 + c_1 e^{x_{n-1}} + c_2 e^{2x_{n-1}} + c_3 e^{3x_{n-1}} + \dots c_{n-1} e^{(n-1)x_{n-1}} + c_n e^{nx_{n-1}} = y_{n-1} \\ c_0 + c_1 e^{x_n} + c_2 e^{2x_n} + c_3 e^{3x_n} + \dots c_{n-1} e^{(n-1)x_n} + c_n e^{nx_n} = y_n \end{cases}$$

Determinantul sistemului este dat de

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{2x_0} & e^{3x_0} & \dots & e^{(n-1)x_0} & e^{nx_0} \\ 1 & e^{x_1} & e^{2x_1} & e^{3x_1} & \dots & e^{(n-1)x_1} & e^{nx_1} \\ 1 & e^{x_2} & e^{2x_2} & e^{3x_2} & \dots & e^{(n-1)x_2} & e^{nx_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_{n-1}} & e^{2x_{n-1}} & e^{3x_{n-1}} & \dots & e^{(n-1)x_{n-1}} & e^{nx_{n-1}} \\ 1 & e^{x_n} & e^{2x_n} & e^{3x_n} & \dots & e^{(n-1)x_n} & e^{nx_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & e^{x_0} & (e^{x_0})^2 & (e^{x_0})^3 & \dots & (e^{x_0})^{n-1} & (e^{x_0})^n \\ 1 & e^{x_1} & (e^{x_1})^2 & (e^{x_1})^3 & \dots & (e^{x_1})^{n-1} & (e^{x_1})^n \\ 1 & e^{x_2} & (e^{x_2})^2 & (e^{x_2})^3 & \dots & (e^{x_2})^{n-1} & (e^{x_2})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_{n-1}} & (e^{x_{n-1}})^2 & (e^{x_{n-1}})^3 & \dots & (e^{x_{n-1}})^{n-1} & (e^{x_{n-1}})^n \\ 1 & e^{x_n} & (e^{x_n})^2 & (e^{x_n})^3 & \dots & (e^{x_n})^{n-1} & (e^{x_n})^n \end{vmatrix}$$

şi reprezintă un determinant Vandermonde pentru $e^{x_0}, e^{x_1}, \dots e^{x_n}$. Din faptul că nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sunt distincte deducem că $e^{x_0}, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}$ sunt distincte. Aşadar, $\Delta \neq 0$ şi în acest caz sistemul are soluţie unică oricare ar fi numerele reale $y_0, y_1, \dots, y_n$.

10. **Să se determine spline-ul liniar de interpolare $s_\Delta(f)$ dacă**

$$f(x) = 5\left|x - \frac{3}{4}\right| + 15\left|x - \frac{1}{3}\right| + 3x + 1$$

şi $\Delta = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Rezolvare: Pentru $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ spline-ul liniar $s_L(x)$ care interpolează f pentru aceste puncte este definit prin

$$s_\Delta(f)(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{2, n}$$

Mai mult,

$$s_\Delta(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$$

unde

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h_1},\ x_0 \le x < x_1 \\ 0,\ x_1 \le x \le x_n \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0,\ x_0 \le x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_i},\ x_{i-1} \le x < x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}},\ x_i \le x < x_{i+1} \\ 0,\ x_{i+1} \le x \le x_n \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0,\ x_0 \le x < x_{n-1} \\ \frac{x-x_{n-1}}{h_n},\ x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

În cazul nostru

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{4}-x}{\frac{1}{4}-0},\ x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0,\ x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases} = \begin{cases} 1-4x,\ x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0,\ x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x-0}{\frac{1}{4}},\ x \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases} = \begin{cases} 4x,\ x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 2-4x,\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{\frac{3}{4}-x}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \end{cases} = \begin{cases} 4x-1,\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 3-4x,\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{1-x}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{3}{4}, 1) \end{cases} = \begin{cases} 4x-2,\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 4-4x,\ x \in [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 0,\ x \in [0, \frac{3}{4}) \\ \frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}},\ x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} = \begin{cases} 0,\ x \in [0, \frac{3}{4}) \\ 4x-3,\ x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$f(0) = 5|0 - \frac{3}{4}| + 15|0 - \frac{1}{3}| + 0 + 1 = \frac{39}{4}$$

$$f(\frac{1}{4}) = 5|\frac{1}{4} - \frac{3}{4}| + 15|\frac{1}{4} - \frac{1}{3}| + 3\frac{1}{4} + 1 = \frac{66}{12}$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}| + 15|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}| + 3\frac{1}{2} + 1 = \frac{75}{12}$$

$$f(\frac{3}{4}) = 5|\frac{3}{4} - \frac{3}{4}| + 15|\frac{3}{4} - \frac{1}{3}| + 3\frac{3}{4} + 1 = \frac{19}{2}$$

$$f(1) = 5|1 - \frac{3}{4}| + 15|1 - \frac{1}{3}| + 3 + 1 = \frac{61}{4}$$

$$\begin{aligned} s_\Delta(f)(x) &= f(0)\varphi_0(x) + f(\frac{1}{4})\varphi_1(x) + f(\frac{1}{2})\varphi_2(x) + f(\frac{3}{4})\varphi_3(x) + f(1)\varphi_4(x) = \\ &= \frac{39}{4}\varphi_0(x) + \frac{66}{12}\varphi_1(x) + \frac{75}{12}\varphi_2(x) + \frac{19}{2}\varphi_3(x) + \frac{61}{4}\varphi_4(x) \end{aligned}$$

11. **Dacă $f \in C^4[0,1]$ să se calculeze o estimare a restului în interpolarea prin spline-uri cubice de tip Hermite.**

Rezolvare: Fie $\Delta := \Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$. Pe fiecare subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ spline-ul este polinomul Hermite cu nodurile duble x_i şi x_{i+1}. Restul pentru acest interval (vezi rezultatele de la curs) este

$$R_i(x) = (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

unde $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. Notând cu $M_{4,i} = \max\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f^{(4)}(x)$ şi folosind faptul că

$$|(x-a)(x-b)| \le \frac{(b-a)^2}{4}, \quad \forall\, x \in [a,b]$$

obţinem următoarea majorare pentru rest

$$|R_i(x)| \le \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4^2} \frac{M_{4,i}}{4!}$$

Pe întregul interval se obţine

$$\|f - s_3(f)\|_\infty \le \frac{\|\Delta\|}{384} \|f^{(4)}\|_\infty,$$

unde $\|\Delta\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|$.

12. **Fie $s_\Delta(f)(x)$ spline-ul liniar de interpolare pentru funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, relativ la diviziunea Δ. Să se arate că**

$$s_\Delta(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2} [x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|]_t f(x_k)$$

unde notaţia $[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|]_t$ indică faptul că diferenţa divizată acţionează asupra variabilei t.

Rezolvare: Pentru început calculăm diferenţa divizată

$$\begin{aligned} [x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|]_t &= \frac{[x_k, x_{k+1}; |t-x|]_t - [x_{k-1}, x_k; |t-x|]_t}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_{k-1}} \Big(\frac{|x_{k+1} - x| - |x_k - x|}{x_{k+1} - x_k} - \frac{|x_k - x| - |x_{k-1} - x|}{x_k - x_{k-1}} \Big) \end{aligned}$$

Înlocuind obţinem

$$\begin{aligned} s_\Delta(f)(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2} [x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|]_t f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Big(\frac{|x_{k+1} - x| - |x_k - x|}{x_{k+1} - x_k} - \frac{|x_k - x| - |x_{k-1} - x|}{x_k - x_{k-1}} \Big) f(x_k) \end{aligned}$$

Pentru orice nod x_k al diviziunii Δ avem

$$\begin{aligned} s_\Delta(f)(x_k) &= \frac{1}{2} \Big(\frac{|x_{k+1} - x_k| - |x_k - x_k|}{x_{k+1} - x_k} - \frac{|x_k - x_k| - |x_{k-1} - x_k|}{x_k - x_{k-1}} \Big) f(x_k) = \\ &= \frac{1}{2} \Big(\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{-(x_k - x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \Big) f(x_k) = f(x_k) \end{aligned}$$

13. **Arătaţi că polinomul de interpolare Lagrange pentru datele de mai jos are gradul 3**

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	**1**	**4**	**11**	**16**	**13**	**-4**

Rezolvare: Tabelul cu diferenţe divizate este dat de

-2	1	3	2	-1	0	0
-1	4	7	-1	-1	0	
0	11	5	-4	-1		
1	16	-3	-7			
2	13	17				
3	-4					

Forma Newton a polinomului Lagrange va fi dată de

$$N_f(x) =$$
$$= 1 + 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) + (-1)(x+2)(x+1)x +$$
$$+0(x+2)(x+1)x(x-1) + 0(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) =$$
$$= 1 + 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) + (-1)(x+2)(x+1)x = -x^3 - x^2 + 7x + 11$$

Deducem că polinomul de interpolare are gradul 3.

14. **Următoarele informaţii corespund unui polinom $P(x)$ de grad necunoscut**

x	**0**	**1**	**2**
P(x)	**2**	**-1**	**4**

Să se determine coeficientul lui x^2 din $P(x)$ dacă diferenţa divizată pe oricare patru puncte distincte este egală cu 1.

Rezolvare: Tabelul cu diferenţe divizate este dat de

0	2	-3	4	1	0	0
1	-1	5	$\times$	1	0	
2	4	$\times$	$\times$	1		
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
$\times$	$\times$	$\times$				
$\times$	$\times$					

unde $\times$ reprezintă valori care depind de $P(x)$. Forma Newton va fi urmă toarea

$$\begin{aligned} N_f(x) &= 2 + (-3)(x-0) + 4(x-0)(x-1) + 1(x-0)(x-1)(x-2) = \\ &= x^3 + x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

Coeficientul este 1.