MI
Metody Identyfikacji

wykład #8

1. *Modele NARMAX*
2. *Szeregi nieliniowe różnych funkcji bazowych:*
   a) *Volterre*
   b) *Laguerre*
   c) *…*

Modele NARMAX

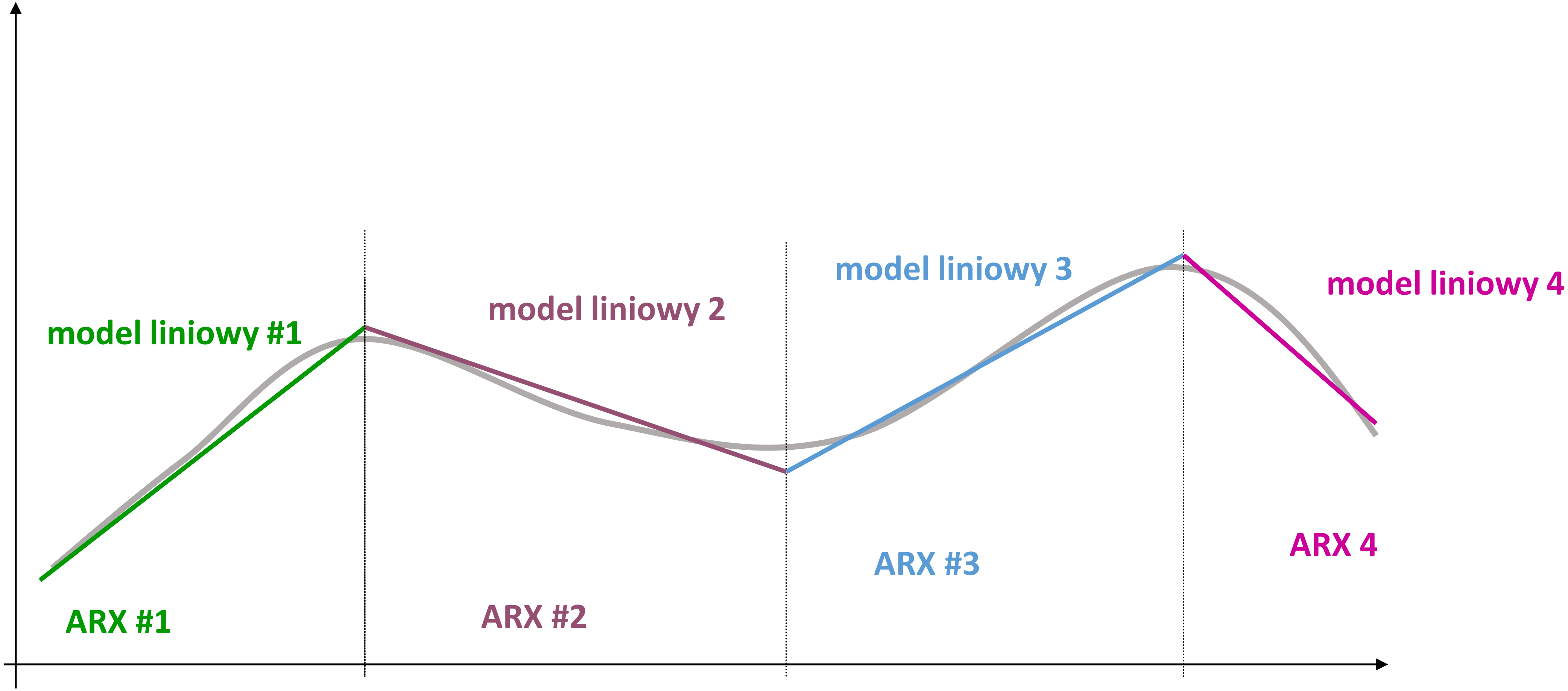
- Nieliniowe modele opisane za pomocą równania różnicowego
  - postać ogólna

$$y(k+1) = f\,(y(k), y(k-1), \ldots, u(k), u(k-1), \ldots)$$

    - Zależność od opóźnionych y(k) – *autoregresja*
    - Zależność od opóźnionych u(k) – *ruchoma średnia*
    - Wiele wersji, jak na przykład NAR, NMA, NARMA, NARX, etc …
  - Postacie iloczynowe

$$y(k+1) = a_1 y(k) y(k-1) + a_2 y(k) u(k-1) + a_3 u(k) u(k)$$

Modele kawałkami liniowe



Modele Takagi-Sugeno

- W 1985 roku Takagi i Sugeno zaproponowali nowy schemat wnioskowania. Metoda ta zmieniła standardową postać reguł i stanowi rozwinięcie najprostszego układu rozmytego z singletonami po stronie następnika reguły.
- Zakładając, że układ ma *N* sygnałów wejściowych $x_1, x_2,...,x_N$ można zapisać poszczególną regułę w postaci:

R^2: ***jeśli*** x_1 ***jest*** A1 ***i*** x_2 ***jest*** A2 ***i ...*** x_N ***jest*** AN ***to*** $y=f(x_1, x_2,...,x_N)$

- gdzie funkcja $f(x_1, x_2,...,x_N)$ jest liniową kombinacją wejść

$$f(x_1, x_2,...,x_N)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+...+a_Nx_N$$

Model NARMAX a model Takagi-Sugeno

- Przyjmujemy opis za pomocą modelu ARX

$$A\left(z^{-1}\right)y_k = B\left(z^{-1}\right)z^{-d}u_k + e_k$$

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N_a} z^{-N_a}$$

$$B\left(z^{-1}\right) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N_b} z^{-N_b}$$

$$Ee_k = 0 \quad Ee_k^2 = \sigma^2$$

- Jedna reguła opisuje model lokalny

$$\hat{y}(t+1) = a_{1,i}\, y(t) + \ldots + a_{N_a,i}\, y(t - N_a) + b_{0,i}\, u(t-d+1) + \ldots + b_{N_b,i}\, u(t-d-N_b)$$

- Natomiast złożenie wszystkich reguł

$$w_i\left(z(t)\right) = \frac{\left|z(t)\ jest\ Z_i\right|}{\sum_{j=1}^{M}\left|z(t)\ jest\ Z_j\right|}$$

  - gdzie $\left|z(t)\ jest\ Z_i\right|$ oznacza stopień przynależności $z(t)$ do Z_i.

Model NARMAX a model Takagi-Sugeno

- Model możemy przepisać jako

$$\hat{y}(t+1)=\sum_{i=1}^{M}\left[a_{1,i}y(t)+\ldots+a_{N_a,i}y(t-N_a)+b_{0,i}u(t-d+1)+\ldots+b_{N_b,i}u(t-d-N_b)\right]w_i(z(t))$$

- A uwzględniwszy zależność na wnioskowanie

$$\hat{y}(t+1)=\frac{\sum_{i=1}^{M}\left[a_{1,i}y(t)+\ldots+a_{N_a,i}y(t-N_a)+b_{0,i}u(t-d+1)+\ldots+b_{N_b,i}u(t-d-N_b)\right]\cdot\left|z(t)\ jest\ Z_i\right|}{\sum_{i=1}^{M}\left|z(t)\ jest\ Z_i\right|}$$

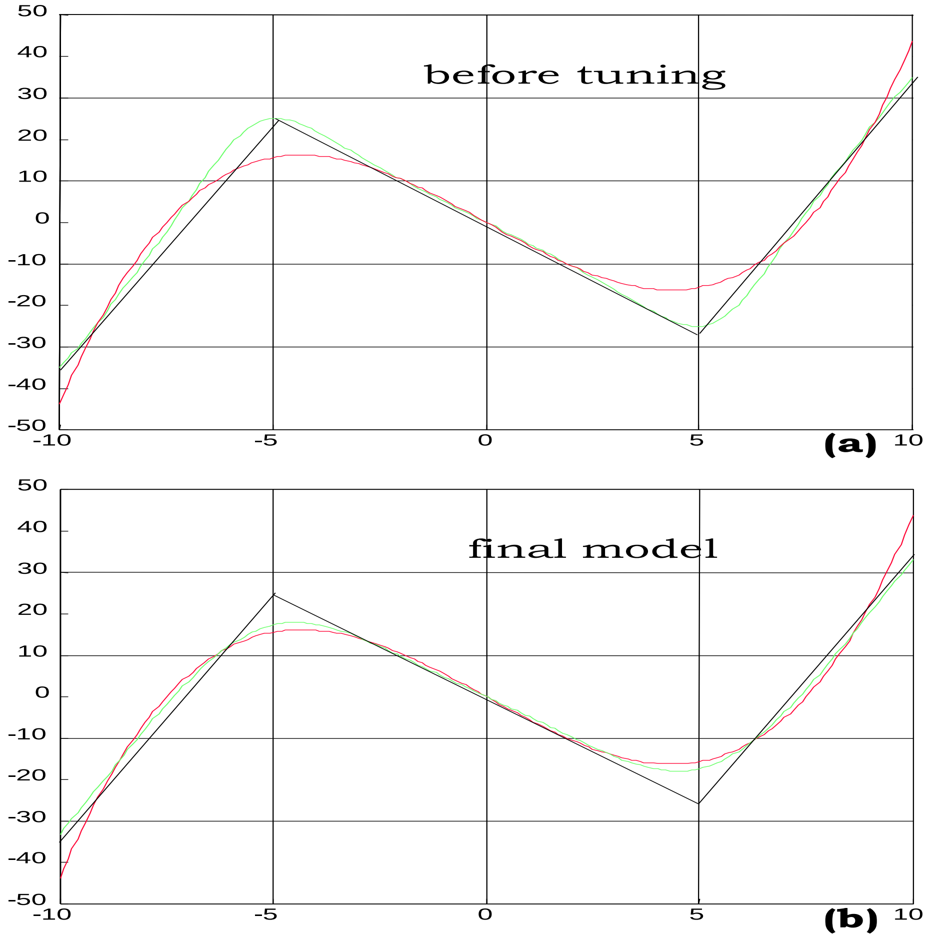
- Całość można przepisać do postaci jednolitej

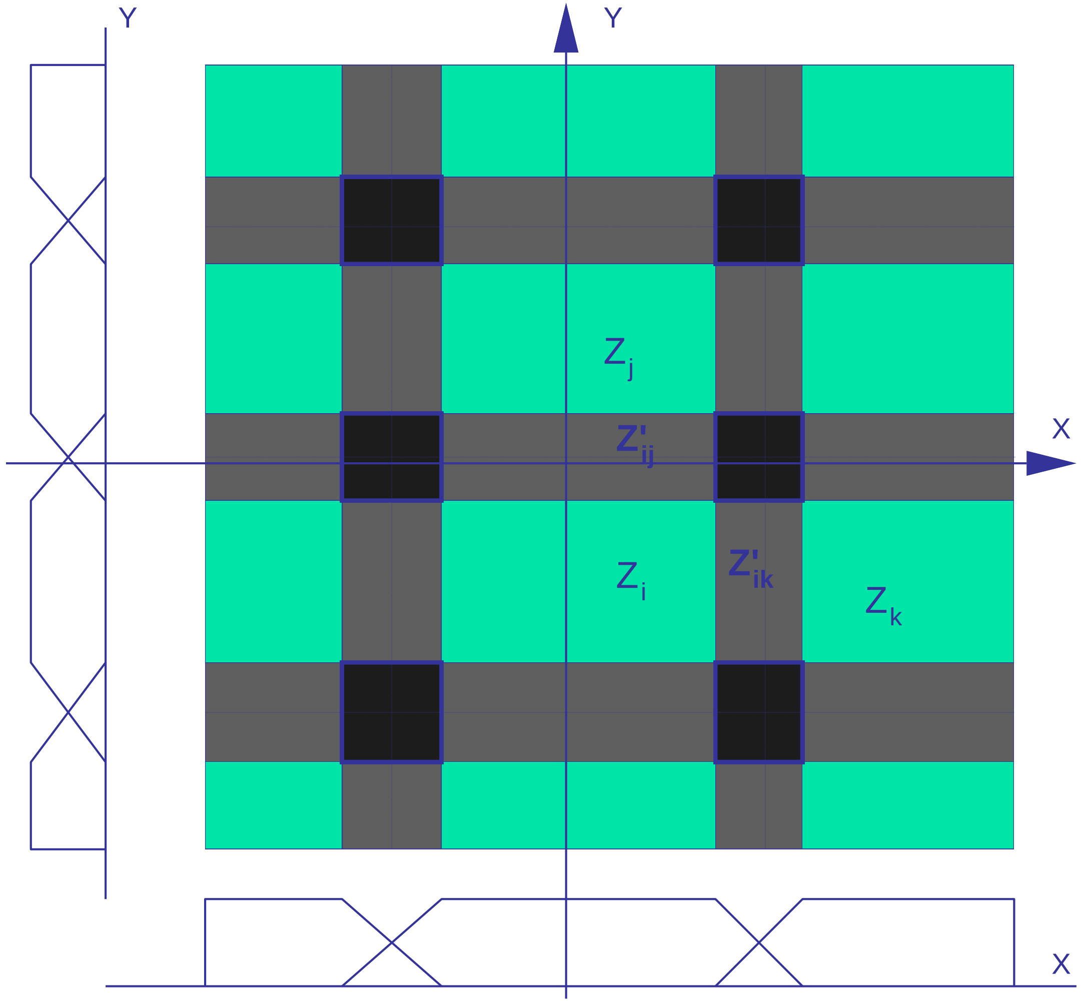
$$y(t+1)=a_1(z(t))y(t)+\ldots+a_{N_a}(z(t))y(t-N_a)+$$
$$b_0(z(t))u(t-d+1)+\ldots+b_{N_b}(z(t))u(t-d-N_b)$$

$$a_i(z(t))=\sum_{j=1}^{M}a_{i,j}w_j(z(t))$$

$$b_i(z(t))=\sum_{j=1}^{M}b_{i,j}w_j(z(t))$$

Rozmyte modelowanie kawałkami liniowe





Modele NARMAX a sieci neuronowe

- Wyobraźmy sobie sieć rekurencyjną
- $y(n+q) = \Phi(\mathbf{x}(n),\mathbf{u}_q(n))$, gdzie q jest rozmiarem przestrzeni stanów i $\Phi{:}R^{2q}\rightarrow R$.
- Zakładamy, że sieć jest obserwowalna, tzn. $\mathbf{x}(n) = \Psi(\mathbf{y}_q(n),\mathbf{u}_{q-1}(n))$ where $\Psi{:}R^{2q}\rightarrow R$.
- $y(n+q) = F(\mathbf{y}_q(n),\mathbf{u}_q(n))$ gdzie $\mathbf{u}_{q-1}(n)$ jest zawarte w $\mathbf{u}_q(n)$ jako pierwsze $(q-1)$ elementy, a przekształcenie nieliniowe $F{:}R^{2q}\rightarrow R$ uwzględnia zarówno Ψ jak i Φ.
- $y(n+1) = F(y(n),\ldots,y(n-q+1),u(n),\ldots,u(n-q+1))$

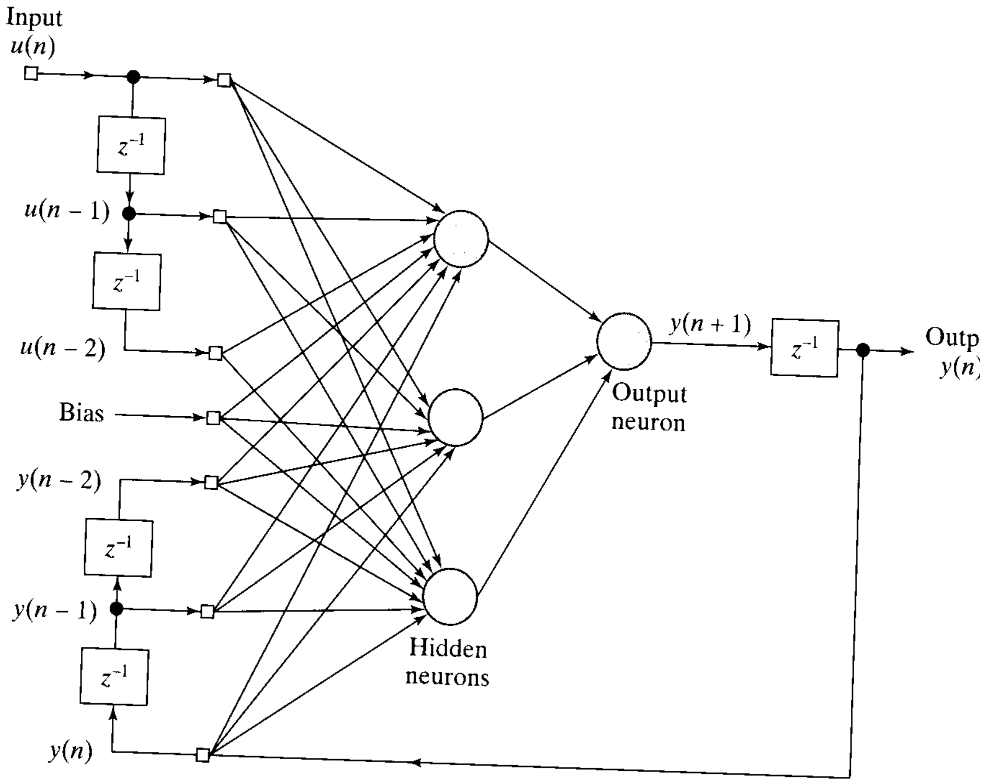
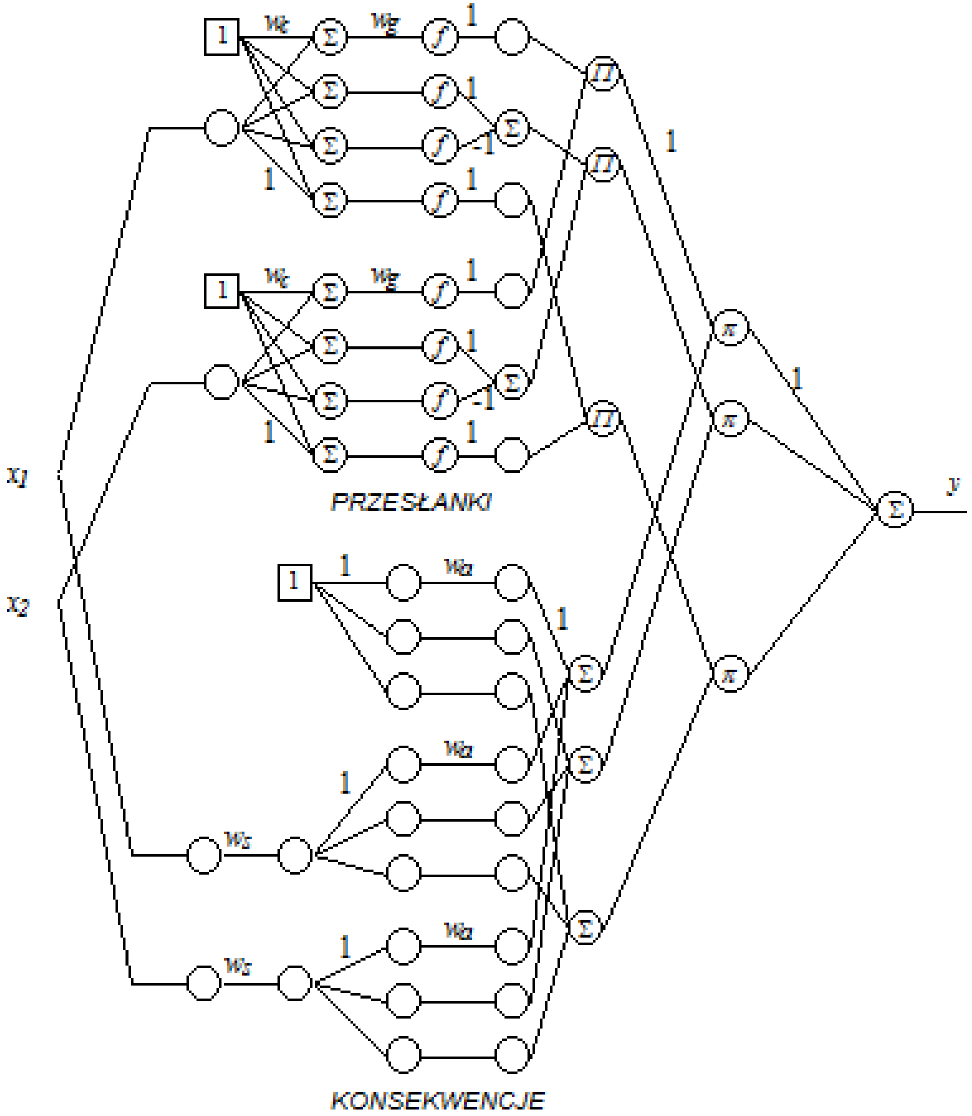


FIGURE 15.7 NARX network with q = 3 hidden neurons.

Rozmyte sieci neuronowe

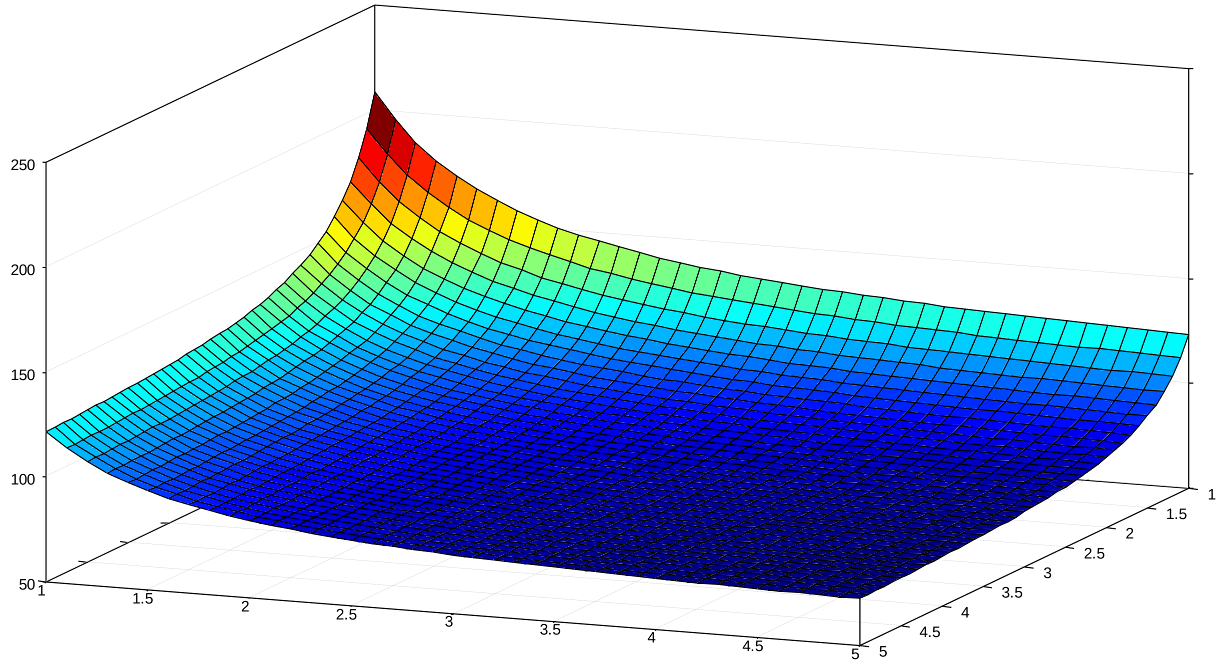


Model NARMAX a model Takagi-Sugeno

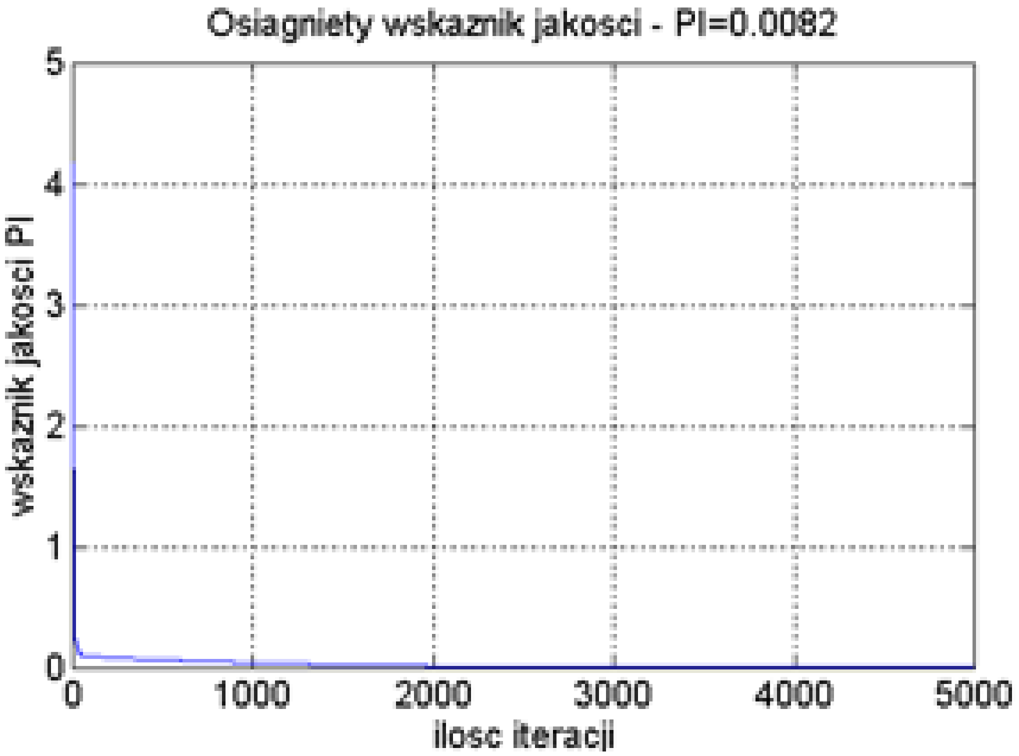
- Przykład: funkcja nieliniowa

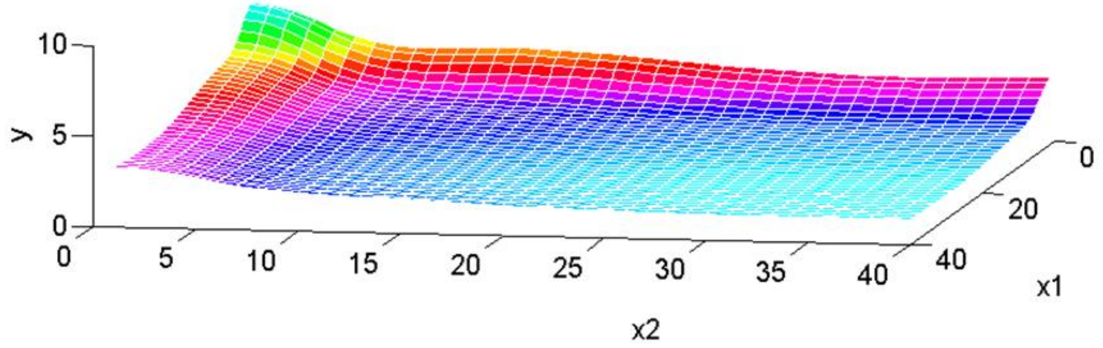
$$y = \left(1 + x_1^{-2} + x_2^{-1.5}\right)^2$$

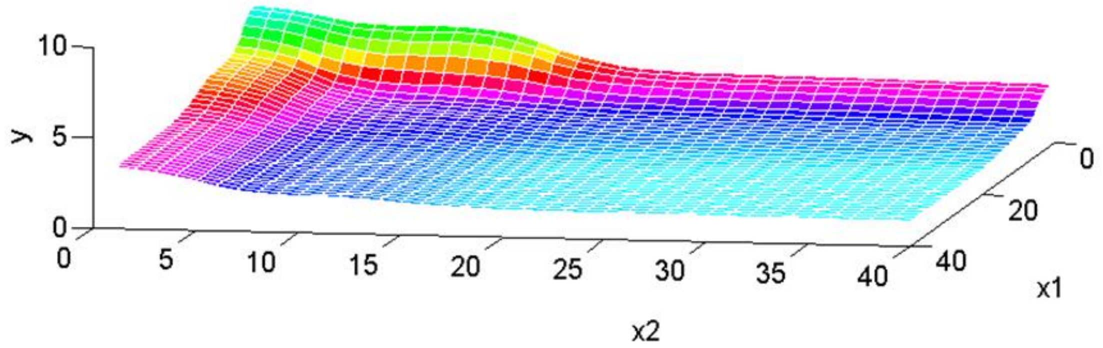
$$x_1 \in \langle 1,5 \rangle \quad x_2 \in \langle 1,5 \rangle$$



Model NARMAX a model Takagi-Sugeno



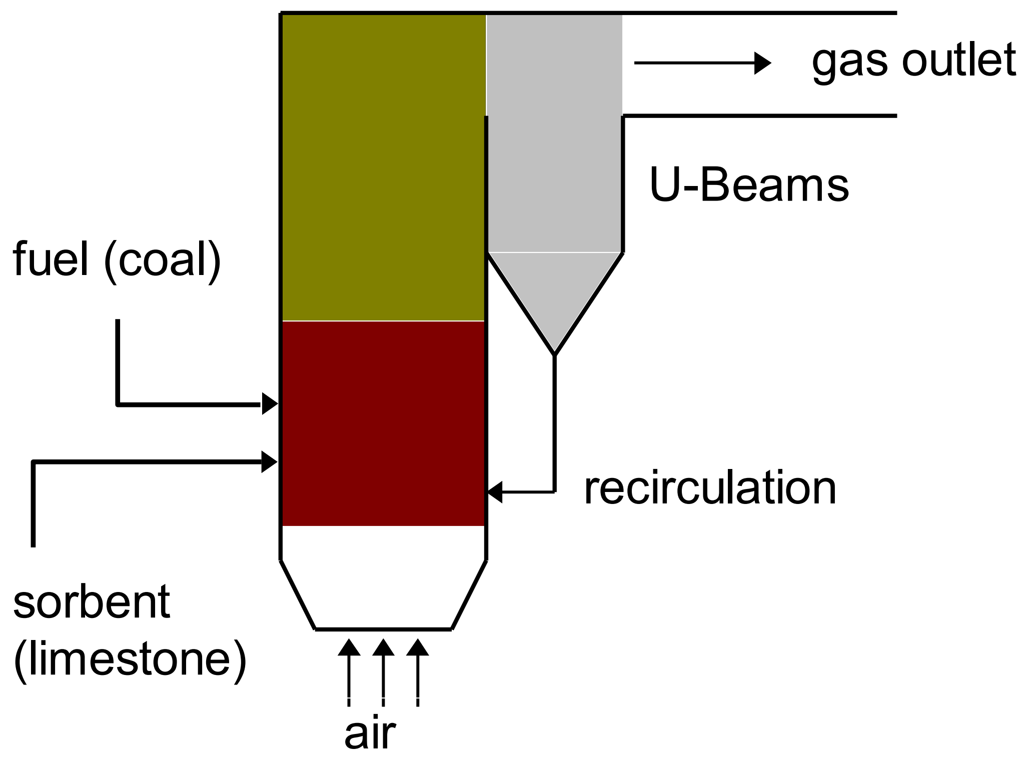




Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

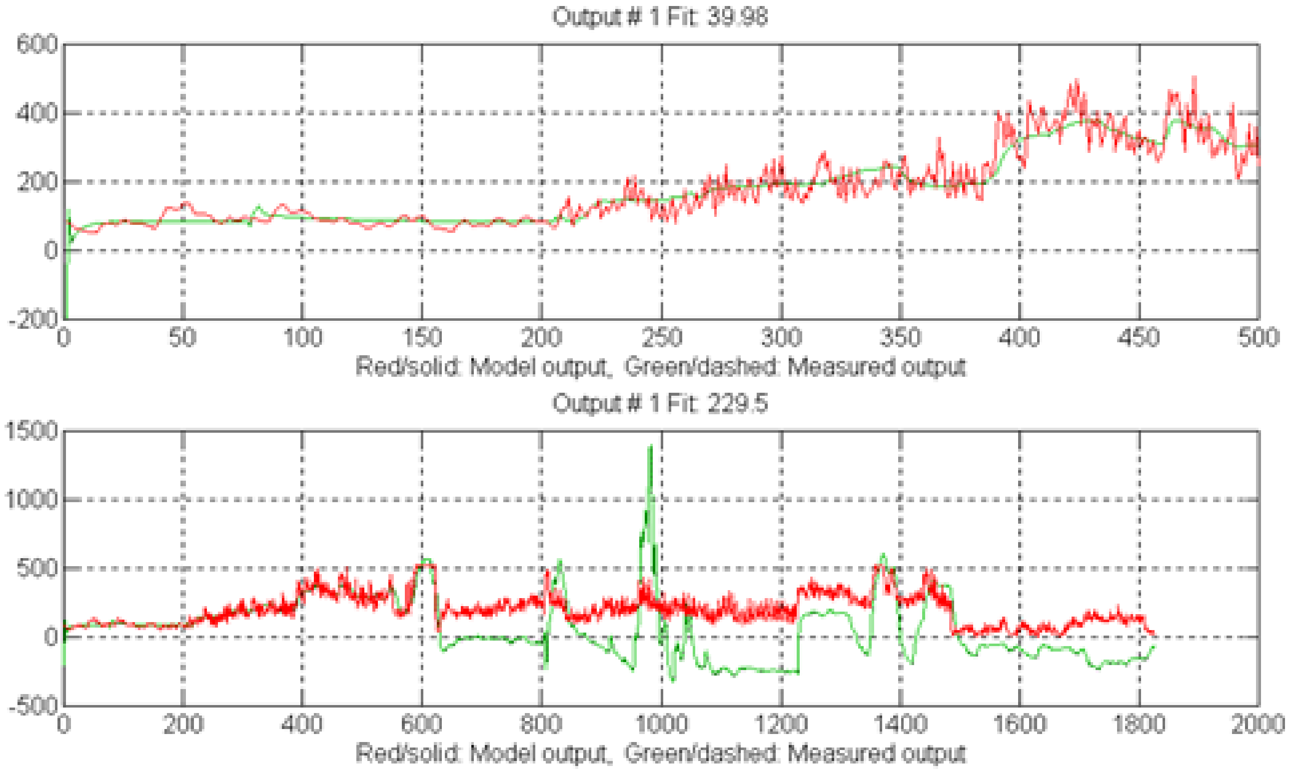
- Przekroczenia emisji SO_2
- Układ sterowania dozowania sorbentu (kamień wapienny)
- Różne modele
  - Model liniowy Box-Jenkins
  - AFNN
  - model jakościowy otrzymany koewolucyjnie
  - model Takagi-Sugeno:
    fuzzy neural network (FNN);

PROCESS SCHEMATIC REPRESENTATION



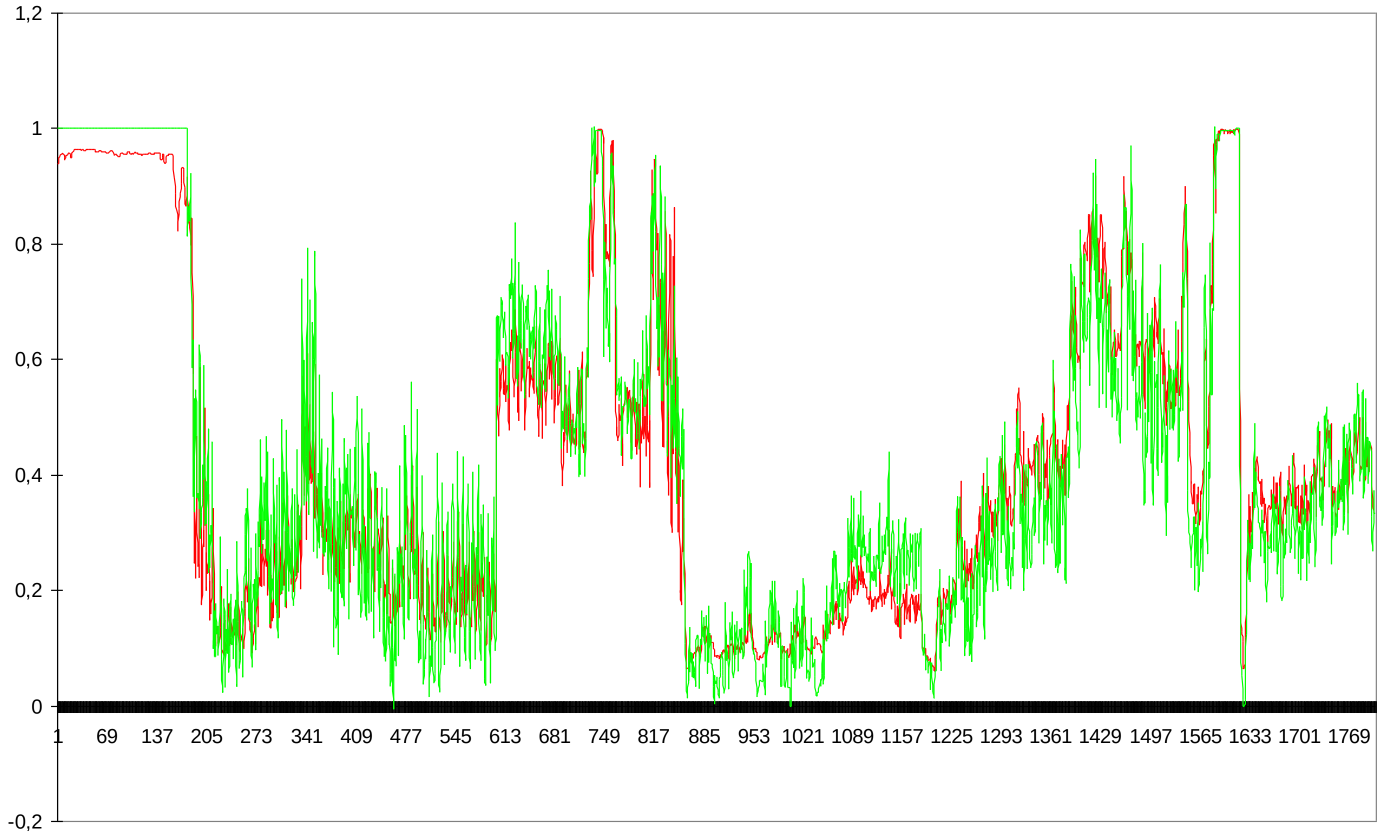
Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

- Model liniowy
- 5 inputs:
  steam production;
  primary air flow;
  sorbent quantity;
  temperature at level 2;
  temperature at level 4.
- polynomial orders:
  {N_A, N_B, N_C, N_D, N_F, d}
  {1,[2,2,5,1,1],0,0,[3,5,6,2,2],
  [1,1,0,0,0]}



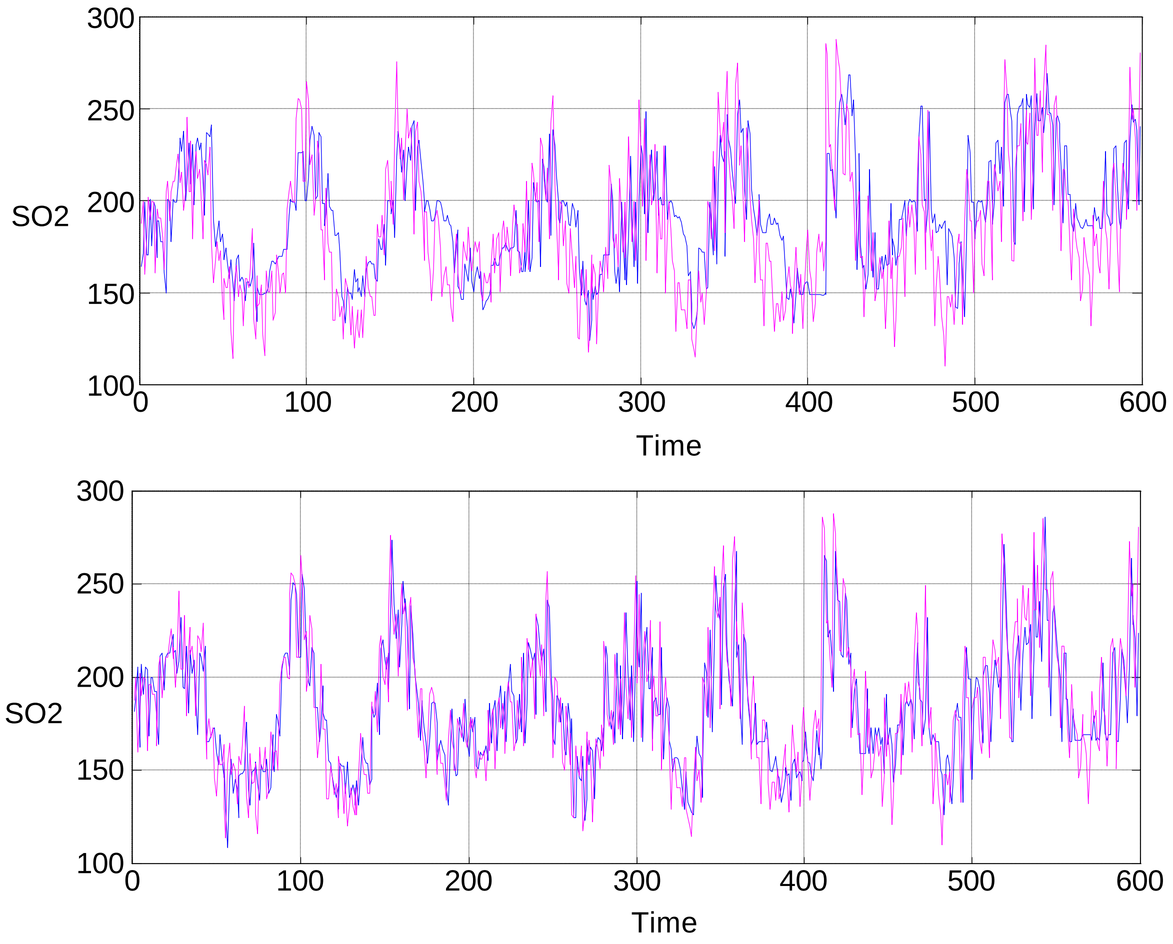
Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

- ANN
  - input coal flow;
  - primary air flow;
  - sorbent quantity;
  - temperature at level 1;
  - temperature at level 2;
  - temperature at level 4.
  - past SO_2 emission;
  - past CO emission;
  - past O_2 concentration.



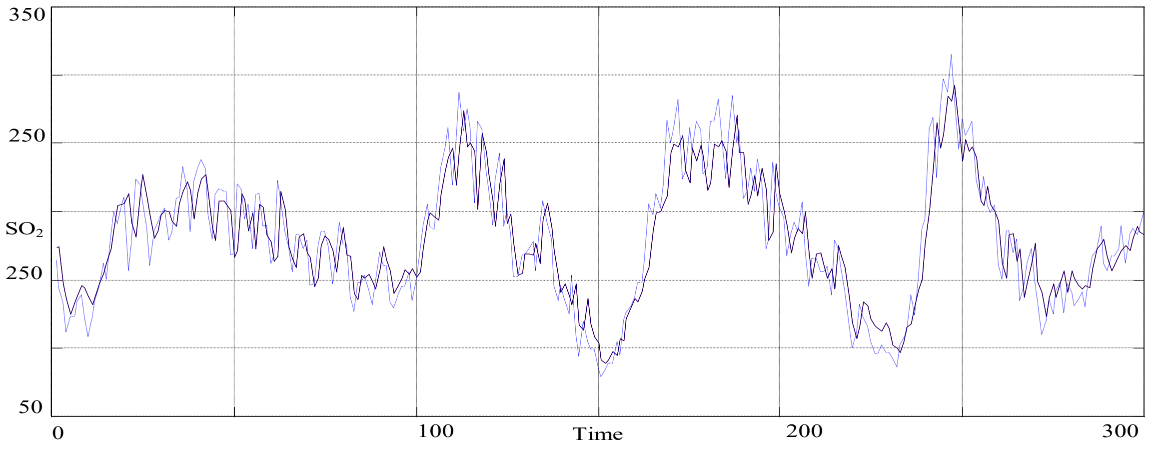
Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

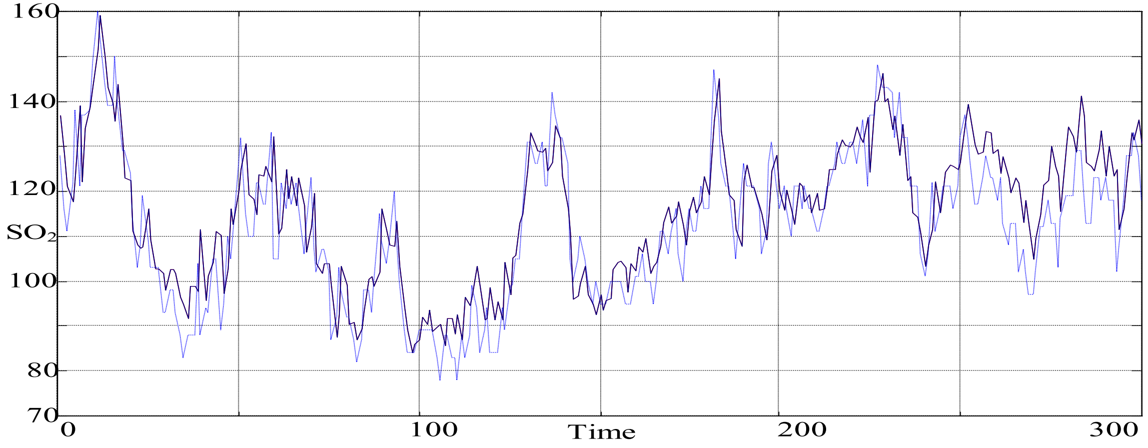
- Model koewolucyjny
  - primary air flow;
  - sorbent quantity;
  - boiler load;
  - temperature at level 2;
  - temperature at level 4.
  - past SO_2 emission;



Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

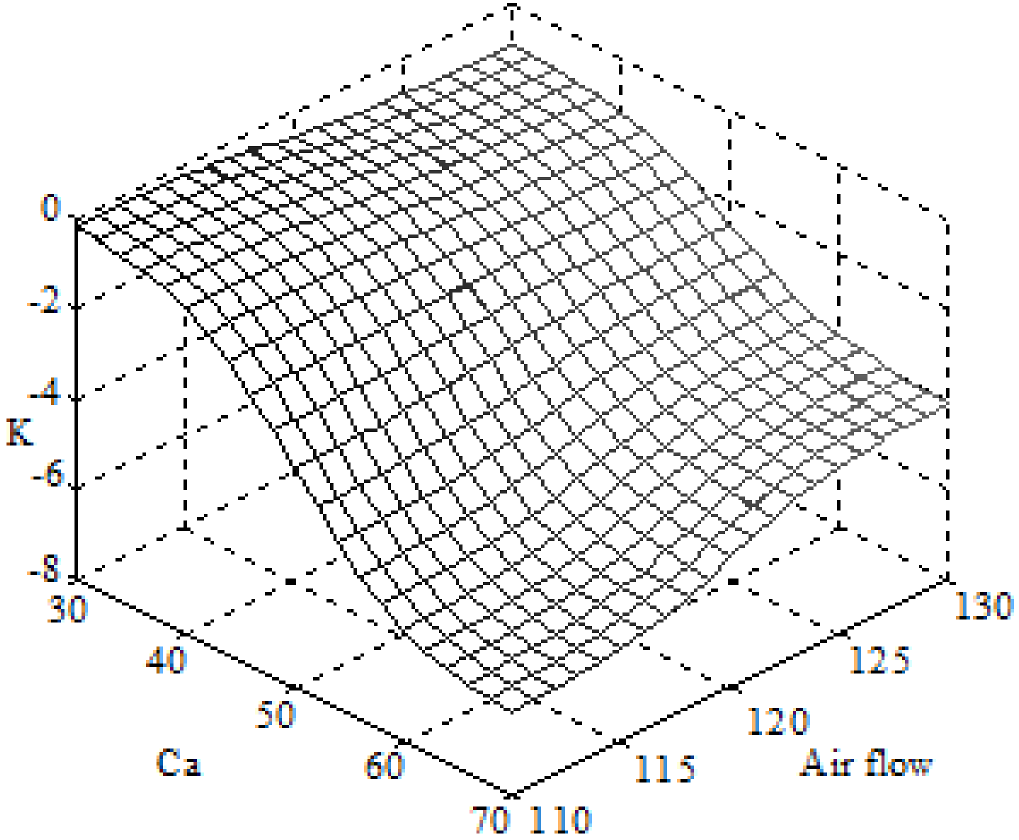
- NARMAX: Takagi-Sugeno
  - steam flow;
  - primary air flow;
  - sorbent quantity (k)moment;
  - sorbent quantity (k-1)moment;
  - temperature at level 2;
  - temperature at level 4.
  - past SO_2 emission (k-1)moment;
  - past SO_2 emission (k-2)moment;



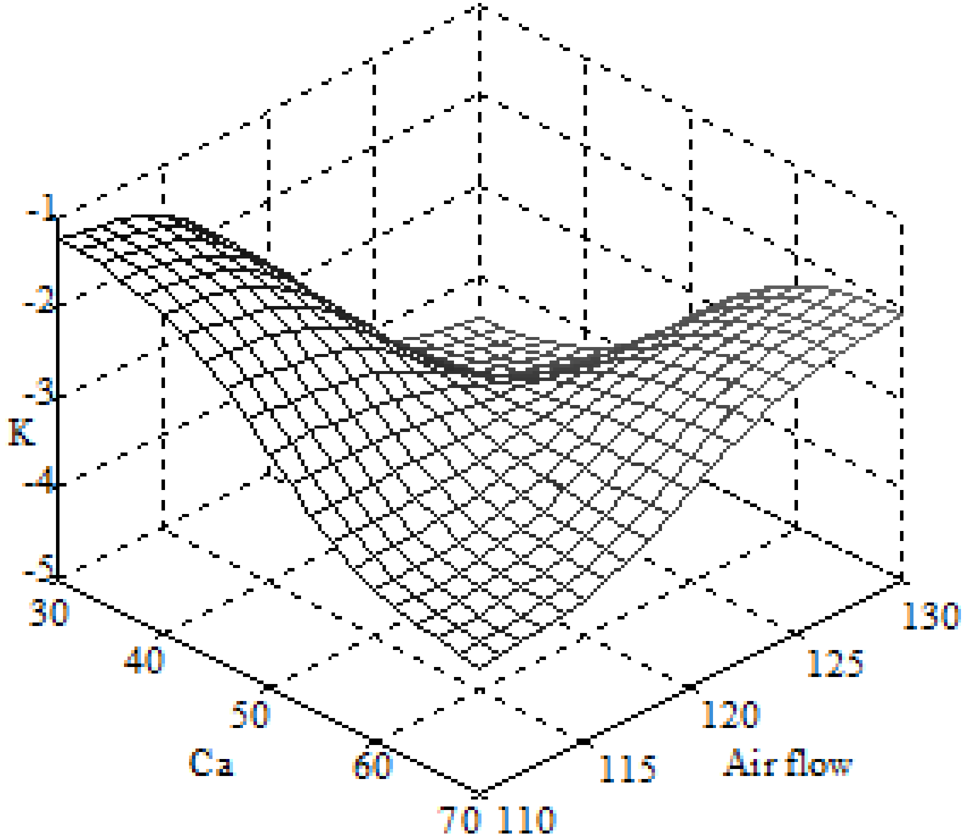


Przykład – kocioł fluidalny OFz-450

niskie temperatury



wysokie temperatury



wzmocnienie $K=SO_2/Ca$ w zależności od dopływu kamienia i powietrza

Szeregi Volterra

- Modele całkowe wysokich rzędów w postaci ciągu całek
  - w wersji ciągłej

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) u(t-\tau) d\tau$$
$$+ \iint h_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$
$$+ \iiint h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) u(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$
$$+ \cdots$$

  - w wersji dyskretnej

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} h_1(j) u(k-j)$$
$$+ \sum \sum h_2(j_1, j_2) u(k-j_1) u(k-j_2)$$
$$+ \sum \sum \sum h_3(j_1, j_2, j_3) u(k-j_1) u(k-j_2) u(k-j_3)$$
$$+ \cdots$$

Szeregi Volterra

- Modele zawierają jądro (kernel, funkcja bazowa) w postaci

  $h_3(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$

  - odpowiadające odpowiedzi impulsowej

- Jeśli przyjmiemy, że rząd jest ograniczony do $k<M$, to otrzymamy postać

$$y(k) = c_{00} + \sum_{n=1}^{p} v_M^n(k)$$

$$v_M^n = \sum_{i_1=0}^{M} \cdots \sum_{i_n=1}^{M} \alpha_n(i_1, \ldots, i_n) u(k - i_1) \ldots u(k - i_n)$$

- Inna postać ograniczona do rzędu p

$$A(q^{-1}) y(k) = c_{00} + B_1(q^{-1}) u(k-d)$$

$$+ \sum_{\beta_1=0}^{h} B_{2\beta_1}(q^{-1}) u(k-d) u(k-d-\beta_1) + \ldots$$

$$+ \sum_{\beta_1=0}^{h} \sum_{\beta_2=\beta_1}^{h} \cdots \sum_{\beta_{p-1}=\beta_{p-2}}^{h} B_{p\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}}(q^{-1}) u(k-d) \prod_{\xi=1}^{p-1} u(k-d-\beta_\xi) + \ldots$$

często ograniczane do rzędu drugiego

Aproksymacja za pomocą wielomianów ortogonalnych

- Postać wielomianu aproksymującego

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(x)$$

- Ciąg funkcji jest ortogonalny gdy:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i) \cdot \varphi_l(x_i) = 0 \text{ dla } k, l = 0,1,\dots, k \neq l$$

Wielomiany Legendre'a

- Postać rekurencyjna

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) x\, L_n(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right) L_{n-1}(x) \quad n=1,2,\ldots$$

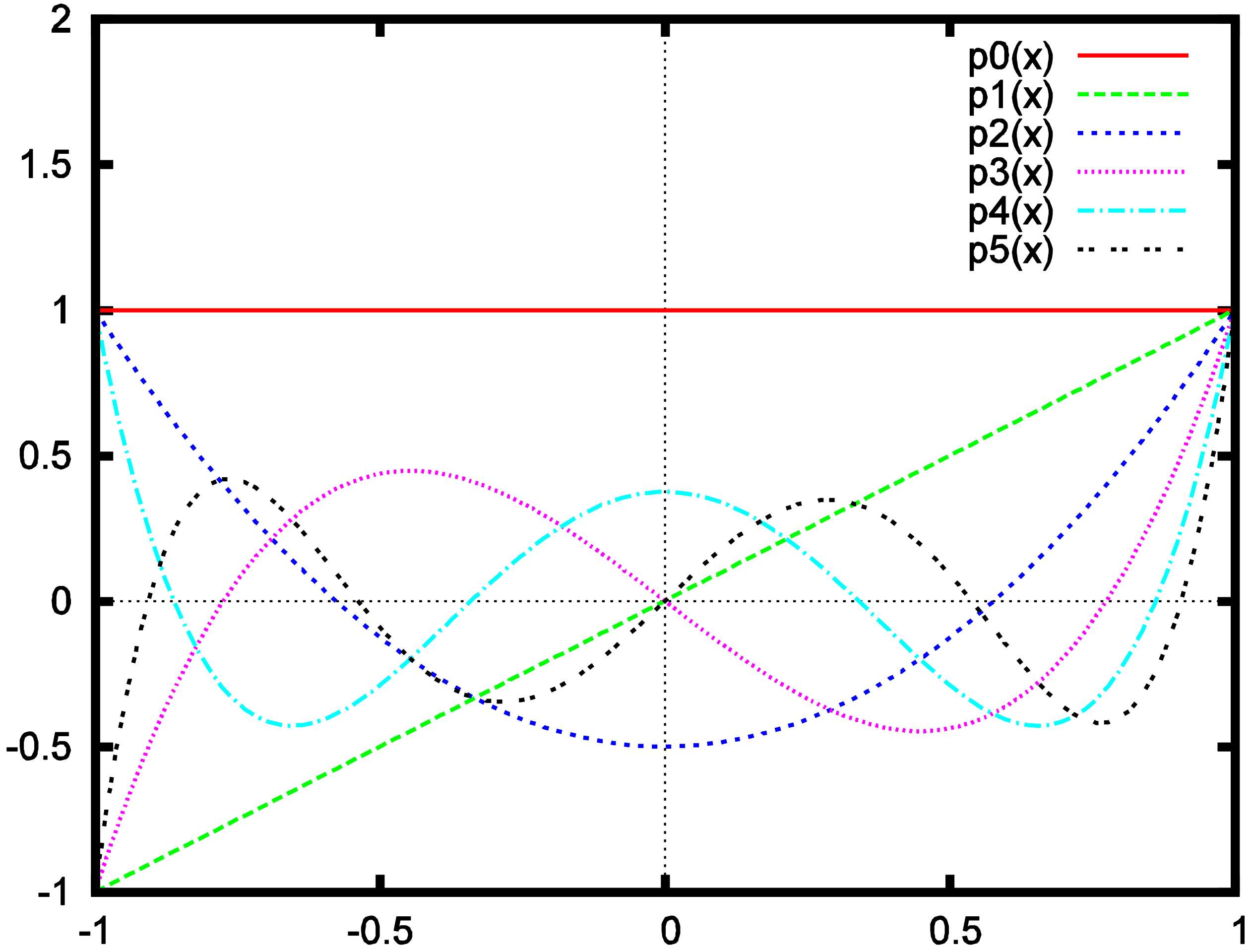
- Wielomian Legendre'a

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$$

- Wielomiany są ortogonalne w dziedzinie x $\in$<-1,1>

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot P_k(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} P_k^2(x_i)}$$

5 pierwszych wielomianów Legendre'a



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

Wielomiany Czebyszewa

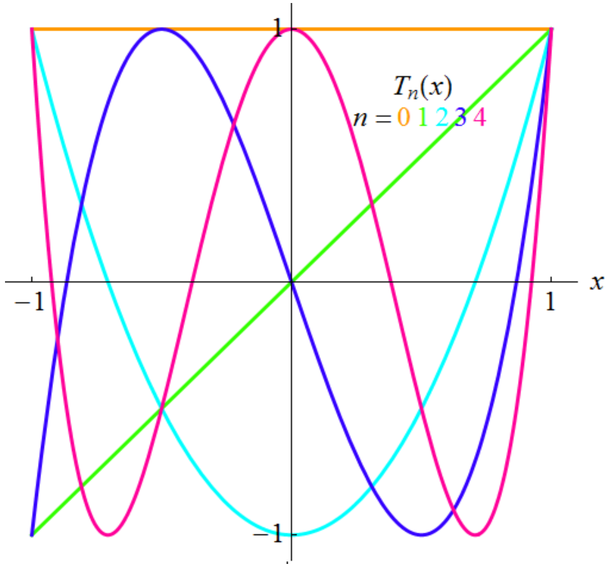
Wzór ogólny

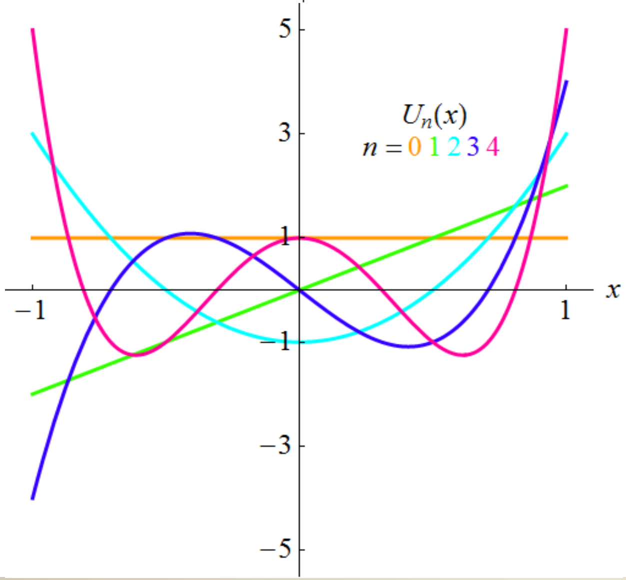
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$U_0(x) = 1$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$
$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$
$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$
$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$



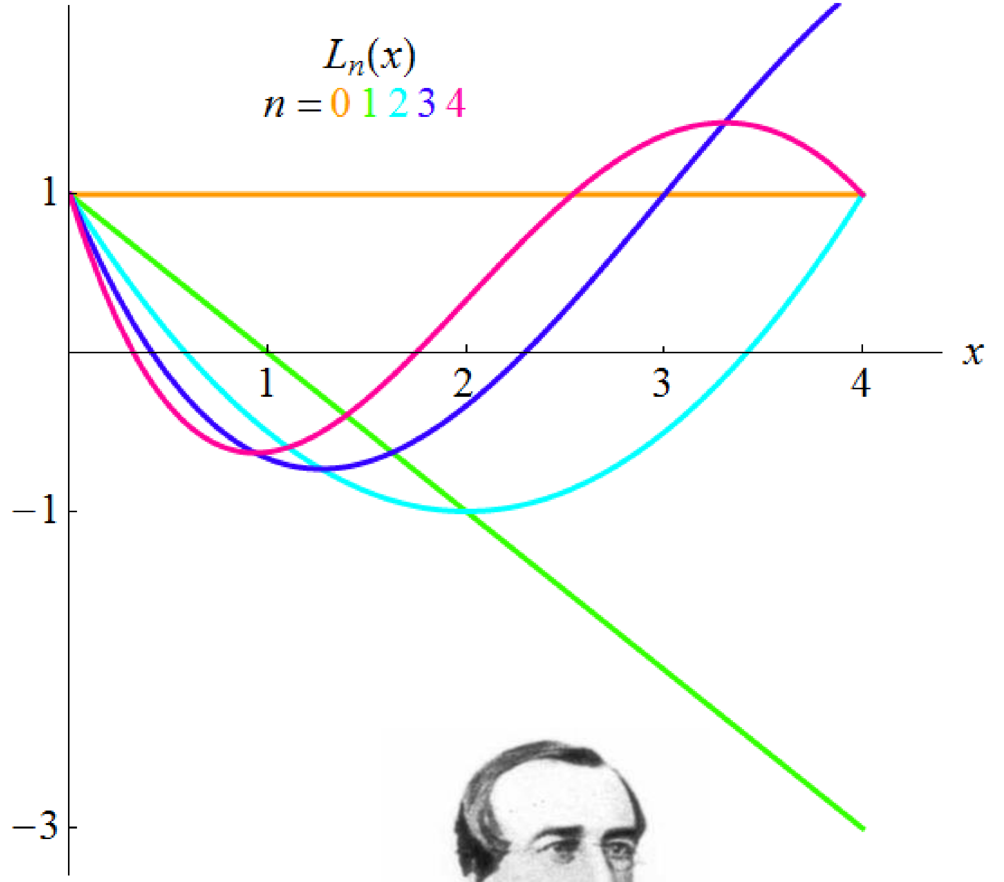


Wielomiany Laguerre'a

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$ → L_n ortogonalny na [0,∞]

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
L_0^{(\alpha)}(x) &= 1 \\
L_1^{(\alpha)}(x) &= -x+\alpha+1 \\
L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2}x^2-(\alpha+2)x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} \\
L_3^{(\alpha)}(x) &= -\frac{1}{6}x^3+\frac{\alpha+3}{2}x^2-\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{2}x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
0!L_0(x) &= 1 \\
1!L_1(x) &= 1 - x \\
2!L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\
3!L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\
4!L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \\
5!L_5(x) &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \\
6!L_6(x) &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720 \\
7!L_7(x) &= -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040
\end{aligned}$$