MI
Metody Identyfikacji

wykład #5-a

1. *Metody częstotliwościowe – pobudzanie sygnałem sinusoidalnym*
2. *Bode, Nyquist, Nichols*
3. *Inne sygnały periodyczne*

Odpowiedzi częstotliwościowe dla okresowych sygnałów testowych

- Możliwość wyznaczenia odpowiedzi dla pewnych dyskretnych punktów częstotliwości w określonym ich zakresie
  - Pobudzenie sygnałem sinusoidalnym o określonej częstotliwości
- Możliwość wykorzystania innych sygnałów:
  - Fala prostokątna
  - Fala trójkątna
  - Fala trapezowa
- Ręcznie lub komputerowo
  - Analiza korelacyjna
  - Analiza Fourierowska

Odpowiedzi częstotliwościowe dla okresowych sygnałów testowych

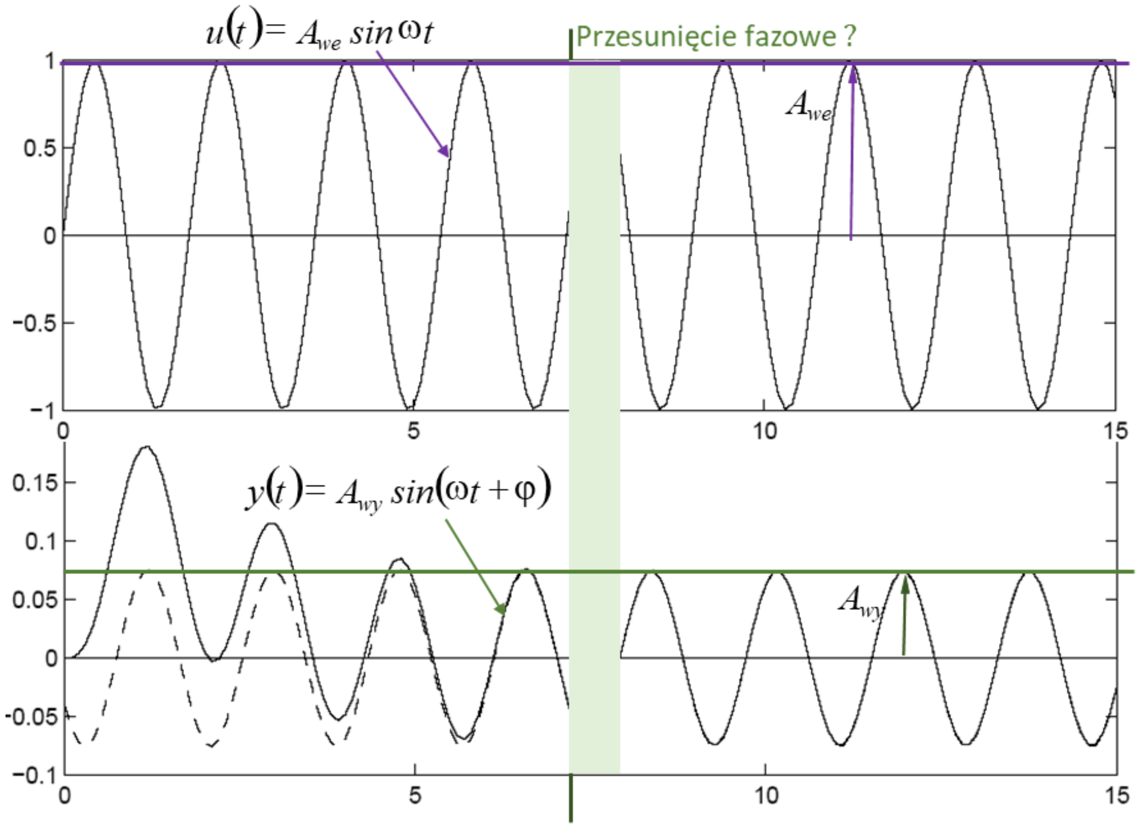
- Funkcja korelacji: możliwość wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych w obecności dużych zakłóceń i szumów
- Uwzględnienie charakterystyki urządzenia wykonawczego – **musi być liniowa**
  - Urządzenie wykonawcze z całkowaniem: użyć pozycjonera (układ regulacji) i sygnał przykładać jako wartość zadaną dla niego.
  - Urządzanie wykonawcze o stałych poziomach – sterowanie trzypoziomowe i fala prostokątna/trapezowa
  - Charakterystyki nieliniowe – sygnały dwupoziomowe – określone punkty pracy

Pobudzenie sinusoidalne

- Klasyczna metoda identyfikacji charakterystyk Bodego i Nyquista
  - Moduł → stosunek amplitudy sinusoidy na wyjściu do amplitudy sinusoidy na wejściu

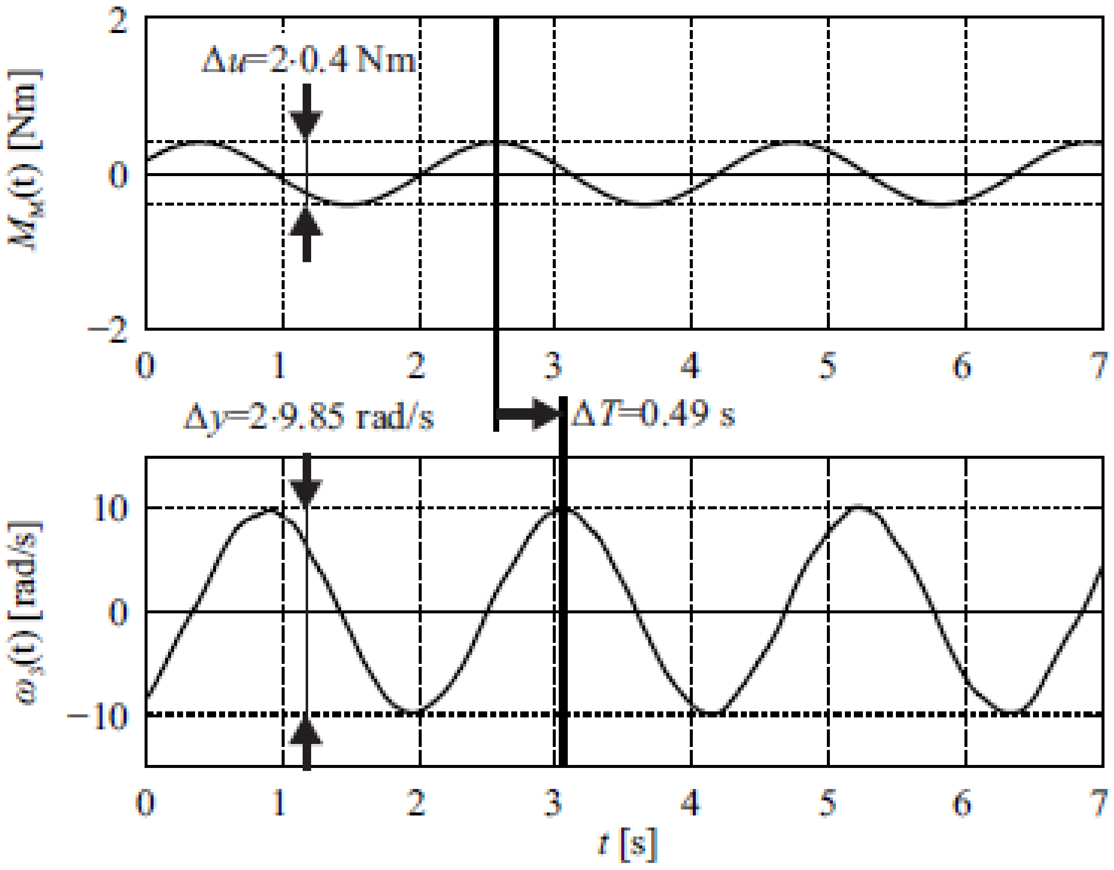
$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$$

  - Faza → przesunięcie fazy pomiędzy sinusoidą na wyjściu do sinusoidy na wejściu
  - $\angle G(j\omega) = \angle\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$



Pobudzenie sinusoidalne

- Przykład oscylatora trzech mas



Charakterystyki Bodego

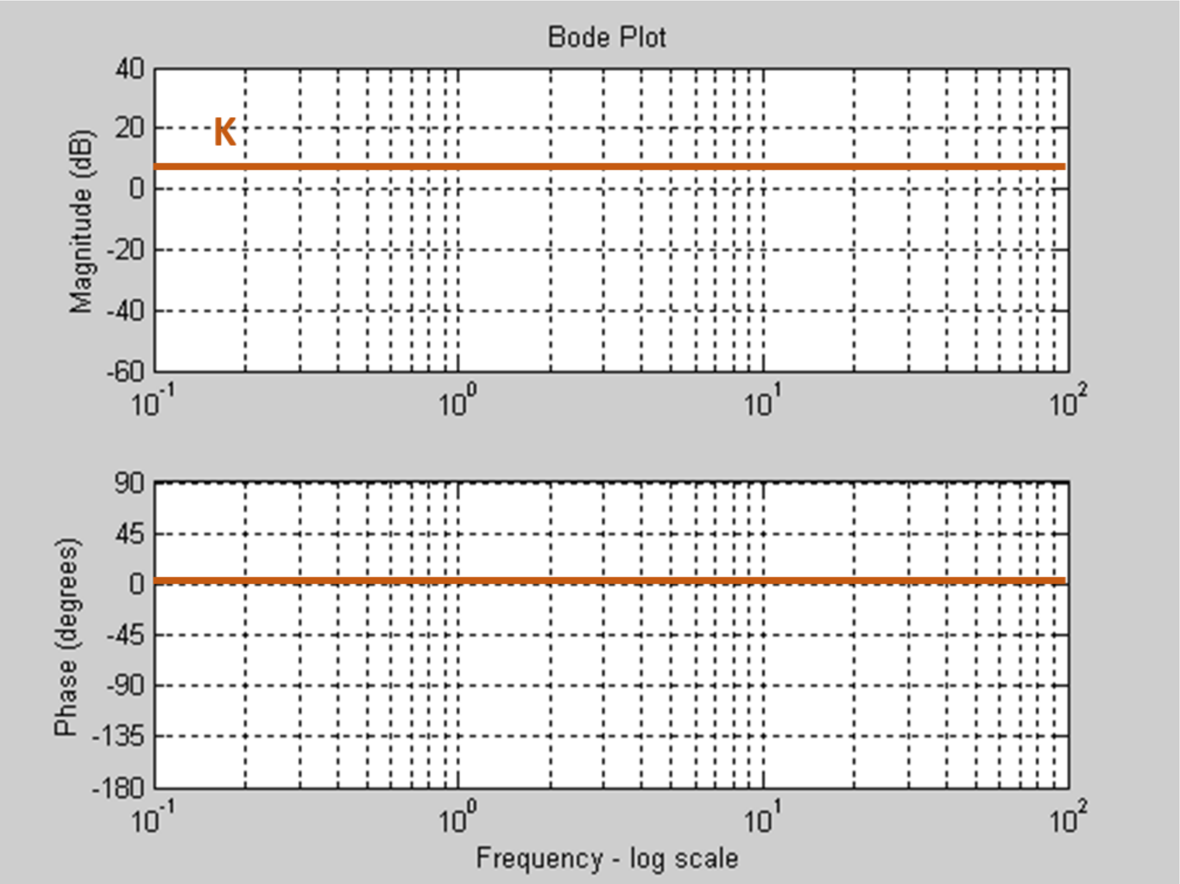
- Uogólniona postać transmitancji
- Wpisz tutaj równanie.

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^n} \frac{\prod_i^P (1 + j\omega\tau_i) \prod_j^Q \left(1 + 2\zeta_j\tau_j(j\omega) + \left(j\omega\tau_j\right)^2\right)}{\prod_m^R (1 + j\omega\tau_m) \prod_n^S (1 + 2\zeta_n\tau_n(j\omega) + (j\omega\tau_n)^2)}$$

- Cztery podstawowe elementy:
  - Stałe wzmocnienie K
  - Biegun lub zero na osi (jω) – całkowanie/różniczkowanie
  - Zero lub biegun na osi rzeczywistej (jωτ+1) – moduł jedno-inercyjny w liczniku/mianowniku
  - Zero lub biegun sprzężony $[1+(2\zeta/\omega n)j\omega+(j\omega/\omega n)^2]$ – – moduł oscylacyjny w liczniku/mianowniku
- Charakterystyki Bodego dla tychże elementów

Wzmocnienie

- K ma stałą charakterystykę amplitudową i fazową
  - Moduł to 20log|K|[dB]
  - Faza to 0 [rad]



Biegun lub zero na osi (jω) – całkowanie/różniczkowanie

- Różniczkowanie

$$G(s) = s$$
$$|G(j\omega)| = \omega$$
$$\varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$$

- Całkowanie

$$G(s) = \frac{1}{s}$$
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Biegun lub zero na osi (jω) – całkowanie/różniczkowanie

- Moduł transmitancji całkowania

$$20log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20log\omega\ [dB]$$

- Faza transmitancji całkowania

$$\varphi(\omega) = -90°$$

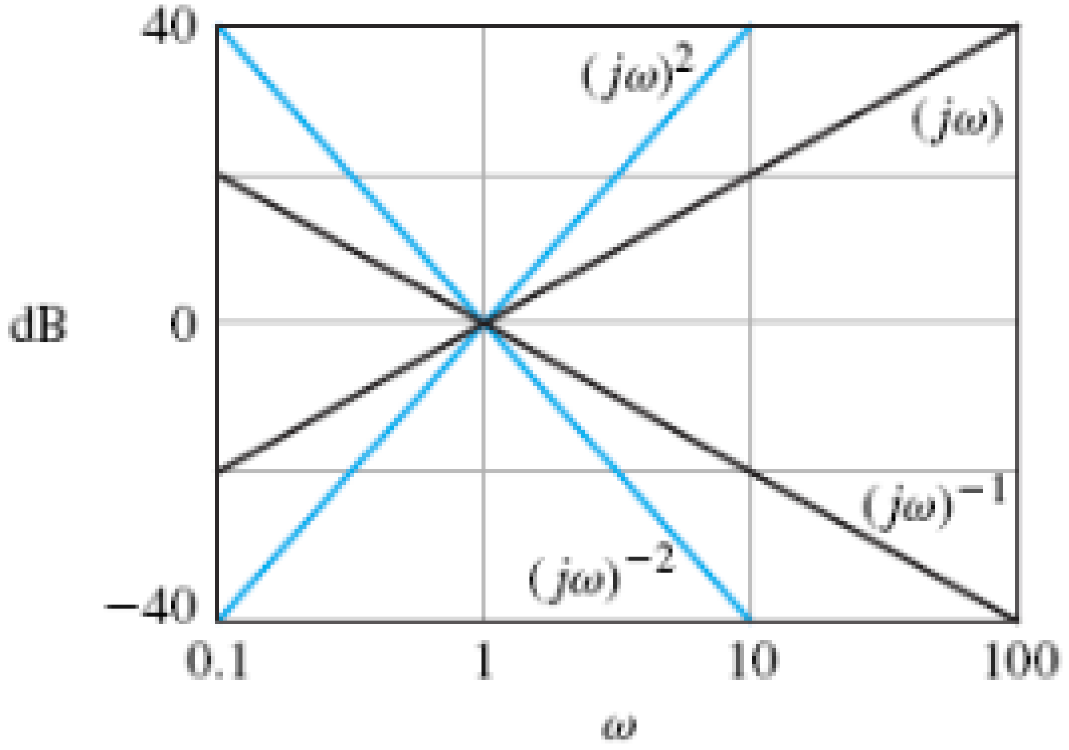
- Nachylenie charakterystyki to -20dB na dekadę dla pojedynczego całkowania
- Dla wielokrotnego całkowania mamy

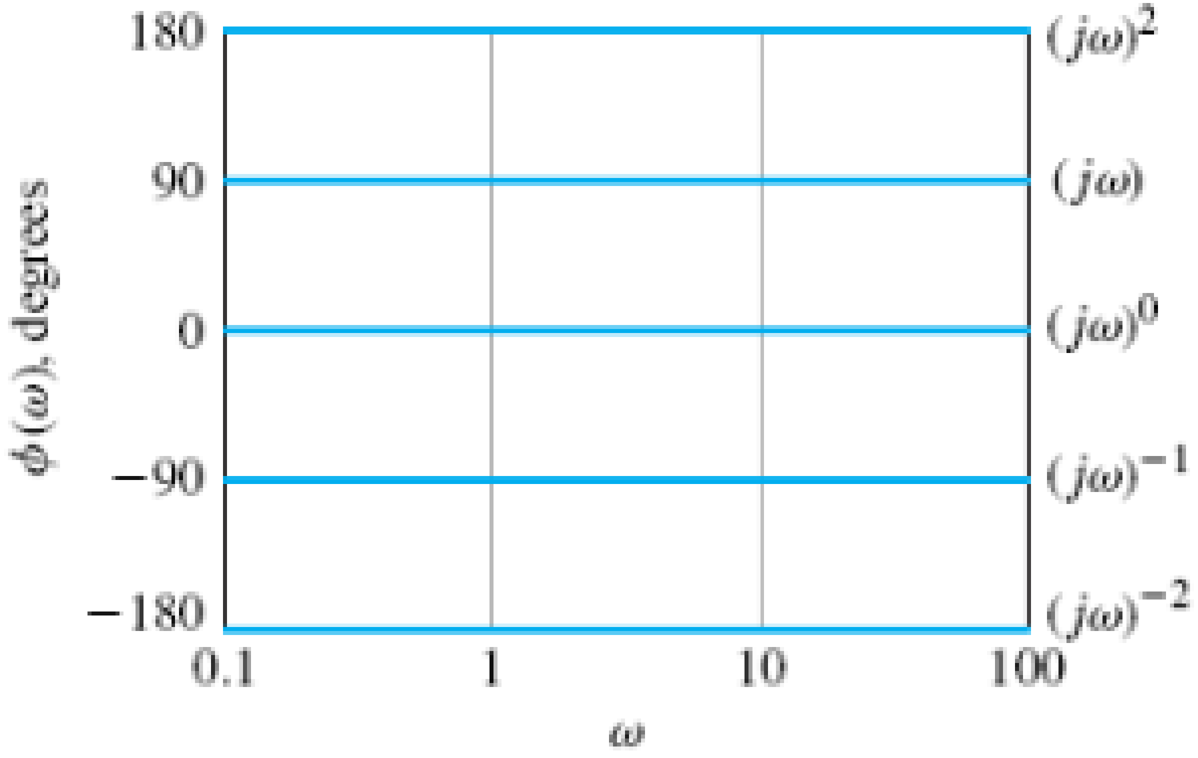
$$20log\left|\frac{1}{(j\omega)^N}\right| = -20\mathrm{N}log\omega\ [dB]$$

- Zaś faza

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{N}\cdot 90°$$

Biegun lub zero na osi (jω) – całkowanie/różniczkowanie





Biegun/zero rzeczywiste – układ jedno-inercyjny

- Zero

$$G(s) = \tau s + 1$$

  - Moduł

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$dla\ \omega \ll 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to 1$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to \omega\tau$$
$$dla\ \omega = 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to \sqrt{2}$$

  - Faza

$$\varphi(\omega) = tan^{-1}\omega\tau$$

$$dla\ \omega \ll 1/\tau\ \varphi(\omega) \to 0$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau\ \varphi(\omega) \to \pi/2$$
$$dla\ \omega = 1/\tau\ \varphi(\omega) = \pi/4$$

- Biegun (moduł inercyjny 1-ego rzędu)

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

  - Moduł

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$$

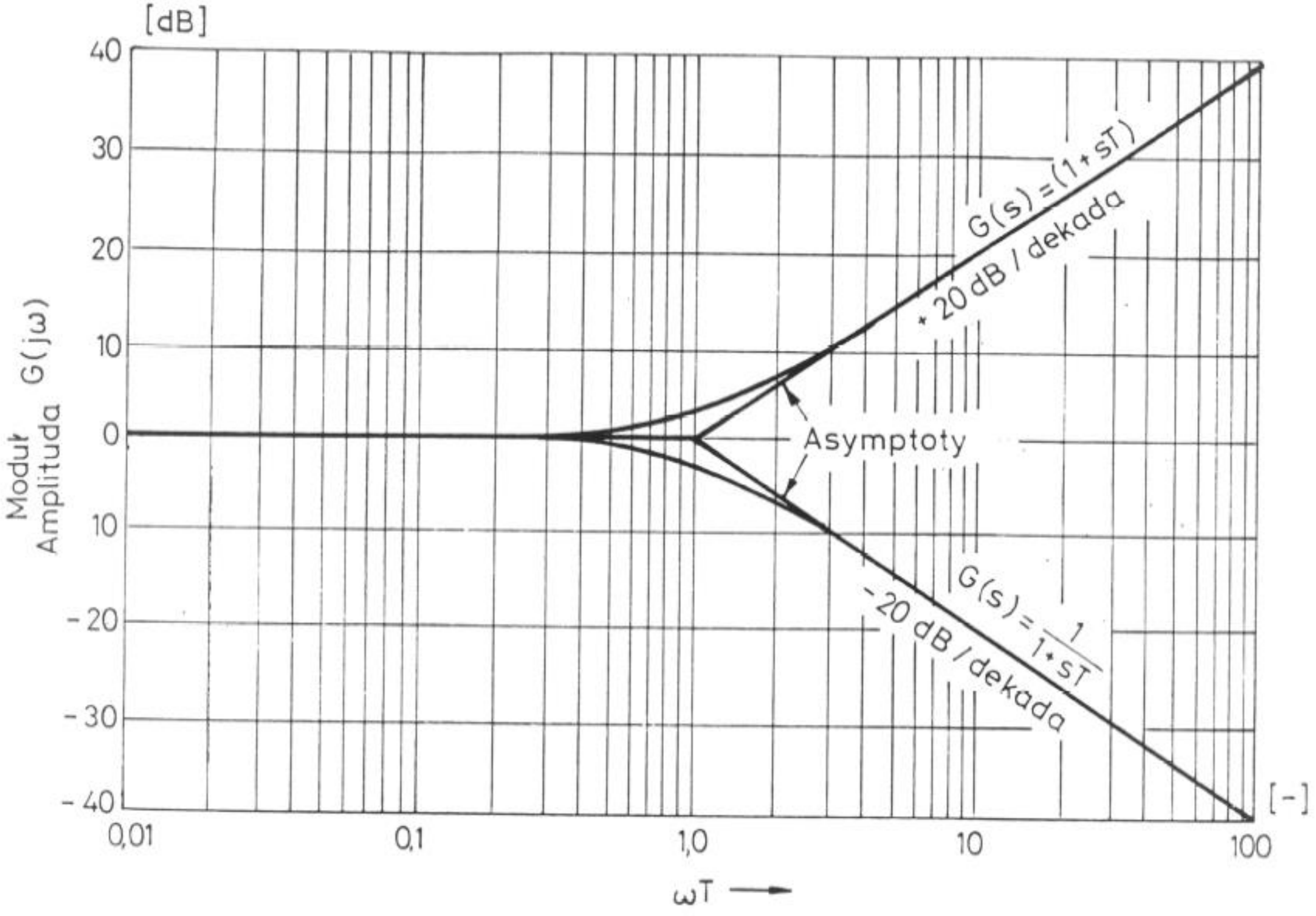
$$dla\ \omega \ll 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to 1$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to 1/\omega\tau$$
$$dla\ \omega = 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to \sqrt{2}/2$$

  - Faza

$$\varphi(\omega) = -tan^{-1}\omega\tau = tan^{-1}\frac{1}{\omega\tau}$$

$$dla\ \omega \ll 1/\tau\ \varphi(\omega) \to 0$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau\ \varphi(\omega) \to -\pi/2$$
$$dla\ \omega = 1/\tau\ \varphi(\omega) = -\pi/4$$

Biegun/zero rzeczywiste – układ jedno-inercyjny



Biegun/zero rzeczywiste - właściwości

- Niskie częstotliwości ω→0:
  - Moduł ≈ 1
  - Faza ≈ 0
- Wysokie częstotliwości ω→∞:
  - Moduł ≈ 1/ωτ
  - Faza ≈ -90°
  - Nachylenie (w dekadach) -1
- Częstotliwość odcięcia

$$\omega = \omega_b = 1/\tau$$

$$AR_N(\omega = \omega_b) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 0.707$$

$$\varphi(\omega = \omega_b) = \tan^{-1}(-1) = -45^o$$

- **Krok 1.** Znajdź częstotliwość odcięcia $\omega_b = 1/\tau$. Moduł dla niej wynosi to 0.707.
- **Krok 2.** narysuj liniową stałą asymptotę (=1) dla niższych częstotliwości, $\omega < \omega_b$.
- **Krok 3.** Dla wyższych częstotliwości naszkicuj liniową asymptotę o nachyleniu n-1, z przecięciem w punkcie $\omega = \omega_b$.
- **Krok 4.** naszkicuj przebieg rzeczywisty.
- **Krok 5.** Dla $\omega = \omega_b$, $\varphi = -45^o$. Znajdź ten punkt i narysuj poziome asymptoty dla $\varphi = 0^o$ ($\omega < 0.1\omega_b$) i $\varphi = -90^o$ ($\omega > 10\omega_b$). Narysuj całą charakterystykę.

Zera/bieguny zespolone

- Transmitancja

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

  - Moduł

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\tau^2}}$$

$$dla\ \omega \ll 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to 1$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau \quad |G(j\omega)| \to 1/\omega^2\tau^2$$

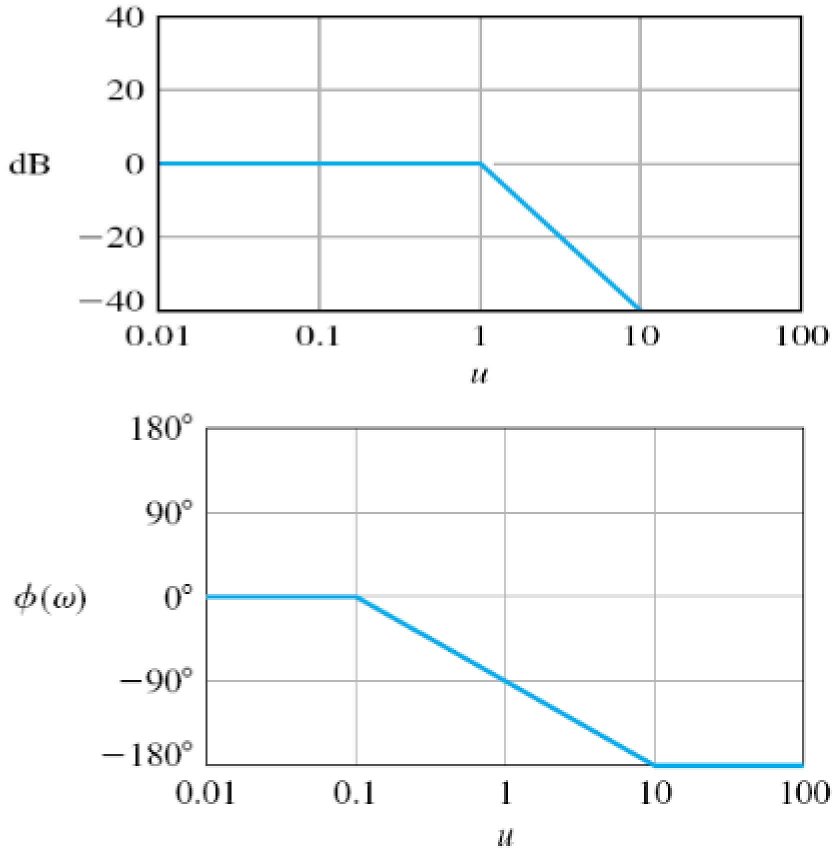
  - Faza

$$\varphi(\omega) = -tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

$$dla\ \omega \ll 1/\tau\ \varphi(\omega) \to 0$$
$$dla\ \omega \gg 1/\tau\ \varphi(\omega) \to -\pi$$
$$dla\ \omega = 1/\tau\ \varphi(\omega) = -\pi/2$$

Zera/bieguny zespolone

- Proste charakterystyki asymptotycznej o wartości *0* dB przecinają się dla częstotliwości odcięcia ω_b.



Zera/bieguny zespolone

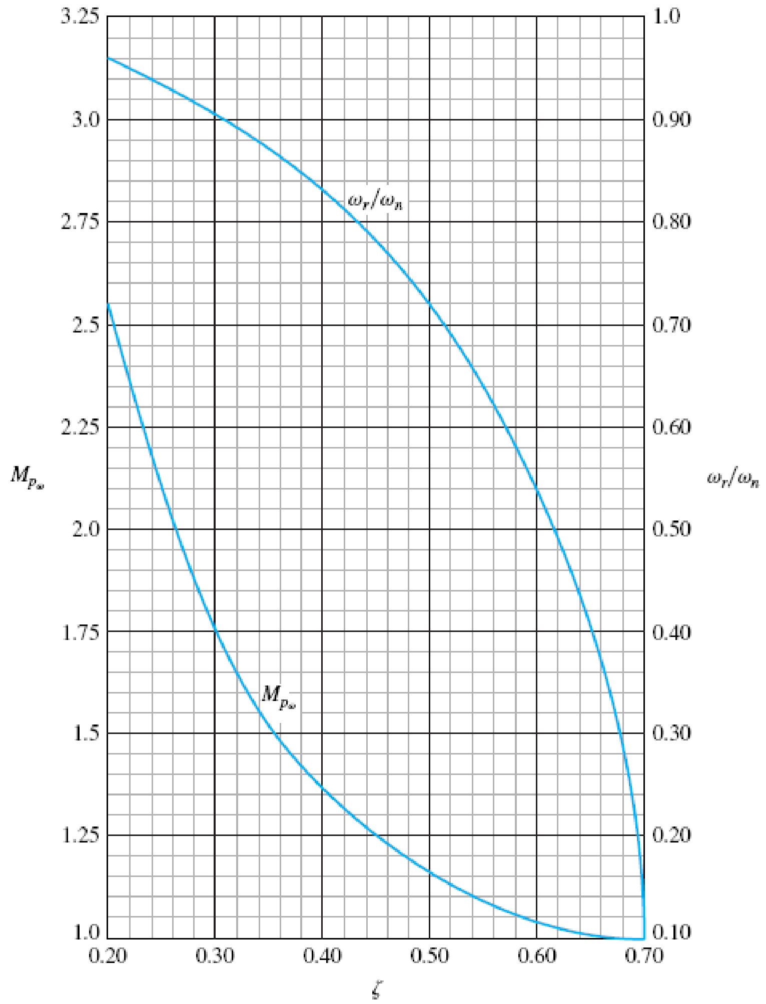
- Częstotliwość rezonansową ω_r wyznaczamy wyznaczając punkt zerowania pochodnej modułu
  $[1 + j2\zeta u - u^2]^{-1}, gdzie\, u = \omega/\omega_n$

- Częstotliwość rezonansowa wynosi

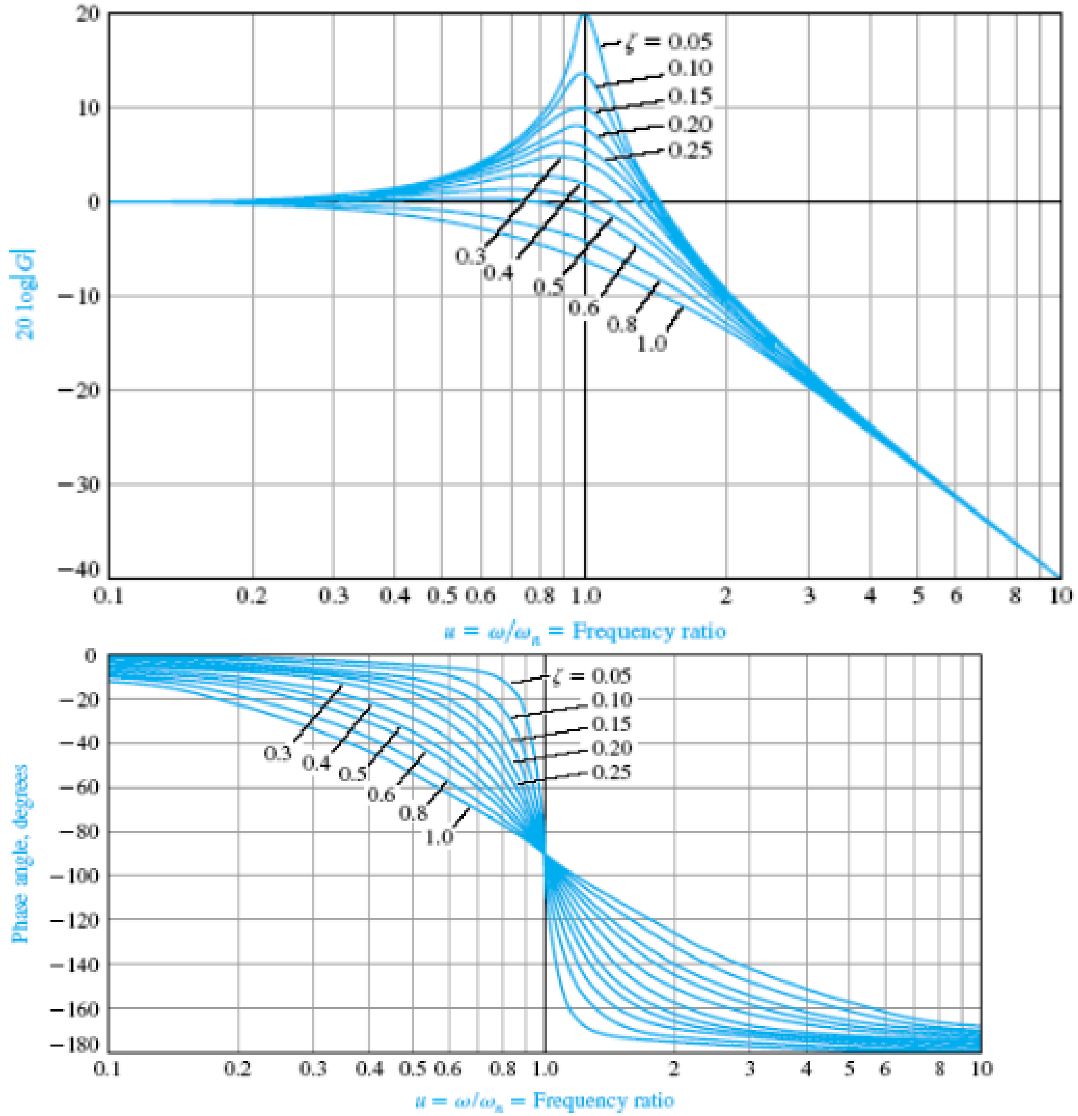
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta < 0.707$$

- A maksymalna wartość modułu $|G(\omega)|$ w tym punkcie to

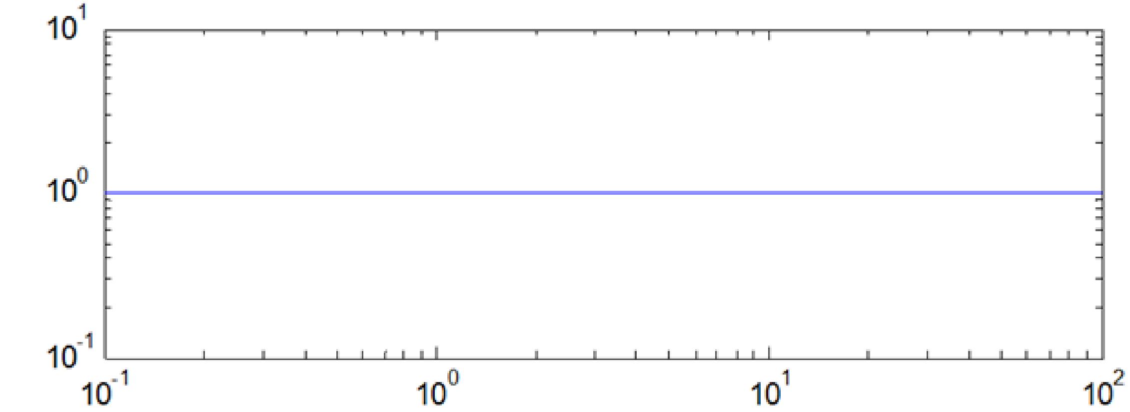
$$M_{P_\omega} = |G(\omega_r)| = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{1}, \zeta < 0.707$$

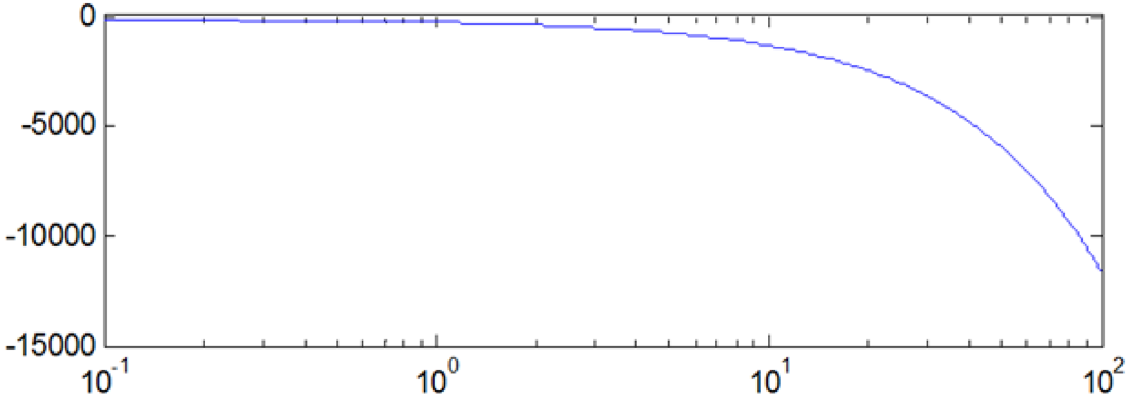


Zera/bieguny zespolone



Opóźnienie





- Charakterystyka częstotliwosciowa

$$G(j\omega)= exp(-j\,\omega\theta)= cos\omega\theta - j\,sin\omega\theta$$

$$\text{moduł} =|\ G(j\omega)\ |= \sqrt{cos^2\omega\theta + sin^2\omega\theta} = 1$$

$$\varphi =\angle G(j\omega)= tan^{-1}\left(-\frac{sin\omega\theta}{cos\omega\theta}\right), \quad \varphi = -\omega\theta$$

- **Nieograniczona faza!**

Zera

- Zero stabilne LHP (lead)

$$G(j\omega) = j\omega T + 1$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\omega \gg \omega_b |G(j\omega)| \rightarrow \infty$$

- Moduł dla bardzo wysokich częstotliwości ucieka do nieskończoności – fizycznie niemożliwe.
- Dodatnia faza pomiędzy 0° i 90°

$$\varphi = \tan^{-1}(\omega T)$$

Zera

- Zero niestabilne LHP (lag)

$$G(j\omega) = -j\omega T + 1$$
$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

- Faza ujemna

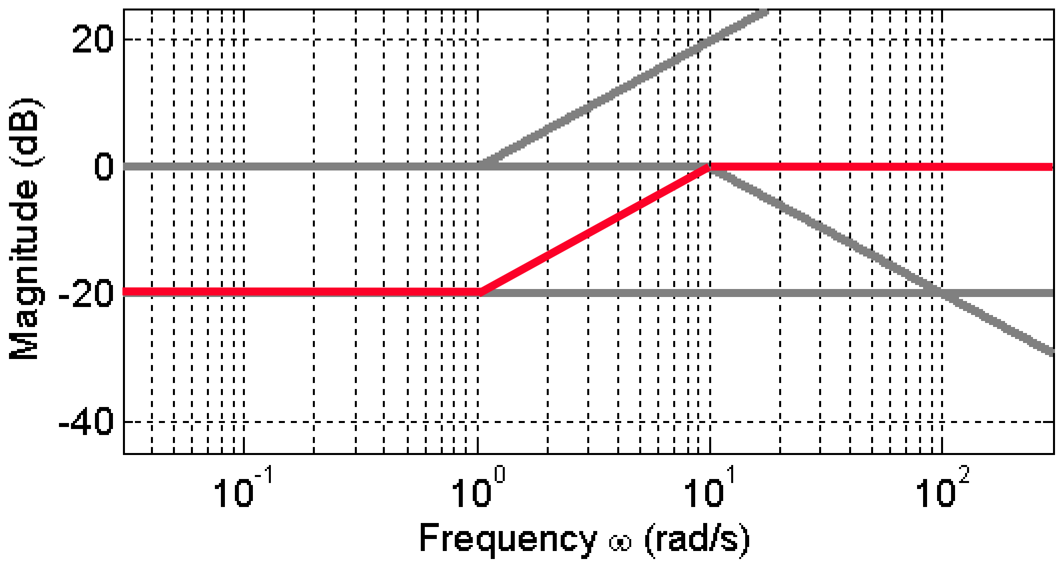
$$\varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

- Obiekt nie minimalnofazowy – tak samo jest w przypadku opóźnienia

Rysowanie – przykład

$$G(s) = \cdot\frac{s+1}{s+10}$$

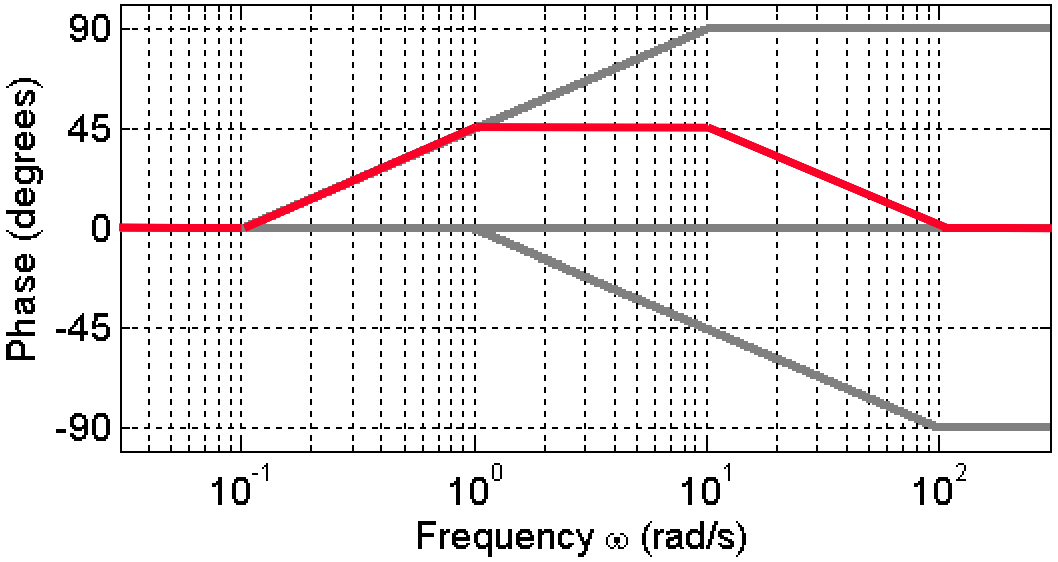
$$= \boxed{\left[\frac{1}{10}\right]}\boxed{\left[\frac{1}{\frac{s}{10}+1}\right]}\boxed{[s+1]}$$



Rysowanie – przykład

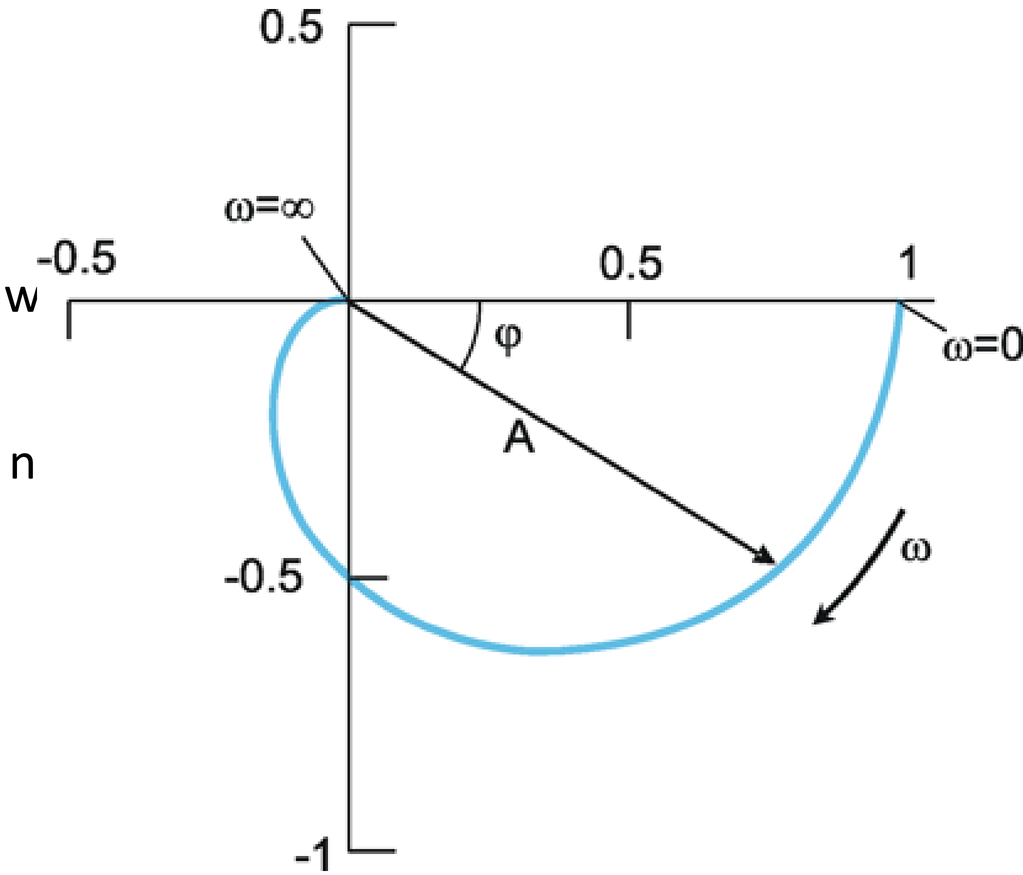
$$G(s) = \frac{s+1}{s+10}$$

$$= \boxed{\left[\frac{1}{10}\right]} \boxed{\left[\frac{1}{\frac{s}{10}+1}\right]} \boxed{[s+1]}$$



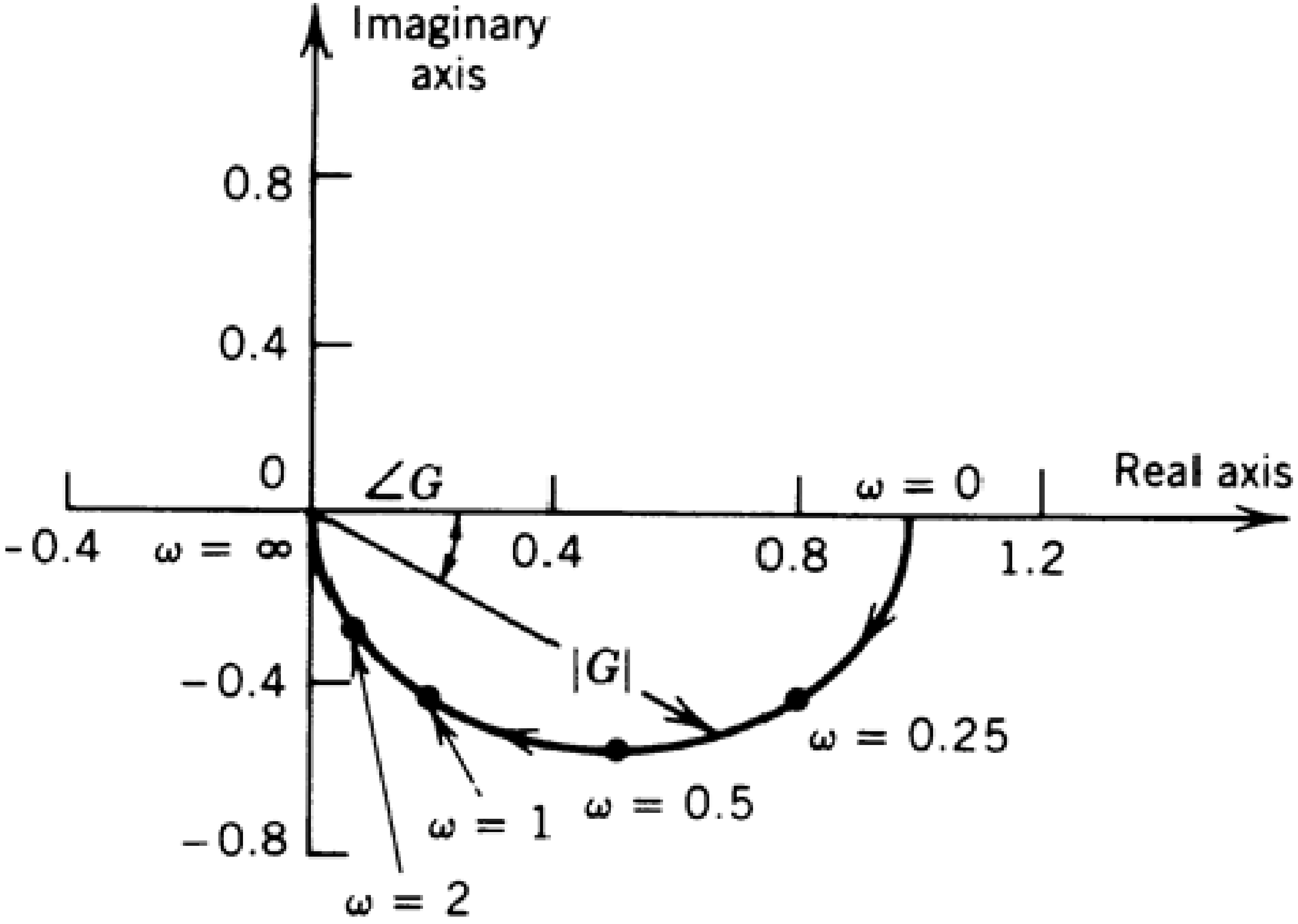
Charakterystyka Nyquista

- Wykres biegunowy G(jω) w zależności od ω.
- Wady
  - Brak bezpośredniej informacji o częstotliwości
  - Trudniejsza w bezpośrednim rysowaniu – najpierw łatwiej w
- Zalety
  - Postać kompaktowa i wystarczająca do dalszych analiz, jak n



Charakterystyka Nyquista - przykład

- $G(s) = \frac{1}{2s=1}$
- $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}$
- $\varphi = -\tan^{-1}(2\omega)$



Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Fala prostokątna może zostać opisana za pomocą szeregu Fouriera $\omega_o = 2\pi/T$

$$u(t) = \frac{4}{\pi}u_0\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 + \dots\right)$$

- Zaś odpowiedź ma postać

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{4}{\pi}u_0\Big(&|G(\mathrm{i}\omega_0)|\sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big) \\ &+ \frac{1}{3}|G(\mathrm{i}3\omega_0)|\sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big) \\ &+ \frac{1}{5}|G(\mathrm{i}5\omega_0)|\sin\big(5\omega_0 t + \varphi(5\omega_0)\big) + \dots\Big) \end{aligned}$$

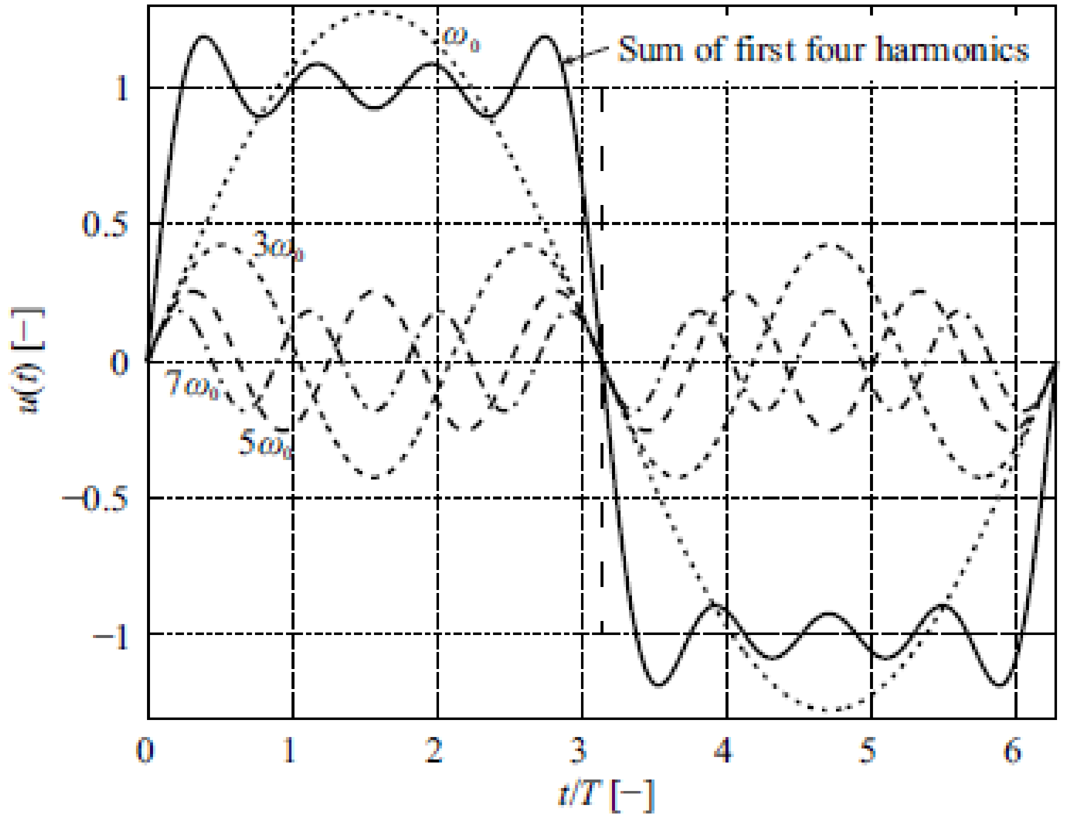
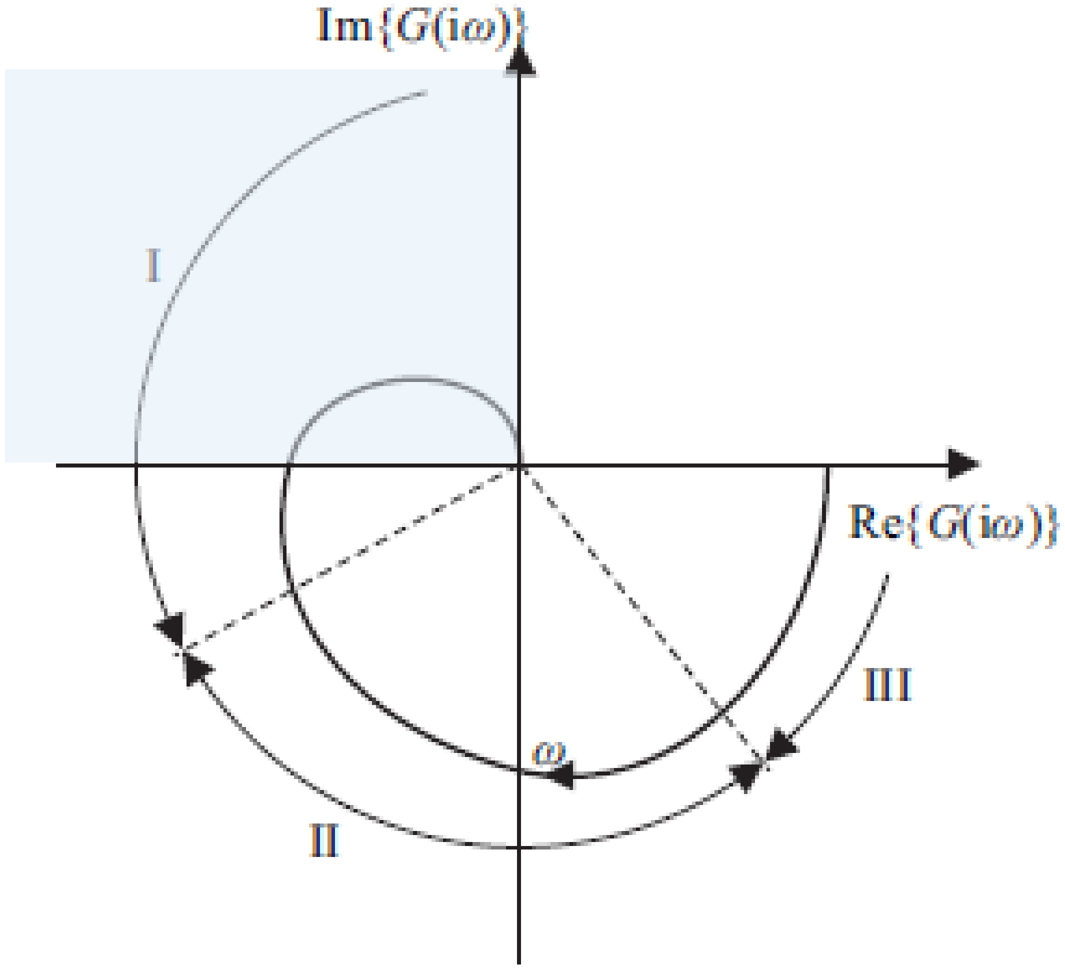


Fig. 5.3. Harmonic decomposition of a rectangular wave

Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Zaczynamy od zakresu wyższych częstotliwości
- Wyższe harmoniczne n≥3 są tłumione tak mocno, że odpowiedź odpowiada prawie że *czystej* sinusoidzie
- Łatwo można odczytać moduł i przesunięcie fazowe odpowiedzi
- Odczytujemy część I charakterystyki Nyquista



Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

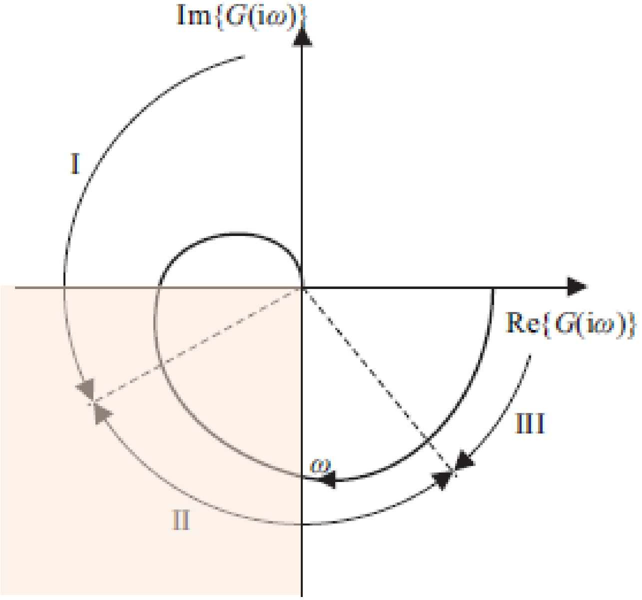
- Dla średnich częstotliwości amplituda drugiej harmonicznej dla $3\omega_o$ osiąga wielkość, która nie może być pominięta

$$y(t) \approx \frac{4}{\pi} u_0 \Big(|G(i\omega_0)| \sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big) + \frac{1}{3} |G(i3\omega_0)| \sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big)\Big)$$

- Trzecia harmoniczna $5\omega_o$ może zostać pominięta tak jak i wyższe. Zatem można otrzymać odpowiedź dla danej częstotliwości odejmując odpowiedź dla drugiej składowej harmonicznej

$$y_{3\omega_0}(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{3} u_0 |G(i3\omega_0)| \sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big)$$

od mierzonego wyjścia y(t).

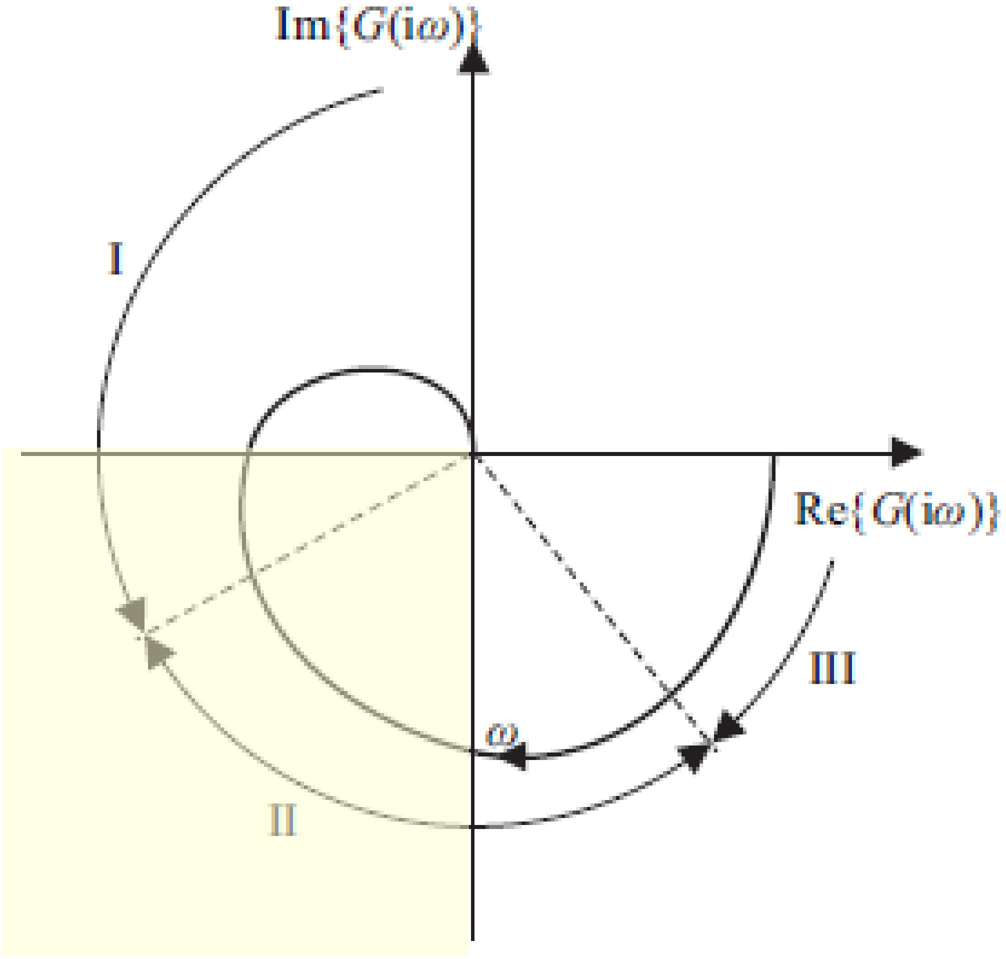


- A odpowiedź $y_{3\omega o}$ jest znana z poprzedniego wywodu.
- Tym samym otrzymujemy strefę II.

Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Dla niskich częstotliwości odpowiedź otrzymujemy odejmując tak wiele harmonicznych jak trzeba.

$$\frac{4}{\pi}u_0|G(i\omega_0)|\sin\big(\omega_0 t+\varphi(\omega_0)\big)$$
$$=y-u_0\frac{1}{3}|G(i3\omega_0)|\sin\big(3\omega_0 t+\varphi(3\omega_0)\big)$$
$$-u_0\frac{1}{5}|G(i5\omega_0)|\sin\big(5\omega_0 t+\varphi(5\omega_0)\big)-\ldots$$



Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

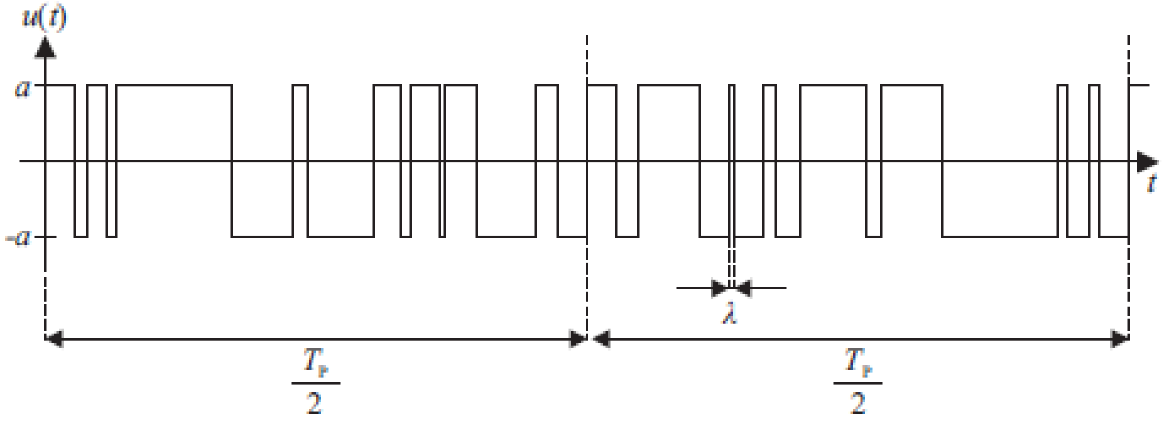
- Metoda głównie stosowana dla wyższych zakresów częstotliwości
- Podsumowanie:
  - Łatwiej zrealizować fale prostokątną niż sinusoidalną
  - Charakterystyka urządzenia wykonawczego nie musi być liniowa
  - Dla danej amplitudy u_o fala prostokątna ma najwyższą amplitudę podstawowej harmonicznej niż dla jakichkolwiek innych pobudzeni okresowych. Zatem najlepszy stosunek do zakłóceń.
  - Ze względu na charakter przekształcenia Fouriera czas przełączenia od $+u_o$ do $-u_o$ powinien być nie większy niż:

$$T_1^* < \frac{1.1}{\omega_{\max}} \text{ resp. } T_1^* < \frac{0.5}{\omega_{\max}}$$

  - Gdzie ω_{max} to najwyższa częstotliwość w interesującym zakresie

Pobudzenie z wieloma harmonicznymi

- Binarny sygnał o wielu częstotliwościach
- Cel: maksymalizacja amplitud dla poszczególnych składowych częstotliwościowych przy minimalizacji amplitudy właściwego pobudzenia



$$\left.\begin{array}{l} |G(i\omega_v)| = \frac{1}{u_{0v}}\sqrt{a_{yv}^2 + b_{yv}^2} \\ \varphi(\omega_v) = \arctan \frac{a_{yv}}{b_{yv}} \end{array}\right\}$$

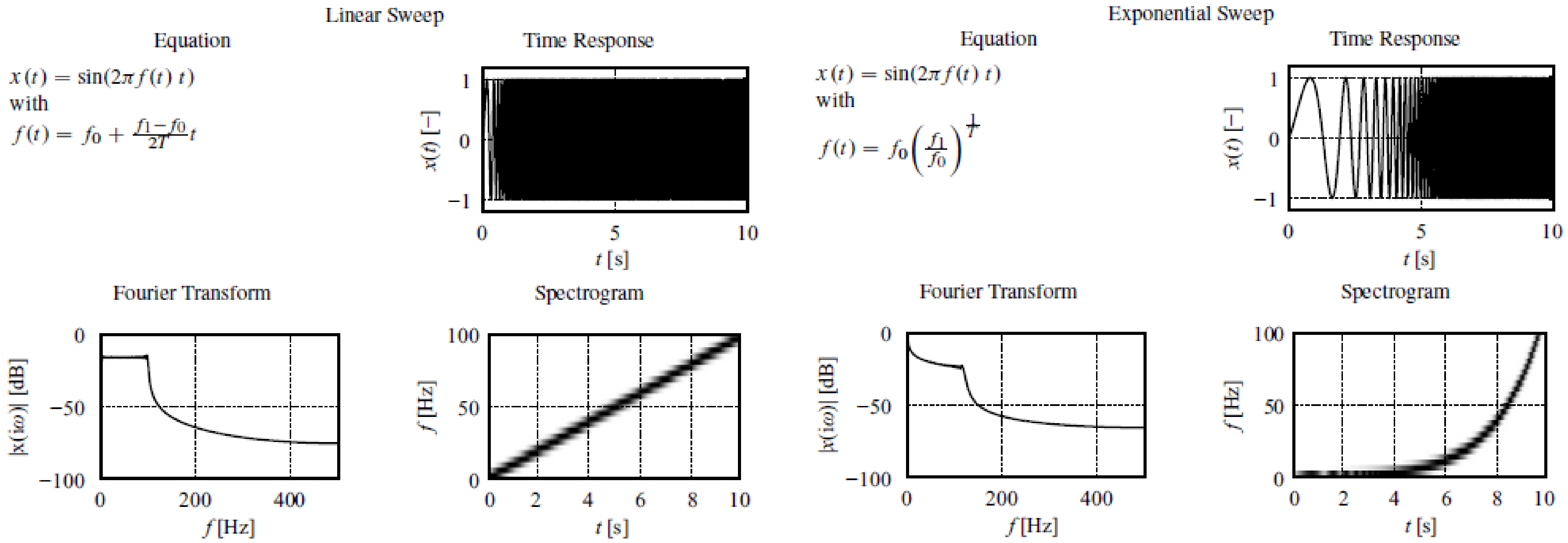
Sześć (6) harmonicznych

$u_o = 0.585a$

$N = 256$

$\omega_o, 2\omega_o, 4\omega_o, 8\omega_o, 16\omega_o, 32\omega_o$

Sygnały z ciągłą zmiana częstotliwości



Stosowane do analizy w teorii obwodów i identyfikacji sieci (ogólnie telekomunikacja)