MI
Metody Identyfikacji

wykład #10c

1. *Identyfikacja opóźnienia*

Opóźnienie

- Ogólna definicja – ciągły model nieliniowy z opóźnieniem

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_k))$$

- Wielokrotne opóźnienia

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_k), u(t))$$

- W wersji dyskretnej

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \Sigma_{i=1}^{k} A_i x(t-\tau_i) + u(t)$$

opóźnienia

- Trzy rodzaje opóźnień:
  - Pomiar
  - Wejście
  - Stan
- Opóźnienie stanu jest szczególnie trudne do identyfikacji:
  - Nieskończona wymiarowość
  - Nieróżniczkowalność względem opóźnienia – klasyczne podejścia (LS, ML) nie działają

Identyfikacja opóźnienia

- Załóżmy najprostszy przypadek.
- Obiekt liniowy, SISO z opóźnieniem
  - $G(s) = G_r(s) \cdot e^{-sTd}$
  - $G(z) = G_r(z) \cdot z^{-d}$
- Zakładamy istnienie zakłóceń w układzie
- Rozważymy sytuacje zarówno otwartej jak i zamkniętej pętli sterowania

- W drugiej części rozważona zostanie sytuacja z modelem nieliniowym

Identyfikacja opóźnienia
zadanie

- Identyfikacja najlepszej możliwej do osiągnięcia aproksymacji opóźnienia
  - np. identyfikacja opóźnienia w interesującym nas paśmie częstotliwościowym
- Identyfikacja rzeczywistej wartości opóźnienia

Właściwości

- Czyste opóźnienie e^{-sTd} jest systemem liniowym
- Czyste opóźnienie e^{-sTd} obejmuje całe pasmo częstotliwości
- Obiekt liniowy ciągły z opóźnieniem jest systemem o nieskończonym rzędzie: nieskończona ilość wartości jest potrzebna do jego opisania w każdej chwili czasu
- Transmitancja czystego opóźnienia nie jest rzeczywista, gdyż ma nieskończoną ilość biegunów
- System w wersji z czasem dyskretnym i stałym okresem próbkowania ma skończony rząd (rozmiar) – opis za pomocą równania różnicowego
- System ze zmiennym okresem próbkowania nie może być opisany równaniami różnicowymi.
- Transmitancja różnicowa czystego opóźnienia jest rzeczywista – skończona ilość biegunów

Klasy metod identyfikacji opóźnienia

1. Metody aproksymacji: aproksymacja relacji pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym. Opóźnienie nie jest jasno zdefiniowanym parametrem modelu.
   a. Identyfikacja w dziedzinie czasu:
      - odpowiedź impulsowa
      - maksimum funkcji korelacji wzajemnej wejście-wyjście
      - Metody *przeparametryzowania* wielomianu licznika

   b. Metody w dziedzinie częstotliwości
      - Poprzez przesunięcie fazowe

   c. Metody w dziedzinie funkcji ortogonalnych Laguerra (również i inne funkcje, jak Kautz) Dwa kroki:
      i. estymacja modelu
      ii. estymacja opóźnienia z modelu

Klasy metod identyfikacji opóźnienia cd.

1. Metody bezpośrednie (*explicit*) – opóźnienie jest jednym z parametrów modelu
   a. Metody jedno-etapowe: wyznaczamy wszystkie parametry modelu (czyli opóźnienie i pozostałe) w jednym zadaniu identyfikacji
      - Identyfikacja transmitancji z czasem ciągłym, jak np. metoda skoku jednostkowego
      - Identyfikacja transmitancji z czasem dyskretnym, jak np. metoda błędu predykcji dla modelu ARX z opóźnieniem

   b. Metody dwu-etapowe. W jednym kroku opóźnienia, a w drugim inne parametry

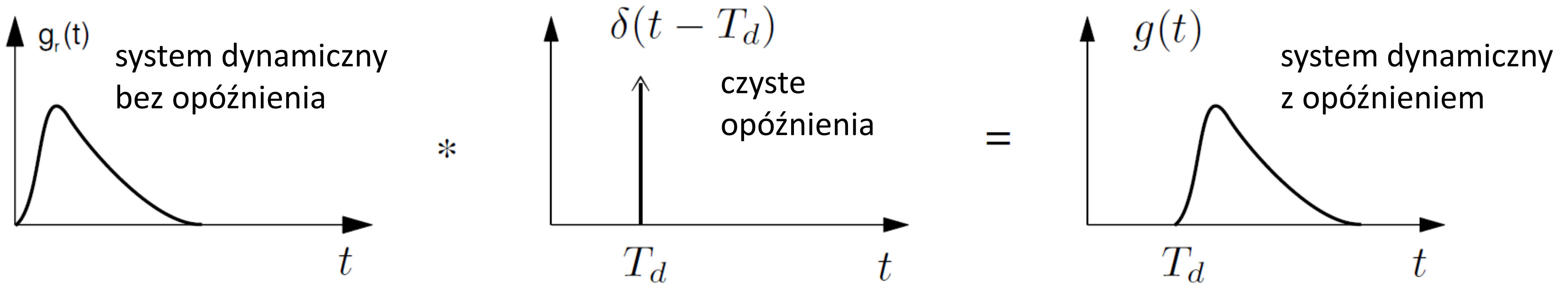
   c. Metody z dyskretyzacją

2. Metody *obszarowe* i *momentowe*.
   a. Wykorzystanie zależności pomiędzy pewnymi obszarami pod odpowiedzią skokową a opóźnieniem czy też pomiędzy różnymi momentami tejże odpowiedzi
      Dwie części:
      i. Wyznaczenie odpowiedzi skokowej
      ii. Estymacja opóźnienia

3. Wykorzystanie statystyk wyższego rzędu

Aproksymacja w dziedzinie czasu
Thresholding methods

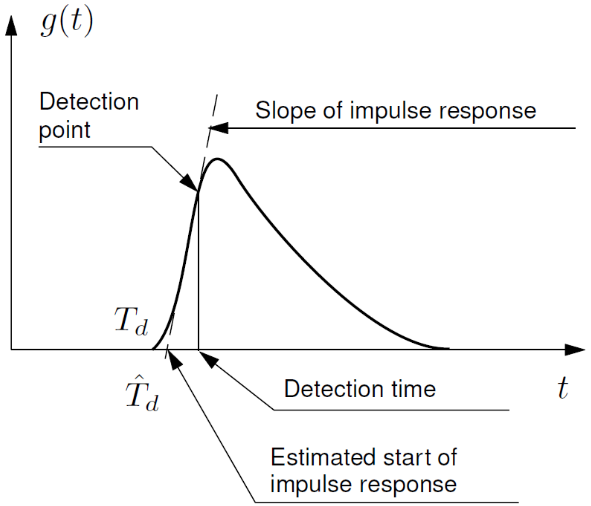
- Wyznaczamy opóźnienie jako odległość w dziedzinie czasu do początku niezerowych wartości odpowiedzi impulsowej



$$g(t) = g_r(t) \cdot \delta(t - T_d)$$

Aproksymacja w dziedzinie czasu
Thresholding methods

- Jeśli mamy dostęp (wyznaczyliśmy) do aproksymacji odpowiedzi impulsowej $\hat{g}(t)$ to możemy wykorzystać:
  1. Metoda separacji
     a) Separacja opóźnienia $g_d(t)$ od dynamiki $g_r(t)$
     b) Estymata czasu maximum estymaty odpowiedzi $g_d(t)$
  2. Bezpośrednia detekcja startu odpowiedzi impulsowej
     a) Detekcja początku zmian odpowiedzi impulsowej (staje się niezerowa)
     b) Analiza nachylenia odpowiedzi impulsowej



Aproksymacja odpowiedzi impulsowej

- Analiza korelacyjna

$$\hat{g}(\tau) = \frac{\hat{R}_{yu}(\tau)}{\hat{\lambda}}$$

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=r+1}^{N} y(t)u(t-\tau), \qquad \hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)^2$$

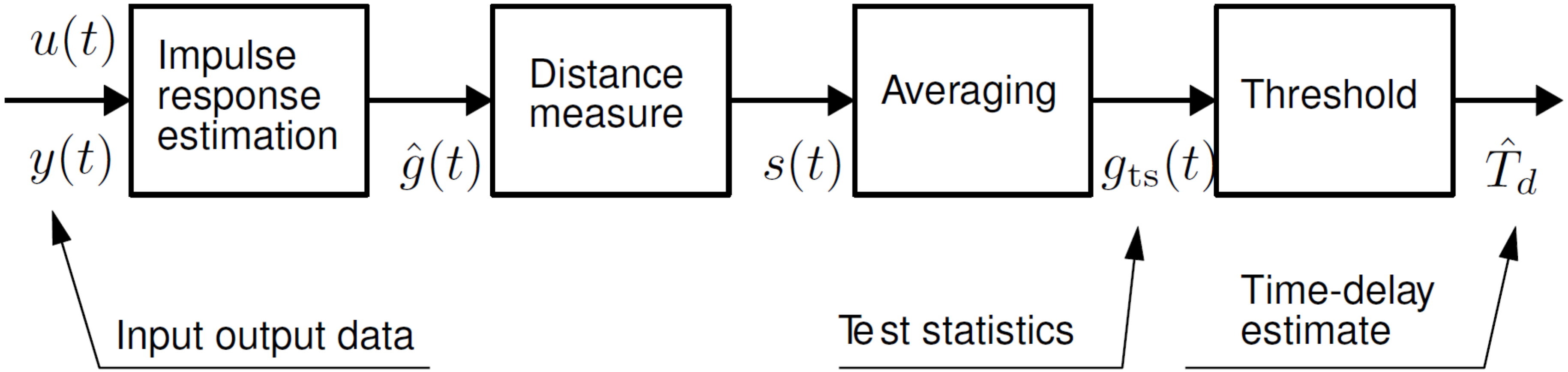
- Znalezienie filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR) metoda błędu predykcji

$$\hat{\theta}_N = \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_t \varphi(t)\varphi(t)^T\right]}_{A}^{-1} \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_t \varphi(t)y(t)\right]}_{B}$$

- Jeśli wejście u(t) jest białym szumem, to wtedy macierz $A = \hat{\lambda}I$, $B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{yu}(0) \\ \hat{R}_{yu}(1) \\ \vdots \end{bmatrix}$

$$\hat{\theta}_N = \begin{bmatrix} \hat{g}_0 & \hat{g}_1 & \dots \end{bmatrix}$$

Estymata początku odpowiedzi impulsowej



- Po wyznaczeniu estymaty odpowiedzi impulsowej definiujemy miarę (punkt $s(t)$), podczas gdy odpowiedź zaczyna narastać.
- Redukcja szumów – uśrednianie
- Otrzymujemy statystykę testową $g_{ts}(t)$
- Stosujemy progowanie do wykrycia punktu startu

Uśrednianie

- Odpowiedź skokowa – całkowanie
- Suma kumulacyjna – stosujemy sumowanie kumulacyjne (CUSUM) przed progowaniem

Algorithm 1 CUSUM detector.

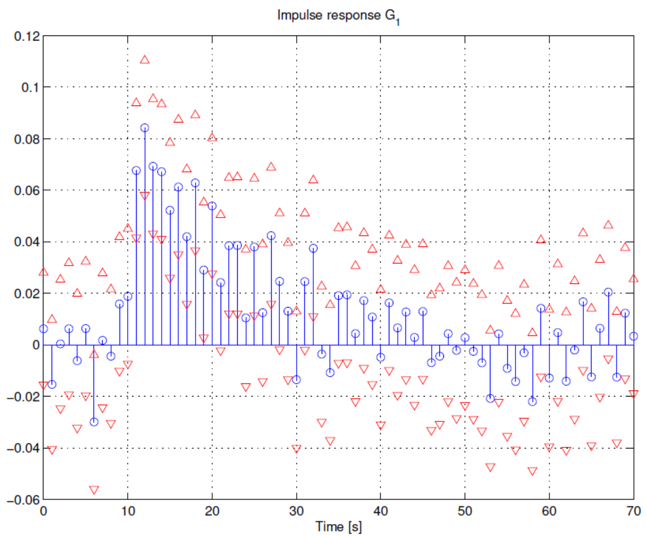
Design parameters: Drift $\nu(t)$ and threshold$h(t)$ that may be time dependent.

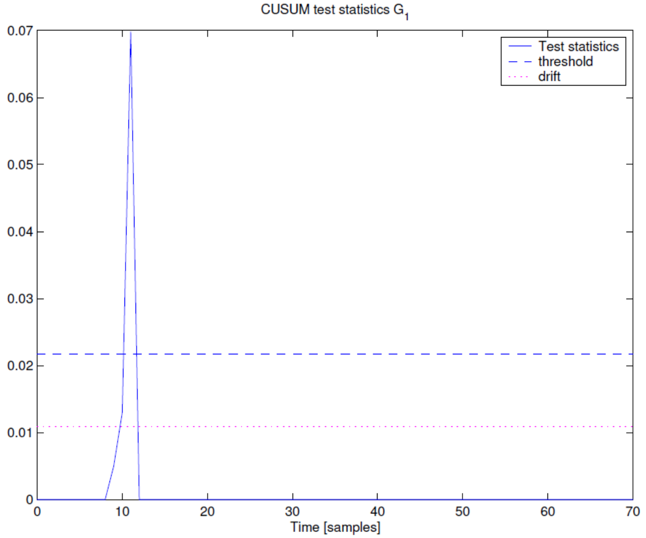
Output: Detection time t_a and perhaps the estimate of the change time $\hat{k}$.

Input: Distance measure $s(t)$.

Internal variable: Test statistics $g_{ts}(t)$.

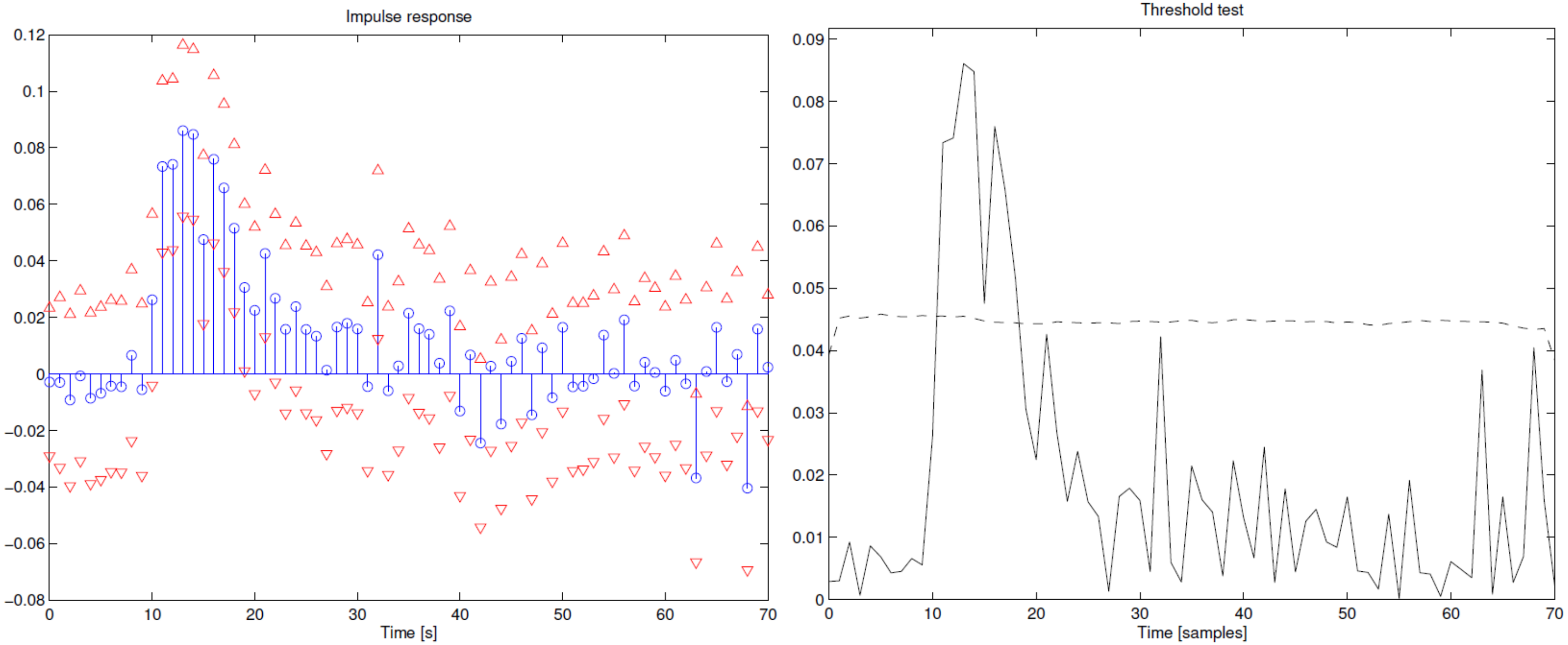
1. $t = 0$, $g_{ts}(-1) = 0$
2. $g_{ts}(t) = g_{ts}(t-1) + s(t) - \nu(t)$
3. If $g_{ts}(t) < 0$ then $g_{ts}(t) = 0$, $\hat{k} = t$
4. If $g_{ts}(t) > h(t) > 0$ then $t_a = t$, goto 6
5. $t = t + 1$, goto 2
6. The detection time is t_a. An estimate of the change time is $\hat{k}$.





Uśrednianie

- Odpowiedź impulsowa wg Carlemalma
  - Wyznaczamy rekurencyjnie parametry odpowiedzi impulsowej filtrem MNK
  - Poprawiamy estymaty filtrem Kalmana (jeden filtr dla jednego parametru)
  - Wymagania: biały szum na wejściu oraz zakłócenia Gaussowskie
- Metoda bezpośrednia – pomijamy uśrednianie



Progowanie

- Stałe – próg niezmienny a dane niezależne
- Względne progowanie – próg uzależniony jest od niepewności danych
- Metoda progu maksymalnego – (analogia do maksimum funkcji korelacji wzajemnej) – stosujemy gdy mamy czyste opóźnienie (bez dynamiki)
- CFAR (Constant False Alarm Ratio) – popularne w technikach radarowych
- Fault Detection – za pomocą filtru Kalman estymuje po kolei wszystkie punkty odpowiedzi skokowej – ten który jest najlepszy daje informacje o opóźnieniu
- Względna metoda Carlemalma – skomplikowana wersja progowania względnego
- Detektor Kurza – detekcja kiedy współczynnika wielomianu licznika estymowanego modelu liniowego przestają być zerowe – wrażliwa na szumy i zakłócenia

Separacja opóźnienia od dynamiki

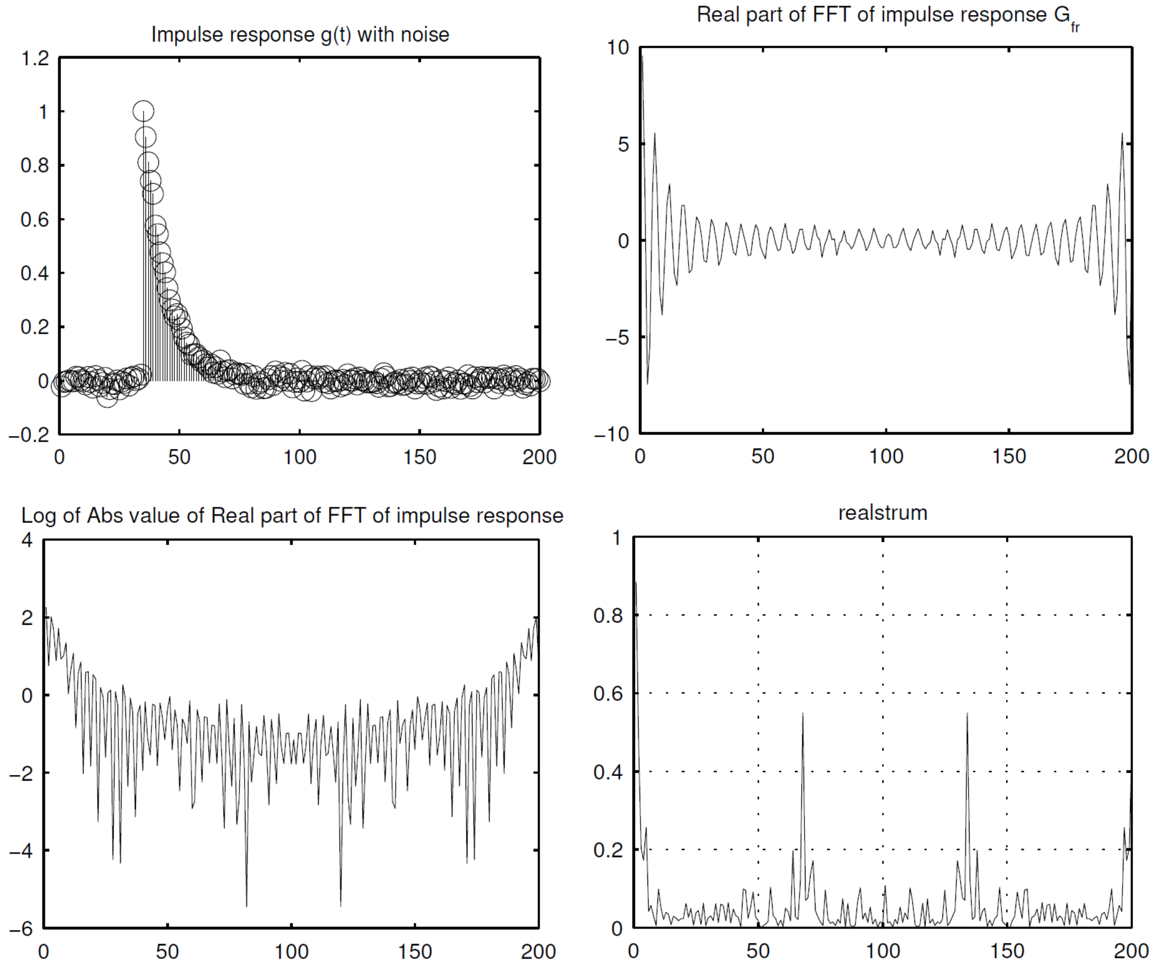
- Liczymy transformatę Fouriera odpowiedzi impulsowej

$$G(i\omega) = G_r(i\omega) \cdot e^{-i\omega T_d}$$

- Bierzemy część rzeczywistą

$$G_{\text{fr}}(i\omega) = \text{Re}\left\{G(i\omega)\right\} = \text{Re}\left\{G_r(i\omega) \cdot e^{i\omega T_d}\right\} = A_{\text{fr}}(i\omega)\sin\left(T_d\omega + \varphi(i\omega)\right)$$

- Wyznaczamy logarytm części rzeczywistej transformaty Fouriera
- Liczymy odwrotna transformatę Fouriera
- Szukamy pików charakterystyki, które powinny być w punkcie $2T_d$
- Wejście musi być białym szumem, w szczególności nie może oscylować



Metody w dziedzinie częstotliwości – fazowe

- Podstawowa zależność: opóźnienie w dziedzinie czasu $e^{-j\omega T_d}$ odpowiada przesunięciu fazowemu $-\omega T_d$ w dziedzinie częstotliwości.
- Wyznaczamy nachylenie fazy spectrum wzajemnego w dziedzinie częstotliwości
- W wypadku dyskretnego czasu metoda będzie działała do mniej więcej $1/10$ częstotliwości próbkowania
- Estymata charakterystyki częstotliwościowej:

$$\hat{G}(e^{i\omega T}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}(\omega)}{\hat{\Phi}_u(\omega)}$$

- Analizujemy fazę tej charakterystyki w celu wyznaczenia opóźnienia

$$\hat{T}_d = -\frac{d}{d\omega} \arg \hat{G}(e^{i\omega T})\Big|_{\omega=0}$$

Metody w dziedzinie częstotliwości – fazowe

- Zadanie wyznaczenia ch-ki częstotliwościowej było rozważane wcześniej
- Zadanie odpowiada ch-ce korelacyjnej w dziedzinie czasu

$$\Phi_{yu}(\omega) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{yu}(k) e^{i\omega k T_s}$$

- Ponieważ opóźnienie jest zależne od pochodnej ch-ki fazowej

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\omega} = \frac{d \arg \bar{G}_{ap}(i\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \arg e^{-i\omega T_{d=}} \frac{d}{d\omega} \{-\omega T_d\} = -T_d$$

- Wyznaczamy pochodną ch-ki fazowej

$$T_d \approx -\frac{\varphi(\omega_1 T_s)}{\omega_1 T_s} = -\frac{\arg G_{ap}(e^{i\omega_1 T_s})}{\omega_1 T_s}$$

metoda DAP (Discrete-time Alpass Phase)

Metody w dziedzinie funkcji Laguerra
modele dyskretne

- Postać dyskretna funkcji Laguerra w dziedzinie częstotliwości:

$$L_k(q) = \frac{\sqrt{(1-\alpha^2)T_s}q^{-1}}{1-\alpha q^{-1}}\left(\frac{-\alpha+q^{-1}}{1-\alpha q^{-1}}\right)^{k-1}$$

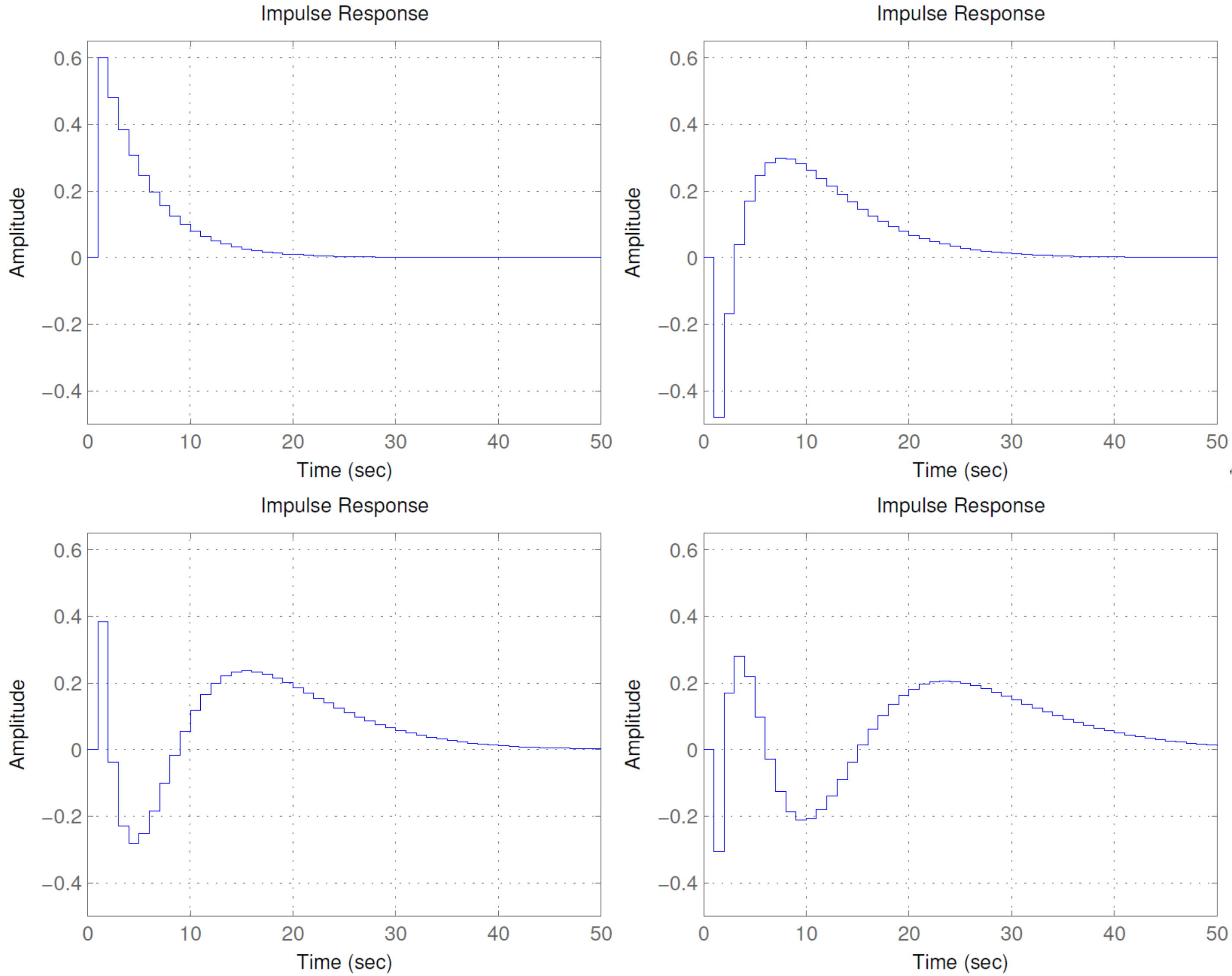
- Po przejściu w dziedzinę czasu otrzymujemy

$$l_k = \mathcal{Z}^{-1}\{L_k(z)\}$$

Metody w dziedzinie funkcji Laguerra

modele dyskretne

Przykładowe pierwsze cztery funkcje, $a = 0.8$, $T_s = 1$.



$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k l_k(t)$$

Metody w dziedzinie funkcji Laguerra
modele dyskretne

- Model dyskretny (t, d: dyskretne)

$$y(t) = u(t-d) + n(t)$$

- W dziedzinie funkcji Laguerra otrzymujemy

$$y_k = \sum_{l=0}^{k} \phi_{k,l} u_l + n_k$$

gdzie y_k, u_l, n_k są współczynnikami Laguerra dla wyjścia, wejścia i szumu.

- Zależność przepisujemy do postaci regresyjnej

$$y_k = \varphi_k^T \Theta + n_k, \quad \varphi_k = \left[\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,N+1}\right]^T$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,1} &= u_0 \\
\varphi_{k,l+1} &= \frac{(1-\alpha^2)^l}{l!(l-1)!} \sum_{m=0}^{k-l} (-1)^{k+l-m} \alpha^{k-2l-m} \frac{(k-m-1)!}{(k-m-l)!} u_m, & k \geq l > 0 \\
\varphi_{k,l+1} &= 0 & N \geq l > k
\end{aligned}$$

$$\Theta = \left[\ 1, \quad d, \quad \dots, \quad d(d-1)\cdots(d-(N-1))\ \right]^T \alpha^d$$

Metody w dziedzinie funkcji Laguerra
modele dyskretne

- Przykładowe rozwiązanie:

$$Y = [y_0, \dots, y_N]^T$$

$$\Phi = [\varphi_0, \dots, \varphi_N]^T$$

$$\widehat{\Theta} = \Phi^{-1} Y$$

$$\hat{d} = \left(1^T 1\right)^{-1} 1^T Y_D = \frac{1}{N} 1^T \widehat{D} + \frac{N-1}{2}$$

gdzie:

wektor bez ostatniego elementu

pseudo-odwrotność

$$1 = [1, \dots, 1]^T, Y_D = \widehat{D} + [0,1, \dots, N-1]^T, \widehat{D} = diag\left(\underline{\widehat{\Theta}}\right)^{\dagger} \overline{\widehat{\Theta}}$$

wektor bez pierwszego elementu

Funkcje Laguerra dopasowujemy optymalizacyjnie

Metody bezpośrednie
metody jednokrokowe

- Zakładamy postać modelu z opóźnieniem:
  - jedno-inercyjna: $G(s) = \frac{K}{1+sT} e^{-sL}$
  - dwu-inercyjna: $G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)} e^{-sL}$
- Dopasowujemy parametry modelu metodą błędu predykcji czy też największej wiarygodności (optymalizacja iteracyjna)
- Problem o wielu ekstremach:
  - Metoda wielostartowa
  - Optymalizacja globalna
- Analogicznie postępujemy w wersji dyskretnej
- Często stosujemy filtrowanie danych

Metody bezpośrednie
metody dwukrokowe

- **Krok 1:** dyskretyzacja
- **Krok 2:** dopasowanie metodami jak dla modeli regresyjnych

Metody powierzchni
Area method

- Zakładamy postać modelu
  - $G(s) = \frac{K}{1+sT} e^{-sL}$ lub $G(s) = \frac{K}{(1+sT)^2} e^{-sL}$

1. Liczymy średni czas przebywania T_{ar}
   $T_{ar} = \frac{A_0}{K}$
   gdzie:
   K – wzmocnienie statyczne, A_0 - pole pod odpowiedzią skokową
2. Liczymy pole do czasu T_{ar}, czyli
   $$A_1 \int_0^{T_{ar}} s(t)dt$$
3. Dla modelu jedno-inercyjnego mamy $T = \frac{e^1 A_1}{K}$ i opóźnienie $L = T_{ar} - T$
4. Dla modelu dwu-inercyjnego mamy $T = \frac{e^2 A_1}{4K}$ i opóźnienie $L = T_{ar} - 2T$

Metody momentów
Moment method

- Znormalizowana odpowiedź impulsowa $$f(t) = \frac{h(t)}{\int_0^\infty h(t)dt}$$
  gdzie $h(t)$ to odpowiedź impulsowa

$$m_n = \int_0^\infty t^n f(t)dt$$ moment rzędu n.

- Dla modelu pierwszego rzędu mamy $$K = \int_0^\infty h(t)dt$$

- Średni czas przebywania: $T_{ar} = m_1$,
- stałą czasową otrzymujemy z równania: $T^2 = m_2 T_{ar}^2$, a opóźnienie $L = T_{ar} - T$
- Dla modelu drugiego rzędu mamy: $T^2 = \frac{1}{2}m_2 - \frac{1}{2}T_{ar}^2$, a opóźnienie $L = T_{ar} - 2T$

Zalecenia

Metoda	Wolny obiekt	Szybki obiekt	Pobudzenie PRBS	Pobudzenie skokowe
Progowanie		X	X	
Metody DAP (częstotliwościowe)		X	X	
W dziedzinie Laguerra	X			X
Dopasowanie z czasem ciągłym (metody błędu predykcji)			X	
Dopasowanie z czasem dyskretnym (metody błędu predykcji)		X	X	
Metody momentów i powierzchniowe	X			

Podsumowanie

- W przypadku otwartej pętli: metody błędu predykcji (ciągłe i dyskretne)
- Metody progowania zawodzą – zakłócenia
  - Problemy z estymacją właściwej odpowiedzi impulsowej
  - Wybielanie sygnałów rzadko pomaga
  - Lepiej działają dla obiektów szybkich i sygnałów typu PRBS
- Metody częstotliwościowe (DAP) są jednymi z lepszych
  - Wrażliwe na szumy
- Metody Laguerra zależą od doboru sygnału wejściowego
  - Zależy czy sygnał wejściowy dobrze odpowiada funkcjom Laguerra
  - Wolne obiekty
  - Długie obliczenia

Podsumowanie

- Metody dopasowania
  - Wynik optymalizacji zależy od punktu startowego
  - Wybielanie sygnałów może pomóc
- Metody powierzchni i momentów mają ograniczony zakres stosowania
  - Problemy z estymacją odpowiedzi czy to skokowej, czy też impulsowej
  - Metody momentów raczej nie maja zastosowania
  - Metody powierzchni są trochę lepsze
  - W ogólności dają lepsze wyniki dla wolnych obiektów, w przeciwieństwie do metod progowych

Metody alternatywne

- Podejście genetyczne (optymalizacyjne):
  - Dopasowanie do odpowiedzi skokowej odpowiedniego modelu: dwa przykłady, tzn. jedno- i dwu-inercyjny z opóźnieniem.
  - Identyfikacja wszystkich parametrów modelu, wraz z opóźnieniem
- Modyfikacja zmiennych stanu i optymalizacja – skomplikowane i mało odporne algorytmy, mnóstwo uznaniowych parametrów

Identyfikacja opóźnienia stanu

- Metody aproksymacyjne (optymalizacyjne) rozwijając opóźnienie poprzez *splajny*
- Metody spektralne, aczkolwiek nierozwiązany do końca problem wymiarowości
- Podejście poprzez wielokrotne opóźnienia i analizę równań stanu z wielokrotnymi opóźnieniami

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{j=0}^{m} \hat{A}_j \hat{x}(t - \hat{\tau}_j) + \hat{B}_j u(t - \hat{\tau}_j) - \alpha \triangle x(t),$$

  - wyrazy dotyczące błędnych opóźnień powinny się zerować