MI
Metody Identyfikacji

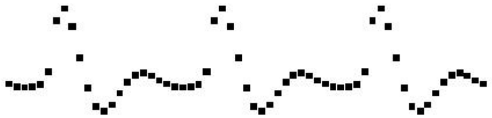
wykład #3

1. *Metody analizy spektralnej dla sygnałów okresowych i nieokresowych*

Analiza spektralna

- Wyznaczenie spektrum sygnałów jest często potrzebne
- Numeryczne sposoby wyliczenia transformaty Fouriera
- Tym samym potrzebne próbkowanie i metody cyfrowe
- Okienkowanie danych
- Efektywność obliczeniowa transformaty Fouriera dla dużych ilości danych

Transformaty

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform *signals that are continious and aperiodic*	
Fourier Series *signals that are continious and periodic*	
Discrete Time Fourier Transform *signals that are discrete and aperiodic*	
Discrete Fourier Transform *signals that are discrete and periodic*	

Numeryczne wyznaczanie transformaty Fouriera

- Cel: zawartość *częstotliwościowa* sygnału
- Wyznaczanie odpowiedzi częstotliwościowej modelu:
  - Konieczność wyznaczenia transformaty dla wejścia i wyjścia
- Wejście i wyjście w postaci dyskretyzowanego sygnału t_k dla $k = 0,1,2,\ldots,N$
- Konieczność wypracowania **Dyskretnej Transformaty Fouriera**
- **Szybka Transformata Fouriera** znacznie bardziej efektywna obliczeniowo

Ciąg Fouriera dla sygnału okresowego

- Każdą funkcję okresową *x(t)* z okresem *T*, tj. *x(t) = x(t+kT)* można opisać jako

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \text{ with } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Taki szereg jest nazywany **szeregiem Fouriera**.
- Uwzględniamy raczej skończoną liczbę elementów. Parametry opisane jako:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

- W dziedzinie zespolonej otrzymujemy postać:

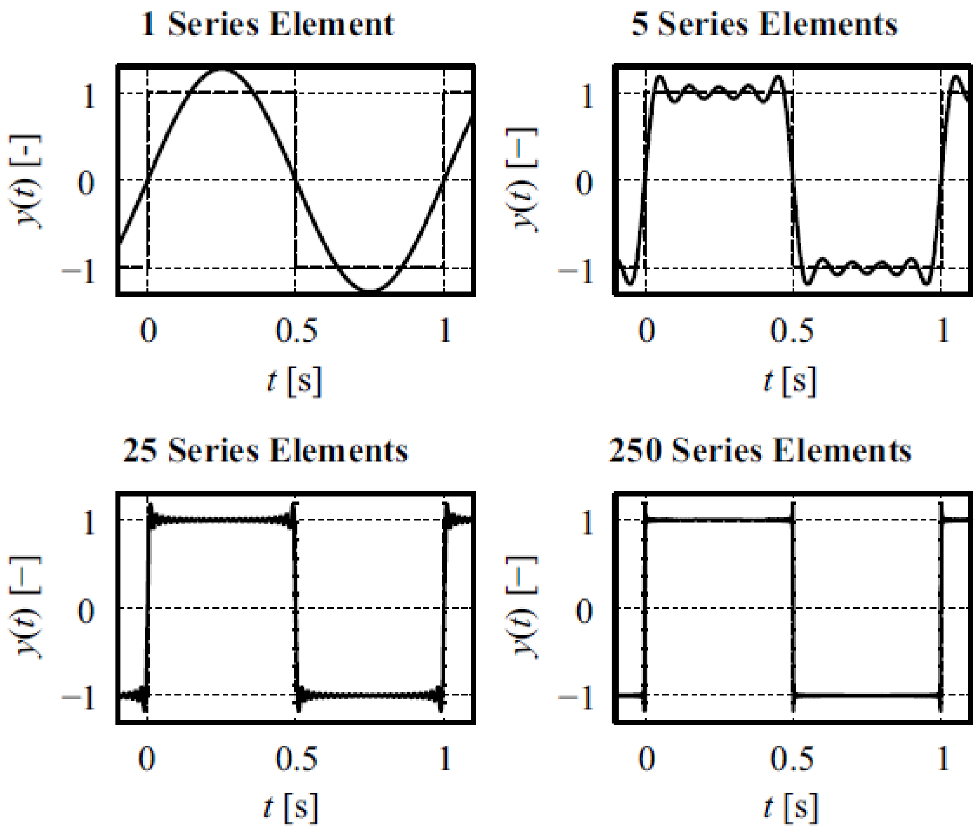
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Ciąg Fouriera dla sygnału okresowego: efekt Gibbsa

- Efekt Gibbsa (1899) nazwany od imienia *Josiah Willarda Gibbsa* w matematyce jest to charakterystyczny sposób, w jaki zachowuje się aproksymacja funkcji *x(t)* szeregiem Fouriera w punktach nieciągłości tej funkcji. Wykres nadmiernie oscyluje wokół tego punktu. Można przyjąć, że zjawisko to odzwierciedla trudność naśladowania nieciągłej funkcji przez skończone szeregi sinusów – nawet jeśli ilość elementów dąży do nieskończoności.
- Efekt Gibbsa wyjaśnia powstawanie zakłóceń różnego rodzaju sygnałów i znajduje zastosowanie w przetwarzaniu sygnałów (na przykład w cyfrowej obróbce obrazów). Między innymi wyjaśnia on przyczynę powstawania wysokoczęstotliwościowych oscylacji stanowiących zakłócenia sygnału przy zastosowaniu filtrów o prostokątnych oknach.

Ciąg Fouriera dla sygnału okresowego: efekt Gibbsa

- Zawsze pojawi się przeregulowanie, dla N→∞ otrzymamy około 18%



Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Rozszerzamy czasokres sygnału T→∞ i otrzymujemy transformatę Fouriera jako:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = x(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- Jeśli nieokresowy sygnał ciągły jest próbkowany z czasem To to sygnał ten możemy opisać jako ciąg delt Diraca o określonych wysokościach

$$x_\delta(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_0)\,\delta(t-kT_0)$$

- i otrzymujemy

$$x_\delta(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_0)\delta(t-kT_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega T_0}\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega T_0}$$

- Ta transformata nazywana jest **Dyskretną Transformatą Fouriera** (DTFT – Discrete Time Fourier Transform)

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Transformata odwrotna DTFT ma postać

$$x(k) = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_0}}^{\frac{\pi}{T_0}} x_\delta(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega T_0}\mathrm{d}\omega$$

- Jako że ciągły sygnał *x(t)* jest przemnażany przez szereg delt Diraca, wynikowa transformata Fouriera $x_\delta(i\omega)$ jest okresowa w dziedzinie częstotliwości.
- Mnożenie w dziedzinie czasu jest splotem w dziedzinie częstotliwości.
- Ponieważ spektrum jest okresowe wystarczy je wyznaczyć w zakresie
  - $0 \le \omega < 2\pi/To$

    lub
  - $-\pi/To \le \omega < +\pi/To$

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Okresowość uzasadnia twierdzenie Shannona-Kotielnikowa (1948), mówiące iż tylko częstotliwości do

$$f \leq \frac{1}{2T_0} = \frac{1}{2} f_S$$

- gdzie f_s jest częstotliwością próbkowania (częstotliwość Nyquista) mogą być próbkowane poprawnie. Pozostałe częstotliwości zostaną odtworzone fałszywie – zjawisko maskowania (**aliasing**).

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Ponieważ nie możemy sumować do nieskończoności *-∞ ≤ k ≤ + ∞*, a ilość punktów wynosi N (*0 ≤ k ≤ N-1*) otrzymujemy Dyskretną Transformatę Fouriera w postaci:

$$
\begin{aligned}
x(\mathrm{i}\omega) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega T_0} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0)\cos(k\omega T_0) - \mathrm{i}\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0)\sin(k\omega T_0) \\
&= \mathrm{Re}\{x(\mathrm{i}\omega)\} + \mathrm{Im}\{x(\mathrm{i}\omega)\}\ .
\end{aligned}
$$

- Ograniczenie ilości próbek prowadzi do **okienkowania** (*ang.* windowing).

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Pomimo że spektrum częstotliwościowe jest ciągłą i okresową funkcją niestety w obliczeniach nie możemy przechować wszystkich częstotliwości. Tym samym dyskretyzujemy również częstotliwość *ω*.
- Wystarczy to zrobić w zakresie *0 ≤ ω < 2π/To*
- Spektrum częstotliwości jest również przemnożone przez funkcje próbkującą

$$\tilde{x}(\mathrm{i}\nu\Delta\omega) = \sum_{\nu=0}^{M-1} x(\mathrm{i}\omega)\delta(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\nu\Delta omega)$$

- gdzie:
  - $\tilde{x}(\mathrm{i}\nu\Delta\omega)$ oznacza próbkowaną transformatę,
  - Δω – przyrost częstotliwości
  - M – ilość punktów (M=2π/(ToΔω))
- Prowadzi to do splotu w dziedzinie czasu i otrzymujemy okresowość w dziedzinie czasu poza próbkowanym zakresem, tj.

$$x(kT_0) = x(kT_0 + \mu T_\mathrm{n}),\ \mu = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{and } T_\mathrm{n} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego

- Dobierając okres próbkowania częstotliwości jako *Tn = N* to tym samym okresowość jest równoznaczna z długością pomiaru w dziedzinie czasu. Zatem *M = N*.
- Ostatecznie otrzymujemy *parę transformat DFT* jako:

$$x(\mathrm{i}n\Delta\omega) = \mathrm{DFT}\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,n\Delta\omega T_0}$$

$$x(kT_0) = \mathrm{DFT}^{-1}\{x_S(\mathrm{i}n\Delta\omega)\} = \sum_{k=0}^{N-1} x(\mathrm{i}n\Delta\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,n\Delta\omega T_0}$$

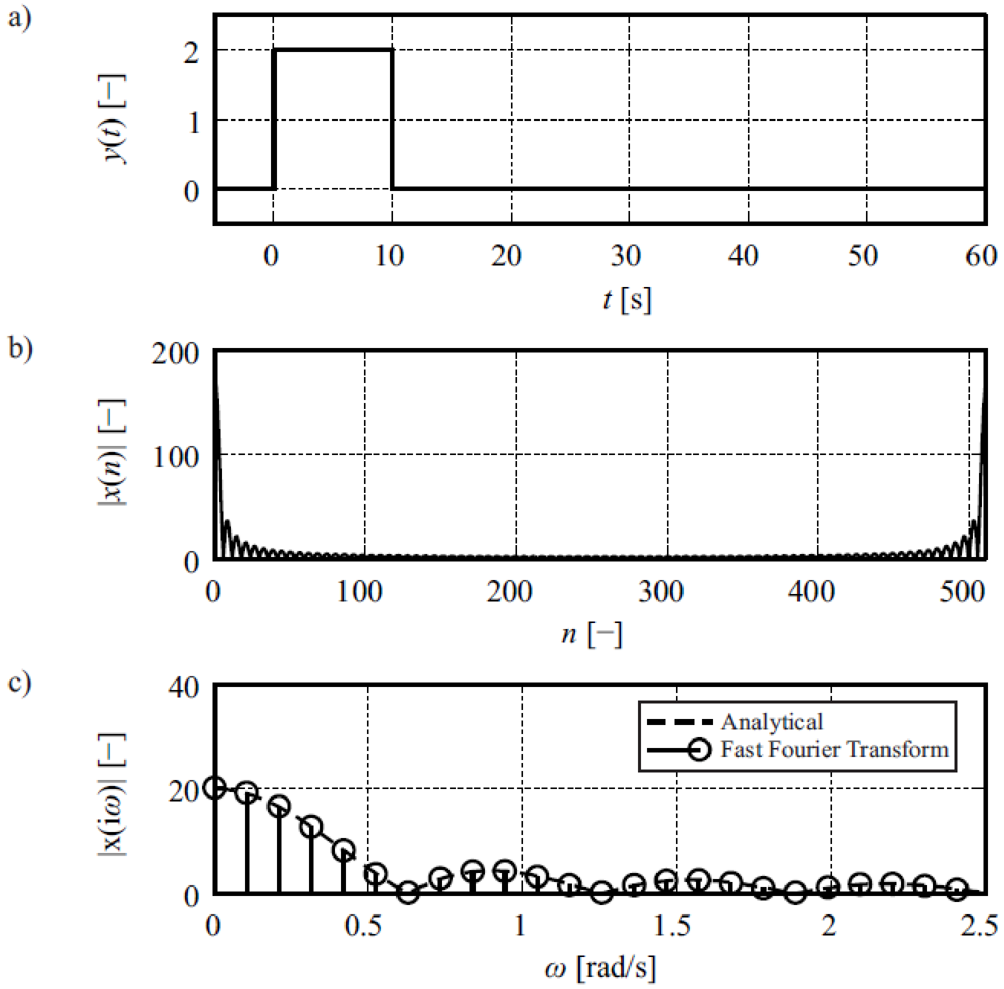
- Zastosowanie DFT powoduje, że zarówno sygnał jak i jego spektrum staje się okresowym.
- Dla każdej częstotliwości ω DFT potrzebuje *N* mnożeń i (*N-1*) dodawań. Zatem dla całego spectrum potrzeba N^2 mnożeń i *N*(*N-1*) dodawań. Wydatek obliczeniowy jest wysoki. Dlatego wprowadzimy **Szybką Transformatę Fouriera** (FFT – Fast Fourier Transform).

Ciąg Fouriera dla sygnału nieokresowego - Interpretacja DFT (FFT)

- FFT i analityczna postać transformaty Fouriera dla skoku prostokątnego:
  a) Sygnał oryginalny
  b) Wyjście FFT (nieskalowane)
  c) Wyjście przeskalowane zgodnie z:

$$\mathfrak{F}\{x(kT_0)\} = T_0 x(ik\Delta\omega)$$

$$\omega = \left(0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \ldots, (N-1)\Delta\omega\right) \text{ with } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_M}$$



Wprowadzenie teoretyczne

- Analiza Fouriera

Bardzo często wielkości mają charakter okresowy, tzn. taki, który powoduje powtarzanie się danej wielkości fizycznej z określonym okresem. Zazwyczaj taką funkcję okresową można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego też szeregiem Fouriera.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Wprowadzenie teoretyczne

- Dyskretna transformata Fouriera
- Przypuśćmy, że mamy N kolejnych wartości zmierzonych w odstępach czasu Δ, tak że

$$h_k \equiv h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

- Zamiast próbować znaleźć transformatę dla wszystkich wartości *f* oszacujmy ją jedynie w konkretnych punktach, danych przez:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$$

- Po przybliżeniu całki otrzymujemy $H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n/N}$

- Zastosowane powyżej przekształcenie nosi nazwę dyskretnej transformaty Fouriera

Algorytm FFT

- Uwagi ogólne
- Obliczanie transformaty bezpośrednio ze wzoru jest nieefektywne ze względu na zbyt dużą złożoność obliczeniową.
- Wzrost wydajności przy zastosowaniu FFT

	N	2	4	8	16	32	64	128
DFT	$2N^2$	8	32	128	512	2048	8192	32768
FFT	$\frac{1}{2}Log_2(N)$	2	8	24	64	160	384	896

Algorytm FFT

- Idea
- Sama idea algorytmu opiera się na tzw. lemacie Danielsona-Lanczosa. Odkryli oni, że pojedyncza DFT o długości N, jest równoważna sumie dwóch transformat o długości $N/2$, jedna z nich jest złożona z nieparzystych punków spośród oryginalnych N, a druga z parzystych.

$$H_n = \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi inj/(N/2)} f_{2j} + W^n \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi inj/(N/2)} f_{2j+1} =$$
$$= H_n^e + W^n H_n^o$$

- H_n^e oznacza n-ty składnik transformaty o długości $N/2$, stworzony z parzystych (*even*) punktów, a H_n^o odpowiednio z nieparzystych (*odd*).

Algorytm FFT

- Algorytm Cooley'a-Tukey'a

<table>
<tr><td colspan="8">Przykład wyznaczania transformaty dla $N = 8$ punktów</td></tr>
<tr><td colspan="8">$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6$</td><td colspan="4">$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_0 \quad a_4$</td><td colspan="2">$a_2 \quad a_6$</td><td colspan="2">$a_1 \quad a_5$</td><td colspan="2">$a_3 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td>$000 = 0$
a_0
$000 = 0$</td><td>$100 = 4$
a_4
$001 = 1$</td><td>$010 = 2$
a_2
$010 = 2$</td><td>$110 = 6$
a_6
$011 = 3$</td><td>$001 = 1$
a_1
$100 = 4$</td><td>$101 = 5$
a_5
$101 = 5$</td><td>$011 = 3$
a_3
$110 = 6$</td><td>$111 = 7$
a_7
$111 = 7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_0 = a_0 + a_4$
$b_1 = a_0 - a_4$</td><td colspan="2">$b_2 = a_2 + a_6$
$b_3 = a_2 - a_6$</td><td colspan="2">$b_4 = a_1 + a_5$
$b_5 = a_1 - a_5$</td><td colspan="2">$b_6 = a_3 + a_7$
$b_7 = a_3 - a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$c_0 = b_0 + b_2 \quad c_2 = b_0 - b_2$
$c_1 = b_1 + \omega_4 b_3 \quad c_3 = b_1 - \omega_4 b_3$</td><td colspan="4">$c_4 = b_4 + b_6 \quad c_6 = b_4 - b_6$
$c_5 = b_5 + \omega_4 b_7 \quad c_7 = b_5 - \omega_4 b_7$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$d_0 = c_0 + c_4 \quad d_4 = c_0 - c_4$
$d_1 = c_1 + \omega_8 c_5 \quad d_5 = c_1 - \omega_8 c_5$
$d_2 = c_2 + \omega_8^2 c_6 \quad d_6 = c_2 - \omega_8^2 c_6$
$d_3 = c_3 + \omega_8^3 c_7 \quad d_7 = c_3 - \omega_8^3 c_7$</td></tr>
</table>

$$W_N^{k-\frac{N}{2}} = e^{i2\pi(k-\frac{N}{2})/N} = e^{i2\pi k/N} e^{-i\pi} = -e^{i2\pi k/N} = -W_N^k$$

Zastosowanie analizy Fouriera

- Uwagi ogólne
- W ciągu ostatnich lat, wraz z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej, nastąpił szybki rozwój teorii dotyczących analiz szeregów czasowych.
- Powstawały nowe metody numerycznego opracowania danych, które wcześniej nie mogły być zastosowane, ze względu na ogromną czasochłonność obliczeń.
- Metody te opracowywane były głównie dla potrzeb elektroniki gdzie, aby dostać np. dokładniejsze estymatory widm mocy lub lepszą filtrację, wydłużano szeregi czasowe.

Zastosowanie analizy Fouriera

- Analiza Fouriera w fizyce:
  - Współczynniki Fouriera są interpretowane jako amplitudy odpowiednich składowych harmonicznych.
  - Pierwsza składowa przekształcenia a_0 określa wartość stałą. Zależy ona od położenia sygnału względem osi poziomej. W praktyce jest najczęściej pomijana.
  - Kwadraty współczynników z dokładnością do czynnika multiplikatywnego określają energię danej składowej harmonicznej.
  - W ten sposób można mówić fizycznie o badaniu widma pewnej wielkości fizycznej tzn. rozkładzie energii w funkcji częstotliwości.

Zastosowanie analizy Fouriera

- Analiza Fouriera w elektronice:
  - Widmo sygnału prostokątnego składa się z harmonicznych o częstościach będących całkowitą nieparzystą wielokrotnością częstości podstawowej o amplitudach malejących ze wzrostem częstotliwości harmonicznych.
  - Im więcej składowych harmonicznych jest sumowanych tym lepsze jest przybliżenie przebiegu prostokątnego.
  - W konkretnych zagadnieniach, kształt badanego sygnału jest na tyle skomplikowany, że trudno jest obliczyć go w sposób ścisły. Problemy z detekcją i szumami.
  - Filtracja oraz pasmo przenoszenia sygnału.

Wyznaczanie numeryczne transformaty Fouriera

- Zakładając $e^{-ikn\Delta\omega T_0} = W_N^{nk}$ otrzymujemy $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk}$

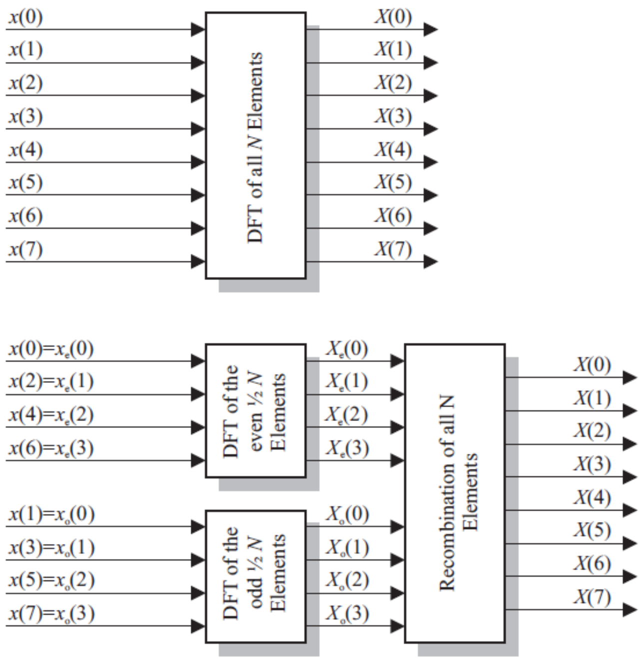
- Ze względu na właściwości operatora transformatę można podzielić na dwie sumy, dla parzystych i nieparzystych elementów:

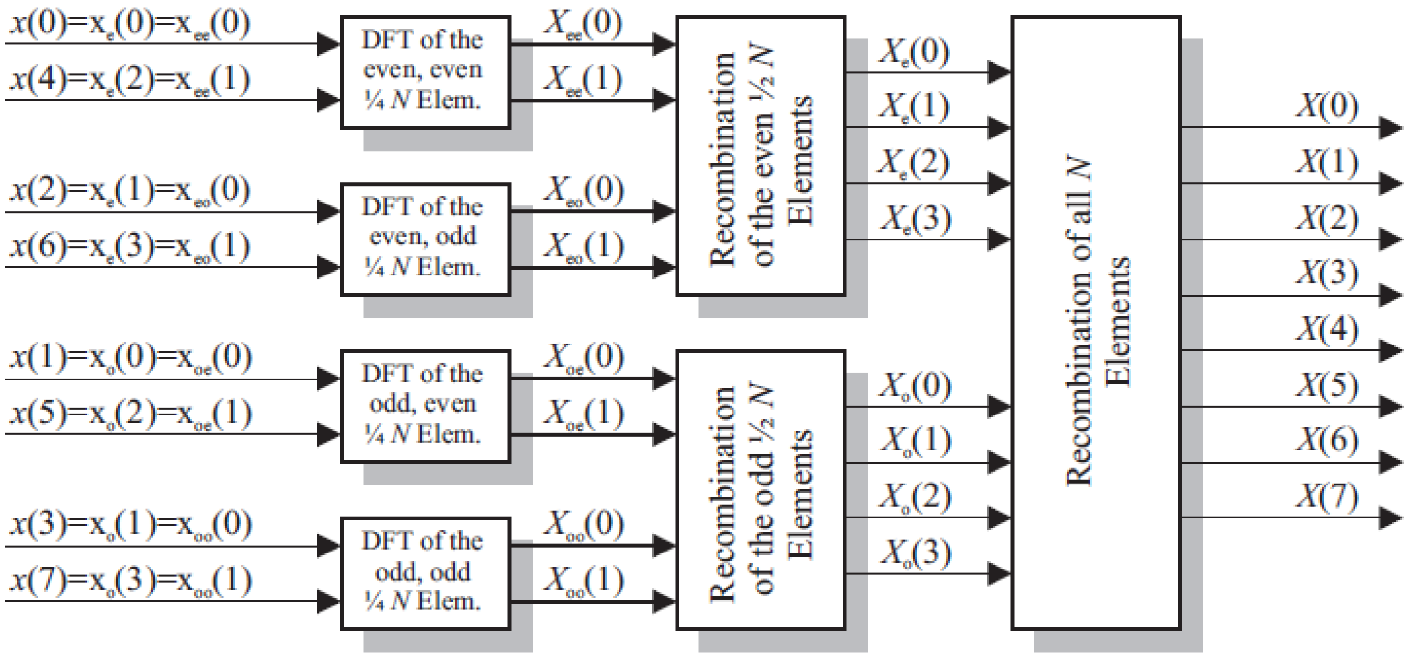
$$\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) W_N^{2nk} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) W_N^{n(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) W_N^{2nk} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1)) W_N^{2kn} \\
&= x_e(n) + W_N^n x_o(n) ,
\end{aligned}$$

DIT (radix-2 decimation-in-time) FFT
Algorytm Cooleya-Tukeya

Wyznaczanie numeryczne transformaty Fouriera

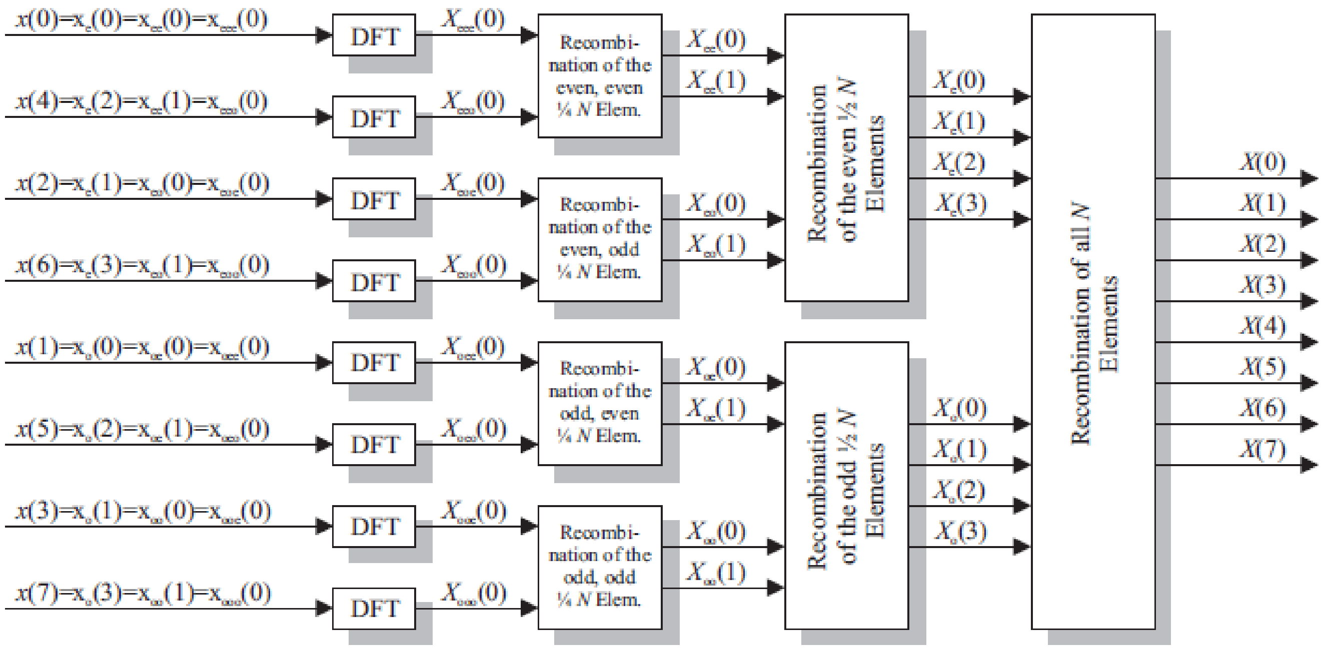
- Obie sumy mają taki sam operator okresowy (*N/2*). Obie sumy są oznaczone „e” – parzysta i „o” – nieparzysta. Obie sumy można teraz podzielić *wgłąb* na kolejne dwie dodając kolejny indeks, np. ”ee” parzysta-parzysta.
- Zasada dziel i rządź *divide et impera* dla N = 8 przedstawiona jest poniżej:

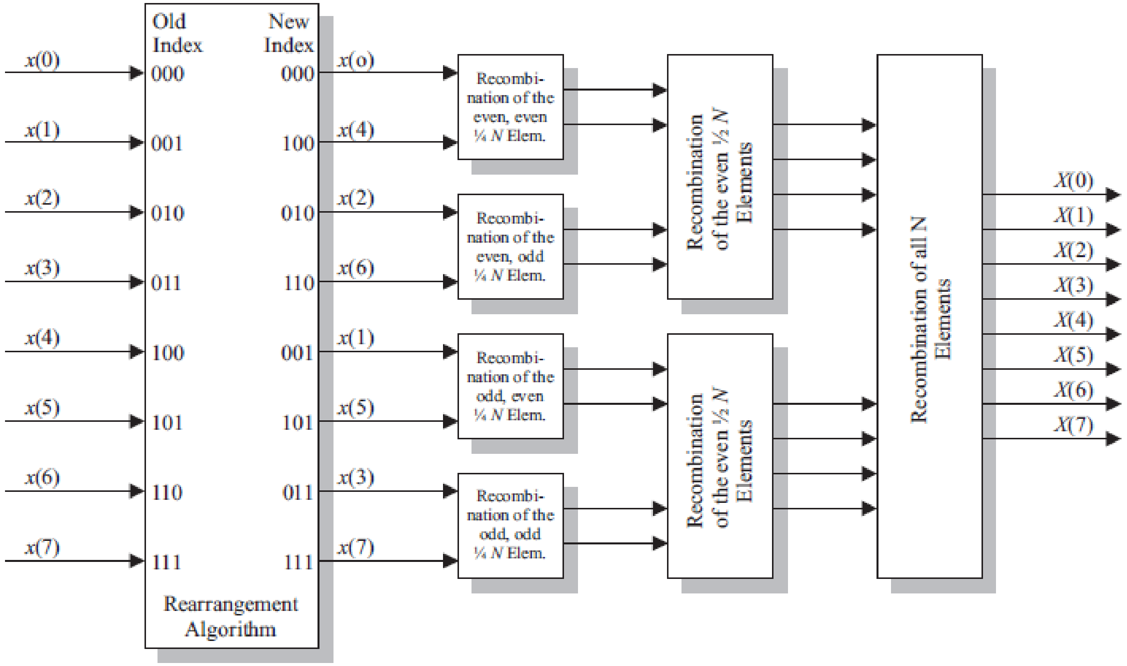




Wyznaczanie numeryczne transformaty Fouriera

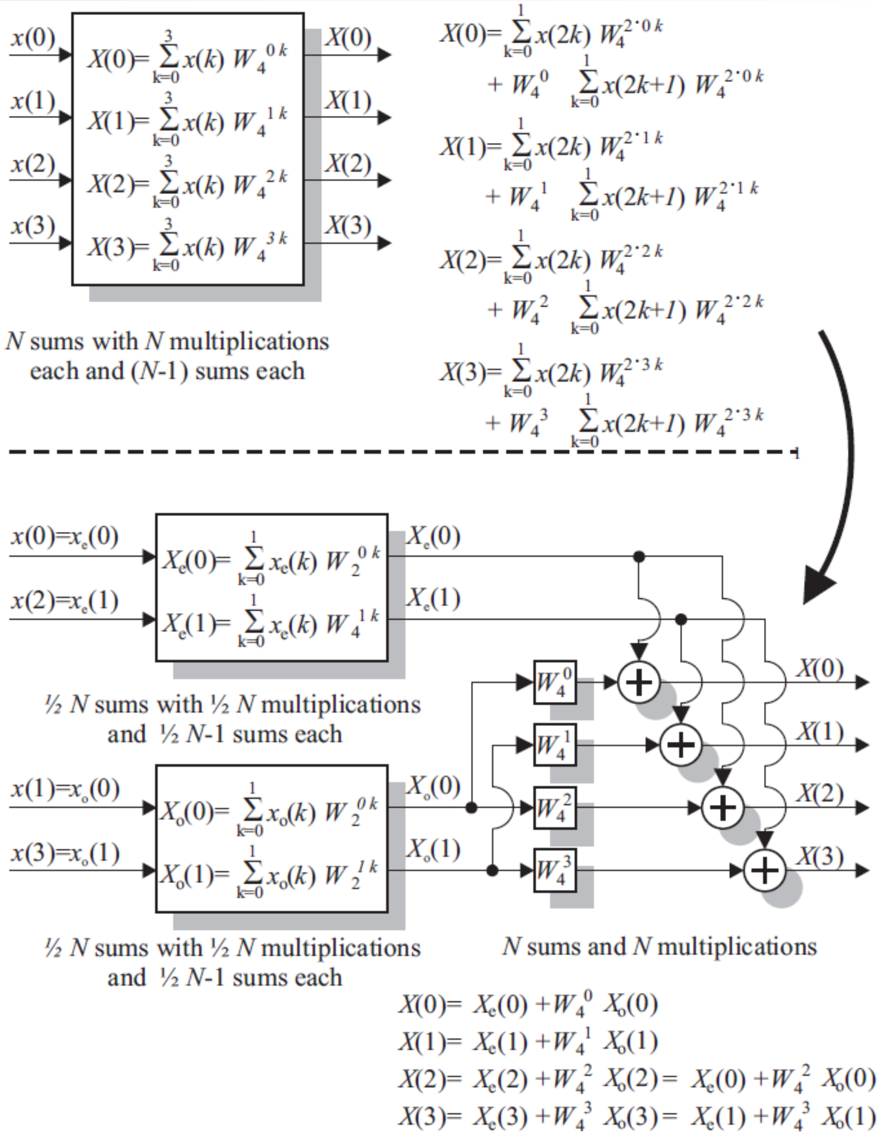
- Zasada *divide et impera* dla N = 8 (ciąg dalszy) – rekombinacja:





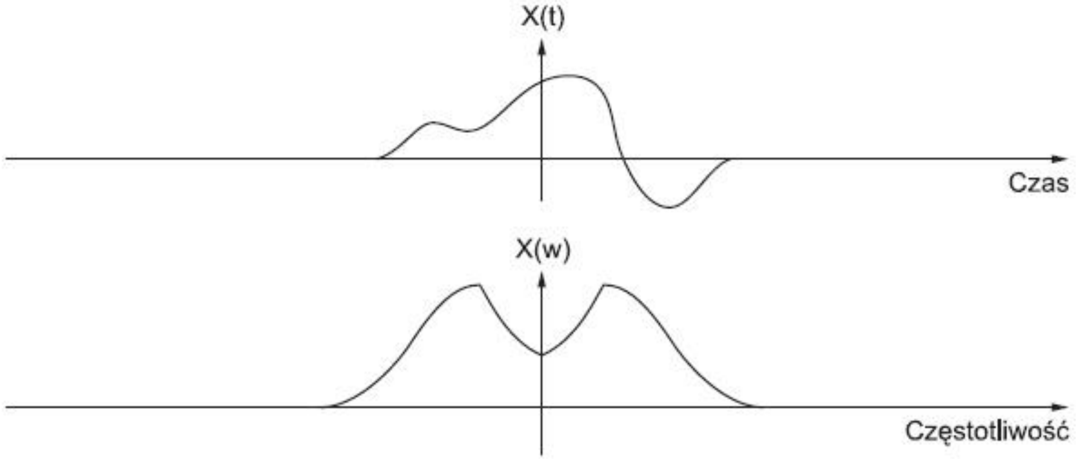
Wyznaczanie numeryczne transformaty Fouriera

- Przed pierwsza rekombinacją należy przestawić próbki w odwrotnym porządku binarnym, np. element n = 100_2, stanie się elementem n = 001_2
- DFT potrzebuje N^2 zespolonych mnożeń i *N(N-1)* zespolonych dodawań, podczas gdy *O(N)* operacji może być oszczędzonych jako trywialne (mnożenie przez *1*)
- Powyższy FFT ma złożoność $N \log_2 N$ zespolonych mnożeń i $N \log_2 N$ zespolonych dodawań, przy czym część z nich jest trywialna



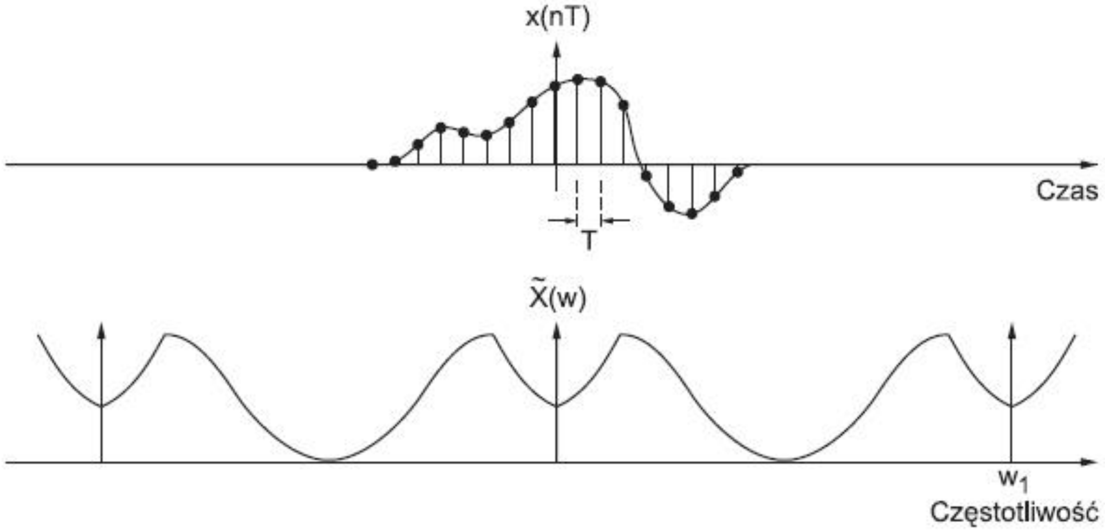
FFT – uwagi praktyczne

- Po pierwsze w praktyce ma się do czynienia z sygnałami o skończonym czasie trwania i z widmami o skończonej szerokości pasma.
- Po drugie, próbki sygnału muszą mieć określoną długość, a widmo określone częstotliwości składowe.
- Przykładowy ciągły w czasie nieokresowy x(t) jest pokazany obok. Jego fourierowska transformata X(ω) jest ciągła i nieokresowa w domenie częstotliwości. Sygnał próbkuje się w odstępach T, czyniąc go nieciągłym w czasie.
- Pamiętamy, że mnożenie w domenie czasu odpowiada splotowi w domenie częstotliwości i na odwrót.



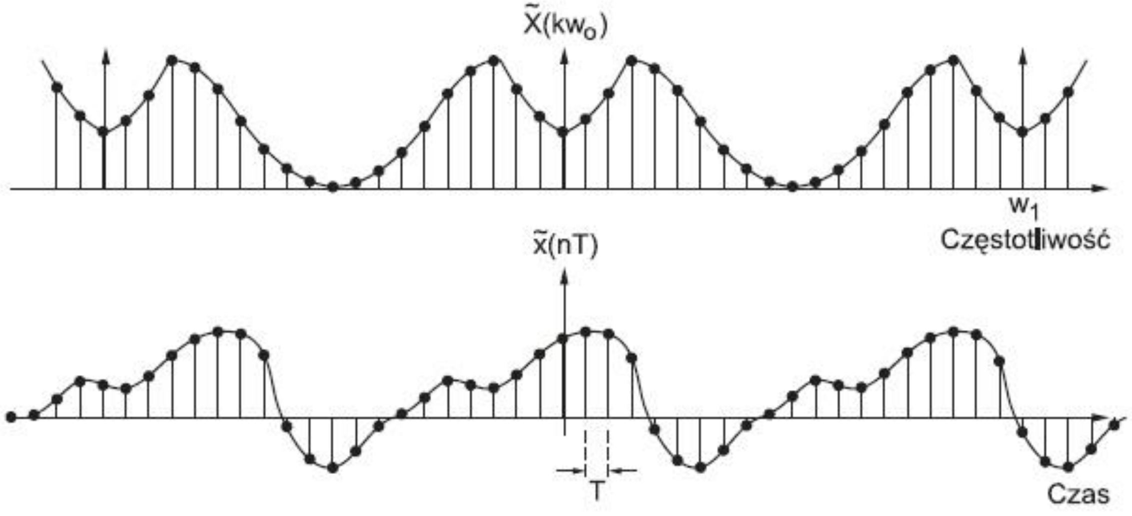
FFT – uwagi praktyczne

- Ponieważ próbkowanie jest mnożeniem x(t) i sygnału próbkującego s(t) w domenie czasu, odpowiada ono splotowi widma sygnału z widmem s(t), będącego szeregiem harmonicznych fs, pokazanym obok.
- Jeśli pamięta się proces i widmo modulacji amplitudy to można rozpoznać, że widmo jest widmem modulacji każdej harmonicznej fs przez s(t). Splot jest właśnie tym procesem.



FFT – uwagi praktyczne

- Następnym krokiem jest przemiana tego widma w nieokresowe przez próbkowanie z częstotliwością ω_0 Hz. Zabieg ten w domenie częstotliwości wpływa na sygnał w domenie czasu czyniąc go okresowym.
- Jest to wynik splotu sygnału z ciągiem impulsów próbkujących o okresie $1/f_0$.
- Powstał w ten sposób okresowy w czasie sygnał i jego okresowa transformata fourierowska. Rozciągają się one do nieskończoności, ale są okresowe.

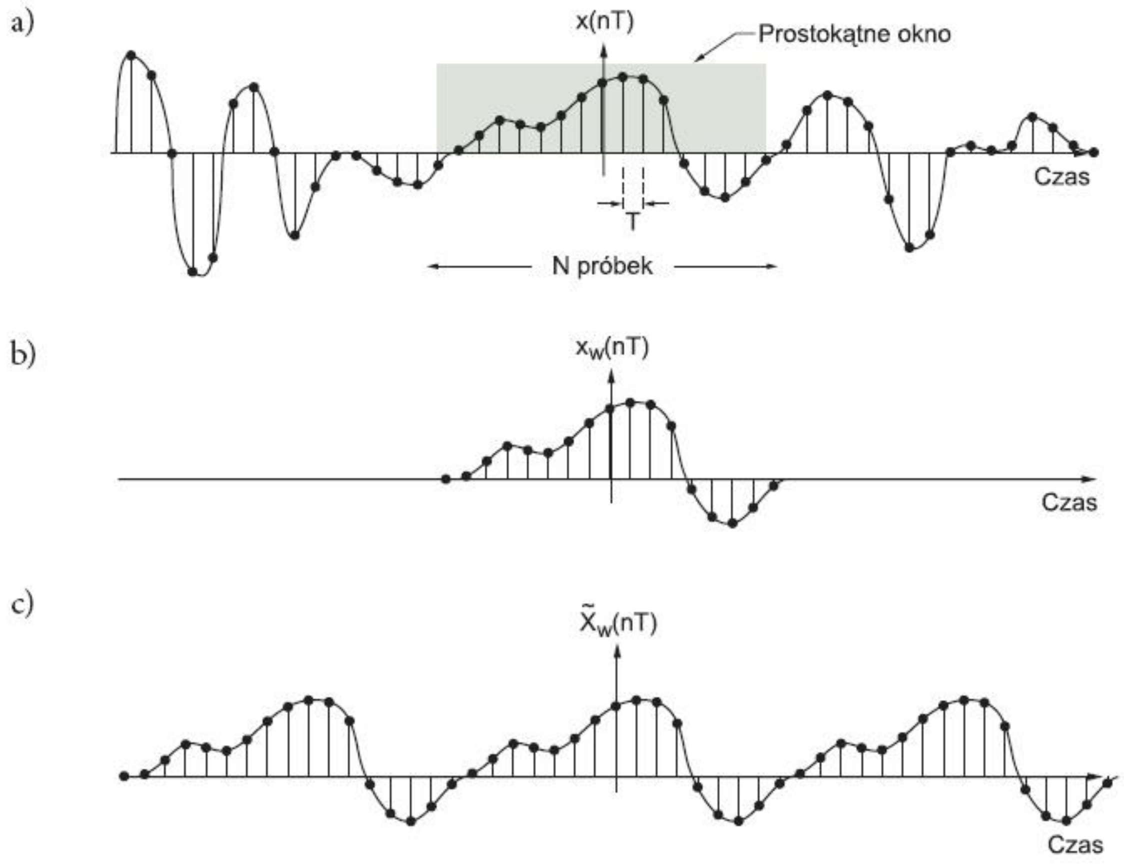


FFT – okienkowanie

- Trzeba więc wziąć jeden okres w każdej z domen mnożąc go przez funkcję prostokątną. Zabieg ten nazywa się okienkowaniem.
- Okienkowanie w jednej domenie wpływa oczywiście na sygnał w drugiej domenie.
- Jeden okres otrzymanego widma nieokresowego przyjmuje się więc za nieokresową fourierowska transformatę jednego okresu nieciągłego sygnału okresowego.

FFT – okienkowanie

- W praktyce do analizy sygnałów
  - najpierw trzeba przez próbkowanie otrzymać sygnał nieciągły, jak pokazano na (a),
  - wydzielić segment N próbek przez okienkowanie, jak pokazano na (b).
  - Następnie przyjmuje się, że segment jest powtarzalny, czyli segment zostaje powielony w obie strony, jak pokazuje (c).
- Dla tego sygnału oblicza się współczynniki jednego okresu nieciągłej transformaty Fouriera
- Następnie przenosi się na następny segment ciągu próbek i powtarza się obliczenia.
- Przedstawienie poprzez próbki transformat Fouriera jest w gruncie rzeczy przedstawieniem poprzez ciąg okresowy ciągu o ograniczonej długości, którego jeden okres jest skończoną sekwencją, która ma zostać przedstawiona.

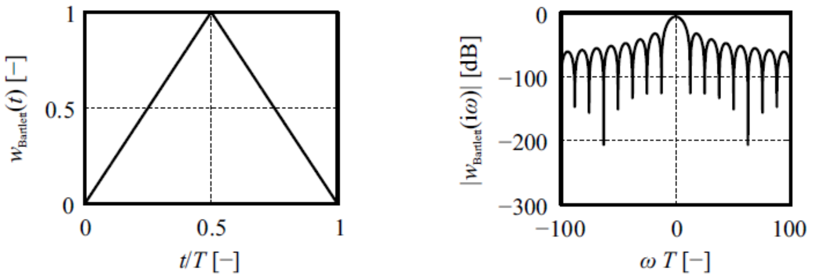


FFT – okienkowanie

- Różne rodzaje okien:
  - Prostokątne (żadne) – największa ilość wycieku okna
  - Hanninga – użyteczne do analizy przebiegów nieustalonych dłuższych niż czas trwania okna
  - Hamminga - podobne do Hanninga
  - Kaiser-Bessela – do wykrywania dwu sygnałów o zbliżonej częstotliwości ale różnych amplitudach
  - Trójkątne
  - Flat Top – najwyższa dokładność amplitudowa kosztem selektywności częstotliwości – mierzenie amplitud pojedynczych składowych
  - Wykładnicze – użyteczne przy mierzeniu sygnałów nieustalonych, tj. krótkotrwałych
  - Bartlett
  - Hann
  - Blackmann

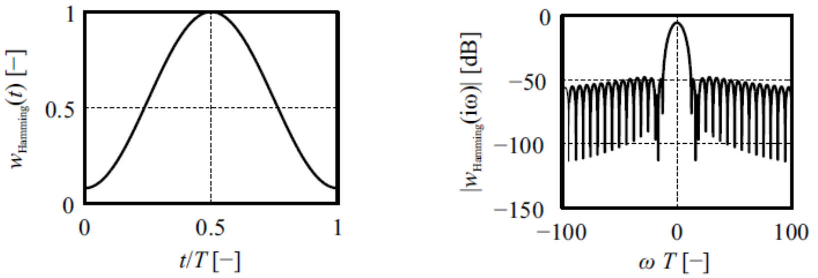
FFT – okienkowanie przykład

Bartlett Window



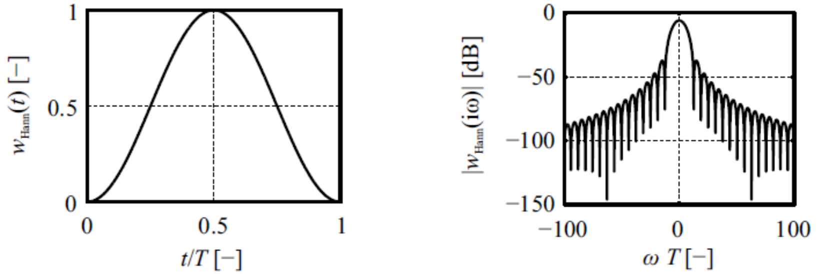
$$w_{\text{Bartlett}}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2\left|t - \frac{T}{2}\right|}{T} & \text{if } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Hamming Window



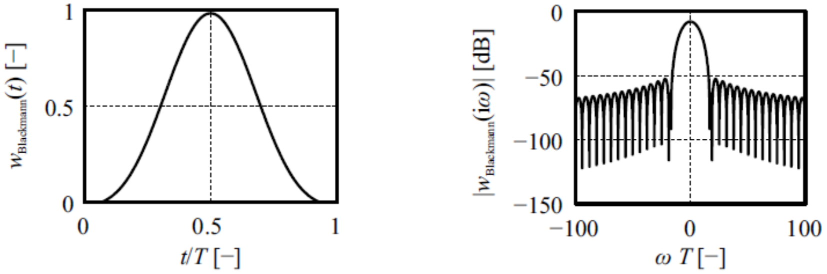
$$w_{\text{Hamming}}(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{if } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Hann Window



$$w_{\text{Hann}}(t) = \begin{cases} 0.5\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right) & \text{if } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Blackmann Window



$$w_{\text{Blackmann}}(t) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0.08\cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right) & \text{if } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

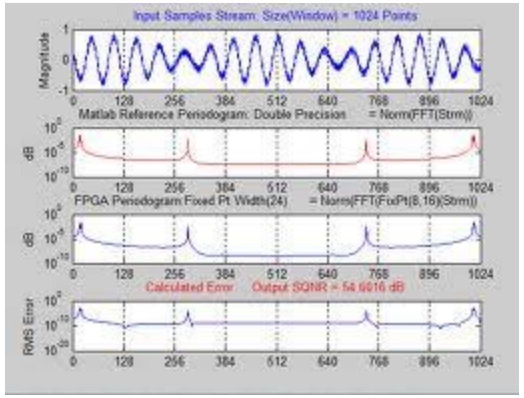
FFT – okienkowanie

Typ sygnału	Okno
Przebiegi nieustalone o czasie trwania krótszym od okna	Prostokątne
Przebiegi nieustalone o czasie trwania dłuższym od okna	Wykładnicze, Hanning
Aplikacje ogólnego zastosowania	Hanning
Śledzenie rozkazów	Prostokątne
Pomiary odpowiedzi częstoliwościowych	Hanning
Separacja tonów o zbliżonej częstotliwości ale różnych amplitudach	Kaiser-Bessel
Separacja tonów o różnej częstotliwości ale zbliżonych amplitudach	Prostokątne
Dokładny pomiar danej amplitudy	Flat Top

Periodogram

- Periodogram - rodzaj dyskretnej transformaty Fouriera. Pojęcia prawdopodobnie po raz pierwszy użył Arthur Schuster (1898), opierając się na pracy *Power Spectral Density estimation* (*ang.* "Estymacja widmowej gęstości mocy") Fernanda Schlindweina.

$$\hat{S}_{xx}(i\omega) = \frac{1}{N}|x(i\omega)|^2 = \frac{1}{N}x(i\omega)x^*(i\omega) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\mu=0}^{N-1}x(\nu)x(\mu)e^{-i\omega(\nu+\mu)T_0}$$



- Narzędzie do wyznaczania spektrum sygnału

$$E\{\hat{S}_{xx}(i\omega)\} = \sum_{\nu=-(N-1)}^{N-1} w_{\mathrm{Bartlett}}(\nu)R_{xx}(\nu)e^{-i\omega\nu T_0}$$

- Wartość oczekiwana jest dana jako rzeczywista gęstość widmowa spleciona z transformatą widmową okna Barletta.
- Jest tylko asymptotycznie nieobciążony a wariancja nie zbiega do zera jak N→ ∞.