MI
Metody Identyfikacji

wykład #2

1. *Wprowadzenie*
   1. *Sygnały stochastyczne*
   2. *Sygnały okresowe*

Sygnały okresowe

- Klasyczny sygnał sinusoidalny

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ with } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

- Funkcja autokorelacji (wystarczy całkować na połowie okresu)
  - ACF sinusa jest funkcją cosinus

$$R_{xx}(\tau) = \frac{2x_0^2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(\omega_0 t + \alpha) \sin(\omega_0 (t + \tau) + \alpha) \mathrm{d}t = \frac{x_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

- I otrzymujemy gęstość widmową

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \frac{x_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{x_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega - \omega_0) \tau \mathrm{d}\tau + \frac{x_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega + \omega_0) \tau \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{x_0^2}{2} \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right) . \end{aligned}$$

Łatwa separacja częstotliwości:
- dwa impulsy Diraca dla -ω_o i ω_o

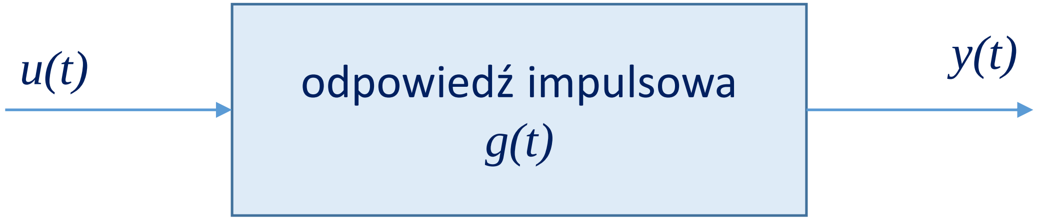
Sygnały okresowe

- Funkcja korelacji wzajemnej dla dwóch sygnałów:
  - $x(t) = x_0 \sin(n\omega_0 t + \alpha_n)$ n = 1,2,3,…
  - $y(t) = y_0 \sin(m\omega_0 t + \alpha_m)$ m = 1,2,3,…

$$R_{xy}(\tau) = \frac{x_0 y_0}{T_0} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t + \alpha_n) \sin(m\omega_0 (t + \tau) + \alpha_m) \mathrm{d}t = 0 \text{ if } n \neq m$$

  - występują tylko wspólne częstotliwości

Procesy liniowe



- Korelacja wzajemna

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = \mathrm{E}\{u(t)y(t+\tau)\}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{uy}}(\tau) &= \mathrm{E}\left\{u(t)\int_0^\infty g(t')u(t+\tau-t')\mathrm{d}t'\right\} \\ &= \int_0^\infty g(t')\mathrm{E}\{u(t)u(t+\tau-t')\}\mathrm{d}t' \\ &= \int_0^\infty g(t')R_{\mathrm{uu}}(\tau-t')\mathrm{d}t' \ . \end{aligned}$$

Procesy liniowe

- Wzajemna gęstość spektralna (otrzymana przekształceniem Fouriera)

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{uy}}(\mathrm{i}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathrm{uy}}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(t')R_{\mathrm{uu}}(\tau-t')\mathrm{d}t'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} g(t')\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathrm{uu}}(\tau-t')\mathrm{d}t'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} g(t')e^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\ S_{uu}(\mathrm{i}\omega)\ .
\end{aligned}
$$

- Czyli otrzymujemy

$$S_{\mathrm{uy}}(\mathrm{i}\omega) = G(\mathrm{i}\omega)S_{\mathrm{uu}}(\mathrm{i}\omega)$$

  - I dalej:

zespolona transmitancja sprzężona

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{yy}}(\mathrm{i}\omega) &= G(\mathrm{i}\omega)S_{\mathrm{yu}}(\mathrm{i}\omega) \\
S_{\mathrm{yu}}(\mathrm{i}\omega) &= S_{\mathrm{uy}}(-\mathrm{i}\omega) \\
S_{\mathrm{yy}}(\mathrm{i}\omega) &= G(\mathrm{i}\omega)G(-\mathrm{i}\omega)S_{\mathrm{uu}}(\mathrm{i}\omega) = |G(\mathrm{i}\omega)|^2 S_{\mathrm{uu}}(\mathrm{i}\omega)
\end{aligned}
$$

Układ liniowy

- Jeśli wejściem jest biały szum S_o, to otrzymujemy na wyjściu szum kolorowy

$$S_{yy}(i\omega) = \left|G(i\omega)\right|^2 S_0$$

Procesy z czasem dyskretnym (stacjonarne)

- Średnia

$$\overline{x} = \mathrm{E}\{x(k)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)$$

- Kwadratowa średnia (wariancja)

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\{(x(k)-\overline{x})^2\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x(k)-\overline{x})^2$$

- Funkcja autokorelacji ACF

$$R_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\{x(k)x(k+\tau)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)x(k+\tau)$$

- Funkcja korelacji wzajemnej CCF

$$R_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\{x(k)y(k+\tau)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k+\tau)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k-\tau)y(k)$$

Procesy z czasem dyskretnym (stacjonarne)

- Funkcja autokowariancji

$$C_{xx}(\tau) = \mathrm{cov}(x,\tau) = \mathrm{E}\{(x(k)-\overline{x})(x(k+\tau)-\overline{x})\}$$
$$= \mathrm{E}\{x(k)x(k+\tau)\} - \overline{x}^2$$

- Funkcja kowariancji wzajemnej

$$C_{xy}(\tau) = \mathrm{cov}(x,y,\tau) = \mathrm{E}\{(x(k)-\overline{x})(y(k+\tau)-\overline{y})\}$$
$$= \mathrm{E}\{x(k)y(k+\tau)\} - \overline{x\,y}$$

Pamiętamy, iż kowariancja (korelacja) nic nie mówi o zależnościach przyczynowo-skutkowych

- Gęstość widmowa

$$S^*_{xx}(\mathrm{i}\omega) = \mathfrak{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\omega T_0}$$

Procesy z czasem dyskretnym (stacjonarne)

- Szum biały
  - Funkcja autokorelacji

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2\, \delta(\tau)$$

  - $\sigma_x{}^2$ - wariancja
  - z deltą Kroneckera

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \text{ for } k = 0 \\ 0 \text{ for } k \neq 0 \end{cases}$$

  - Gęstość widmowa (stała na $0 \leq |\omega| \leq \pi/T_0$)

$$S_{xx}(z) = \sigma_x^2 \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(\tau) z^{-\tau} = \sigma_x^2 = S_{xx0} = \text{const}$$

  - Wariancja jest skończona, zatem w przeciwieństwie do wersji ciągłej jest realizowalna

Proces liniowy z sygnałami dyskretnymi

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{odpowiedź impulsowa}\\ g(k)\end{array}} \longrightarrow y(k)$$

- Funkcje korelacji wzajemnej i autokorelacji są powiązane analogicznie:

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) R_{\mathrm{uu}}(\tau - k)$$

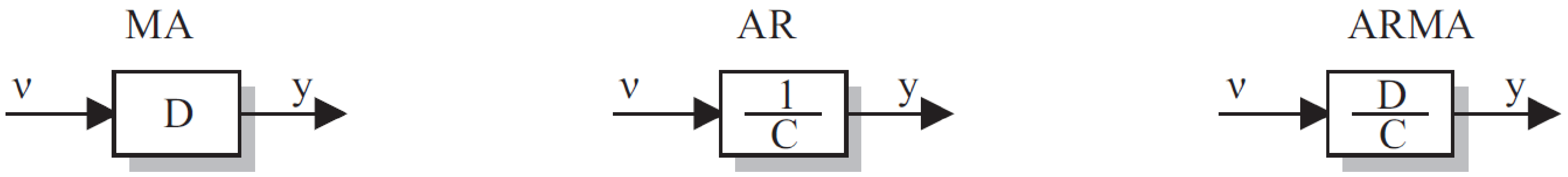
- A dla gęstości widmowej:

$$S_{\mathrm{uy}}^{*}(\mathrm{i}\omega) = G^{*}(\mathrm{i}\omega) S_{\mathrm{uu}}^{*}(\mathrm{i}\omega) \text{ in the interval } |\omega| \leq \frac{\pi}{T_0}$$

$$S_{\mathrm{uy}}(z) = G(z) S_{\mathrm{uu}}(z)$$

Modele stochastyczne

- Modele procesów z sygnałami stochastycznymi



- Opisany stochastycznym równaniem różnicowym

$$y(k)+c_1 y(k-1)+\ldots+c_n y(k-n) = d_0 v(k)+d_1 v(k-1)+\ldots+d_m v(k-m)$$

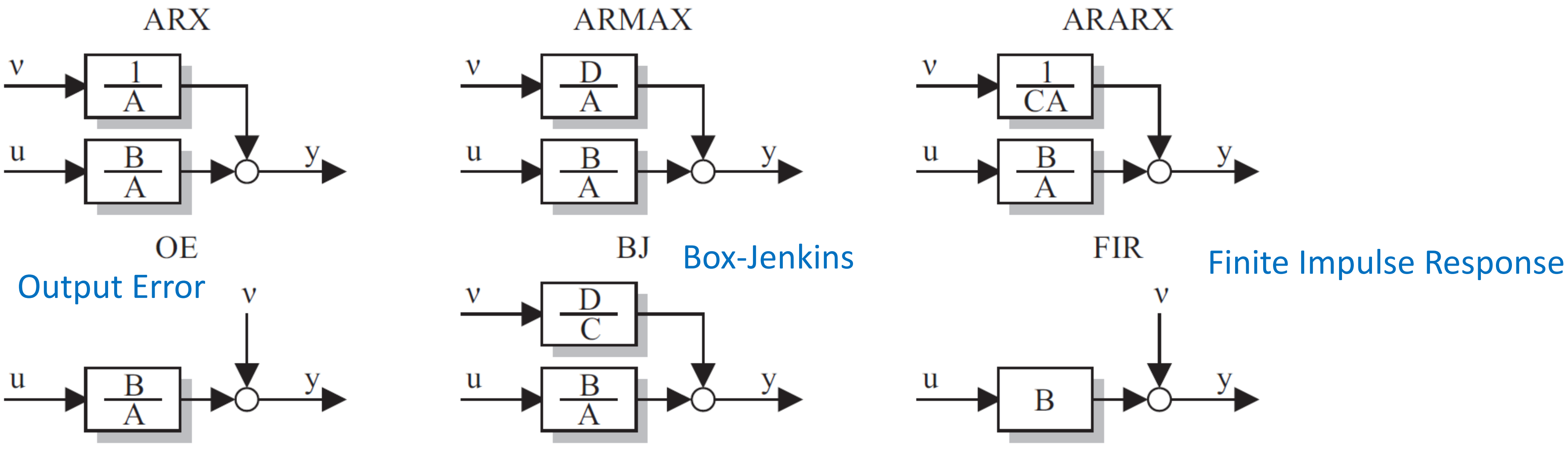
- Z transmitancją filtra (modelu)

$$G_F(z^{-1}) = \frac{y(z)}{v(z)} = \frac{d_0+d_1 z^{-1}+\ldots+d_m z^{-m}}{1+c_1 z^{-1}+\ldots+c_n z^{-n}} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}$$

  - AR: $y(k)+c_1 y(k-1)+\ldots+c_n y(k-n) = d_0 v(k)$
  - MA: $y(k) = d_0 v(k)+d_1 v(k-1)+\ldots+d_m v(k-m)$

Modele stochastyczne

- Modele deterministyczne z zakłóceniami stochastycznymi (auXiliary, eXogenous)



- Przykładowo ARX:

$$y(k) + c_1 y(k-1) + \ldots + c_n y(k-n) = d_0 v(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n)$$