



MI

Metody Identyfikacji

wykład #10b

1. *Particle filter*

Filtr cząstek – Particle Filter

- Rozszerzenie Bayesowskiego estymatora stanu na **ogólny model nieliniowy** oraz **ogólne zakłócenia**.
- Idea:
 - Aproksymacja gęstości prawdopodobieństwa stanu za pomocą dużej ilości próbek, nazywanych cząstkami (*particles*).
 - W regionach o dużych wartościach funkcji gęstości jest dużo owych cząstek.
 - Rekurencyjny algorytm aktualizacji działa następująco:
 - i. Cząstki są propagowane w obiekcie
 - ii. Następnie są ważone w zależności od wiarygodności pomiaru
 - iii. Podczas nowego kroku próbkowania wybieramy nowy zbiór cząstek, też o równych wagach.

Filtr cząstek – Particle Filter


- Rozważamy ogólny model nieliniowy:

$$x(k) = q_{k-1}(x(k-1), v(k-1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$z(k) = h_k(x(k), w(k)),$$

- Ogólnie wyprowadzenie będzie dla systemu bez wejścia $u(k-1)$, jednakże można dyskusję rozszerzyć na system zawierający wejście.





Filtr cząstek – Particle Filter

- Próbkowanie Monte Carlo
- Wykorzystanie dużej liczby próbek w celu aproksymacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa
- Podstawa algorytmu filtru cząstek



Filtr cząstek – Particle Filter

- Rozważmy dyskretna zmienna losową y
 - Skończona przestrzeń wartości $Y = (1, 2, 3, \dots, \bar{Y})$
 - Odpowiadająca funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_y(\cdot)$
- Wybieramy N niezależnych próbek z funkcją gęstości: $\{y^1, y^2, y^3, \dots, y^N\}$
- Dla $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ niechaj

$$p_i^n := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y^n = i \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, i = 1, \dots, \bar{Y}$$

- Niech p_i oznacza średnią z p_i^n na N próbkach

$$p_i := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p_i^n$$

- Z prawa wielkich liczb

$$p_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[p_i^n] = f_y(i)$$

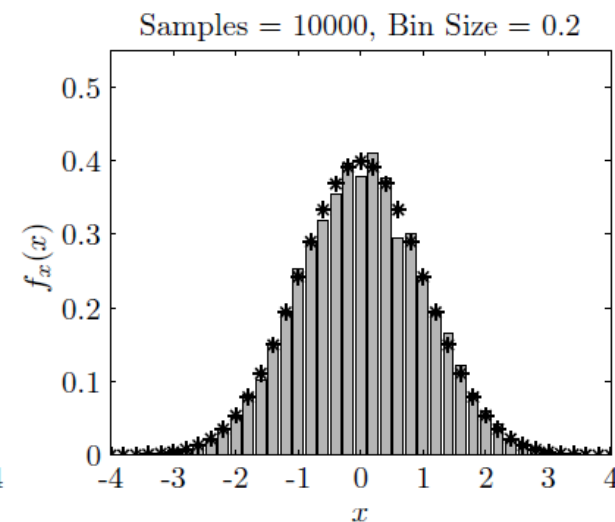
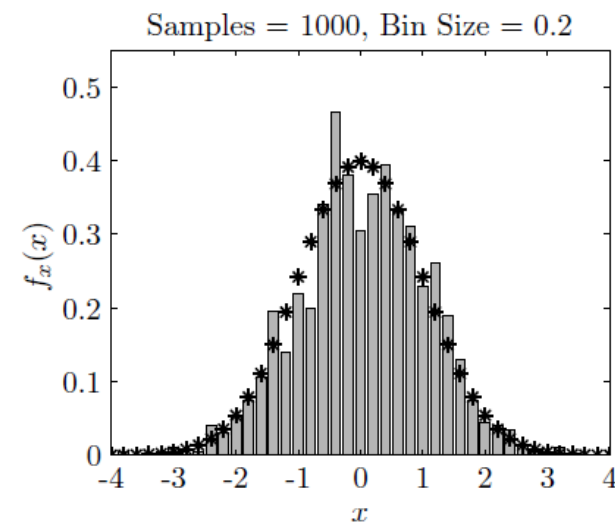
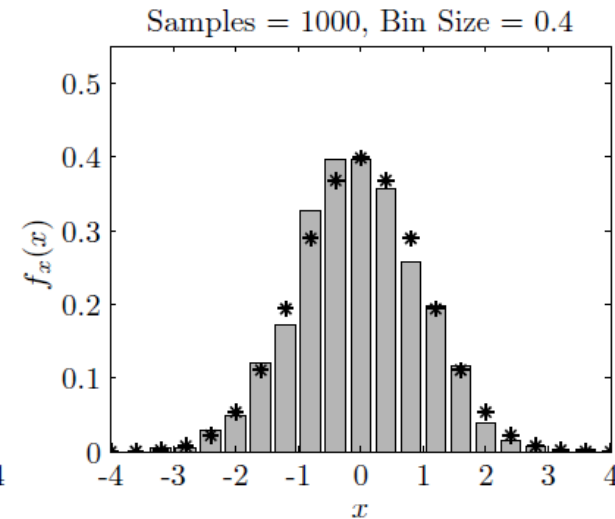
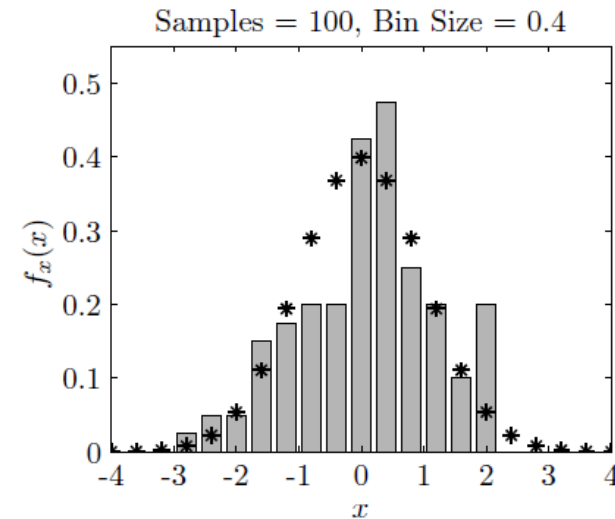
- Wniosek:

funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej może być aproksymowana powtarzanym próbkowaniem z funkcji gęstości prawdopodobieństwa

Filtr cząstek – Particle Filter

przykład

- Aproxymujemy rozkład normalny o zerowej średniej oraz wariancji powtarzając rysowanie próbek z tej funkcji gęstości.
- Poniższy rysunek pokazuje przykłady dla różnych ilości próbek oraz rozmiarów podziałów na podzbiory (*ang.* bins) Δx .
- Rzeczywisty kształt pokazany jest gwiazdkami, natomiast histogram pokazuje próbkowanie Monte Carlo.



Filtr cząstek – Particle Filter

- Bayesowski estymator stanu (filtr śledzący) wyznacza $f(x(k)|z(1:k))$
- Celem filtru cząstek jest aproksymacja $f(x(k)|z(1:k))$
- Wyznaczamy dodatkowe zmienne jak dla filtru Kalmana: $x_p(k)$, $x_m(k)$ i $z_m(k)$.
- Rozróżniamy zmienną $z(k)$ oraz wartość $\bar{z}(k)$ jaką ona przyjmuje (aktualny pomiar w chwili k).

$$\text{Init: } x_m(0) := x(0)$$

$$\text{S1: } x_p(k) := q_{k-1}(x_m(k-1), v(k-1))$$

$$\text{S2: } z_m(k) := h_k(x_p(k), w(k))$$

$x_m(k)$ defined via its PDF

$$f_{x_m(k)}(\xi) := f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k)) \quad \forall \xi$$

$k = 1, 2, \dots$

$$f_{x_p(k)}(\xi) = f_{x(k)|z(1:k-1)}(\xi|\bar{z}(1:k-1))$$

$$f_{x_m(k)}(\xi) = f_{x(k)|z(1:k)}(\xi|\bar{z}(1:k)) .$$

Filtr cząstek – Particle Filter

predykcja *a priori*

- Zadanie:
mając funkcję gęstości $f_{x_m(k-1)}(\cdot)$ zmiennej $x_m(k-1)$ budujemy funkcje gęstości $f_{x_p(k)}(\cdot)$ zmiennej $x_p(k)$. Obie będziemy aproksymować metodą próbkowania Monte Carlo.

- Niech:

$$f_{x_m(k-1)}(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(\xi - x_m^n(k-1)) \quad \forall \xi$$

- gdzie $\{x_m^n(k-1)\}$ to jest N próbek aproksymujących funkcje gęstości $x_m(k-1)$. Są to próbki Monte Carlo $f_{x_m(k-1)}(\cdot)$.

$$f_{x_p(k)}(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(\xi - x_p^n(k)) \quad \forall \xi$$

- gdzie $x_p^n(k) := q_{k-1}(x_m^n(k-1), v^n(k-1))$, dla $n=1, 2, \dots, N$ i $v^n(k-1)$ jest próbka $f_{v(k-1)}(\cdot)$.



Filtr cząstek – Particle Filter

predykcja *a priori*

- Metoda jest intuicyjna. Propagujemy N cząstek przez dynamikę procesu. Taka symulacja równoległa.
- Założywszy N wystarczająco „duże” i $\{x_m^n(k-1)\}$ jako „dobrą” reprezentację $f_{x_m(k-1)}(\cdot)$, to wtedy $\{x_p^n(k)\}$ będzie „dobrą” reprezentację $f_{x_p(k)}(\cdot)$.



Filtr cząstek – Particle Filter

aktualizacja *a posteriori*

- Zadanie:
mając funkcję gęstości $f_{x_p(k)}(\cdot)$ zmiennej $x_p(k) \in X$ (z predykcji *a priori* pomiaru $\bar{z}(k)$)
budujemy funkcję gęstości $f_{x_m(k)}(\cdot)$ zmiennej $x_m(k)$. Obie będziemy aproksymować
metodą próbkowania Monte Carlo.
- Z reguły Bayesa mamy:

$$f_{x_m(k)}(\xi) := f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k)) = \frac{f_{z_m(k)|x_p(k)}(\bar{z}(k)|\xi) f_{x_p(k)}(\xi)}{\sum_{\zeta \in \mathcal{X}} f_{z_m(k)|x_p(k)}(\bar{z}(k)|\zeta) f_{x_p(k)}(\zeta)}, \quad \forall \xi.$$

- Aproksymujemy $f_{x_p(k)}(\cdot)$ na podstawie próbkowania Monte Carlo

$$f_{x_p(k)}(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(\xi - x_p^n(k)), \quad \forall \xi$$

Filtr cząstek – Particle Filter

aktualizacja *a posteriori*

- Podstawiając $f_{x_p(k)}(\cdot)$ do wzoru na $f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k))$ otrzymujemy

$$f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k)) \approx \sum_{n=1}^N \beta_n \delta(\xi - x_p^n(k)) = \alpha f_{z_m(k)|x_p(k)}(\bar{z}(k)|\xi) \sum_{n=1}^N \delta(\xi - x_p^n(k))$$

gdzie α jest stałą dla wszystkich ξ .

- Otrzymujemy N równań podstawiając odpowiednio $\xi = x_p^n(k)$ dla $n=1,2,\dots,N$ (pamiętajmy, że $\delta(\cdot)$ wynosi zero, oprócz sytuacji gdy argument jest zerowy)

$$\beta_n = \alpha f_{z_m(k)|x_p(k)}(\bar{z}(k)|x_p^n(k)) \quad n = 1, 2, \dots, N$$

- Ponieważ wymagamy $\sum_{n=1}^N \beta_n = 1$, aby $f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k))$ było ważną funkcją gęstości prawdopodobieństwa, otrzymujemy:

$$\alpha = \left(\sum_{n=1}^N f_{z_m(k)|x_p(k)}(\bar{z}(k)|x_p^n(k)) \right)^{-1}$$

Filtr cząstek – Particle Filter

aktualizacja *a posteriori*

- Intuicyjnie traktujemy każdą cząstkę oddzielnie. Aktualizacja *a posteriori* używa tych samych cząstek co predykcja *a priori*, tyle że skalowanych wiarygodnością pomiaru.
- Podsumowanie: otrzymujemy reprezentację funkcji gęstości $f_{x_m(k)}(\cdot)$

$$f_{x_m(k)}(\xi) = f_{x_p(k)|z_m(k)}(\xi|\bar{z}(k)) \approx \sum_{n=1}^N \beta_n \delta(\xi - x_p^n(k)), \quad \forall \xi$$

- Chociaż to jeszcze nie koniec. Cząstki muszą być identycznie ważone $1/N$.



Filtr cząstek – Particle Filter

aktualizacja *a posteriori*

- Ponowne próbkowanie

- Wybieramy N cząstek, z prawdopodobieństwem wybrania n -tej cząstki β_n . Rysujemy N próbek z funkcji gęstości danej jako $\sum_{n=1}^N \beta_n \delta(\xi - x_p^n(k))$. Stosujemy algorytm:
- Powtórz N razy:
 1. Wybierz losowy numer r równomiernie z przedziału $(0,1)$
 2. Wybierz cząstkę \bar{n} , taką że $\sum_{n=1}^{\bar{n}} \beta_n \geq r$ i $\sum_{n=1}^{\bar{n}-1} \beta_n < r$
- Otrzymujemy N nowych cząstek $x_m^n(k)$, będących podzbiorem poprzednich. Wszystkie mają taką samą wagę.

$$f_{x_m(k)}(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(\xi - x_m^n(k)), \quad \forall \xi$$

- To kończy się praca algorytmu.

Filtr cząstek – Particle Filter

podsumowanie

- **Inicjalizacja:** wybieramy N próbek $\{x_m^n(0)\}$ z $f_{x(0)}(\cdot)$. To są wstępne cząstki.

- **Krok 1:** Predykcja *a priori*

Wyznaczamy cząstki *a priori* $\{x_p^n(k)\}$ na podstawie równania stanu dla znanych cząstek $\{x_m^n(k-1)\}$

$$x_p^n(k) = q_{n-1}(x_m^n(k-1), v^n(k-1)) \text{ dla } n=1,2,\dots,N,$$

co wymaga N próbek szumu z rozkładu $f_{v(k-1)}(\cdot)$

- **Krok 2:** Aktualizacja *a posteriori*

Skalujemy wszystkie próbki przez wiarygodność pomiaru

$$\beta_n = \alpha f_{z(k)|x(k)}(\bar{z}(k)|x_p^n(k)) \text{ dla } n=1,2,\dots,N,$$

Gdzie α jest stała normalizacji, taką że $\sum_{n=1}^N \beta_n = 1$.

Wykonujemy ponowne próbkowanie w celu otrzymania N nowych cząstek *a posteriori* $x_m^n(k)$.

Filtr cząstek – Particle Filter

problemy

- Wszystkie cząstki zbiegają do jednej → co jest błędną reprezentacją funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Wynika ze skończonej ilości posiadanych danych N (założenie było, że $N \rightarrow \infty$).
- Rozwiązanie jest bardzo kosztowne obliczeniowo. W szczególności konieczność posiadania dużej ilości próbek N .
- Przedstawiony algorytm jest w wersji podstawowej. Istnieje wiele jego modyfikacji, w szczególności uwzględniających zastosowanie wydajniejszych metod numerycznych.

