MI
Metody Identyfikacji

wykład #5-b

1. *Metoda korelacyjna*

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Funkcja autokorelacji

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)u(t+\tau)\mathrm{d}t$$

- Funkcja korelacji wzajemnej

$$R_{uy}(\tau) = \mathrm{E}\{u(t)y(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{1}{T}} u(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{1}{T}} u(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t \; .$$

- Obie funkcje są ze sobą powiązane

$$R_{uy}(\tau) = \int_{0}^{\infty} g(t')R_{uu}(\tau - t')\mathrm{d}t'$$

- Ważne nie tylko dla sygnałów stochastycznych ale i okresowych

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Możliwość wyznaczenia odpowiedzi impulsowej (poprzez znalezienie funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej)
- Zaś na podstawie odpowiedzi impulsowej (transformata Fouriera) można znaleźć charakterystyki częstotliwościowe
- Ze względu na poniższe cechy **można bezpośrednio wyznaczyć moduł i fazę**!
- Dla pobudzenia sinusoidalnego

  $u(t) = u_o \sin \omega_o t$, o częstotliwości $\omega_o = 2\pi/T_p$
- Funkcja autokorelacji przyjmuje postać

$$R_{uu}(\tau) = \frac{2u_0^2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(\omega_0 t + \alpha)\sin\bigl(\omega_0(t+\tau)+\alpha\bigr)\mathrm{d}t = \frac{u_0^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Funkcja korelacji wzajemnej sygnału testowego i odpowiedzi na sygnał testowy

$$y(t) = u_0|G(\mathrm{i}\omega_0)|\sin\left(\omega_0 t - \varphi(\omega_0)\right)$$

- prowadzi do postaci

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = |G(\mathrm{i}\omega_0)|\frac{2u_0^2}{T_\mathrm{P}}\int_0^{\frac{T_\mathrm{P}}{2}} \sin\omega_0(t-\tau)\sin\left(\omega_0 t - \varphi(\omega_0)\right)\mathrm{d}t$$
$$= |G(\mathrm{i}\omega_0)|\frac{u_0^2}{2}\cos\left(\omega_0\tau - \varphi(\omega_0)\right) .$$

- Ze względu na okresowość całkowanie można ograniczyć do połowy okresu.
- Ostatecznie otrzymujemy:

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = |G(\mathrm{i}\omega_0)|R_{\mathrm{uu}}\left(\tau - \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)$$

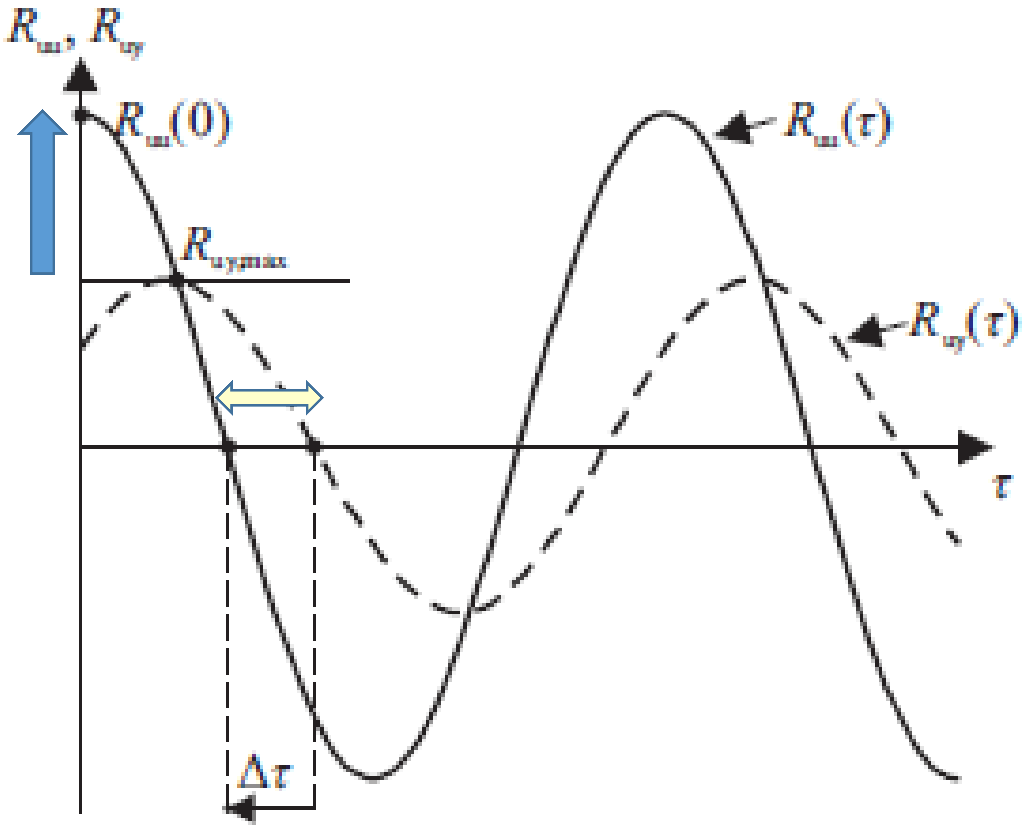
Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Rysując obie korelacje w funkcji czasu otrzymujemy:
  - Moduł charakterystyki to stosunek korelacji wzajemnej w punkcie τ do funkcji autokorelacji w momencie $\tau - \varphi(\omega_o)/\omega_o$

$$|G(i\omega_0)| = \frac{R_{uy}(\tau)}{R_{uu}\left(\tau - \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)} = \frac{R_{uy,\max}}{R_{uu}(0)} = \frac{R_{uy}\left(\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)}{R_{uu}(0)}$$

  - A faza jest określana z opóźnienia $\Delta\tau$

$$\varphi(\omega_o) = - \omega_o\Delta\tau$$



Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Metoda nie jest ograniczona dla sygnałów sinusoidalnych
- Mogą być sygnały o wielu harmonicznych dopóki korelacje są sinusoidalne
- W obecności zakłóceń należy rozpatrywać dłuższe przebiegi – wiele okresów
  - Błąd zanika jeśli zakłócenie stochastyczne nie jest skorelowane z wejściem
  - Dotyczy to również przebiegów okresowych, tyle że muszą mieć częstotliwość różną od ω_o

Przykład oscylatora trzech mas

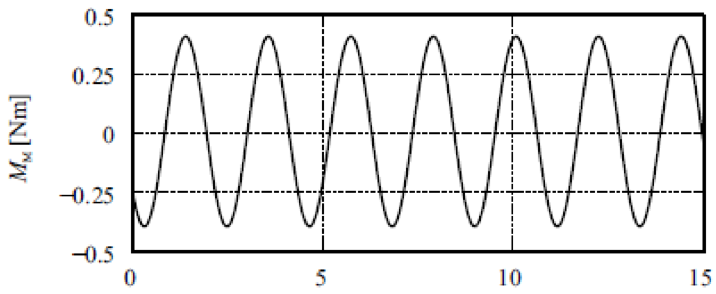
- Otrzymujemy moduł

$$|G(\mathrm{i}\omega_0)|_{\omega=2.8947\,\mathrm{rad/s}} = \frac{R_{uy,\max}}{R_{uu}(0)} = \frac{1.99\,\mathrm{Nm}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{0.081\,\mathrm{Nm}^2} = 24.49\,\frac{\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{Nm}}$$

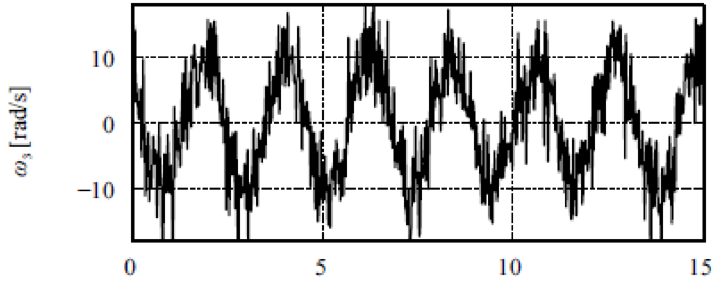
- oraz fazę

$$\varphi(\mathrm{i}\omega)|_{\omega=2.8947\,\mathrm{rad/s}} = -\Delta\tau\omega = (0.542\,\mathrm{s} - 0.053\,\mathrm{s})\,2.8947\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$
$$= -1.41\,\mathrm{rad} = -81.1^\circ\,.$$

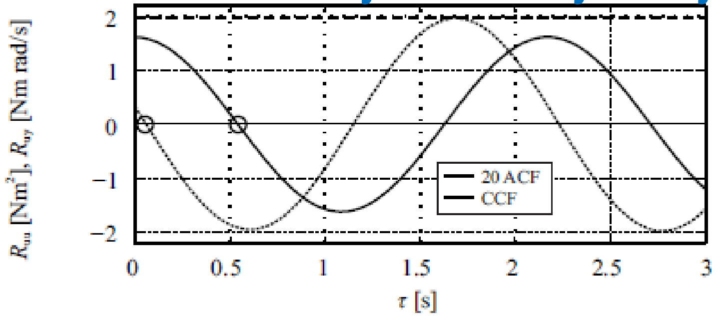
wejście



zaszumione wyjście



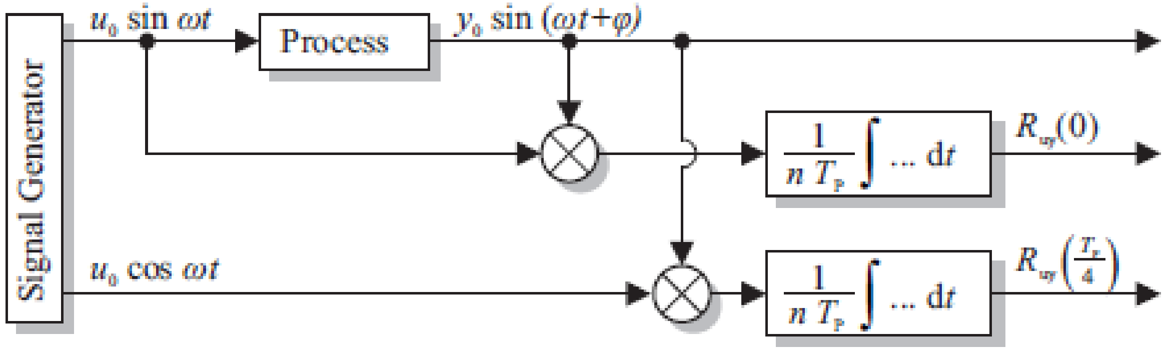
autokorelacja i korelacja wzajemna



Korelacja ortogonalna

- Można wyznaczyć część rzeczywistą i urojona charakterystyki z funkcji korelacji wzajemnej

$$|G(i\omega_0)|\cos(\omega_0\tau-\varphi(\omega_0))=\frac{R_{uy}(\tau)}{\frac{u_0^2}{2}}$$



$\tau = 0$

$\tau = T_p/4 = \pi/2\omega_o$

$$\mathrm{Re}\{G(i\omega_0)\}=|G(i\omega_0)|\cos(\varphi(\omega_0))=\frac{R_{uy}(0)}{\frac{u_0^2}{2}}$$

$$R_{uy}(0)=\frac{u_0^2}{2}\mathrm{Re}\{G(i\omega_0)\}=\frac{u_0}{nT_P}\int_0^{nT_P}y(t)\sin\omega_0 t\,dt$$

$$\mathrm{Im}\{G(i\omega_0)\}=|G(i\omega_0)|\sin(\varphi(\omega_0))=\frac{R_{uy}\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{\frac{u_0^2}{2}}$$

$$R_{uy}\left(\frac{T_P}{4}\right)=\frac{u_0^2}{2}\mathrm{Im}\{G(i\omega_0)\}=-\frac{u_0}{nT_P}\int_0^{nT_P}y(t)\cos\omega_0 t\,dt$$

- Zatem wystarcza wyznaczyć funkcję korelacji wzajemnej jedynie w dwu punktach

Korelacja ortogonalna

- Dzięki ortogonalności funkcji trygonometrycznych otrzymujemy podstawowe zależności:

$$R_{uy}(0) = \frac{1}{nT_P} u_0 y_0 \left(\int_0^{nT_P} \sin^2 \omega_0 t \cos\varphi \, dt + \underbrace{\int_0^{nT_P} \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t \sin\varphi \, dt}_{=0} \right)$$

$$= \frac{y_0}{u_0} \frac{u_0^2}{2} \cos\varphi = |G(i\omega_0)| \cos\varphi \frac{u_0^2}{2} = \mathrm{Re}\{G(i\omega_0)\} \frac{u_0^2}{2} .$$

$$R_{uy}\left(\frac{T_P}{4}\right) = \frac{1}{nT_P} \int_0^{nT_P} u_0 \cos\omega_0 t \, y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) dt$$

$$= \mathrm{Im}\{G(i\omega_0)\} \frac{u_0^2}{2} .$$

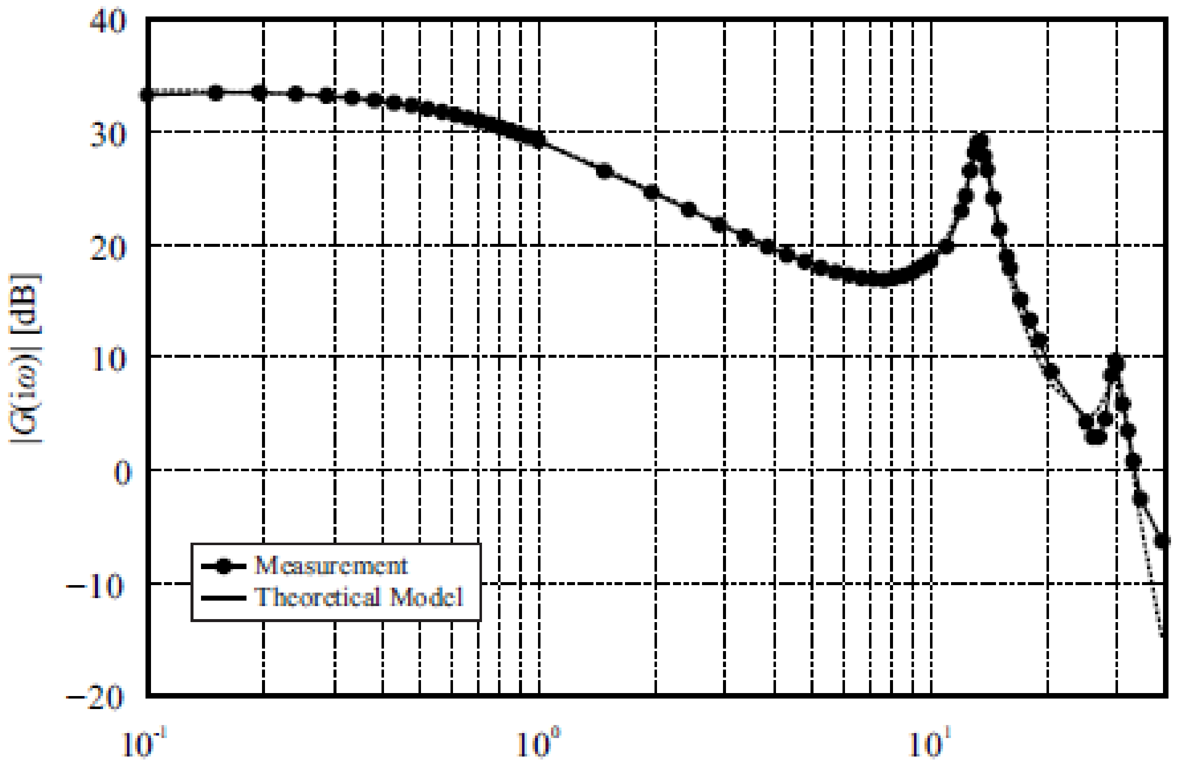
- Amplituda i faza otrzymana jest w postaci

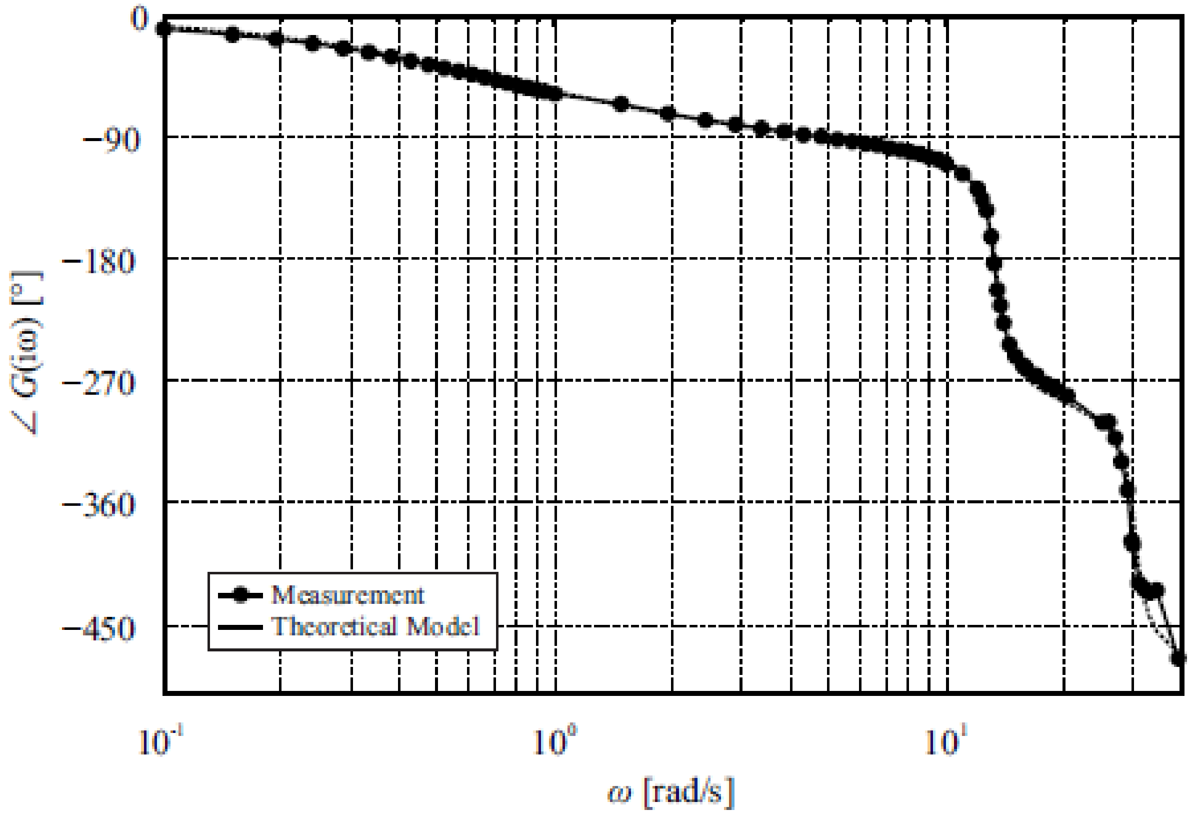
$$|G(i\omega_0)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{G(i\omega_0)\} + \mathrm{Im}^2\{G(i\omega_0)\}}$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{G(i\omega_0)\}}{\mathrm{Re}\{G(i\omega_0)\}} .$$

- Metoda klasyczna – nie jest zakłócana częstotliwościami innymi od ω_o

Przykład: oscylator trzech mas





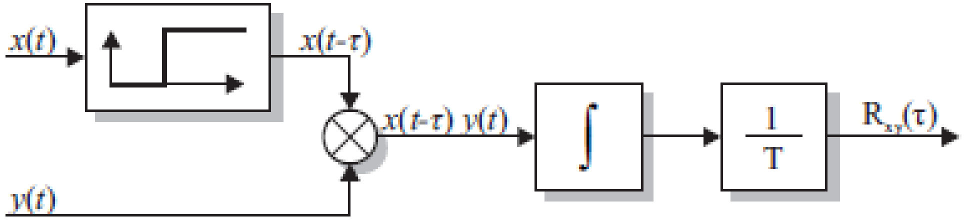
Metoda korelacyjna

- Praktyczne zastosowanie w celu ograniczenia czasu doświadczenia:
  - Niskie i średnie częstotliwości → analiza Fourierowska
  - Wysokie częstotliwości → metoda korelacyjna

- Co dalej?

Pobudzanie sygnałami zawierającymi wiele harmonicznych!!!

Estymacja funkcji korelacji wzajemnej



τ time delay; T measurement time

$$R_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\{x(t)y(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t$$

$$R_{yx}(\tau) = \mathrm{E}\{y(t)x(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t-\tau)x(t)\mathrm{d}t$$

$$R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau)$$

Wpływ długości okresu ***T*** eksperymentu jest istotny!!!

Estymacja funkcji korelacji wzajemnej

- Wpływy zakłóceń zanikają wraz z przyrostem długości okresu T
- Wariancja estymaty korelacji wzajemnej zanika odwrotnie proporcjonalnie do czasu T
- Estymata korelacji wzajemnej jest nieobciążona, jeśli zakłócenie addytywne na wejściu i wyjściu jest odpowiednio niezależne od wejścia i wyjścia
  - Wariancja estymaty jest wtedy równa sumie wariancji obu zakłóceń
  - **Oba zakłócenia muszą być od siebie niezależne**

Estymacja funkcji autokorelacji

- Estymata jest nieobciążona
- Jeśli sygnał jest zakłócony

$$x(t) = x_o(t) + n(t)$$

- otrzymujemy

$$R_{xx}(\tau) = R_{xoxo}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

Estymaty funkcji korelacji wzajemnej i autokorelacji

- Obie funkcje korelacji i korelacji wzajemnej dla obiektów liniowych o odpowiedzi impulsowej $g(t)$ są estymowane w sensie minimalnokwadratowym przy następujących warunkach:
  - Sygnały wejściowy i wyjściowy jest **stacjonarny**
  - Wartość oczekiwana wejścia **wynosi zero**
  - Zakłócenie jest **stacjonarne i nieskorelowane** z wejściem
  - Analogicznie jak niezależnie zakłócone addytywnie jest wejście i wyjście, ale oba zakłócenia muszą być **nieskorelowane wzajemnie**