MI
Metody Identyfikacji

wykład #5

1. *Wyznaczanie odpowiedzi częstotliwościowych dla okresowych sygnałów testowych*
2. *Analiza częstotliwościowa*

Odpowiedzi częstotliwościowe dla okresowych sygnałów testowych

- Możliwość wyznaczenia odpowiedzi dla pewnych dyskretnych punktów częstotliwości w określonym ich zakresie
  - Pobudzenie sygnałem sinusoidalnym o określonej częstotliwości
- Możliwość wykorzystania innych sygnałów:
  - Fala prostokątna
  - Fala trójkątna
  - Fala trapezowa
- Ręcznie lub komputerowo
  - Analiza korelacyjna
  - Analiza Fourierowska

Odpowiedzi częstotliwościowe dla okresowych sygnałów testowych

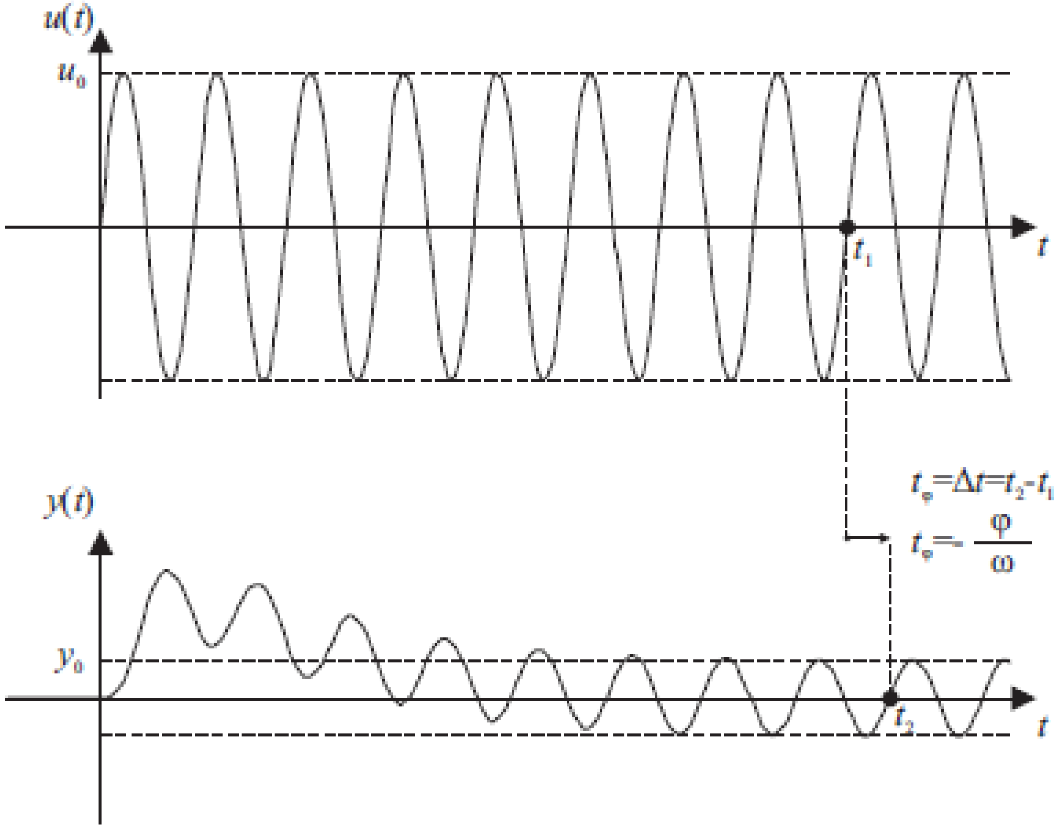
- Funkcja korelacji: możliwość wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych w obecności dużych zakłóceń i szumów
- Uwzględnienie charakterystyki urządzenia wykonawczego – **musi być liniowa**
  - Urządzenie wykonawcze z całkowaniem: użyć pozycjonera (układ regulacji) i sygnał przykładać jako wartość zadaną dla niego.
  - Urządzanie wykonawcze o stałych poziomach – sterowanie trzypoziomowe i fala prostokątna/trapezowa
  - Charakterystyki nieliniowe – sygnały dwupoziomowe – określone punkty pracy

Pobudzenie sinusoidalne

- Klasyczna metoda identyfikacji charakterystyk Bodego i Nyquista

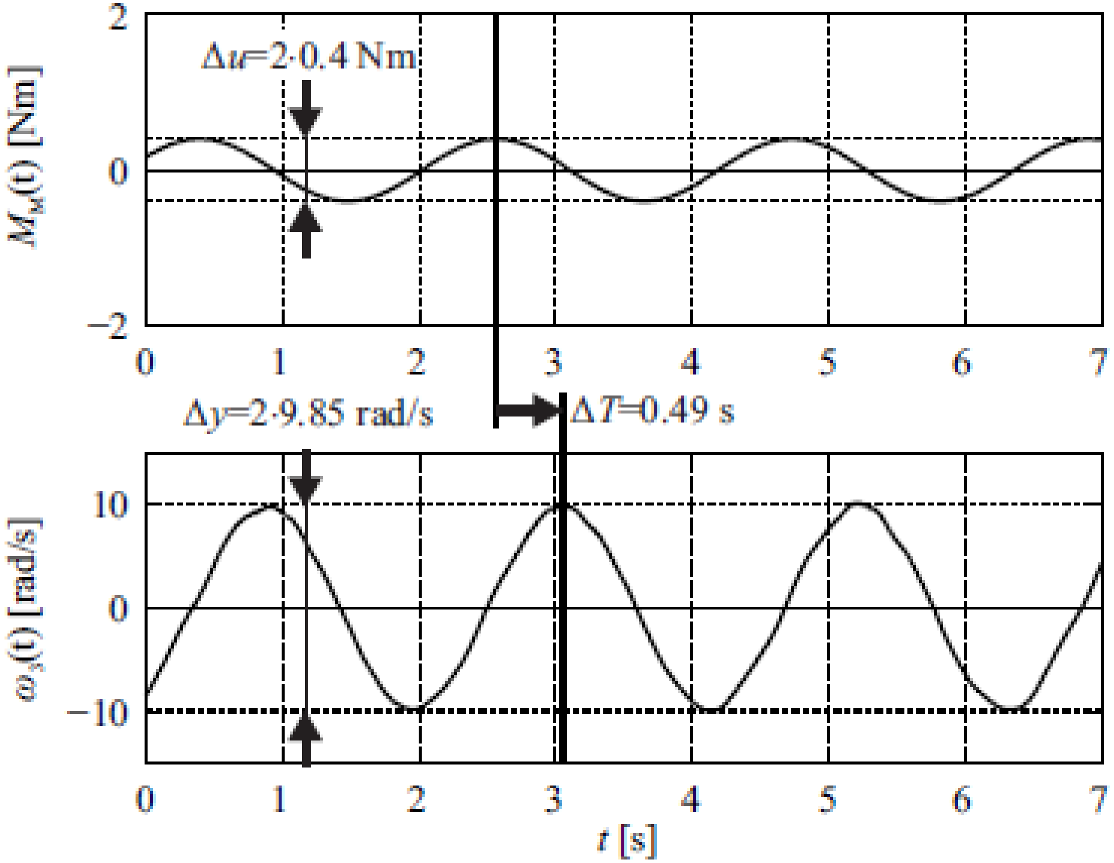
$$|G(i\omega_\nu)| = \frac{y_0(\omega_\nu)}{u_0(\omega_\nu)}$$

$$\angle G(i\omega_\nu) = -t_\varphi \omega_\nu \ ,$$



Pobudzenie sinusoidalne

- Przykład oscylatora trzech mas



Charakterystyki Bodego

- Uogólniona postać transmitancji

$$G(j\omega)=\frac{K\prod_{i-1}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N\prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m)\prod_{k=1}^{R}\left[1+(2\zeta_k/\omega_{n_k})j\omega+(j\omega/\omega_{n_k})^2\right]}$$

- Cztery podstawowe elementy:
  - Stałe wzmocnienie K
  - Biegun lub zero na osi (jω)
  - Zero lub biegun na osi rzeczywistej (jωτ+1)
  - Zero lub biegun sprzężony $[1+(2\zeta/\omega n)j\omega+(j\omega/\omega n)^2]$
- Charakterystyki Bodego dla tychże elementów

Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Fala prostokątna może zostać opisana za pomocą szeregu Fouriera $\omega_o = 2\pi/T$

$$u(t) = \frac{4}{\pi}u_0\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 + \ldots\right)$$

- Zaś odpowiedź ma postać

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{4}{\pi}u_0\Big(&|G(\mathrm{i}\omega_0)|\sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big) \\ &+ \frac{1}{3}|G(\mathrm{i}3\omega_0)|\sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big) \\ &+ \frac{1}{5}|G(\mathrm{i}5\omega_0)|\sin\big(5\omega_0 t + \varphi(5\omega_0)\big) + \ldots\Big) \end{aligned}$$

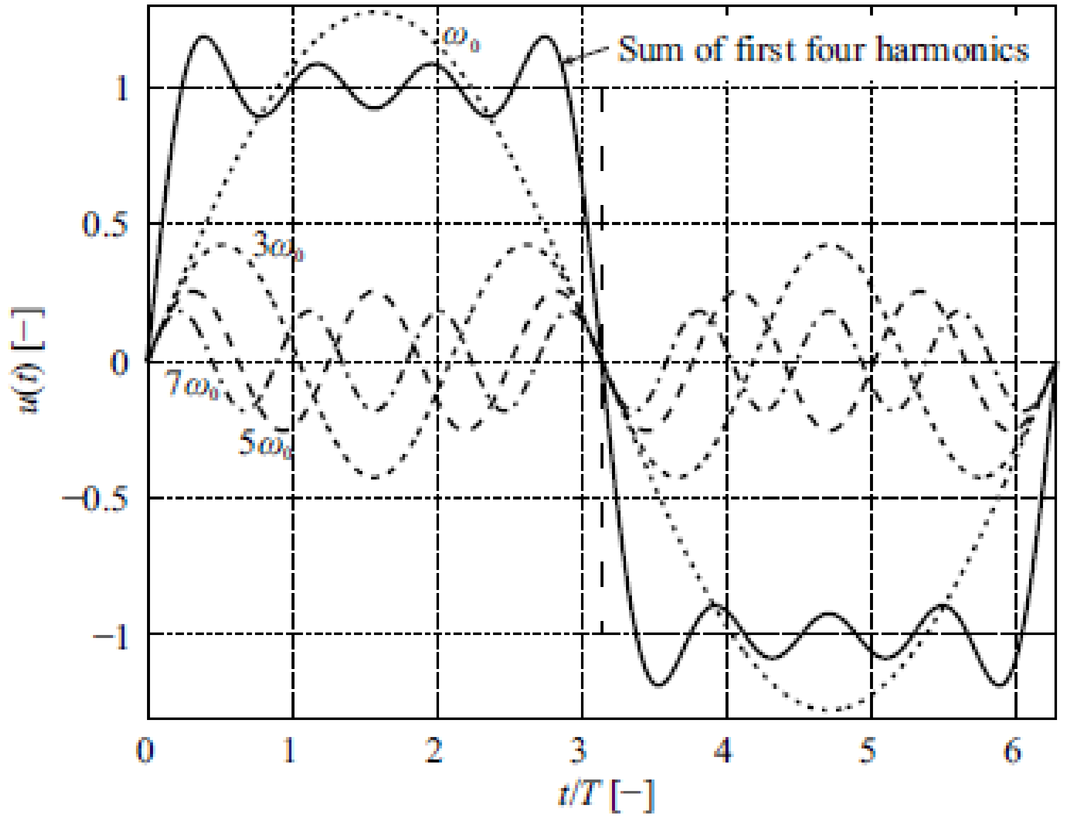
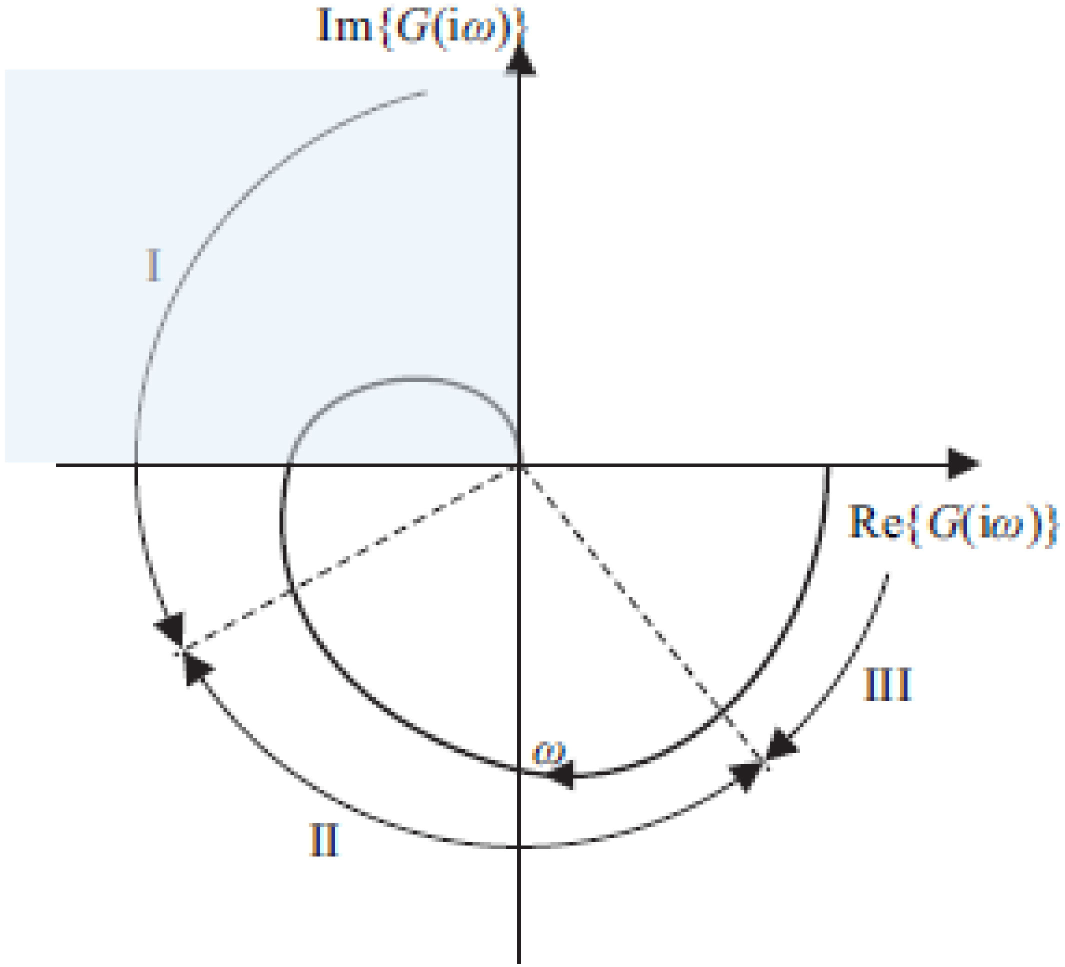


Fig. 5.3. Harmonic decomposition of a rectangular wave

Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Zaczynamy od zakresu wyższych częstotliwości
- Wyższe harmoniczne n≥3 są tłumione tak mocno, że odpowiedź odpowiada prawie że *czystej* sinusoidzie
- Łatwo można odczytać moduł i przesunięcie fazowe odpowiedzi
- Odczytujemy część I charakterystyki Nyquista



Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

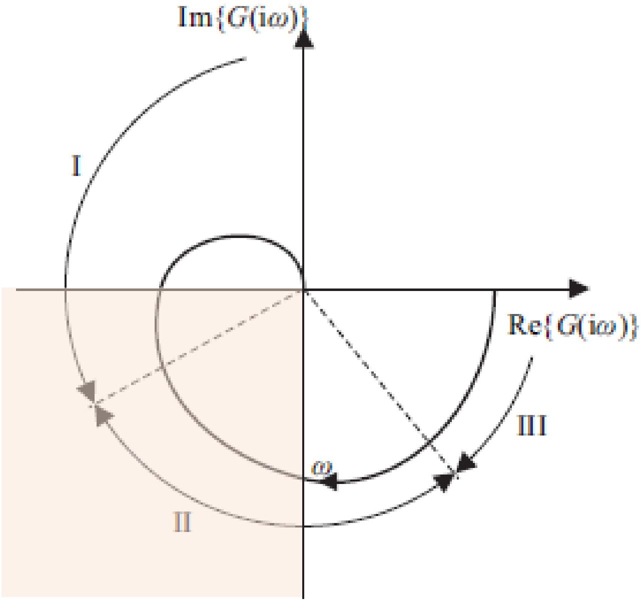
- Dla średnich częstotliwości amplituda drugiej harmonicznej dla $3\omega_o$ osiąga wielkość, która nie może być pominięta

$$y(t) \approx \frac{4}{\pi}u_0\Big(|G(i\omega_0)|\sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big) + \frac{1}{3}|G(i3\omega_0)|\sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big)\Big)$$

- Trzecia harmoniczna $5\omega_o$ może zostać pominięta tak jak i wyższe. Zatem można otrzymać odpowiedź dla danej częstotliwości odejmując odpowiedź dla drugiej składowej harmonicznej

$$y_{3\omega_0}(t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{3}u_0|G(i3\omega_0)|\sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big)$$

od mierzonego wyjścia y(t).

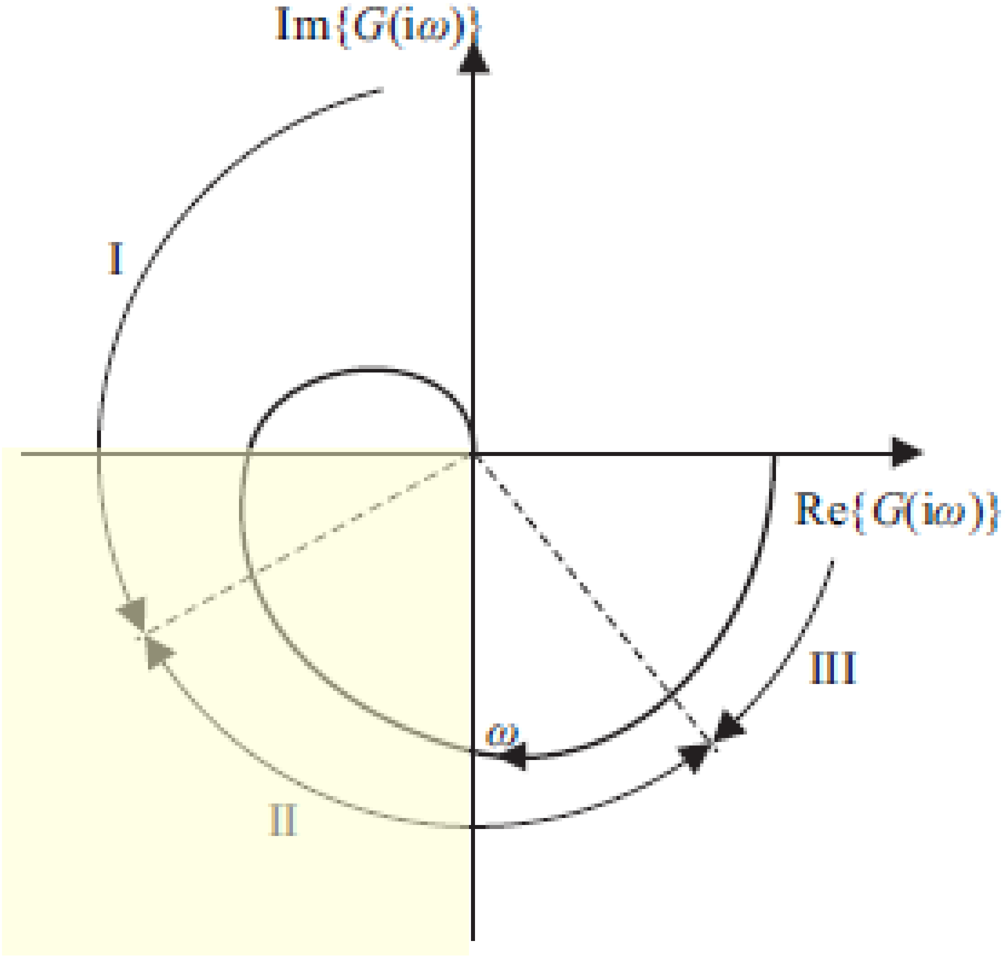


- A odpowiedź $y_{3\omega o}$ jest znana z poprzedniego wywodu.
- Tym samym otrzymujemy strefę II.

Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Dla niskich częstotliwości odpowiedź otrzymujemy odejmując tak wiele harmonicznych jak trzeba.

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi} u_0 |G(i\omega_0)| \sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big) \\
&= y - u_0 \frac{1}{3} |G(i3\omega_0)| \sin\big(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)\big) \\
&- u_0 \frac{1}{5} |G(i5\omega_0)| \sin\big(5\omega_0 t + \varphi(5\omega_0)\big) - \ldots
\end{aligned}
$$



Pobudzenie falą prostokątną (trapezową)

- Metoda głównie stosowana dla wyższych zakresów częstotliwości
- Podsumowanie:
  - Łatwiej zrealizować fale prostokątną niż sinusoidalną
  - Charakterystyka urządzenia wykonawczego nie musi być liniowa
  - Dla danej amplitudy u_o fala prostokątna ma najwyższą amplitudę podstawowej harmonicznej niż dla jakichkolwiek innych pobudzeni okresowych. Zatem najlepszy stosunek do zakłóceń.
  - Ze względu na charakter przekształcenia Fouriera czas przełączenia od $+u_o$ do $-u_o$ powinien być nie większy niż:

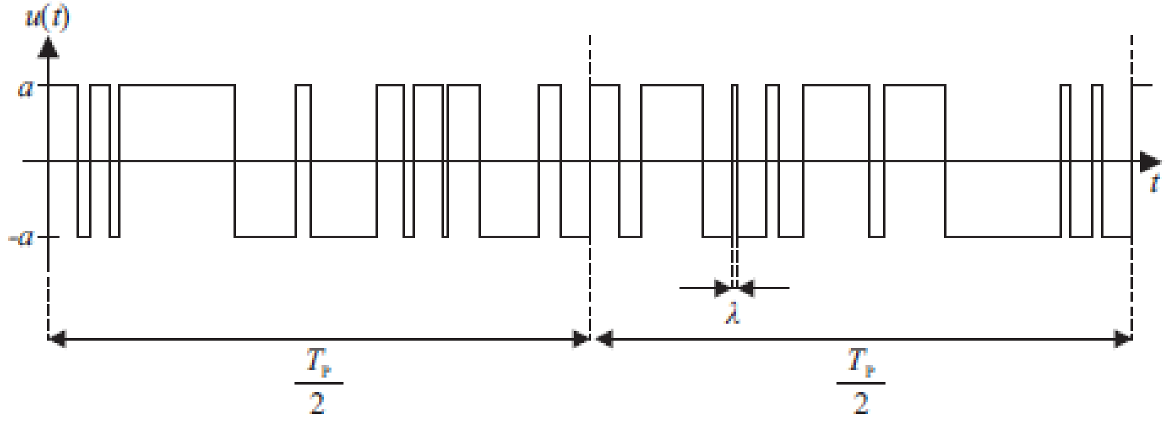
$$T_1^* < \frac{1.1}{\omega_{\max}} \text{ resp. } T_1^* < \frac{0.5}{\omega_{\max}}$$

  - Gdzie ω_{max} to najwyższa częstotliwość w interesującym zakresie

Pobudzenie z wieloma harmonicznymi

- Binarny sygnał o wielu częstotliwościach
- Cel: maksymalizacja amplitud dla poszczególnych składowych częstotliwościowych przy minimalizacji amplitudy właściwego pobudzenia

$$\left.\begin{array}{l} |G(\mathrm{i}\omega_\nu)| = \frac{1}{u_{0\nu}}\sqrt{a_{y\nu}^2 + b_{y\nu}^2} \\ \varphi(\omega_\nu) = \arctan\frac{a_{y\nu}}{b_{y\nu}} \end{array}\right\}$$



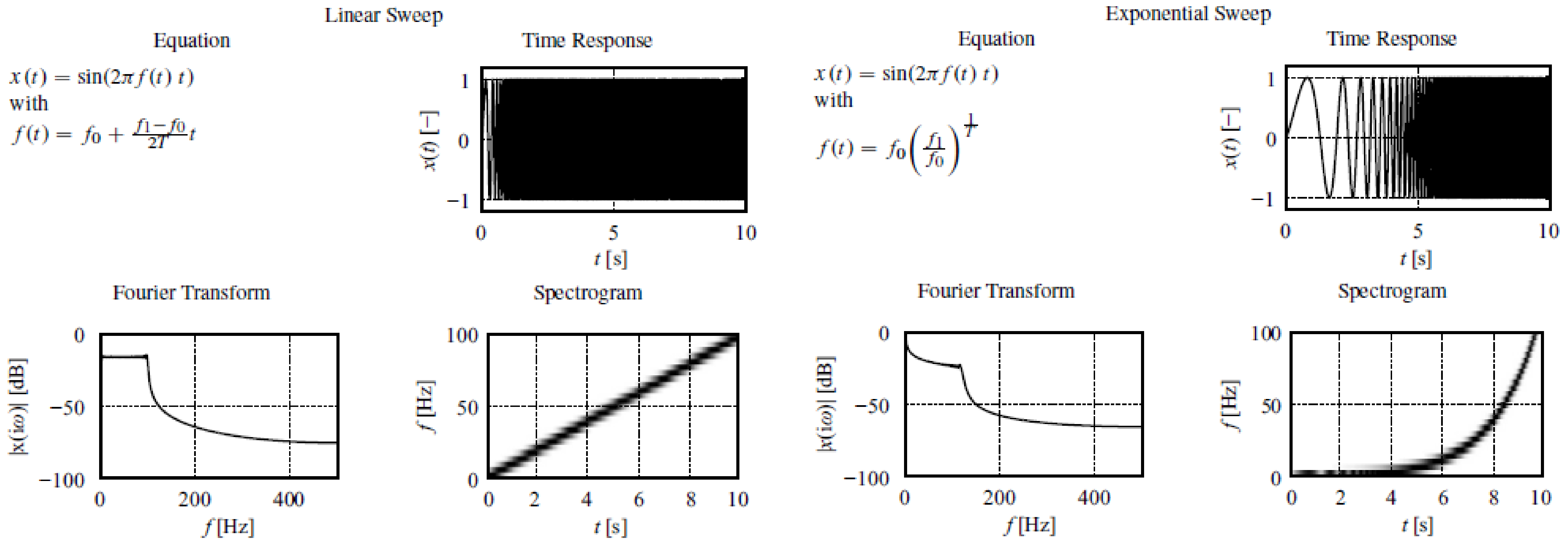
Sześć (6) harmonicznych

$u_o = 0.585a$

$N = 256$

$\omega_o, 2\omega_o, 4\omega_o, 8\omega_o, 16\omega_o, 32\omega_o$

Sygnały z ciągłą zmiana częstotliwości



Stosowane do analizy w teorii obwodów i identyfikacji sieci (ogólnie telekomunikacja)

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Funkcja autokorelacji

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)u(t+\tau)\mathrm{d}t$$

- Funkcja korelacji wzajemnej

$$R_{uy}(\tau) = \mathrm{E}\{u(t)y(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{1}{T}} u(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{1}{T}} u(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t \; .$$

- Obie funkcje są ze sobą powiązane

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t')R_{uu}(\tau - t')\mathrm{d}t'$$

- Ważne nie tylko dla sygnałów stochastycznych ale i okresowych

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Możliwość wyznaczenia odpowiedzi impulsowej (poprzez znalezienie funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej)
- Zaś na podstawie odpowiedzi impulsowej (transformata Fouriera) można znaleźć charakterystyki częstotliwościowe
- Ze względu na poniższe cechy **można bezpośrednio wyznaczyć moduł i fazę**!
- Dla pobudzenia sinusoidalnego

$u(t) = u_o \sin \omega_o t$, o częstotliwości $\omega_o = 2\pi/T_p$

- Funkcja autokorelacji przyjmuje postać

$$R_{uu}(\tau) = \frac{2u_0^2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(\omega_0 t + \alpha) \sin(\omega_0 (t + \tau) + \alpha) dt = \frac{u_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Funkcja korelacji wzajemnej sygnału testowego i odpowiedzi na sygnał testowy

$$y(t) = u_0|G(\mathrm{i}\omega_0)|\sin\big(\omega_0 t - \varphi(\omega_0)\big)$$

- prowadzi do postaci

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = |G(\mathrm{i}\omega_0)|\frac{2u_0^2}{T_{\mathrm{P}}}\int_0^{\frac{T_{\mathrm{P}}}{2}} \sin\omega_0(t-\tau)\sin\big(\omega_0 t - \varphi(\omega_0)\big)\mathrm{d}t$$
$$= |G(\mathrm{i}\omega_0)|\frac{u_0^2}{2}\cos\big(\omega_0\tau - \varphi(\omega_0)\big)\ .$$

- Ze względu na okresowość całkowanie można ograniczyć do połowy okresu.
- Ostatecznie otrzymujemy:

$$R_{\mathrm{uy}}(\tau) = |G(\mathrm{i}\omega_0)|R_{\mathrm{uu}}\left(\tau - \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)$$

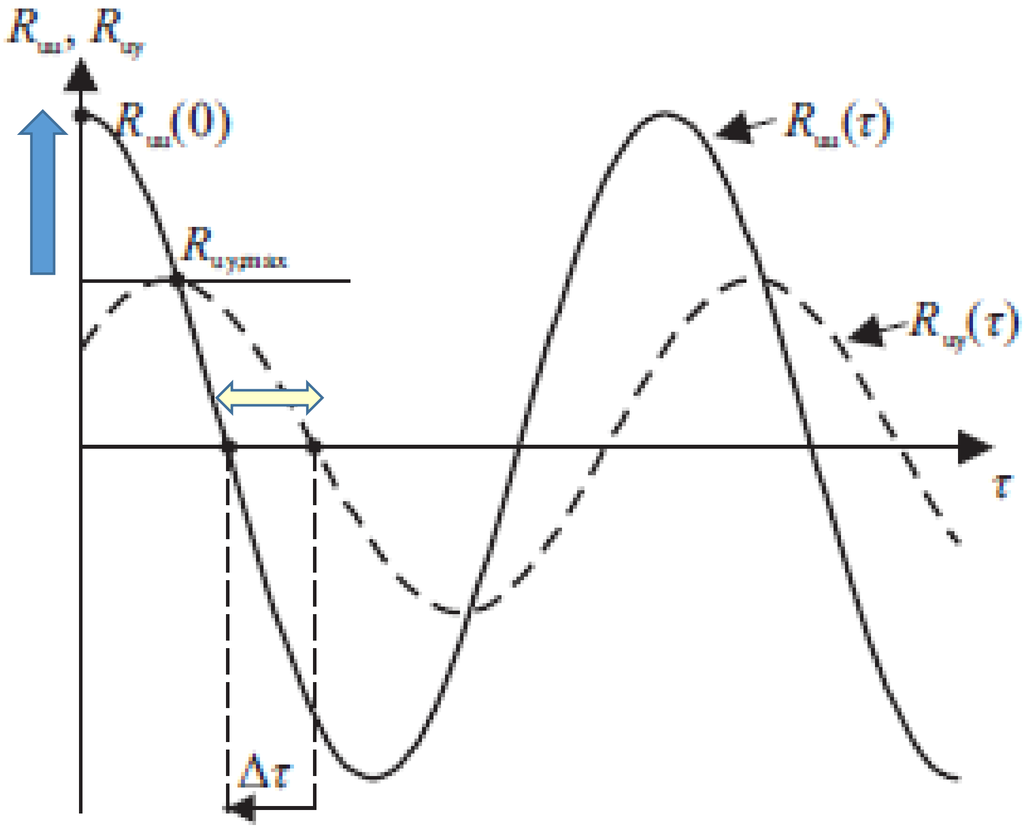
Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Rysując obie korelacje w funkcji czasu otrzymujemy:
  - Moduł charakterystyki to stosunek korelacji wzajemnej w punkcie τ do funkcji autokorelacji w momencie $\tau - \varphi(\omega_o)/\omega_o$

$$|G(i\omega_0)| = \frac{R_{uy}(\tau)}{R_{uu}\left(\tau - \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)} = \frac{R_{uy,max}}{R_{uu}(0)} = \frac{R_{uy}\left(\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}\right)}{R_{uu}(0)}$$

  - A faza jest określana z opóźnienia $\Delta\tau$

$$\varphi(\omega_o) = -\,\omega_o\Delta\tau$$



Metoda korelacyjna dla charakterystyk częstotliwościowych

- Metoda nie jest ograniczona dla sygnałów sinusoidalnych
- Mogą być sygnały o wielu harmonicznych dopóki korelacje są sinusoidalne
- W obecności zakłóceń należy rozpatrywać dłuższe przebiegi – wiele okresów
  - Błąd zanika jeśli zakłócenie stochastyczne nie jest skorelowane z wejściem
  - Dotyczy to również przebiegów okresowych, tyle że muszą mieć częstotliwość różną od ω_o

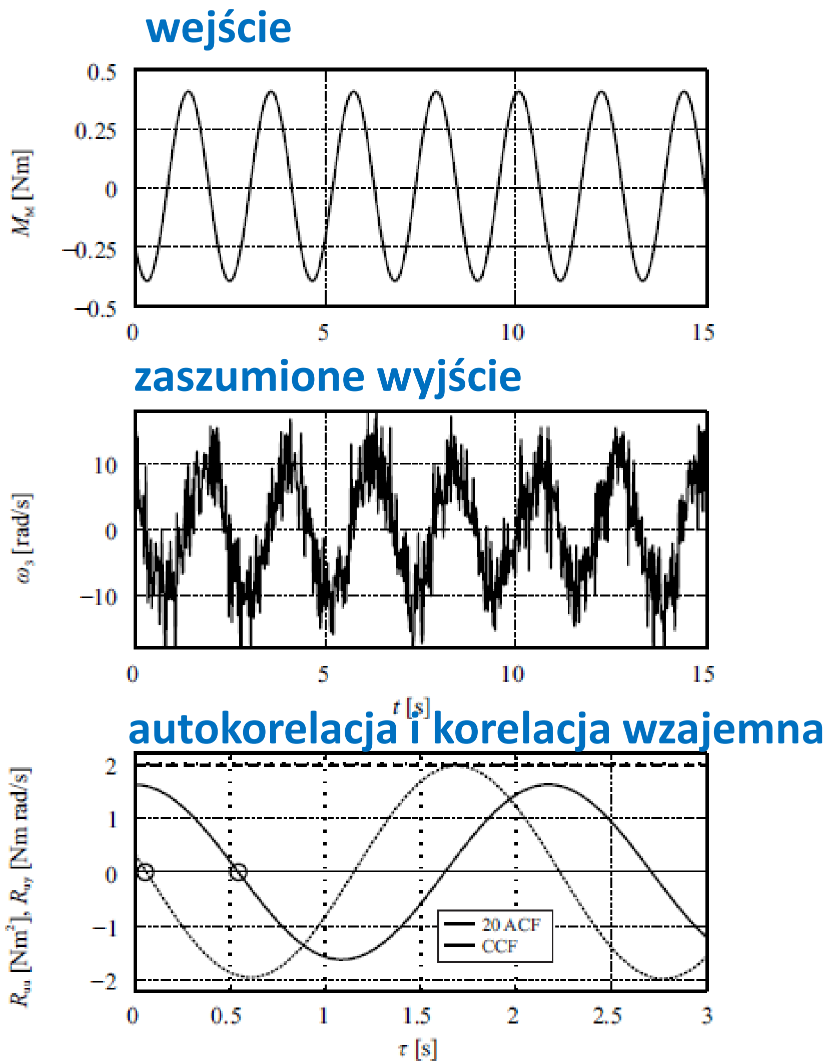
Przykład oscylatora trzech mas

- Otrzymujemy moduł

$$|G(i\omega_0)|_{\omega=2.8947\,\mathrm{rad/s}} = \frac{R_{uy,max}}{R_{uu}(0)} = \frac{1.99\,\mathrm{Nm}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{0.081\,\mathrm{Nm}^2} = 24.49\,\frac{\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{Nm}}$$

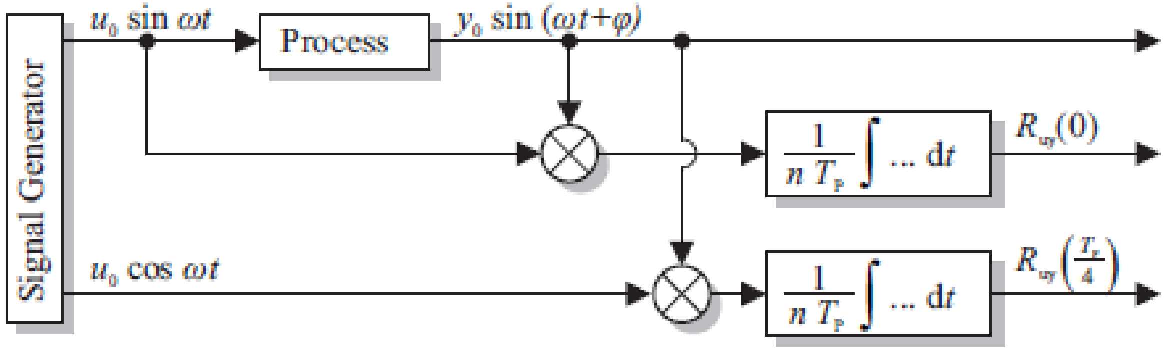
- oraz fazę

$$\varphi(i\omega)|_{\omega=2.8947\,\mathrm{rad/s}} = -\Delta\tau\omega = (0.542\,\mathrm{s} - 0.053\,\mathrm{s})\,2.8947\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = -1.41\,\mathrm{rad} = -81.1^\circ\,.$$



Korelacja ortogonalna

- Można wyznaczyć część rzeczywistą i urojona charakterystyki z funkcji korelacji wzajemnej



$$|G(\mathrm{i}\omega_0)|\cos\big(\omega_0\tau - \varphi(\omega_0)\big) = \frac{R_{uy}(\tau)}{\frac{u_0^2}{2}}$$

$\tau = 0$

$\tau = T_p/4 = \pi/2\omega_o$

$$\mathrm{Re}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} = |G(\mathrm{i}\omega_0)|\cos\big(\varphi(\omega_0)\big) = \frac{R_{uy}(0)}{\frac{u_0^2}{2}}$$

$$R_{uy}(0) = \frac{u_0^2}{2}\mathrm{Re}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} = \frac{u_0}{nT_P}\int_0^{nT_P} y(t)\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Im}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} = |G(\mathrm{i}\omega_0)|\sin\big(\varphi(\omega_0)\big) = \frac{R_{uy}\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{\frac{u_0^2}{2}}$$

$$R_{uy}\left(\frac{T_P}{4}\right) = \frac{u_0^2}{2}\mathrm{Im}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} = -\frac{u_0}{nT_P}\int_0^{nT_P} y(t)\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

- Zatem wystarcza wyznaczyć funkcję korelacji wzajemnej jedynie w dwu punktach

Korelacja ortogonalna

- Dzięki ortogonalności funkcji trygonometrycznych otrzymujemy podstawowe zależności:

$$R_{uy}(0) = \frac{1}{nT_P} u_0 y_0 \left(\int_0^{nT_P} \sin^2 \omega_0 t \cos\varphi \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{nT_P} \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t \sin\varphi \mathrm{d}t}_{=0} \right)$$

$$= \frac{y_0}{u_0} \frac{u_0^2}{2} \cos\varphi = |G(\mathrm{i}\omega_0)| \cos\varphi \frac{u_0^2}{2} = \mathrm{Re}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} \frac{u_0^2}{2} .$$

$$R_{uy}\left(\frac{T_P}{4}\right) = \frac{1}{nT_P} \int_0^{nT_P} u_0 \cos\omega_0 t \, y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{Im}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} \frac{u_0^2}{2} .$$

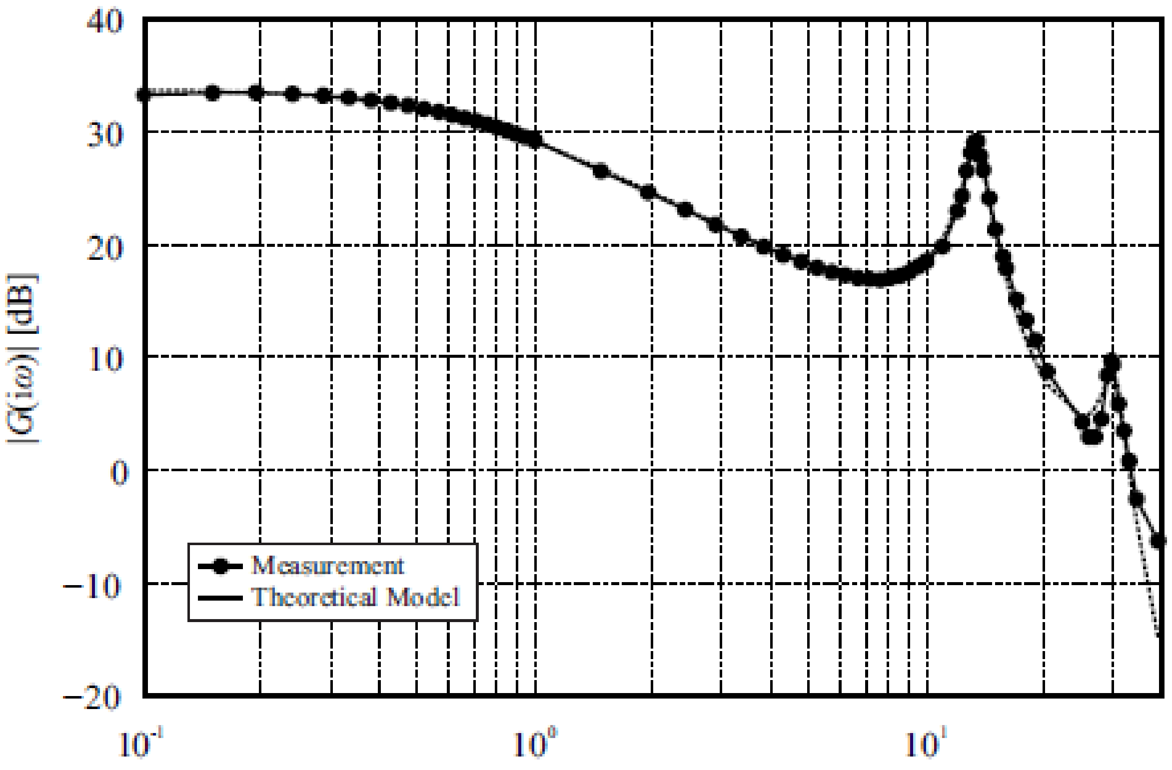
- Amplituda i faza otrzymana jest w postaci

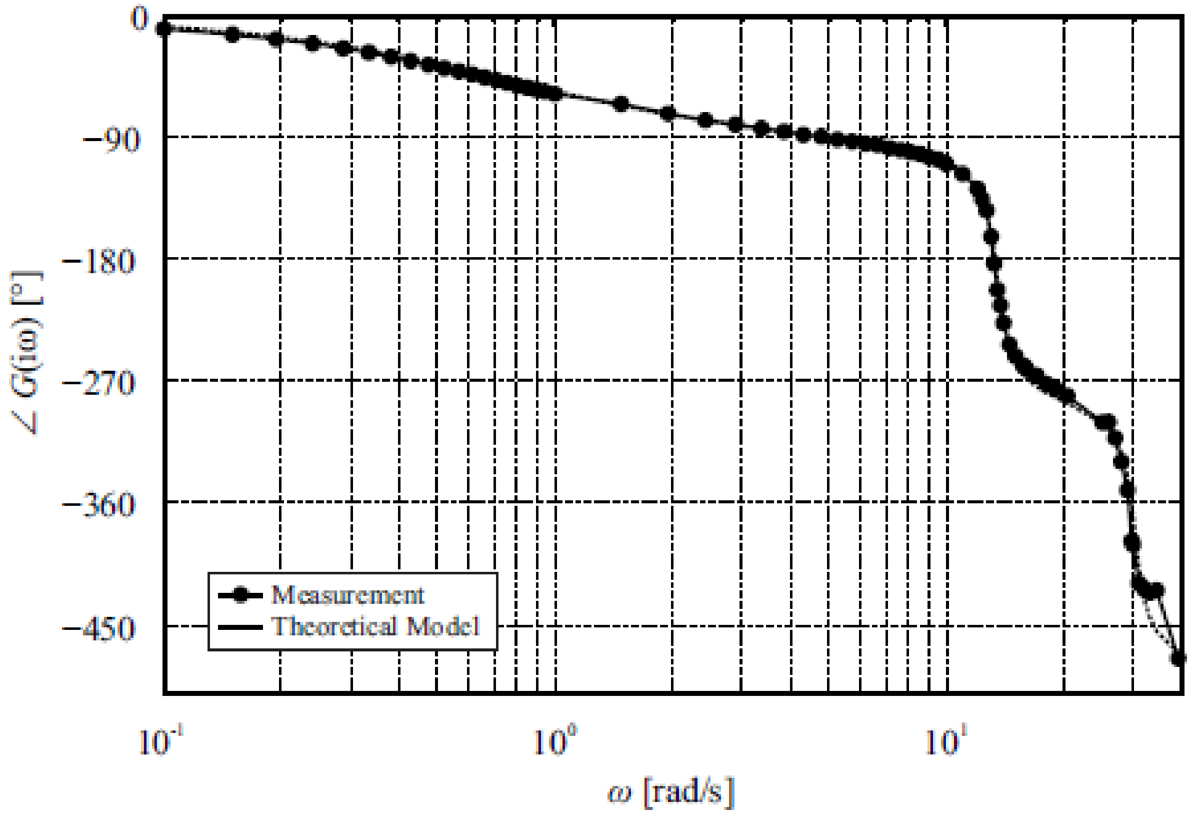
$$|G(\mathrm{i}\omega_0)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{G(\mathrm{i}\omega_0)\} + \mathrm{Im}^2\{G(\mathrm{i}\omega_0)\}}$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\}}{\mathrm{Re}\{G(\mathrm{i}\omega_0)\}} .$$

- Metoda klasyczna – nie jest zakłócana częstotliwościami innymi od ω_o

Przykład: oscylator trzech mas





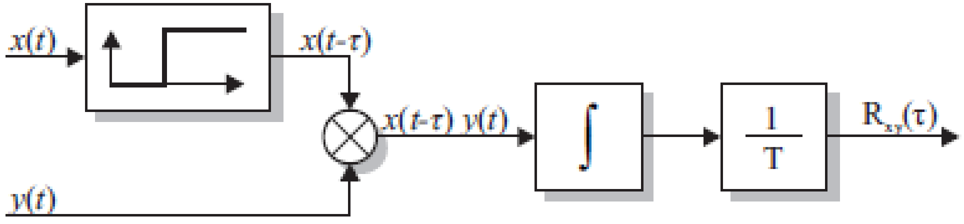
Metoda korelacyjna

- Praktyczne zastosowanie w celu ograniczenia czasu doświadczenia:
  - Niskie i średnie częstotliwości → analiza Fourierowska
  - Wysokie częstotliwości → metoda korelacyjna

- Co dalej?

Pobudzanie sygnałami zawierającymi wiele harmonicznych!!!

Estymacja funkcji korelacji wzajemnej



τ time delay; T measurement time

$$R_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\{x(t)y(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t$$

$$R_{yx}(\tau) = \mathrm{E}\{y(t)x(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t-\tau)x(t)\mathrm{d}t$$

$$R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau)$$

Wpływ długości okresu ***T*** eksperymentu jest istotny!!!

Estymacja funkcji korelacji wzajemnej

- Wpływy zakłóceń zanikają wraz z przyrostem długości okresu T
- Wariancja estymaty korelacji wzajemnej zanika odwrotnie proporcjonalnie do czasu T
- Estymata korelacji wzajemnej jest nieobciążona jeśli zakłócenie addytywne na wejściu i wyjściu jest odpowiednio niezależne od wejścia i wyjścia
  - Wariancja estymaty jest wtedy równa sumie wariancji obu zakłóceń
  - **Oba zakłócenia muszą być od siebie niezależne**

Estymacja funkcji autokorelacji

- Estymata jest nieobciążona
- Jeśli sygnał jest zakłócony

$$x(t) = x_o(t) + n(t)$$

- otrzymujemy

$$R_{xx}(\tau) = R_{xoxo}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

Estymaty funkcji korelacji wzajemnej i autokorelacji

- Obie funkcje korelacji i korelacji wzajemnej dla obiektów liniowych o odpowiedzi impulsowej g(t) są estymowane w sensie minimalnokwadratowym przy następujących warunkach:
  - Sygnały wejściowy i wyjściowy jest **stacjonarny**
  - Wartość oczekiwana wejścia **wynosi zero**
  - Zakłócenie jest **stacjonarne i nieskorelowane** z wejściem
  - Analogicznie jak niezależnie zakłócone addytywnie jest wejście i wyjście, ale oba zakłócenia muszą być **nieskorelowane wzajemnie**