MI
Metody Identyfikacji

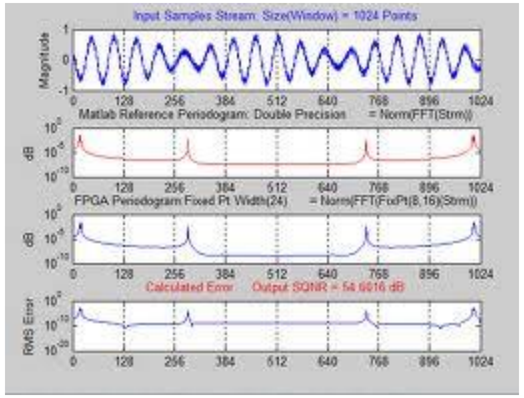
wykład #4

1. *Wyznaczanie odpowiedzi częstotliwościowych dla sygnałów nieokresowych*

Periodogram

- Periodogram - rodzaj dyskretnej transformaty Fouriera. Pojęcia prawdopodobnie po raz pierwszy użył Arthur Schuster (1898), opierając się na pracy *Power Spectral Density estimation* (*ang.* "Estymacja widmowej gęstości mocy") Fernanda Schlindweina.

$$\hat{S}_{\mathrm{xx}}(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{N}\left|x(\mathrm{i}\omega)\right|^2 = \frac{1}{N}x(\mathrm{i}\omega)x^*(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\mu=0}^{N-1} x(\nu)x(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\nu+\mu)T_0}$$



- Narzędzie do wyznaczania spektrum sygnału

$$\mathrm{E}\{\hat{S}_{\mathrm{xx}}(\mathrm{i}\omega)\} = \sum_{\nu=-(N-1)}^{N-1} w_{\mathrm{Bartlett}}(\nu)R_{\mathrm{xx}}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\nu T_0}$$

- Wartość oczekiwana jest dana jako rzeczywista gęstość widmowa spleciona z transformatą widmową okna Bartletta.
- Jest tylko asymptotycznie nieobciążony a wariancja nie zbiega do zera jak N→ ∞.

Analiza spektralna

- Nieparametryczna odpowiedź częstotliwościowa może być wyznaczona dla sygnałów nieokresowych z:

$$G(\mathrm{i}\omega) = \frac{y(\mathrm{i}\omega)}{u(\mathrm{i}\omega)} = \frac{\mathfrak{F}\{y(t)\}}{\mathfrak{F}\{u(t)\}} = \frac{\int_0^\infty y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t}$$

- gdzie całkę można rozbić na część rzeczywistą i urojoną:

$$y(\mathrm{i}\omega) = \lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T y(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^T y(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)$$

- tym samym musimy wyznaczyć transformatę Fouriera dla wejścia i wyjścia

Analiza spektralna

- Jeśli mamy do czynienia z nieokresowymi sygnałami to wtedy używamy transformaty Fouriera. I wtedy możemy użyć przekształcenia Laplace'a $s \rightarrow i\omega$:

$$G(\mathrm{i}\omega) = \lim_{s\to\mathrm{i}\omega} \frac{y(s)}{u(s)} = \lim_{s\to\mathrm{i}\omega} \frac{\int_0^\infty y(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t} = \frac{y(\mathrm{i}\omega)}{u(\mathrm{i}\omega)}$$

- Analogicznie otrzymujemy cześć rzeczywistą i urojoną – i tak samo dla $u(i\omega)$:

$$y(\mathrm{i}\omega) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ T\to\infty}} \left(\int_0^T y(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega t\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^T y(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t\;\mathrm{d}t \right)$$

- W praktyce najczęściej operujemy odchyleniami od stanu ustalonego:

$$y(t) = Y(t) - Y_{00}$$

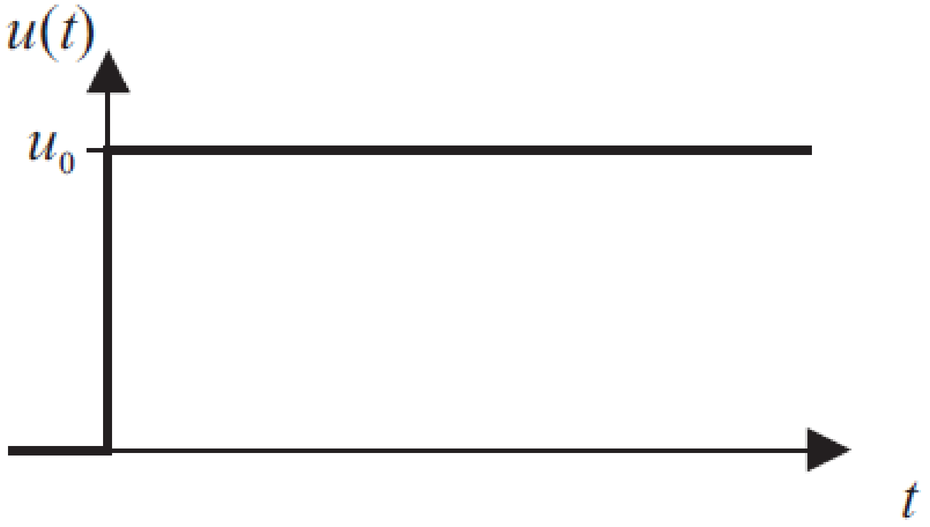
$$u(t) = U(t) - U_{00}$$

Analiza spektralna

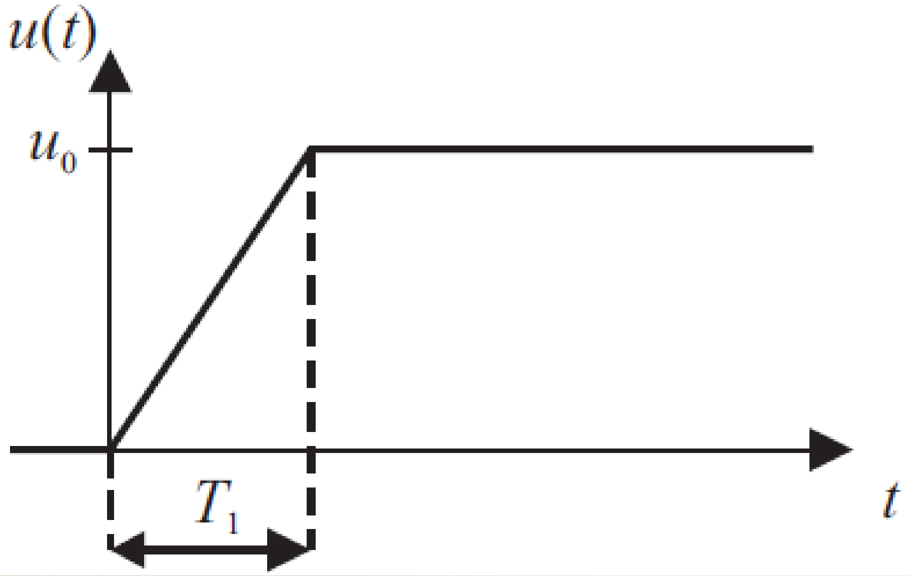
- W praktyce stosujemy predefiniowane sygnały wejściowe, dla których znamy transformaty Fouriera
- Sygnał ten dobieramy w zależności od możliwości obiektu
- Wyznaczamy wtedy transformatę Fouriera jedynie dla wyjścia $y(t)$
- Najprostsze podejście – otrzymujemy pierwszy wgląd w model

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Skok jednostkowy
  - Zawsze dodatni
  - Niedostosowany do obiektów z całkowaniem
  - Nie można bezpośrednio wyznaczyć transformaty Fouriera



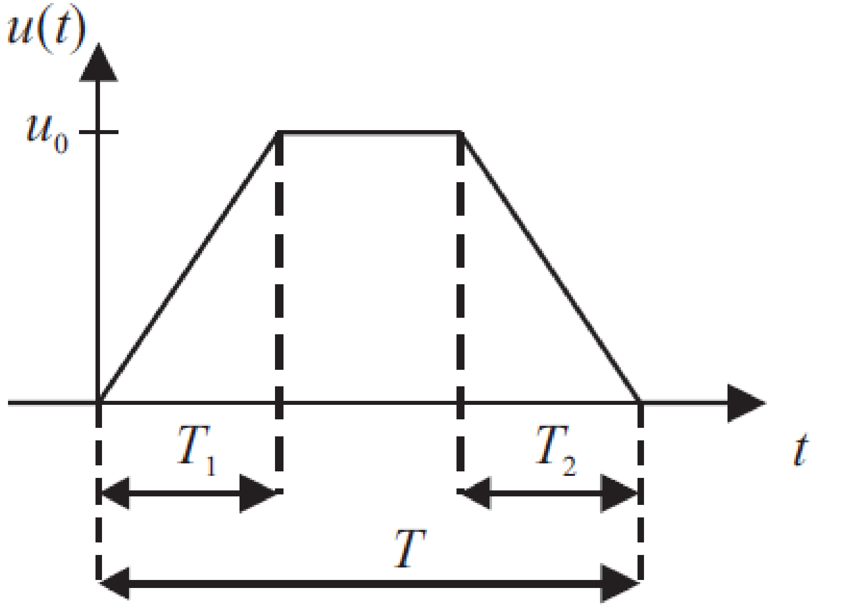
- „*Rampa*”
  - Zawsze dodatni
  - Niedostosowany do obiektów z całkowaniem
  - Nie można bezpośrednio wyznaczyć transformaty Fouriera



Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

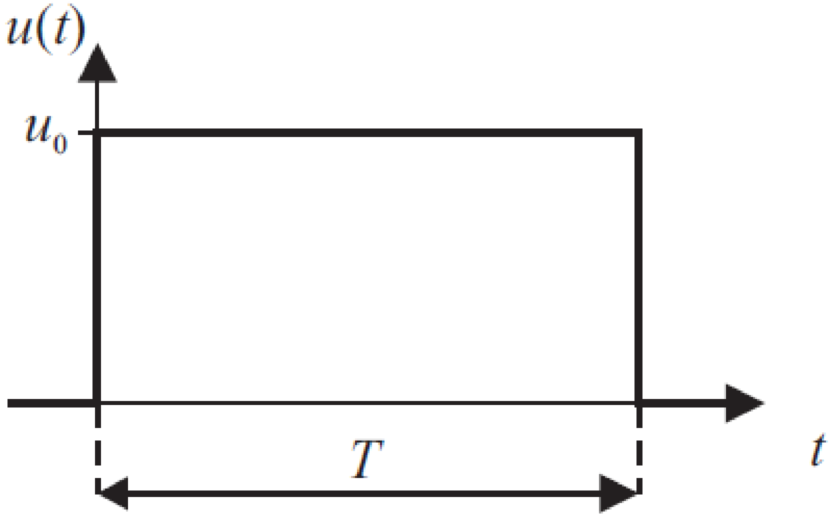
- Impuls trapezowy
  - Można wyznaczyć transformatę Fouriera, gdy $T_1 = T_2$

$$u_{\mathrm{tr}}(\mathrm{i}\omega) = u_0(T - T_1)\left(\frac{\sin\frac{\omega T_1}{2}}{\frac{\omega T_1}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\omega(T-T_1)}{2}}{\frac{\omega(T-T_1)}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}}$$



- Podwójny impuls prostokątny (otrzymujemy przyjmując, że $T_1 \rightarrow 0$)

$$u_{\mathrm{sq}}(\mathrm{i}\omega) = u_0 T\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}}$$



- Zalecenie (Pintelon i Schoukens) dla T: okresu T

$$T = \frac{1}{2.5 f_{\max}}$$

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Impuls trójkątny
  - $T_1 = T_2 = T/2$

$$u_{\mathrm{tri}}(\mathrm{i}\omega) = u_0 \frac{T}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}}$$

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Reprezentacja bezwymiarowa:
  - $u^*(t) = u(t) / u_o$
  - $t^* = t / T$
  - $\omega^* = (\omega T) / 2\pi$
- Transformata Fouriera jest znormalizowana względem największej wartości osiąganej przez impuls prostokątny

$$u_{\mathrm{sq}}(\mathrm{i}\omega)|_{\omega=0} = \int_0^T u_0 \mathrm{d}t = u_0 T$$

- Przy takim wyborze sygnały testowe o zbliżonym kształcie, ale różnych amplitudach o długościach impulsu mają identyczny moduł $|u^*(i\ \omega^*)|$ i fazę $< u^*(i\ \omega^*)$

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Tym samym tylko kształt impulsu określa transformatę Fouriera

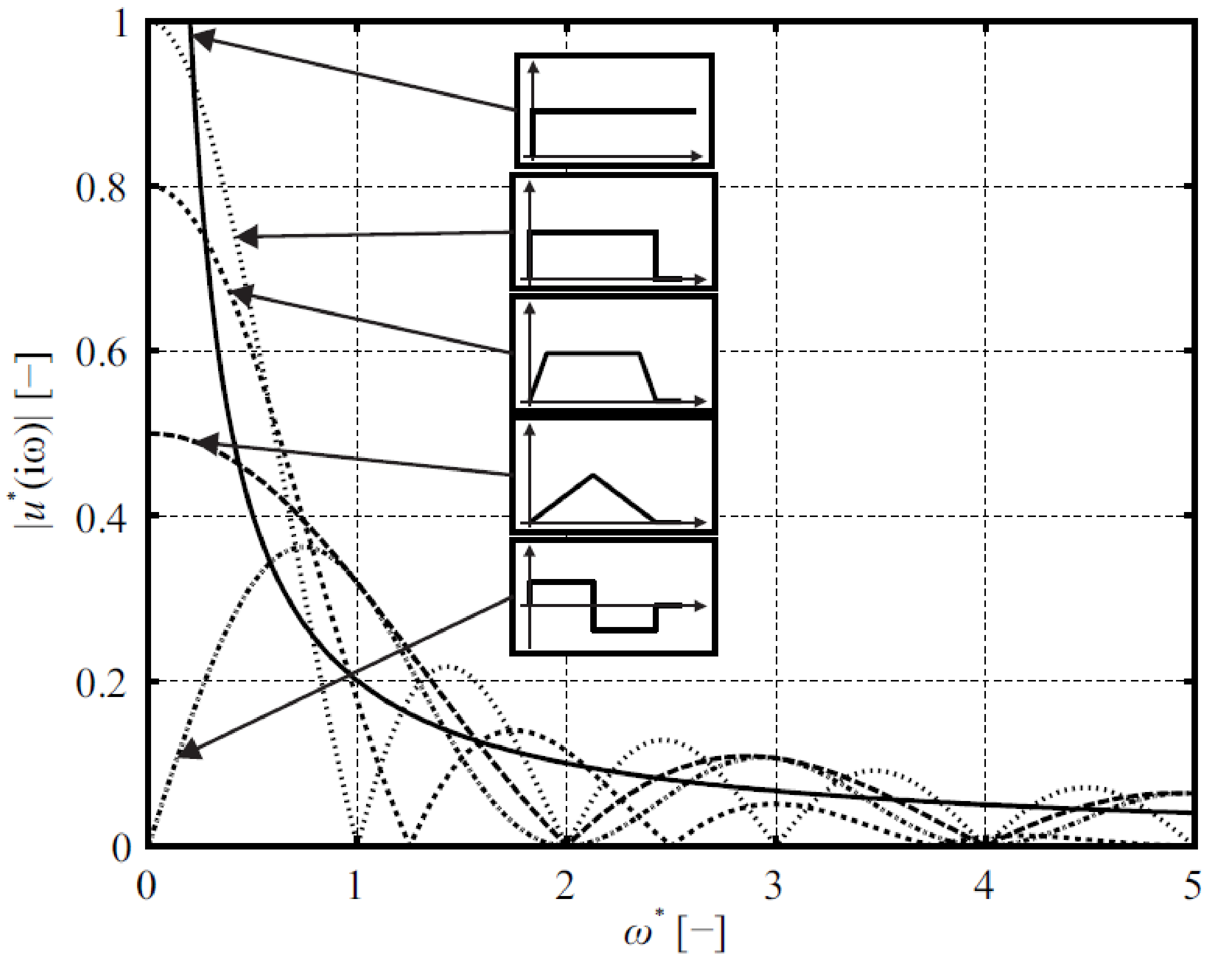
$$u^*_{\mathrm{tr}}(\mathrm{i}\omega^*) = (T^* - T_1^*)\left(\frac{\sin \pi\omega^* T_1^*}{\pi\omega^* T_1^*}\right)\left(\frac{\sin \pi\omega^*(T^* - T_1^*)}{\pi\omega^*(T^* - T_1^*)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\omega^*}$$

$$u^*_{\mathrm{sq}}(\mathrm{i}\omega^*) = \left(\frac{\sin \pi\omega^*}{\pi\omega^*}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\omega^*}$$

$$u^*_{\mathrm{tri}}(\mathrm{i}\omega^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{\pi\omega^*}{2}}{\frac{\pi\omega^*}{2}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\omega^*} .$$

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Amplitudy maleją aż do pierwszego zera wraz ze wzrostem częstotliwości
- Potem następują kolejne zera i pośrednie lokalne maksima
  - $\omega^* = n/T_1^*$ – pierwszy rząd zer trapezowy
  - $\omega^* = n/(T^* - T_1^*)$ – drugi rząd zer trapezowy
  - $\omega^* = n$ – zera prostokątny
  - $\omega^* = 2n$ – zera trójkątny
- Trapezowy i prostokątny mają pojedyncze zera i jest prostopadły do osi
- Trójkątny ma podwójne zera i jest styczny do osi



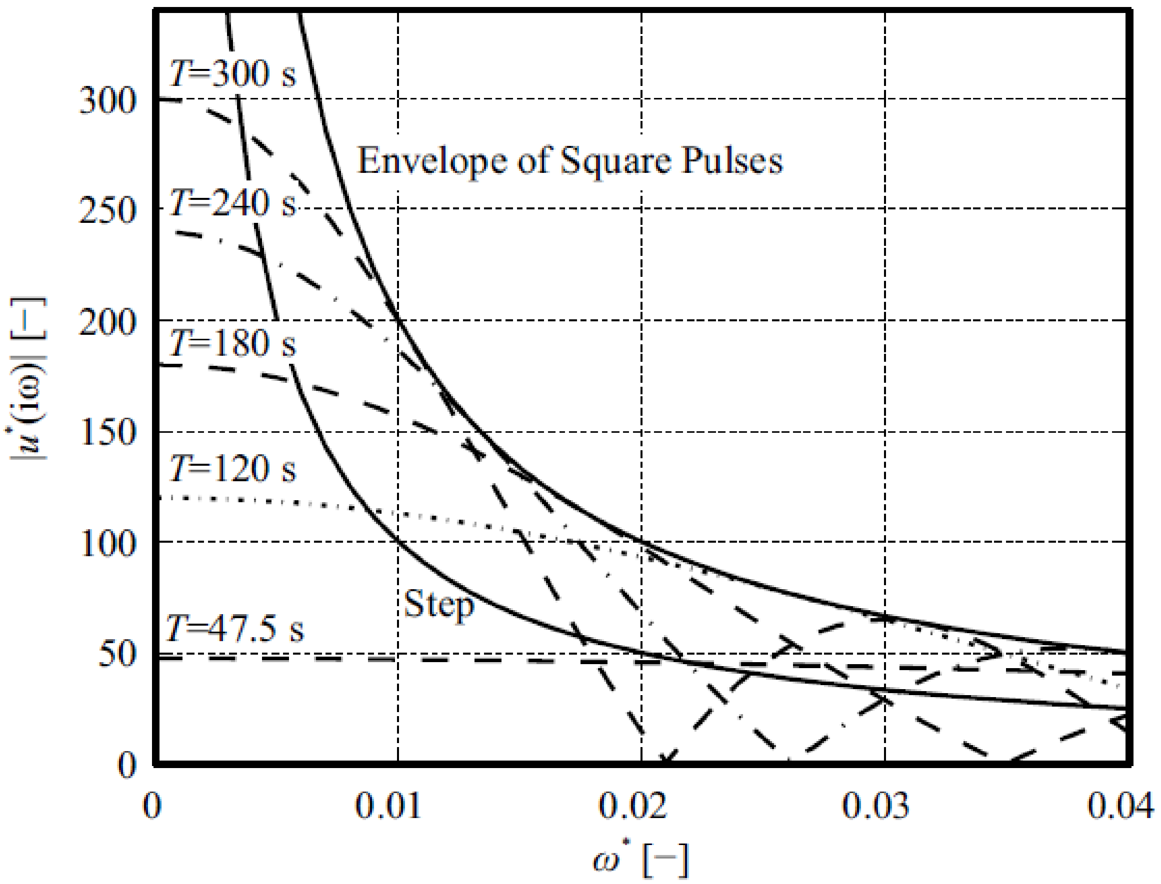
Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- T↗, rośnie moduł dla niższych częstotliwości, rośnie pole pod impulsem
- Również zanikanie staje się szybsze dla wyższych częstotliwości
- Obwiednia (*ang.* envelope) oznacza najwyższą osiąganą amplitudę dla danej częstotliwości ω.
  - impuls prostokątny

$$|u^*_{\mathrm{sq}}(\mathrm{i}\omega^*)|_{\max} = \frac{1}{\pi\omega^*} = \frac{0.3183}{\omega^*}$$

  - impuls trójkątny

$$|u^*_{\mathrm{tri}}(\mathrm{i}\omega^*)|_{\max} = \frac{0.2302}{\omega^*}$$



Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Dla niskich częstotliwości pole pod impulsem determinuje amplitudę – impuls prostokątny ma największe pole dla danego okresu T.
- Dla średnich częstotliwości obwiednia wyznacza moduł. Impuls prostokątny ma najwyższą obwiednię w okolicy $\omega^* = 1/2$ a tym samym najwyższy moduł.
- Impuls prostokątny ma najwyższą obwiednię w całym zakresie częstotliwości $0 \leq \omega^* \leq 1/2$
- Dla wyższych jest to tylko zjawisko miejscowe

Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

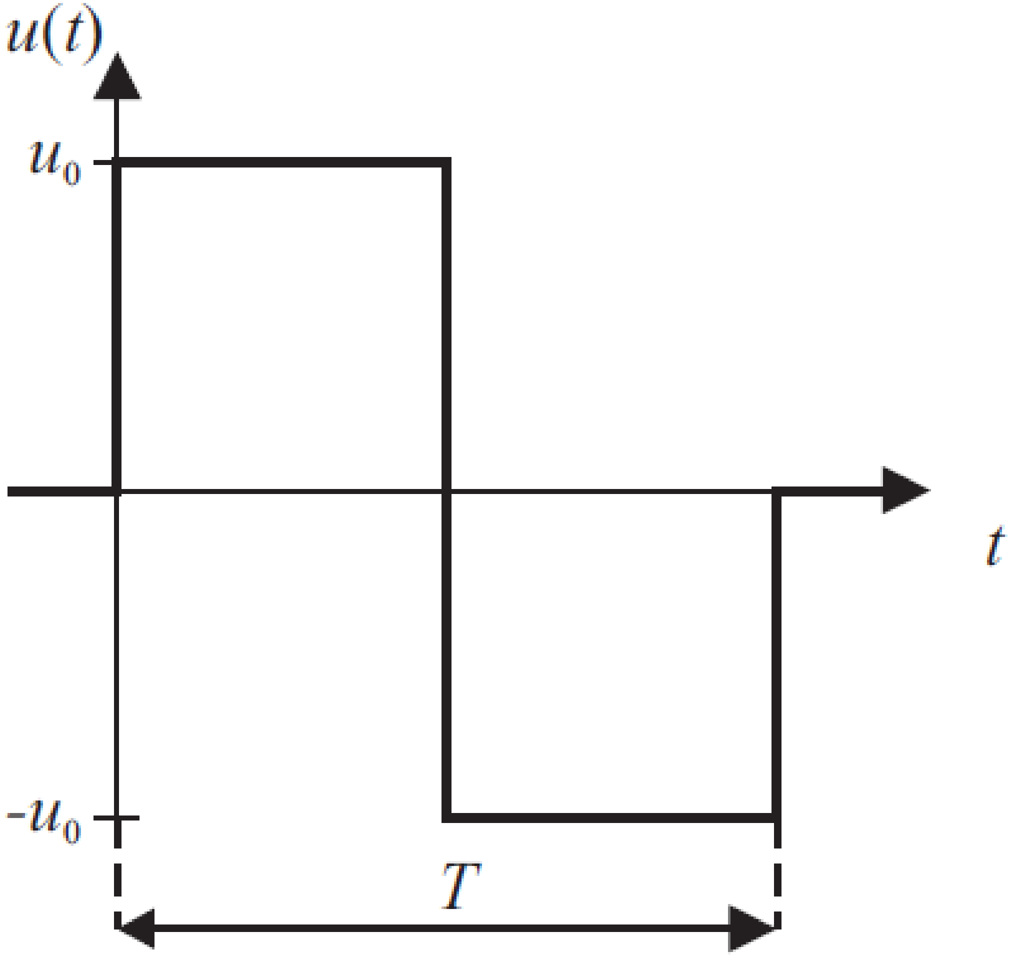
- Podwójny impuls prostokątny

$$u(\mathrm{i}\omega) = u_0 T \left(\frac{\sin^2 \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T - \pi}{2}}$$

$$u^*(\mathrm{i}\omega^*) = \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi\omega^*}{2}}{\frac{\pi\omega^*}{2}} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\frac{2\omega^* - 1}{2}}$$

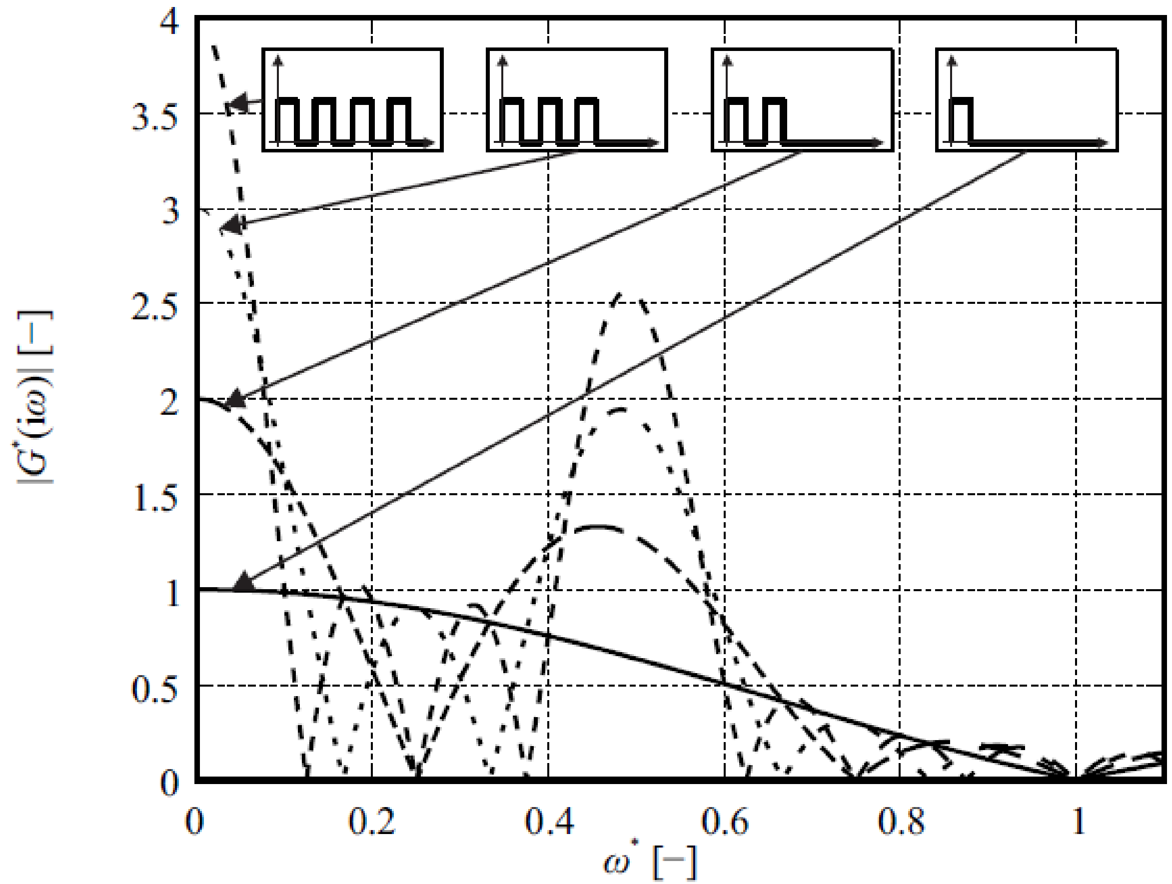
- Zera są dla $\omega * = 2n$
- Zera są podwójne z wyjątkiem $n = 0$.
- Moduł wynosi zero dla $\omega * = 0$
- Maksimum wynosi:

$$|u^*(\mathrm{i}\omega^*)|_{\max} = 0.362 \text{ at } \omega^* = 0.762$$



Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Zmiany przebiegu transformaty Fouriera dla wzrostu ilości impulsów
- Gdy otrzymamy ich nieskończoną liczbę będziemy mieli impulsy Diraca dla częstotliwości $0, 0.5, 1.5, 2.5, \ldots$



Transformaty Fouriera przykładowych sygnałów

- Podsumowanie
  - Im stromsze brzegi impulsu, tym większe wzbudzenie dla wyższych częstotliwości
  - Pytanie czy można przyjąć skok zamiast „*rampy*”?
    - Przy akceptacji błędu ≤ 1% otrzymamy okres wzrostu rampy $T_{1,max} \leq 1.1 / \omega_{max}$
    - Przy akceptacji błędu ≤ 5% otrzymamy okres wzrostu rampy $T_{1,max} \leq 0.5 / \omega_{max}$
  - Dla danej amplitudy impulsu u_o, najwyższa gęstość amplitudowa jest osiągana dla:
    - Skok jednostkowy dla niskich częstotliwości
    - Impulsy prostokątne dla średnich i wyższych częstotliwości
  - Tym samym te sygnały zapewniają najmniejszy błąd identyfikacji charakterystyk częstotliwościowych dla zaszumionych wyjść
  - Sygnały nieokresowe w przeciwieństwie do okresowych pobudzają jednocześnie wszystkie częstotliwości za wyjątkiem zer dla impulsów oraz *rampy*

Wyznaczenie odpowiedzi częstotliwościowej

- Odpowiedź ma postać:

$$\hat{G}(\mathrm{i}\omega) = \frac{y(\mathrm{i}\omega)}{u(\mathrm{i}\omega)} = \frac{\mathfrak{F}\{y(t)\}}{\mathfrak{F}\{u(t)\}}$$

- Zakładamy szum na wyjściu:

$$y(t) = y_{\mathrm{u}}(t) + n(t)$$

- Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\hat{G}(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{u(\mathrm{i}\omega)} \lim_{s \to \mathrm{i}\omega} \left(\int_0^\infty y_u(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t + \int_0^\infty n(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \right)$$

$$\hat{G}(\mathrm{i}\omega) = G_0(\mathrm{i}\omega) + \Delta G_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}\omega)$$

- Zatem mamy złożenie odpowiedzi obiektu oraz charakterystyki szumu

$$\Delta G_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}\omega) = \lim_{s \to \mathrm{i}\omega} \frac{n(s)}{u(s)} = \frac{n(\mathrm{i}\omega)}{u(\mathrm{i}\omega)}$$

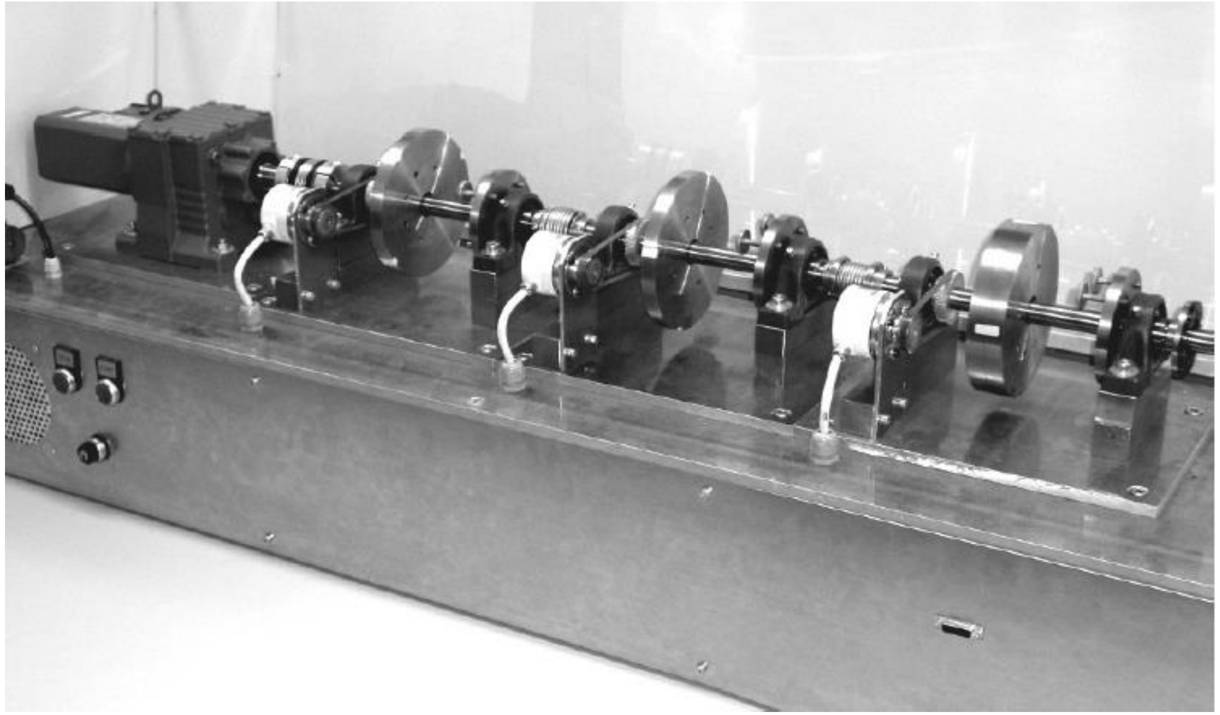
Wyznaczenie odpowiedzi częstotliwościowej

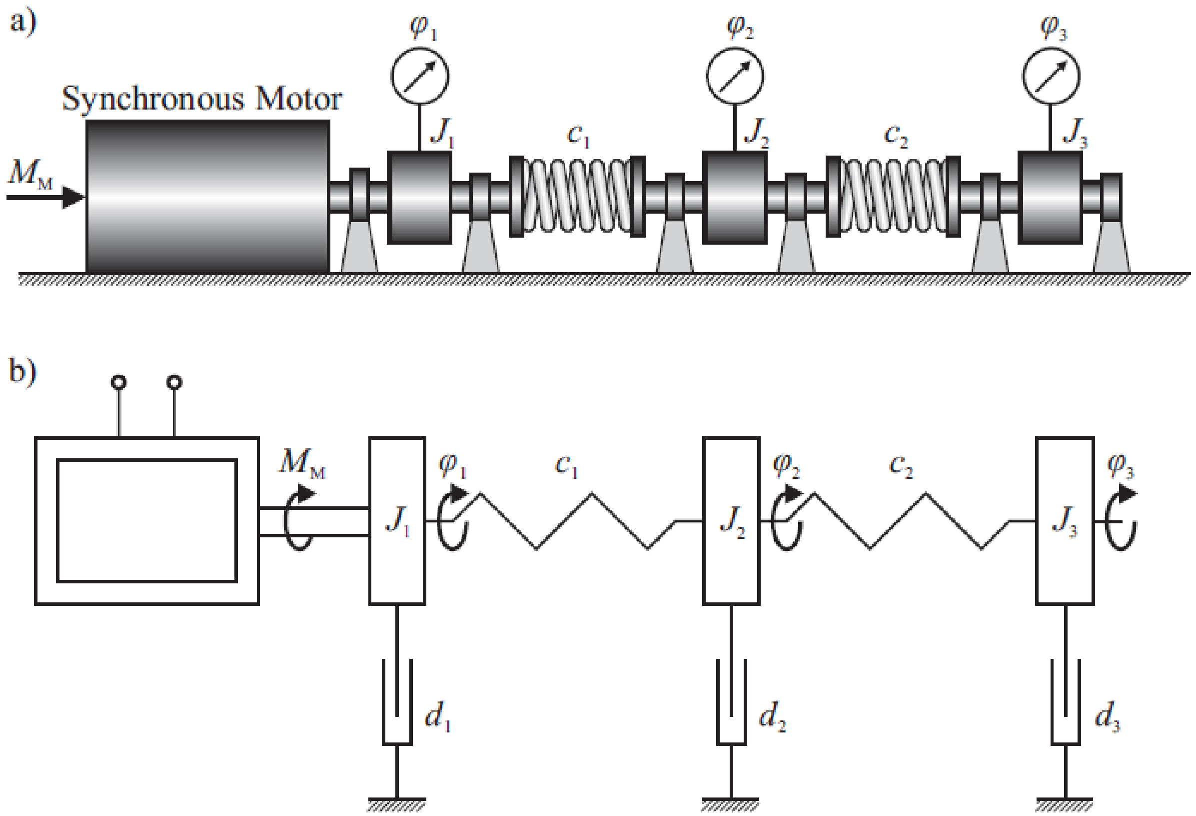
- Moduł błędu ma postać

$$|\Delta G_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|n(\mathrm{i}\omega)|}{|u(\mathrm{i}\omega)|}$$

- Moduł błędu (szumu) maleje wraz ze względnym wzrostem modułu wejścia nad szumem. Zatem gęstość amplitudowa musi być największa.
- Można to osiągnąć poprzez:
  - Wybór jak najwyższej amplitudy sygnału testowego (ograniczenia procesowe)
  - Dobór kształtu do określonych częstotliwości

Przykład: oscylator trzech mas





$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -d_1\dot{\varphi}_1 - c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2 + M_M$$
$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -d_2\dot{\varphi}_2 + c_1\varphi_1 - (c_1 + c_2)\varphi_2 + c_2\varphi_3$$
$$J_3\ddot{\varphi}_3 = -d_3\dot{\varphi}_3 + c_2\varphi_2 - c_2\varphi_3 \ .$$

Isermann R (2005) Mechatronic Systems: Fundamentals. Springer, London

Przykład: oscylator trzech mas

- Równanie obiektu

$$J\ddot{\varphi}(t) + D\dot{\varphi}(t) + C\varphi = M\,M_{\mathrm{M}}(t) \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1+c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

- Wektor stanu

$$x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \\ \dot{\varphi}_3(t) \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Równania stanu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -J^{-1}C & -J^{-1}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-c_1}{J_1} & \frac{c_1}{J_1} & 0 & \frac{-d_1}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{J_2} & \frac{-(c_1+c_2)}{J_2} & \frac{c_2}{J_2} & 0 & \frac{-d_2}{J_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{J_3} & \frac{-c_2}{J_3} & 0 & 0 & \frac{-d_3}{J_3} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c^{\mathrm{T}} = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

Przykład: oscylator trzech mas

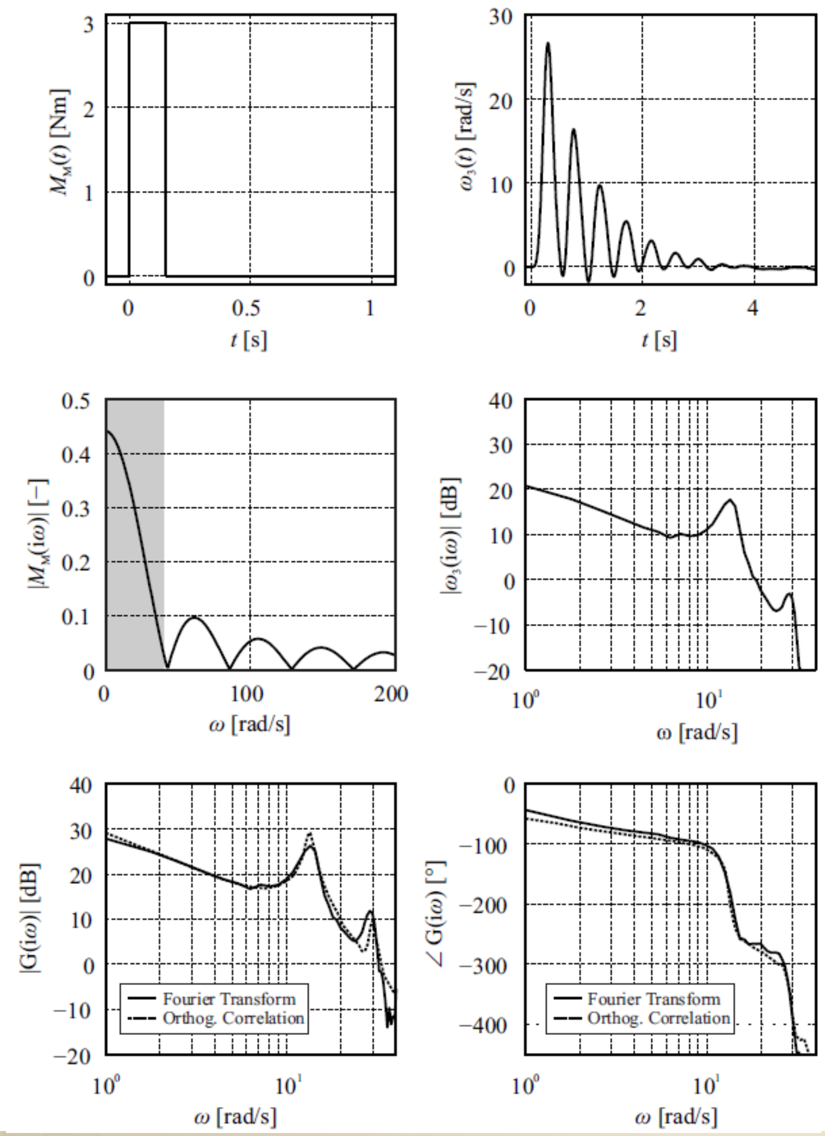
- Transmitancja

$$G(s) = \frac{\varphi_2(s)}{M_{\mathrm{M}}(s)}$$

$$= \frac{c_1}{J_1 J_2 s^4 + (J_2 d_1 + J_1 d_2)s^3 + (J_2 c_1 + d_1 d_2 + J_1 c_1)s^2 + (d_2 c_1 + d_1 c_1)s}$$

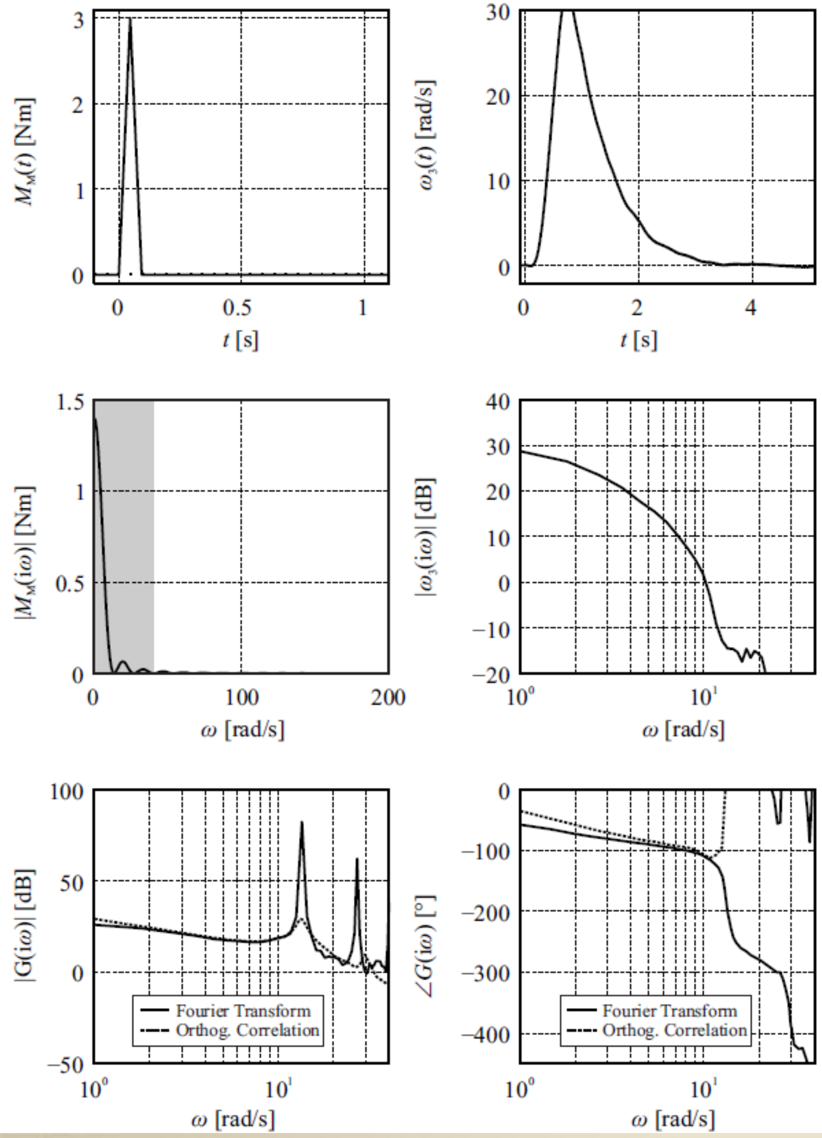
Przykład: oscylator trzech mas

- Sygnał identyfikacyjny – impuls prostokątny o okresie T = 0.15 s.
- Charakterystyka referencyjna pochodzi z metody korelacyjnej
- Dobre dopasowanie dla częstotliwości $\omega < 25$ [rad/s]



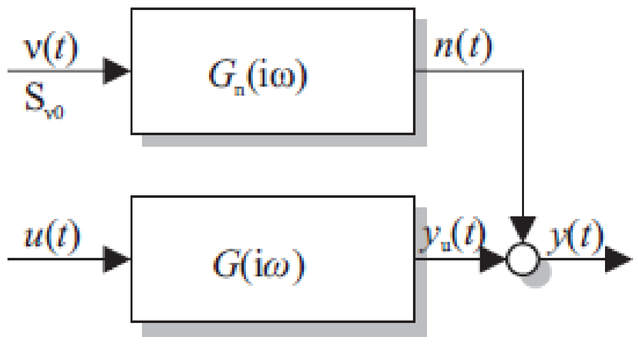
Przykład: oscylator trzech mas

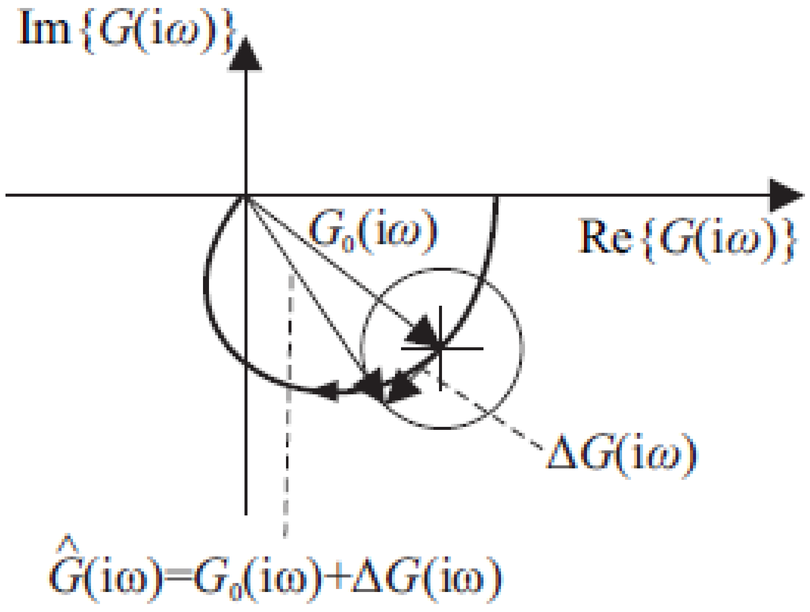
- Sygnał identyfikacyjny – impuls trójkątny o okresie T = 0.15 s.
- Zero pokrywa się z częstotliwością maksimum charakterystyki
- Dobre dopasowanie dla mniejszego zakresu częstotliwości $\omega < 13.5$ [Hz]



Wpływy szumów pomiarowych

- Wykorzystanie jednorazowego pobudzenia jest tylko możliwe, gdy amplituda szumu jest znacznie mniejsza od impulsu oraz gdy średnia szumu jest równa zero.
- W przypadku znaczących niestacjonarnych szumów użycie powyższych metod może być w zasadzie niemożliwe.
- Zakładamy szum:





$$\Delta G_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}\omega) = \frac{n_{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\omega)}{u(\mathrm{i}\omega)}$$

$$|\Delta G_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|n_{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\omega)|}{|u(\mathrm{i}\omega)|}$$

Wpływy szumów pomiarowych

- W wyniku przekształceń otrzymamy wniosek, że
  - błąd odpowiedzi częstotliwościowej jest odwrotnie proporcjonalny do stosunku sygnał-szum
  - błąd odpowiedzi częstotliwościowej jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z ilości wykorzystywanych odpowiedzi
- Tym samym w celu zmniejszenia wpływu szumu powinniśmy wyznaczyć wiele odpowiedzi na ten sam sygnał i wyznaczyć odpowiedź średnią:

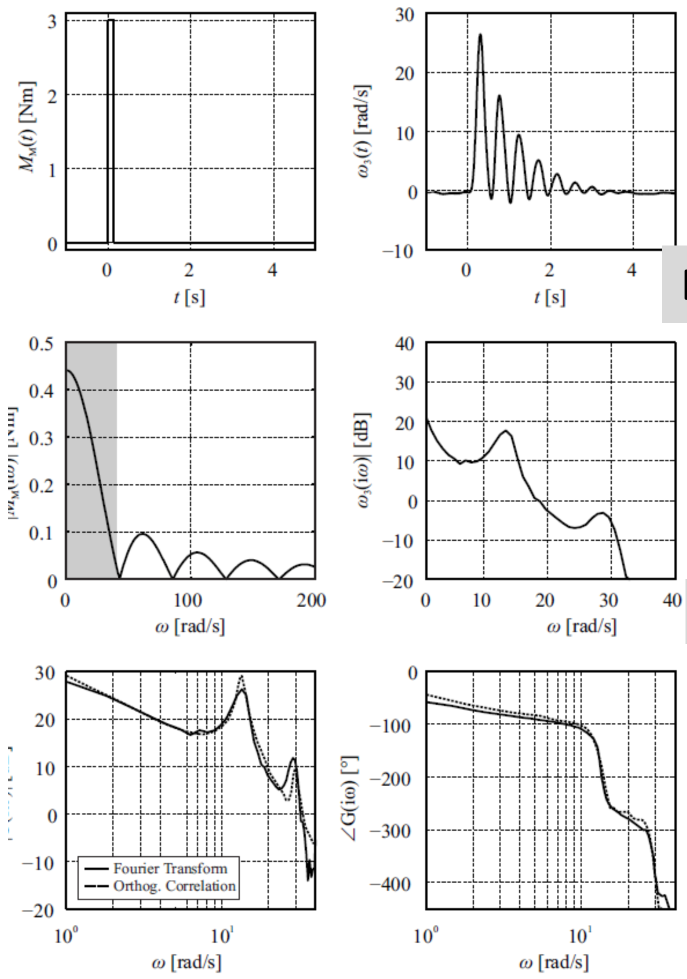
$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k(t)$$

- Dla różnych pobudzeni powinniśmy wziąć średnią charakterystykę (uśredniając po części rzeczywistej i urojonej a nie po module i fazie)

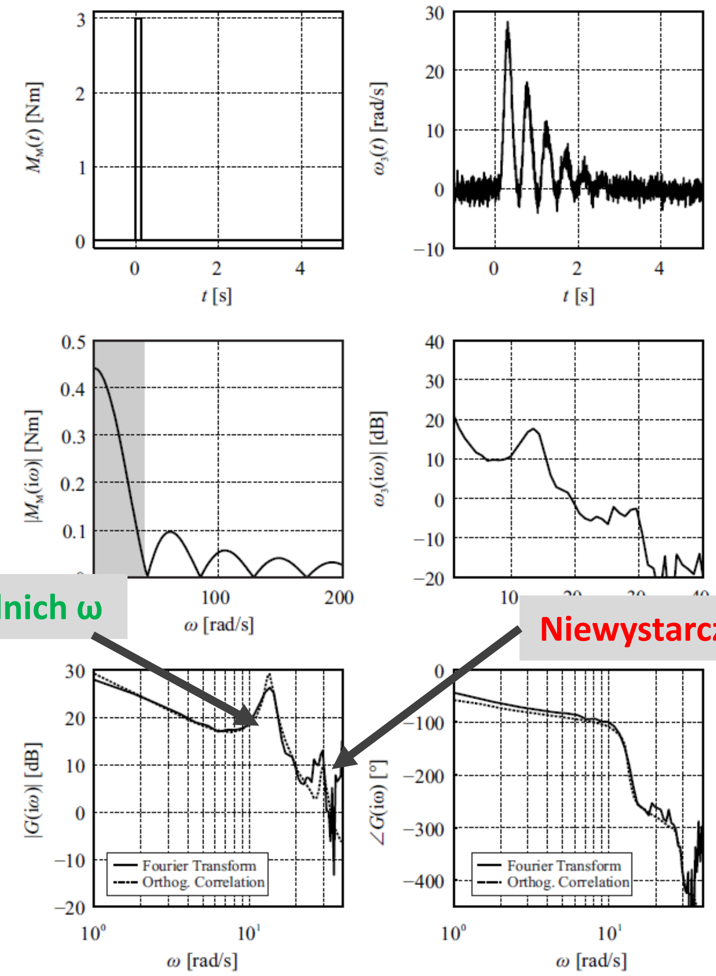
$$\bar{G}(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_k(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\{G_k(\mathrm{i}\omega)\} + \mathrm{i}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Im}\{G_k(\mathrm{i}\omega)\}$$

Przykład: oscylator trzech mas

- Stosunek szum do sygnału wynosi: $\eta = \dfrac{\sigma_n}{y_{max}} \approx 4\% \mathrel{\hat{=}} 1:25$



Bez szumu



Z szumem

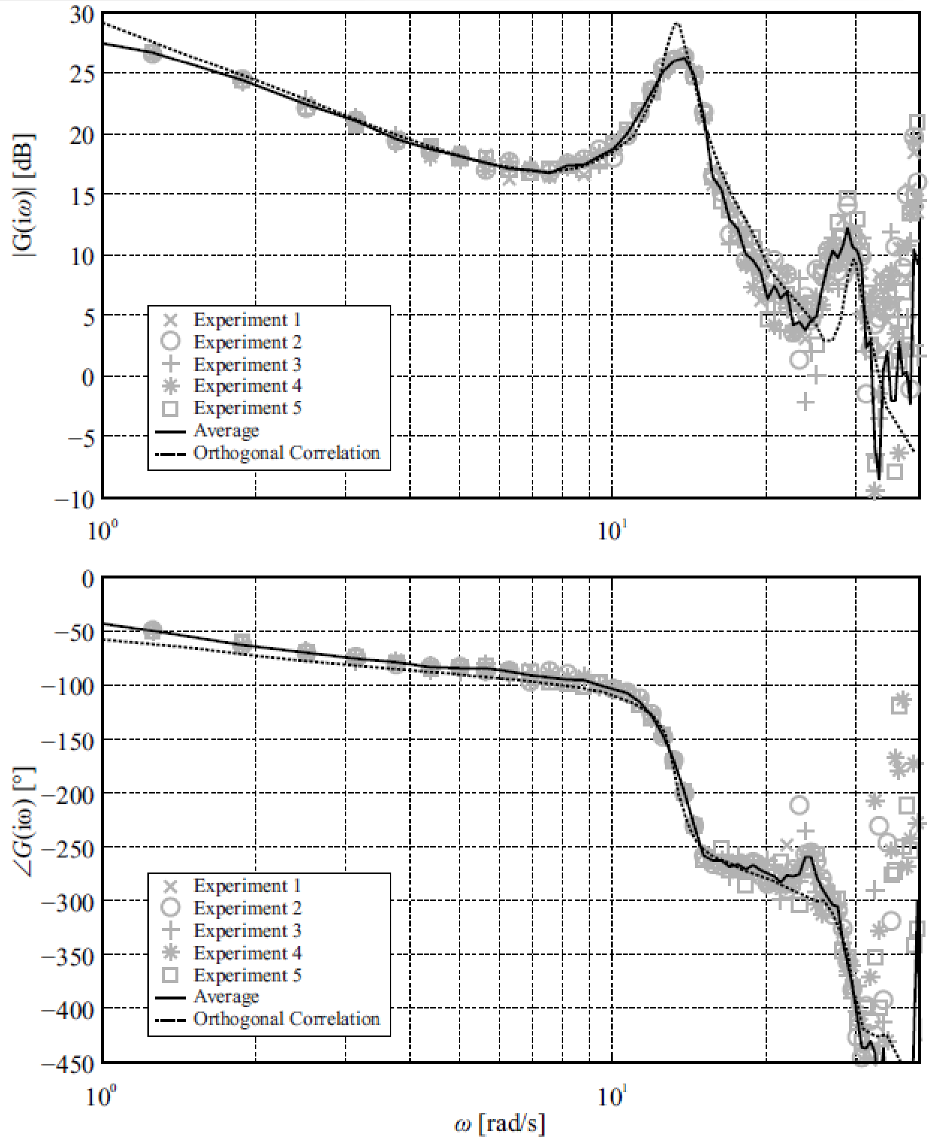
Całkiem nieźle w zakresie średnich ω

Niewystarczające dla wyższych ω

Przykład: oscylator trzech mas

- Uśrednienie wielu eksperymentów
  - Linia ciągła:
    uśrednienie z pięciu eksperymentów
  - Linia przerywana:
    rzeczywisty pomiar metoda korelacyjną

- **Wariancja nie zanika dla N → ∞**



Podsumowanie

- Istotny jest rodzaj okienkowania oraz wyboru sygnału testowego
- Określenie *preferowany sygnał* oznacza taki, który posiada najwyższą gęstość amplitudową w określonym zakresie częstotliwości
- Takie sygnały zapewniają najmniejszy błąd odtworzenia ch-ki częstotliwościowej w danym zakresie ω
- Dla niskich częstotliwości najlepszy jest skok jednostkowy a impuls prostokątny dla ω średnich
- Wymagana amplituda dla sygnału zaszumionego wynosi:

$$|u(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{req}} = \frac{\sqrt{S_{\mathrm{nn}}(\mathrm{i}\omega) T_{\mathrm{E}}}}{|G(\mathrm{i}\omega)| \sigma_G(\mathrm{i}\omega) \sqrt{N}}$$

- Niestety musimy znać proces

Podsumowanie

- Z punktu widzenia układów sterowania najistotniejsze są średnie częstotliwości
- Dobrze jest stosować różne sygnały:
  - Sekwencje skoków jednostkowych do odwzorowania niskich częstotliwości
  - Sekwencje impulsów prostokątnych dla niskich i średnich częstotliwości
  - 20%-30% czasu dla testów skokowych i 80%-70% czasu dla impulsów prostokątnych
  - Dobór długości impulsu prostokątnego zależy od najwyższej częstotliwości do odwzorowania $T = \pi/\omega_{max}$
  - Dla uwzględnienia potencjalnych nieliniowości sugeruje się stosowanie skoków w obu kierunkach
- W sytuacji wielokrotnego pobudzenia tym samym sygnałem można uśrednić odpowiedź w dziedzinie casu i wtedy wyznaczyć charakterystykę
- W przypadku różnych sygnałów wyznaczamy oddzielnie charakterystyki dla poszczególnych eksperymentów i dopiero potem wyznaczamy uśrednione charakterystyki częstotliwościowe