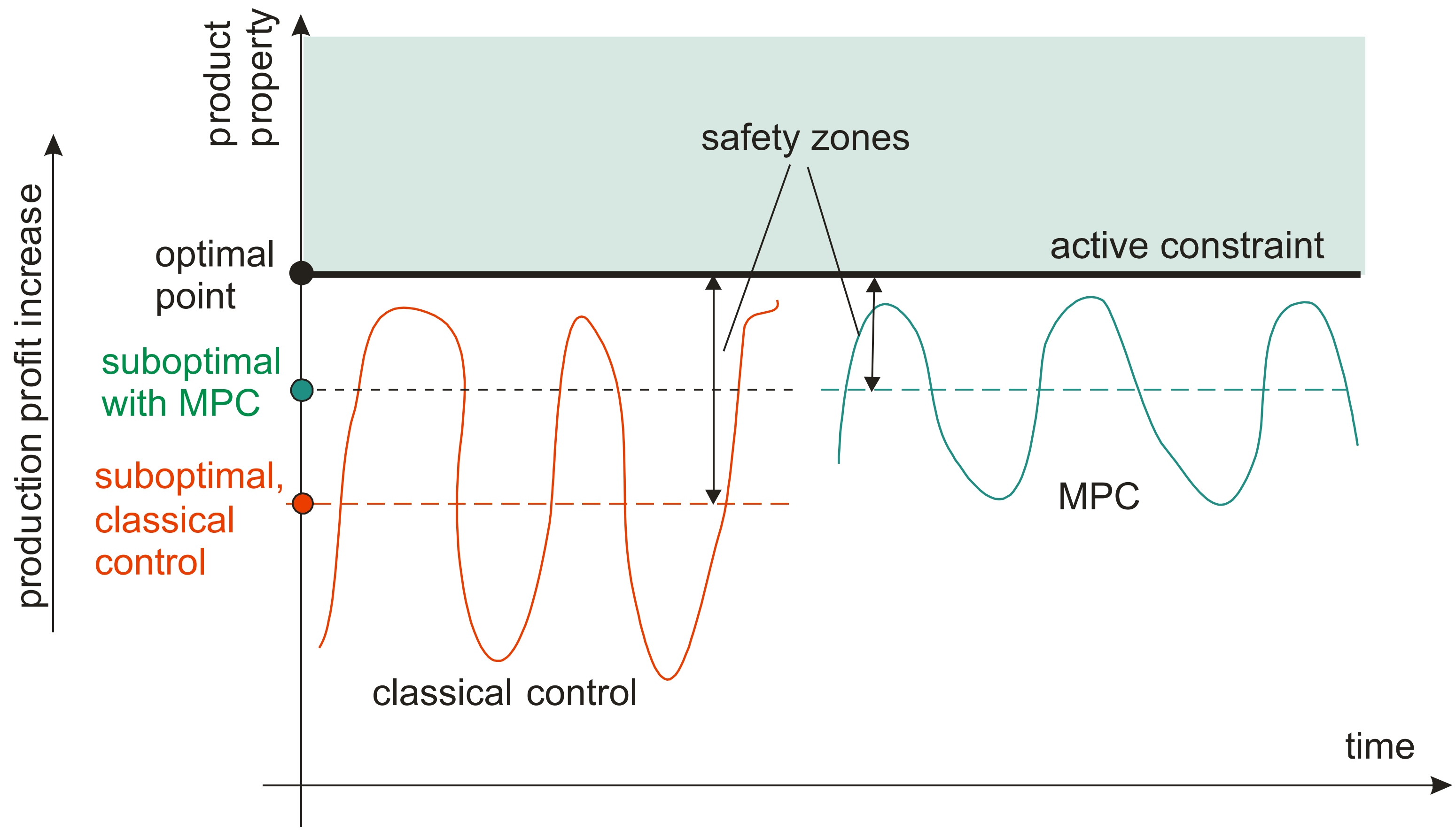
REGULACJA PREDYKCYJNA (MPC)

- Algorytmy regulacji predykcyjnej – MPC (*Model Predictive Control*), powstały w latach siedemdziesiątych ub. wieku, następnie intensywnie rozwijane..
- Jedyne z tzw. zaawansowanych technik regulacji (advanced control techniques), które odniosły olbrzymi sukces w aplikacjach praktycznych, wywierając dominujący wpływ na kierunek rozwoju przemysłowych układów regulacji i sterowania.
- MPC – technika silnie oparta na modelu obiektu (MPC także: *Model-based Predictive Control*), wymagająca znacznie większego nakładu obliczeń niż algorytmy PID, mogła się rozwinąć dzięki postępom techniki mikroprocesorowej.
- Kilka przyczyn sukcesu algorytmów MPC:
  - W sposób naturalny potrafią uwzględniać ograniczenia sygnałów sterujących i wielkości wyjściowych, decydujące często o jakości i bezpieczeństwie produkcji.
  - Generują aktualne sterowania bezpośrednio wykorzystując model procesu. Stąd w sposób naturalny można je stosować do obiektów wielowymiarowych z silnymi interakcjami, również przy nierównej liczbie wejść sterujących i wielkości regulowanych, do obiektów o trudnej dynamice.
  - Algorytmy, których zasada działania jest zrozumiała, stosunkowo łatwa do wyjaśnienia personelowi inżynieryjnemu jak i operatorskiemu - aspekt bardzo istotny przy wprowadzaniu nowych technik do praktyki przemysłowej.

REGULACJA PREDYKCYJNA (MPC) 2

Typowa sytuacja, w której regulacja MPC zapewnia wzrost efektywności ekonomicznej produkcji:



REGULACJA PREDYKCYJNA (MPC) 3

Trochę historii:

- **Model Predictive Heuristic Control** (MPHC) – Richalet i in. (1976,1978) – zaimplementowany w komercyjnym pakiecie IDCOM (*Identification and Command*), znany później pod nazwą algorytm MAC (*Model Algorithmic Control*). Model liniowy obiektu w postaci skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR – *Finite Impulse Response*).
- **Dynamic Matrix Control** (DMC) – firma Shell Oil (pierwsza połowa lat siedemdziesiątych ub. stulecia, opublikowany 1980, wraz z informacjami o udanych aplikacjach) . Bardzo popularny w komercyjnych aplikacjach algorytmów regulacji MPC. Liniowy model obiektu w postaci odpowiedzi skokowych.
- **Generalized Predictive Control** (GPC) – Clarke i in. (1987,1989). Model procesu w postaci transmitancji dyskretnej (równań różnicowych), pozwala na regulację predykcyjną również obiektów niestabilnych.
- **Algorytm MPC z równaniami stanu** (MPCS) – podejście najogólniejsze, też dla modeli nieliniowych, dla najszerszej klasy zakłóceń. Wymaga pomiaru lub estymacji stanu. Obecnie najpopularniejszy w pracach badawczych, występuje w nowoczesnych pakietach komercyjnych, szczególnie dla procesów nieliniowych.

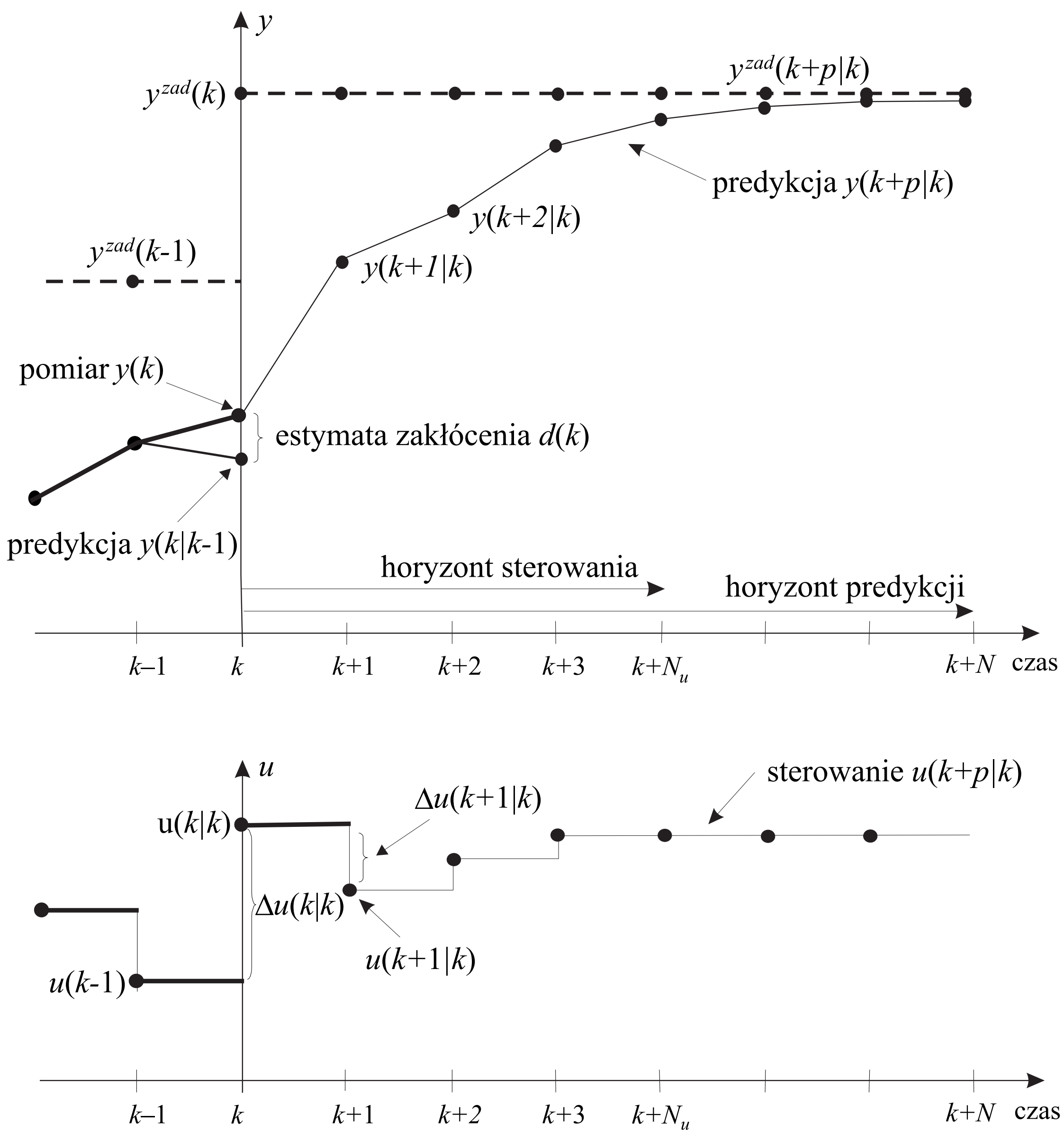
W zakresie badań i zastosowań algorytmów MPC w ostatnich latach i obecnie, dominują problemy efektywności, uwzględniania nieliniowych modeli, stabilności, odporności na niepewność modelowania i estymacji zakłóceń.

REGULACJA PREDYKCYJNA (MPC) 4

W ofercie wszystkich znaczących producentów sprzętu i oprogramowania dla sterowania i regulacji obiektów przemysłowych znajdują się pakiety oprogramowania z algorytmami MPC (istnieją też firmy specjalizujące się w aplikacjach), **bardziej znane produkty**:

- **DMCplus** firmy AspenTech, sukcesor klasycznego algorytmu DMC (Cutler i Ramaker, 1979),
- **IDCOM-HEICON** firmy Sherpa Engineering, sukcesor algorytmu **IDCOM** (Richalet i in, 1978), do 2006 r. rozwijanego i oferowanego przez firmę Adersa,
- **SMOC (Supervisory Multivariable Optimizing Controller)** oferowany przez Shell Global Solutions,
- **3dMPC** oferowany przez firmę ABB,
- **Profit Controller** i **Profit NLC Controller** (Nonlinear Controller) firmy Honeywell (elementy szerszego środowiska Profit Suite),
- **Pavilion8** firmy Pavilion Technologies (grupa Rockwell Automation),
- **Connoisseur** firmy Invensys,
- **INCA MPC** firmy IPCOS,
- **DeltaV PredictPro** firmy Emerson (może być też realizowany w sterownikach systemu DCS DeltaV),
- **MVC** firmy GE Energy (dawniej produkt firmy Continental Controls).

ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ (rysunek dla $n_u = 1$, $n_y = 1$)



- $y^{zad}(k+p|k)$ – wartość zadana wyjść regulowanych (przewidywana na chwilę $k+p$, w chwili k),
- $y(k+p|k)$ – wartość wyjść regulowanych przewidywana na chwilę $k+p$, w chwili k,
- $u(k+p|k)$ – wartość sterowań (wyjść regulatora),
- $\triangle u(k|k) = u(k|k) - u(k-1)$ – przyrost sterowania w chwili bieżącej k (do zastosowania w procesie jako $\triangle u(k)$),
- $\triangle u(k+p|k) = u(k+p|k) - u(k+p-1|k)$ – przyrosty sterowań w przyszłych chwilach, $p = 1, \ldots, N_u - 1$,
- N – horyzont predykcji (horyzont optymalizacji),
- N_u – horyzont sterowania (zmian sterowania), $N_u \leqslant N$, dla $p = N_u, \ldots, N-1$ zakładamy $\triangle u(k+p|k) = 0$,

ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ 2

Zadanie optymalizacji dynamicznej regulatora MPC ($y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$):

$$\min_{\triangle u(k|k),\ldots,\triangle u(k+N_u-1|k)} \left\{ J(k) = \sum_{p=1}^{N} \| [y^{zad}(k+p|k) - y(k+p|k) \|^2 + \lambda \sum_{p=0}^{N_u-1} \| \triangle u(k+p|k) \|^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami :} \quad & u_{min} \leqslant u(k+p|k) \leqslant u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1 \\ & -\triangle u_{max} \leqslant \triangle u(k+p|k) \leqslant \triangle u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1 \\ & y_{min} \leqslant y(k+p|k) \leqslant y_{max}, \quad p = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

gdzie: λ – współczynnik kary ważący sumę kar za zmienność wyliczanych sterowań w stosunku do sumy kar za przewidywane błędy regulacji, a wartości $y(k+p|k)$ wyliczane są z modelu procesu (ograniczenie równościowe).

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – to wektory (w ogólności $n_y \neq n_u$), stąd funkcję celu $J(k)$ można zapisać w rozwinięciu na składowe:

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_y} \left(y_i^{zad}(k+p|k) - y_i(k+p|k) \right)^2 + \lambda \sum_{p=0}^{N_u-1} \sum_{i=1}^{n_u} (\triangle u_i(k+p|k))^2$$

Uwaga 1: wyżej podano jedynie najprostsze postacie ograniczeń – na wartości sterowań i wyjść oraz przyrosty sterowań. Ograniczenia mogą być bardziej złożone (na dowolne funkcje sterowań i wyjść – komplikuje to nieco zadania optymalizacji).

ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ 3

Uwaga 2: Podana funkcja celu ma najprostszą postać ważenia przyrostów sterowań w stosunku do błędów regulacji na horyzoncie predykcji – jeden współczynnik λ. Możliwe są i stosowane bardziej ogólne postacie, z różnymi współczynnikami przy kwadratach przyrostów sterowań i przy kwadratach błędów regulacji, jeśli to potrzebne:

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_y} \psi_i \left(y_i^{zad}(k+p|k) - y_i(k+p|k) \right)^2 + \sum_{p=0}^{N_u-1} \sum_{i=1}^{n_u} \lambda_i \left(\triangle u_i(k+p|k) \right)^2$$

W zapisie wektorowym:

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} \left(y^{zad}(k+p|k) - y(k+p|k) \right)^T \mathbf{\Psi} \left(y^{zad}(k+p|k) - y(k+p|k) \right) + \\ + \sum_{p=0}^{N_u-1} \left(\triangle u(k+p|k) \right)^T \mathbf{\Lambda} \left(\triangle u(k+p|k) \right),$$

gdzie

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{n_y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n_u} \end{bmatrix}.$$

Wygodny zapis:

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} \left\| y^{zad}(k+p|k) - y(k+p|k) \right\|_{\mathbf{\Psi}}^2 + \sum_{p=0}^{N_u-1} \left\| \triangle u(k+p|k) \right\|_{\mathbf{\Lambda}}^2 \quad \left(\|x\|_{\mathbf{A}} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{x^T \mathbf{A} x} \right)$$

ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ 4

Dla wyznaczania trajektorii $y(k+p|k)$, $p=1,\ldots,N$, niezbędne jest dysponowanie **modelem obiektu regulacji** – w ogólności nieliniowym.

Największe znaczenie praktyczne mają **algorytmy MPC z modelami liniowymi**, gdyż:

– szeroki jest zakres ich bezpośredniego zastosowania,
– stanowią one podstawę konstrukcji stosunkowo prostych i często skutecznych algorytmów nieliniowych z linearyzacjami modelu nieliniowego.

W przypadku liniowym, korzystając z zasady superpozycji, można przedstawić trajektorię $\{y(k+p|k), p=1,\ldots,N\}$ w postaci sumy:

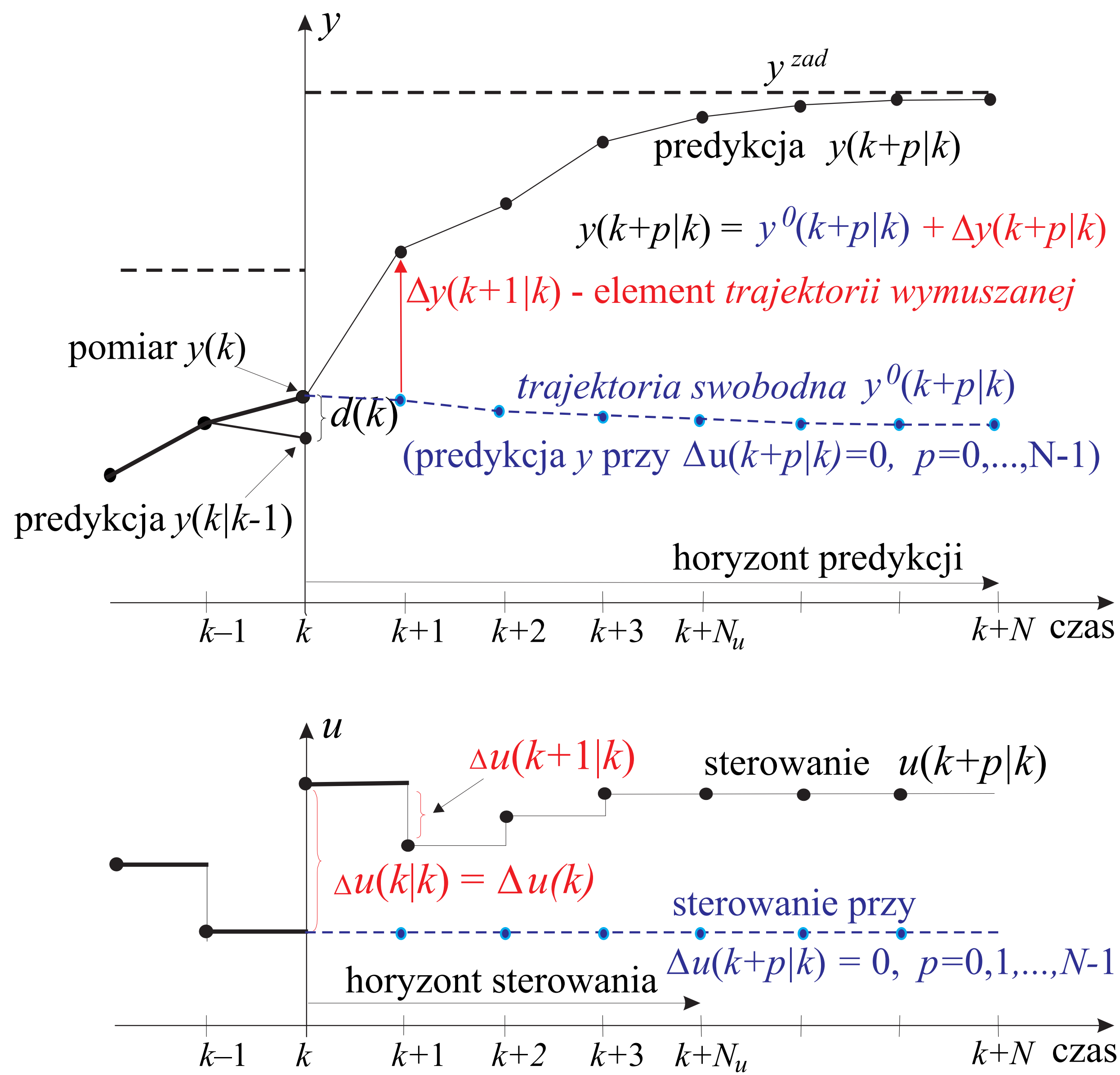
$$y(k+p|k) = y^0(k+p|k) + \triangle y(k+p|k), \quad p=1,\ldots,N,$$

– trajektorii swobodnej $\{y^0(k+p|k), p=1,\ldots,N\}$, zależnej tylko od już zrealizowanych (przeszłych) sterowań, oraz
– trajektorii wymuszanej$\{\triangle y(k+p|k), p=1,\ldots,N\}$, zależnej tylko od zmiennych decyzyjnych $\triangle u(k+p|k), p=0,\ldots,N_u-1$.

Dekompozycja ta jest wygodna (ale nie konieczna) dla realizacji algorytmu MPC, gdyż:

– wartości $y^0(k+p|k)$ oblicza się w danym kroku czasowym k tylko jeden raz (zależą tylko od przeszłych danych), dalej to parametry w zadaniu optymalizacji sterowania,
– przyrosty $\triangle y(k+p|k), p=1,\ldots,N$ wyliczane są wielokrotnie w procesie optymalizacji sterowania, zależą od wyznaczanych zmian sterowania $\triangle u(k+p|k), p=0,\ldots,N_u-1$.

ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ – z modelem liniowym



ZASADA REGULACJI PREDYKCYJNEJ – z modelem liniowym 2

Stosując dekompozycję prognozowanej trajektorii wyjść, mamy funkcję kryterialną:

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} \left\| y^{zad}(k+p|k) - y^{0}(k+p|k) - \triangle y(k+p|k) \right\|_{\mathbf{\Psi}}^{2} + \sum_{p=0}^{N_u-1} \left\| \triangle u(k+p|k) \right\|_{\mathbf{\Lambda}}^{2}$$

Oznaczmy przez $\mathbf{M}_p$ operatory liniowe (tzn. macierze) opisujące zależność elementów trajektorii wymuszanej $\triangle y(k+p|k)$ od zmiennych decyzyjnych:

$$\triangle y(k+p|k) = \mathbf{M}_p \cdot \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \triangle u(k+1|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_p \cdot \triangle U(k), \quad p = 1, ..., N,$$

$\triangle U(k)$ – wektor wszystkich zmiennych decyzyjnych o długości $n_u \times N_u$ ($u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$).

Zadanie optymalizacji dynamicznej regulatora predykcyjnego dostajemy w postaci:

$$\min_{\triangle U(k)} \left\{ J(k) = \sum_{p=1}^{N} \left\| y^{zad}(k+p|k) - y^{0}(k+p|k) - \mathbf{M}_p \triangle U(k) \right\|_{\mathbf{\Psi}}^{2} + \sum_{p=0}^{N_u-1} \left\| \triangle u(k+p|k) \right\|_{\mathbf{\Lambda}}^{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami :} \qquad u_{min} &\leqslant u(k+p|k) \leqslant u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1 \\ -\triangle u_{max} &\leqslant \triangle u(k+p|k) \leqslant \triangle u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1 \\ y_{min} &\leqslant y^{0}(k+p|k) + \mathbf{M}_p \triangle U(k) \leqslant y_{max}, \quad p = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Zadanie optymalizacji dynamicznej regulatora predykcyjnego:

$$\min_{\triangle U(k)} \left\{ J(k) = \sum_{p=1}^{N} \| y^{zad}(k+p|k) - y^{0}(k+p|k) - \mathbf{M}_p \triangle U(k) \|^2_{\mathbf{\Psi}} + \sum_{p=0}^{N_u-1} \|\triangle u(k+p|k)\|^2_{\mathbf{\Lambda}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami :} \qquad u_{min} &\leqslant u(k+p|k) \leqslant u_{max}, \quad p=0,\ldots,N_u-1 \\ -\triangle u_{max} &\leqslant \triangle u(k+p|k) \leqslant \triangle u_{max}, \quad p=0,\ldots,N_u-1 \\ y_{min} &\leqslant y^{0}(k+p|k) + \mathbf{M}_p \triangle U(k) \leqslant y_{max}, \quad p=1,\ldots,N \end{aligned}$$

Jest to zadanie minimalizacji funkcji kwadratowej ściśle wypukłej, (co wynika z założenia $\mathbf{\Lambda} > 0$ i $\mathbf{\Psi} \geqslant 0$). Jest to więc zadanie:

– posiadające jednoznaczne minimum będące minimum globalnym,
– łatwe do rozwiązania analitycznego, jeśli nie ma ograniczeń,
– łatwe do szybkiego i niezawodnego rozwiązania numerycznego, gdy są ograniczenia.

Macierz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \triangle y(k+1|k) \\ \triangle y(k+2|k) \\ \vdots \\ \triangle y(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \triangle u(k+1|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \triangle U(k)$$

nazywana jest macierzą dynamiczną (*dynamic matrix*).

ZWIĘZŁY WEKTOROWY ZAPIS FUNKCJI CELU (z modelem liniowym)

Zdefiniujmy wektory kolumnowe $Y^{zad}(k)$, $Y^0(k)$ i $\triangle Y(k)$, o długości $n_y \cdot N$ każdy (N – horyzont predykcji, $n_y = \dim y$ – liczba wyjść obiektu):

$$Y^{zad}(k) = \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) \\ y^{zad}(k+2|k) \\ \vdots \\ y^{zad}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad Y^0(k) = \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ \vdots \\ y^0(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \triangle Y(k) = \begin{bmatrix} \triangle y(k+1|k) \\ \triangle y(k+2|k) \\ \vdots \\ \triangle y(k+N|k) \end{bmatrix}$$

oraz macierze diagonalne $\underline{\mathbf{\Psi}}$ i $\underline{\mathbf{\Lambda}}$ o wymiarowościach $(n_y \cdot N) \times (n_y \cdot N)$ i $(n_u \cdot N_u) \times (n_u \cdot N_u)$, odpowiednio ($n_u = \dim u$ jest liczbą sterowań obiektu)):

$$\underline{\mathbf{\Psi}} = \mathrm{diag}\{\overbrace{\mathbf{\Psi}, \ \ldots, \ \mathbf{\Psi}}^{N \text{ razy}}\} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{\Psi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}}^{N \text{ kolumn}}, \quad \underline{\mathbf{\Lambda}} = \mathrm{diag}\{\overbrace{\mathbf{\Lambda}, \ \ldots, \ \mathbf{\Lambda}}^{N_u \text{ razy}}\} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}}^{N_u \text{ kolumn}}$$

ZWIĘZŁY WEKTOROWY ZAPIS FUNKCJI CELU (z modelem liniowym) 2

Funkcję celu

$$
\begin{aligned}
J(k) &= \sum_{p=1}^{N} \|[y^{zad}(k+p|k) - y^{0}(k+p|k) - \mathbf{M}_p \triangle U(k)\|^2_{\mathbf{\Psi}} + \sum_{p=0}^{N_u-1} \|\triangle u(k+p|k)\|^2_{\mathbf{\Lambda}} \\
&= \sum_{p=1}^{N} \big(y^{zad}(k+p|k) - y^{0}(k+p|k) - \mathbf{M}_p \triangle U(k)\big)^T \mathbf{\Psi} \big(y^{zad}(k+p|k) + \\
&\qquad - y^{0}(k+p|k) - \mathbf{M}_p \triangle U(k)\big) + \sum_{p=0}^{N_u-1} \triangle u(k+p|k)^T \mathbf{\Lambda} \triangle u(k+p|k)
\end{aligned}
$$

można teraz zapisać w zwartej postaci:

$$
\begin{aligned}
J(k) &= \big(Y^{zad}(k) - Y^{0}(k) - \mathbf{M} \triangle U(k)\big)^T \underline{\mathbf{\Psi}} \big(Y^{zad}(k) - Y^{0}(k) - \mathbf{M} \triangle U(k)\big) + \\
&\qquad + \triangle U(k)^T \underline{\mathbf{\Lambda}} \triangle U(k) \\
&= \big\|[Y^{zad}(k) - Y^{0}(k)] - \mathbf{M} \triangle U(k)\big\|^2_{\underline{\mathbf{\Psi}}} + \|\triangle U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Lambda}}}
\end{aligned}
$$

Dla $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$, $\mathbf{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}$:

$$
J(k) = \big\|Y^{zad}(k) - Y^{0}(k) - \mathbf{M} \triangle U(k)\big\|^2 + \lambda \|\triangle U(k)\|^2 .
$$

ANALITYCZNE PRAWO STEROWANIA MPC (z modelem liniowym)

Jeśli pominąć ograniczenia, to zadanie optymalizacji regulatora MPC z modelem liniowym sprowadza się do minimalizacji bez ograniczeń funkcji kwadratowej ściśle wypukłej:

$$\begin{aligned}\min_{\triangle U(k)} \{J(k) &= \left\| Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k) \right\|^2_{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} + \|\triangle U(k)\|^2_{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} \\ &= \big(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\big)^T \underline{\boldsymbol{\Psi}} \big(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\big) + \\ &\qquad + \triangle U(k)^T \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \triangle U(k) \ \}\end{aligned}$$

Warunek minimum to zero pochodnej (gradientu). Mamy ogólnie:

$$(x^T\mathbf{A}x)' = 2x^T\mathbf{A},\ \nabla(x^T\mathbf{A}x) = 2\mathbf{A}^T x,$$

stąd zero pochodnej $J(k)$:

$$2\left(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\right)^T \underline{\boldsymbol{\Psi}} \cdot (-\mathbf{M}) + 2\Delta U(k)^T \underline{\boldsymbol{\Lambda}} = 0^T,$$

zero gradientu $J(k)$:

$$-2\mathbf{M}^T \underline{\boldsymbol{\Psi}} \left(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\right) + 2\underline{\boldsymbol{\Lambda}}\Delta U(k) = 0,$$

czyli warunek minimum:

$$[\mathbf{M}^T \underline{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{M} + \underline{\boldsymbol{\Lambda}}]\triangle U(k) = \mathbf{M}^T \underline{\boldsymbol{\Psi}}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)].$$

ANALITYCZNE PRAWO STEROWANIA MPC (z modelem liniowym) 2

Warunek minimum:

$$[\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}]\triangle U(k) = \mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)].$$

gdzie macierz $[\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}]$ jest kwadratowa i nieosobliwa (jest dodatnio określona).

Dostajemy stąd wektor optymalnych przyrostów sterowań $\Delta\widehat{U}(k)$:

$$\begin{aligned}\Delta\widehat{U}(k) &= [\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1}\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\ [Y^{zad}(k) - Y^0(k)] \\ &= \mathbf{K}\ [Y^{zad}(k) - Y^0(k)]\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{K} = [\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1}\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_1 \\ \overline{\mathbf{K}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{K}}_{N_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} & \cdots & \mathbf{K}_{1,N} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} & \cdots & \mathbf{K}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_u,1} & \mathbf{K}_{N_u,2} & \cdots & \mathbf{K}_{N_u,N} \end{bmatrix}_{(n_u \cdot N_u)\times(n_y \cdot N)}$$

a każda podmacierz $\mathbf{K}_{i,j}$ jest o wymiarze $n_u \times n_y$.

ANALITYCZNE PRAWO STEROWANIA MPC (z modelem liniowym) 3

Mamy:

$$\Delta\widehat{U}(k) = \mathbf{K}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)]$$

tzn.

$$\begin{bmatrix} \triangle\hat{u}(k|k) \\ \triangle\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \triangle\hat{u}(k+N_u-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_1 \\ \overline{\mathbf{K}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{K}}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) - y^0(k+1|k) \\ y^{zad}(k+2|k) - y^0(k+2|k) \\ \vdots \\ y^{zad}(k+N|k) - y^0(k+N|k) \end{bmatrix}$$

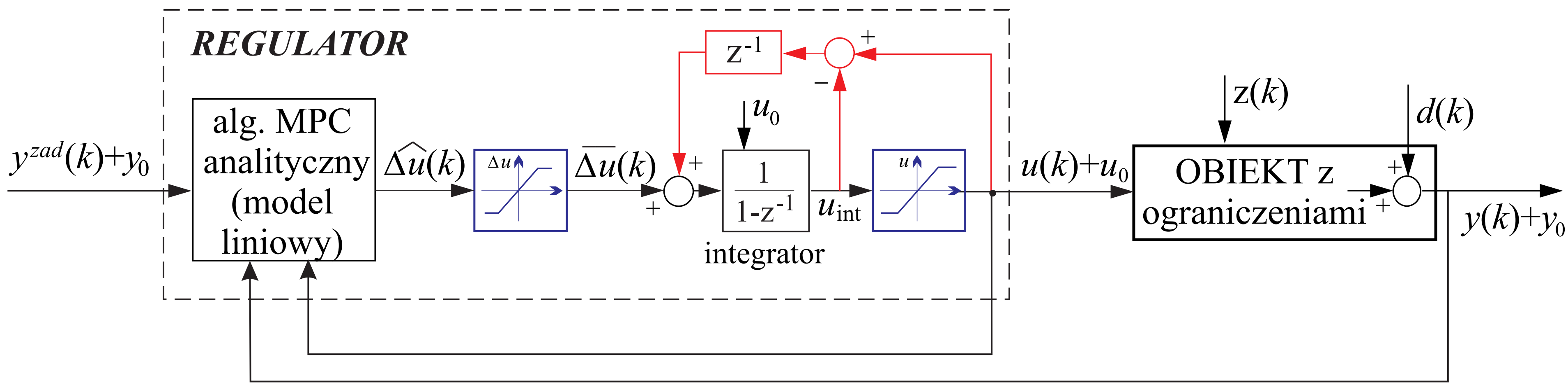
Prawo regulacji MPC (bez uwzględnienia ograniczeń):

$$\triangle u(k) = \triangle\hat{u}(k|k) = \overline{\mathbf{K}}_1[Y^{zad}(k) - Y^0(k)],$$

gdzie $\overline{\mathbf{K}}_1$– macierz o wymiarze $n_u \times (n_y \cdot N)$, złożona z pierwszych n_u wierszy macierzy $\mathbf{K}$.

Sprzężenie zwrotne:
Część swobodna trajektorii wyjść $Y^0(k)$ zależy od zmierzonych wyjść i podanych sterowań procesu: $Y^0(k) = Y^0(y(k), y(k-1), \ldots, u(k-1), u(k-2), \ldots)$ – regulator realizuje sprzężenie zwrotne od wyjść i sterowań procesu (też mierzonych i uwzględnianych w modelu zakłóceń).

Regulator analityczny MPC – przycinanie sterowania do ograniczeń



Regulator MPC z algorytmem analitycznym i z ograniczaniem szybkości zmian i amplitudy sterowania przez przycinanie sygnałów przyrostu sterowania i sterowania, oraz z mechanizmem anti-windup (górna pętla sprzężenia); $u(k), y(k), y^{zad}(k)$ – sygnały przyrostowe wokół punktu pracy (u_0, y_0).

Uwaga 1: Model obiektu liniowy $\equiv$ zlinearyzowany w punkcie pracy (u_0, y_0). Załączamy regulator ze stanem początkowym integratora u_0 (pokazane na rysunku) – realizuje u_0.

Uwaga 2: Realizacja programowa pętli anti-windup jest bardzo prosta: wystarczy integrator (sumator) zrealizować w postaci : $u_{int}(k+1) = (u(k)+u_0) + \overline{\Delta u}(k)$.

Uwaga 3: sprzężenia zwrotne regulatorów MPC są od poprzednich wyjść (lub stanu) obiektu i sterowań (wejść obiektu) – zawsze od ograniczonych sterowań $u(k)$ działających na obiekt (a nie od nieograniczonych wynikających tylko z czystego prawa regulacji).

NUMERYCZNY ALGORYTM MPC z modelem liniowym

Zadanie optymalizacji dynamicznej regulatora MPC:

$$\min_{\triangle U(k)} \left\{ J(k) = \left\| Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M} \triangle U(k) \right\|^2_{\underline{\mathbf{\Psi}}} + \|\triangle U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \right\}$$

$$\text{z ograniczeniami :} \qquad u_{min} \leqslant u(k+p|k) \leqslant u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1$$

$$-\triangle u_{max} \leqslant \triangle u(k+p|k) \leqslant \triangle u_{max}, \quad p = 0, \ldots, N_u - 1$$

$$y_{min} \leqslant y^0(k+p|k) + \mathbf{M}_p \triangle U(k) \leqslant y_{max}, \quad p = 1, \ldots, N$$

należy sprowadzić do postaci standardowej dla zadania programowania kwadratowego (QP, w Matlabie procedura "quadprog"):

$$\min\{J(x) = \frac{1}{2} x^T \mathbf{H} x + f^T x\}$$

$$\text{z ogr.: } x_{\min} \leqslant x \leqslant x_{\max},$$

$$\mathbf{A} x \leqslant b,$$

która rozwiązywana jest w każdej chwili interwencji regulatora (zmiany sterowania).

W tym celu, przyjmując $x = \triangle U(k)$, trzeba odpowiednio przekształcić zapis funkcji celu i ograniczeń, aby wyznaczyć: $\mathbf{H}$, f, x_{min}, x_{max}, $\mathbf{A}$ i b.

NUMERYCZNY ALGORYTM MPC z modelem liniowym 2

Przypomnijmy:

$$Y^{zad}(k) = \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) \\ y^{zad}(k+2|k) \\ \vdots \\ y^{zad}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad Y^0(k) = \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ \vdots \\ y^0(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \triangle U(k) = \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \triangle u(k+1|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix}$$

Funkcja celu: Oznaczając $x = \triangle U(k)$, $E^0(k) = Y^{zad}(k) - Y^0(k)$, mamy:

$$\begin{aligned} J(k) = \left\|E^0(k) - \mathbf{M}x\right\|^2_{\underline{\mathbf{\Psi}}} + \|x\|^2_{\underline{\mathbf{\Lambda}}} &= \left(E^0(k) - \mathbf{M}x\right)^T \underline{\mathbf{\Psi}} \left(E^0(k) - \mathbf{M}x\right) + x^T \underline{\mathbf{\Lambda}} x \\ &= E^0(k)^T \underline{\mathbf{\Psi}} E^0(k) - E^0(k)^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M}x - x^T \mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} E^0(k) + x^T \mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M}x + x^T \underline{\mathbf{\Lambda}} x \\ &= x^T [\mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}] x - 2E^0(k)^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M}x + E^0(k)^T \underline{\mathbf{\Psi}} E^0(k) \\ &= x^T \mathbf{H} x - 2f^T x + E^0(k)^T \underline{\mathbf{\Psi}} E^0(k), \end{aligned}$$

gdzie ostatni składnik jako stały nie wpływa na wynik optymalizacji (może być pominięty).

Ograniczenia wyjść: Definiując wektory $Y_{\max}$ i $Y_{\min}$ o długości $n_y \cdot N$:

$$Y_{\max} = \left.\begin{bmatrix} y_{\max} \\ \vdots \\ y_{\max} \end{bmatrix}\right\} y_{max}\ N \text{ razy}, \quad Y_{\min} = \left.\begin{bmatrix} y_{\min} \\ \vdots \\ y_{\min} \end{bmatrix}\right\} y_{min}\ N \text{ razy}, ,$$

możemy ograniczenia wyjść

$$y_{min} \leqslant y^0(k+p|k) + \mathbf{M}_p \triangle U(k) \leqslant y_{max}, \ p = 1, \ldots, N,$$

zapisać w postaci

$$Y_{\min} \leqslant Y^0(k) + \mathbf{M}\Delta U(k) \leqslant Y_{\max}$$

Ograniczenia szybkości narastania sterowań

Przypomnijmy wektor $\triangle U(k)$ i zdefiniujmy wektor $\Delta U_{\max}$:

$$\triangle U(k) = \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix}, \quad \triangle U_{max} = \left.\begin{bmatrix} \triangle u_{max} \\ \vdots \\ \triangle u_{max} \end{bmatrix}\right\} \triangle u_{max} \ N_u \text{ razy},$$

możemy ograniczenia szybkości narastania sterowań

$$-\triangle u_{\max} \leqslant \triangle u(k+p|k) \leqslant \triangle u_{\max}, \quad p = 0, 1, ..., N_u - 1$$

zapisać w postaci

$$-\Delta U_{\max} \leqslant \Delta U\,(k) \leqslant \Delta U_{\max}.$$

NUMERYCZNY ALGORYTM MPC z modelem liniowym 4

Ograniczenia wartości sterowań:

$$u_{\min} \leqslant u(k+p|k) \leqslant u_{\max}, \quad p = 0, 1, ..., N_u - 1 \quad (u \in \mathbb{R}^{n_u}).$$

Po zdefiniowaniu następujących wektorów granic ograniczeń, o wymiarze $n_u \cdot N_u$,

$$U_{\min} = [\overbrace{u_{\min}^T \quad \cdots \quad u_{\min}^T}^{N_u \text{ razy}}]^T, \quad U_{\max} = [\overbrace{u_{\max}^T \quad \cdots \quad u_{\max}^T}^{N_u \text{ razy}}]^T$$

należy jeszcze wyrazić wartości sterowań poprzez ich przyrosty. Wykorzystując zależność

$$u(k+p|k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{p} \triangle u(k+j|k), \quad p = 0, 1, ..., N_u - 1$$

możemy ograniczenia wartości sterowań zapisać w postaci

$$U_{\min} \leqslant U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U(k) \leqslant U_{\max}$$

gdzie

$$U(k-1) = \left.\begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}\right\} u(k-1)\ N_u \text{ razy}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{N_u \cdot n_u \times N_u \cdot n_u},$$

a każda z macierzy jednostkowych $\mathbf{I}$ jest o wymiarze $n_u \times n_u$.

NUMERYCZNY ALGORYTM MPC z modelem liniowym 5

Reasumując, przyjmując:

$$\begin{aligned} x &= \triangle U(k), \quad x_{\min} = -\triangle U_{\max}, \quad x_{\max} = \triangle U_{\max}, \\ \mathbf{H} &= 2(\mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}), \\ f &= -2\mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} (Y^{zad}(k) - Y^0(k)), \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{J} \\ \mathbf{J} \\ -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -U_{\min} + U(k-1) \\ U_{\max} - U(k-1) \\ -Y_{\min} + Y^0(k) \\ Y_{\max} - Y^0(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dostajemy **zadanie optymalizacji regulatora MPC w postaci standardowej dla zadania programowania kwadratowego**:

$$\min\{J(x) = \frac{1}{2} x^T \mathbf{H} x + f^T x\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami}: \ & x_{\min} \leqslant x \leqslant x_{\max}, \\ & \mathbf{A} x \leqslant b. \end{aligned}$$

Uwaga: macierze $\mathbf{H}$ i $\mathbf{A}$ są stałe i wyznaczamy je ”off-line”, wektory f i b zależą od $Y^0(k)$ i $U(k-1)$ (tj. bieżących danych) – wyznaczamy je ”on-line”, w każdym kroku k regulatora.

PODSUMOWANIE – MPC z modelem liniowym

Reasumując, w każdym kroku regulatora MPC rozwiązywane jest zadanie optymalizacji:

$$\min_{\Delta U(k)} \{\|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Psi}}} + \|\mathbf{\Delta} U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami :} \quad & -\triangle U_{\max} \leqslant \triangle U\,(k) \leqslant \triangle U_{\max} \\ & U_{\min} \leqslant U(k-1) + \mathbf{J}\mathbf{\Delta} U\,(k) \leqslant U_{\max} \\ & Y_{\min} \leqslant Y^0(k) + \mathbf{M}\triangle U(k) \leqslant Y_{\max} \end{aligned}$$

gdzie $Y^0(k)$ zależy od bieżących pomiarów i modelu, a $\mathbf{M}$ od modelu obiektu.

— Jeśli nie uwzględniamy ograniczeń, to wektor optymalnych sterowań dany jest wzorem:

$$\Delta\widehat{U}(k) = [\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1}\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)] = \mathbf{K}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)],$$

a **prawo regulacji MPC** ma postać: $\triangle u(k) = \triangle\hat{u}(k|k) = \overline{\mathbf{K}}_1[Y^{zad}(k) - Y^0(k)]$,
gdzie $\overline{\mathbf{K}}_1$ składa sie z n_u pierwszych wierszy macierzy $\mathbf{K}$.

— Jeśli uwzględniamy ograniczenia, to wektor optymalnych sterowań $\Delta\widehat{U}(k)$ wynika z numerycznego rozwiązania zadania optymalizacji standardową procedurą QP, dla której:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= 2(\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}), \quad f = -2\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}[Y^{zad}(k) - Y^0(k)], \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{J} \\ \mathbf{J} \\ -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -U_{\min} + U(k-1) \\ U_{\max} - U(k-1) \\ -Y_{\min} + Y^0(k) \\ Y_{\max} - Y^0(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ZAPEWNIENIE NIEPUSTOŚCI ZBIORU DOPUSZCZALNEGO

Wartości elementów wektora wyjść prognozowanych $Y^0(k)$ zależą od aktualnych wartości zakłóceń w każdej z kolejnych chwil czasu k, przesuwających granice ograniczeń w zadaniu optymalizacji QP — stąd wpływ zakłóceń może spowodować, że w pewnych chwilach zbiór dopuszczalny zadania QP będzie pusty (może wystąpić jedynie gdy są ograniczenia na sterowania i wyjścia).
Regulator nie będzie w stanie wyznaczyć wartości sterowań – tak się nie może zdarzyć przy sterowaniu w czasie rzeczywistym, muszą być wprowadzone zabezpieczenia.

Prostym sposobem jest potraktowanie ograniczeń wyjść jako ograniczeń miękkich, tzn. takich, które mogą być chwilowo naruszane.
Naruszenia te powinny być jak najmniejsze, stąd zadanie optymalizacji regulatora MPC ma wówczas postać:

$$\min_{\Delta U(k), E_{min}, E_{max}} \{\|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\|^2_{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} + \|\Delta U(k)\|^2_{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} + \rho_m \|E_{min}\|^2 + \rho_{max}\|E_M\|^2\}$$

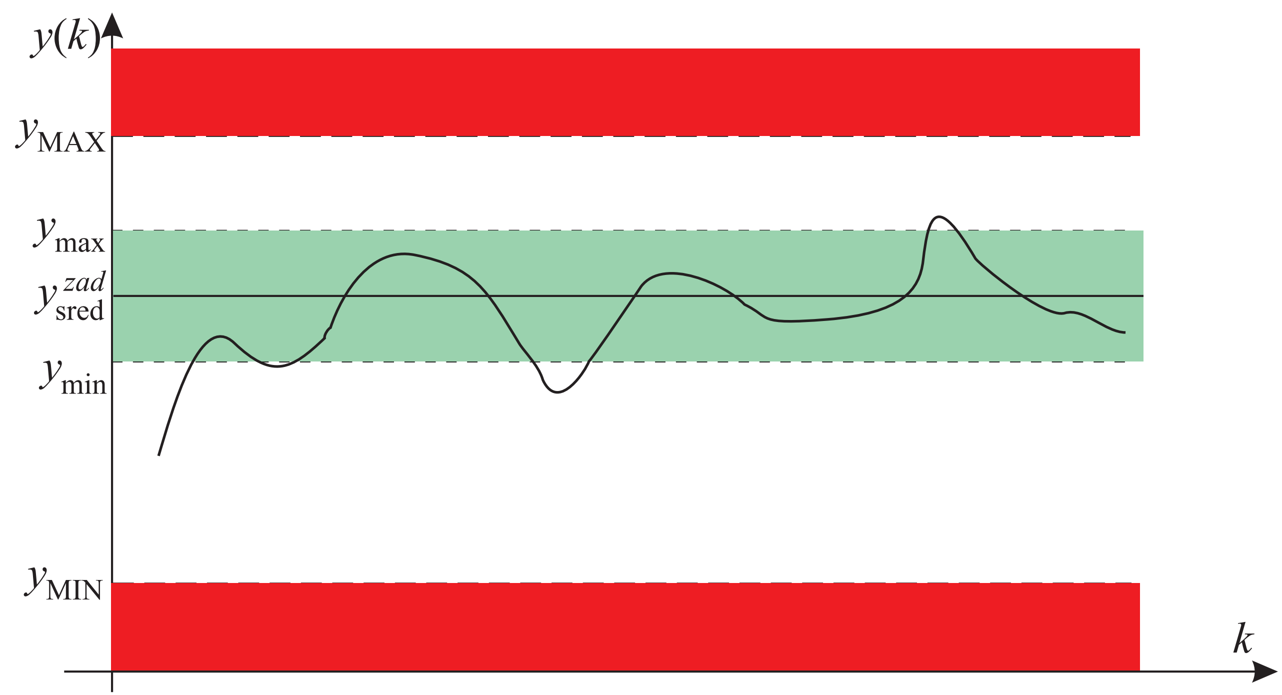
$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami}: \quad & -\triangle U_{\max} \leqslant \triangle U(k) \leqslant \triangle U_{\max}, \\ & U_{\min} \leqslant U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U(k) \leqslant U_{\max}, \\ & -E_{min} + Y_{\min} \leqslant Y^0(k) + \mathbf{M}\triangle U(k) \leqslant Y_{\max} + E_{max}, \\ & E_{min} \geqslant 0, \quad E_{max} \geqslant 0, \end{aligned}$$

gdzie E_{min}, E_{max} są dodatkowymi zmiennymi relaksującymi ograniczenia, a ρ_m, ρ_M współczynnikami kary.
(*Priorytetyzacja ograniczeń, różnicowanie naruszeń i kar w zależności od chwili czasu.*)

REGULACJA ZAKRESOWA (*range control*)

W wielu zastosowaniach wymaganiem jest, aby zmienna regulowana $y(k)$ była nie na określonej wartości zadanej y^{zad}, ale jedynie w określonym zakresie:

$$y_{min} \leqslant y(k) \leqslant y_{max}$$



Przykłady:
- regulacja stężenia chloru w wodzie w punktach odbioru wody komunalnej,
- regulacja poziomu cieczy w zbiorniku buforowym.

Takie zmienne procesowe nazywamy zmiennymi ograniczonymi (*constraint variable* – CV).

REGULACJA ZAKRESOWA (*range control*) 2

Jeśli:

– zdefiniujemy dla zmiennej ograniczonej $y_j(k)$ wartość zadaną jako

$$y_j^{zad}(k) = y_{j,sred}^{zad}(k) = 0.5(y_{j,min} + y_{j,max})$$

– przyjmiemy wartość elementu ψ_j macierzy $\mathbf{\Psi}$ (współczynnika kary) odpowiadającego tej zmiennej na bardzo małej wartości (w stosunku do pozostałych),

to możemy dla takich zmiennych stosować standardową postać zadania optymalizacji MPC, koniecznie z traktowaniem ograniczeń na zmienne wyjściowe, przede wszystkim ograniczeń $y_{min} \leqslant y(k) \leqslant y_{max}$ na zmienne ograniczone CV, jako ograniczenia "miękkie", możliwe do przejściowego naruszania:

$$\min_{\Delta U(k), E_{min}, E_{max}} \{\|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\triangle U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Psi}}} + \|\Delta U(k)\|^2_{\underline{\mathbf{\Lambda}}} + \rho_m \|E_{min}\|^2 + \rho_{max}\|E_{max}\|^2\}$$

$$\begin{aligned} \text{z ograniczeniami :} \quad & -\triangle U_{\max} \leqslant \triangle U\,(k) \leqslant \triangle U_{\max}, \\ & U_{\min} \leqslant U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U\,(k) \leqslant U_{\max}, \\ & -E_{min} + Y_{\min} \leqslant Y^0(k) + \mathbf{M}\triangle U(k) \leqslant Y_{\max} + E_{max}, \\ & 0 \leqslant E_{min} \leqslant Y_{min} - Y_{MIN}, \\ & 0 \leqslant E_{max} \leqslant Y_{MAX} - Y_{max}, \end{aligned}$$

WYZNACZANIE PRAWA STEROWANIA MPC (z modelem liniowym)

Macierz $\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}$ może być źle uwarunkowana numerycznie (szczególnie dla dużych wartości N i małych wartości elementów $\mathbf{\Lambda}$) – wówczas wyznaczanie $\mathbf{K}$ z wzoru $\mathbf{K} = [\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1}\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}$ jest niekorzystne numerycznie.

Zalecane jest wtedy sprowadzenie zadania optymalizacji MPC do postaci LZNK (liniowego zadania najmniejszych kwadratów) i wykorzystanie dekompozycji QR (lub SVD).

Sprowadzenie zadania optymalizacji MPC do postaci LZNK:
Ponieważ $\underline{\mathbf{\Psi}} \geqslant 0$, $\underline{\mathbf{\Lambda}} > 0$ i są diagonalne, to można je przedstawić w postaci

$$\underline{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{S}_\Psi^T\mathbf{S}_\Psi, \quad \underline{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{S}_\Lambda^T\mathbf{S}_\Lambda \quad (\, \mathbf{S}_\Psi = \sqrt{\underline{\mathbf{\Psi}}}, \;\; \mathbf{S}_\Lambda = \sqrt{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\,).$$

Funkcja kryterialna $J(k)$ może być wówczas zapisana w postaci

$$\begin{aligned} J(k) &= \big(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\,\triangle U(k)\big)^T\mathbf{S}_\Psi^T \cdot \mathbf{S}_\Psi \big(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\,\triangle U(k)\big) + \\ &\qquad + \triangle U(k)^T\mathbf{S}_\Lambda^T \cdot \mathbf{S}_\Lambda \triangle U(k) \\ &= \left\|\mathbf{S}_\Psi \left(Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\,\triangle U(k)\right)\right\|^2 + \|\mathbf{S}_\Lambda \triangle U(k)\|^2 \\ &= \left\|\begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \left(Y^{zad}(k) - \mathbf{M}\,\triangle U(k) - Y^0(k)\right) \\ \mathbf{S}_\Lambda \triangle U(k) \end{bmatrix}\right\|^2 \\ &= \left\|\begin{bmatrix} -\mathbf{S}_\Psi\mathbf{M}\,\triangle U(k) + \mathbf{S}_\Psi \left(Y^{zad}(k) - Y^0(k)\right) \\ \mathbf{S}_\Lambda \triangle U(k) - 0 \end{bmatrix}\right\|^2 \end{aligned}$$

WYZNACZANIE PRAWA STEROWANIA MPC (z modelem liniowym) 2

Funkcję celu zadania minimalizacji MPC możemy więc zapisać w postaci:

$$J(k) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \mathbf{M} \triangle U(k) - \mathbf{S}_\Psi \left(Y^{zad}(k) - Y^0(k) \right) \\ \mathbf{S}_\Lambda \triangle U(k) - 0 \end{bmatrix} \right\|^2,$$

czyli minimalizacja $J(k)$ jest rozwiązaniem metodą najmniejszych kwadratów równania wektorowego (układ m równań z n niewiadomymi, $m > n$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \mathbf{M} \\ \mathbf{S}_\Lambda \end{bmatrix} \triangle U(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \left(Y^{zad}(k) - Y^0(k) \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}x = b \quad (x = \triangle U(k))$$

Dla przypadku gdy $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$, $\mathbf{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}$ mamy: $\mathbf{S}_\Psi = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}_\Lambda = \sqrt{\lambda}\mathbf{I}$, czyli równanie ma postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \triangle U(k) = \begin{bmatrix} (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}x = b$$

ROZKŁAD QR, rozwiązanie LZNK przy pełnym rzędzie macierzy*)

Twierdzenie (rozkład QR wąski):
Macierz $\mathbf{A}_{m \times n}$ $(m \geqslant n)$ pełnego rzędu (równego n) można przedstawić w postaci iloczynu macierzy:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{Q}_{m \times n} \mathbf{R}_{n \times n},$$

gdzie:
– macierz $\mathbf{Q}_{m \times n}$ spełnia $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n \times n}$ (tzn. ma kolumny wzajemnie ortonormalne),
– macierz $\mathbf{R}_{n \times n}$ trójkątna górna o dodatnich elementach na diagonali (stąd nieosobliwa).

Twierdzenie (rozwiązanie LZNK przy pełnym rzędzie macierzy)*):
Jeśli macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geqslant n$, jest pełnego rzędu (równego n), to rozwiązanie układu m równań liniowych $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ metodą najmniejszych kwadratów można uzyskać poprzez:

1. rozwiązanie układu n równań normalnych:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} x = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} b,$$

2. rozwiązanie układu n równań z kwadratową, nieosobliwą macierzą $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} x = \mathbf{Q}^T b,$$

gdzie $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ są macierzami rozkładu QR (wąskiego) macierzy $\mathbf{A}$.

Uwaga: $\mathrm{cond}(\mathbf{R}) = \mathrm{cond}(\mathbf{A})$, $\mathrm{cond}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = (\mathrm{cond}(\mathbf{A}))^{\mathbf{2}}$!

*) *zob. np. P. Tatjewski: "Metody numeryczne", Oficyna Wydawn. PW, 2013*.

ROZKŁAD QR, rozwiązanie LZNK metodą rozkładu QR 2$^{*)}$

Dowód twierdzenia o rozwiązaniu LZNK przy pełnym rzędzie macierzy:

LNZK jest zadaniem minimalizacji następującej funkcji kwadratowej:

$$J(x) = \|\mathbf{A}x - b\|^2 = (\mathbf{A}x - b)^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}x - b) = x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x - 2x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}b + b^{\mathrm{T}}b.$$

Warunek konieczny minimum tej funkcji– zerowanie jej gradientu:

$$\nabla J(x) = J^{'}(x)^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x - 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}b = 0,$$

stąd wynika układ równań liniowych (zwany układem równań normalnych): $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}b.$

$$(\text{co odpowiada uzyskanemu uprzednio wzorowi, macierz } \mathbf{K} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

Korzystając z rozkładu wąskiego $\mathbf{QR}$ macierzy $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ $(\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{Q}_{m\times n}\mathbf{R}_{n\times n})$, układ równań normalnych możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{QR}x = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}x = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}b,$$

gdyż $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Ponieważ macierz $\mathbf{R}$ jest nieosobliwa, to mnożąc obie strony lewostronnie przez $(\mathbf{R}^{T})^{-1}$, dostajemy następujący dobrze określony układ równań liniowych

$$\mathbf{R}x = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}b, \quad (\text{co odpowiada macierzy } \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})$$

co było do wykazania.

$^{*)}$*materiał uzupełniający*

WYZNACZANIE PRAWA STEROWANIA MPC (z modelem liniowym) 3

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \mathbf{M} \\ \mathbf{S}_\Lambda \end{bmatrix} \triangle U(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \triangle U(k) = b \qquad (*)$$

Macierz $\mathbf{\Lambda}$ (czy $\lambda \mathbf{I}$) jest nieosobliwa, stąd macierz (kwadratowa) $\mathbf{S}_\Lambda = \sqrt{\mathbf{\Lambda}}$ (czy $\sqrt{\lambda}\mathbf{I}$) jest też nieosobliwa (pełnego rzędu), a stąd macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi \mathbf{M} \\ \mathbf{S}_\Lambda \end{bmatrix}$ jest też pełnego rzędu.

Dokonując rozkładu QR (wąskiego) macierzy $\mathbf{A}$ (np w Matlabie: [Q,R]=qr(A,0);) mamy:

$$\mathbf{QR} \cdot \triangle U(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd wektor optymalnych sterowań regulatora MPC jest rozwiązaniem układu równań:

$$\mathbf{R} \cdot \triangle U(k) = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla wyznaczenia macierzy $\mathbf{K}$ mnożymy obie strony przez $\mathbf{R}^{-1}$ ($\mathbf{R}$ jest nieosobliwa), skąd:

$$\begin{aligned} \triangle \widehat{U}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ 0 \end{bmatrix} &= [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k))_{N \cdot n_y \times 1} \\ 0_{N_u n_u \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_\Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)), \ (\mathbf{P}_1)_{N_u \cdot n_u \times N \cdot n_y} \end{aligned}$$

Stąd $\mathbf{K} = \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_\Psi$ $\;(\text{dla } \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} : \ \mathbf{K} = \mathbf{P}_1\ ), \ \triangle u(k) = \overline{\mathbf{K}}_1 [Y^{zad}(k) - Y^0(k)]$.

($\mathbf{K}$ *można też wyznaczyć rozwiązując równanie* $(*)$ *metodą rozkładu SVD macierzy* $\mathbf{A}$.)

WYZNACZANIE PRAWA STEROWANIA MPC (z modelem liniowym) 4

Wyznaczanie macierzy wzmocnień regulatora analitycznego – PODSUMOWANIE:

Sprawdzamy uwarunkowanie numeryczne macierzy $\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}$ dla przewidywanych wartości współczynników kary $\lambda_i,\ i=1,\ldots,n_u$ (np. w Matlabie instrukcją cond).

a) Jeśli macierz jest dobrze uwarunkowana, to możemy skorzystać z wzoru:

$$\mathbf{K}=[\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1}\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}$$

b) Jeśli macierz jest źle uwarunkowana (sprawdzić szczególnie dla długich horyzontów i małych wartości elementów diagonalnych macierzy $\mathbf{\Lambda}$), to

1. Tworzymy macierze $\mathbf{S}_\Psi=\sqrt{\underline{\mathbf{\Psi}}},\ \ \mathbf{S}_\Lambda=\sqrt{\underline{\mathbf{\Lambda}}}$ (tzn. $\underline{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{S}_\Psi^T\mathbf{S}_\Psi,\ \underline{\mathbf{\Lambda}}=\mathbf{S}_\Lambda^T\mathbf{S}_\Lambda$),
2. Tworzymy macierz
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_\Psi\mathbf{M}\\ \mathbf{S}_\Lambda\end{bmatrix}_{(N\cdot n_y+N_u\cdot n_u)\times N_u\cdot n_u},$$
3. Dokonujemy rozkładu (wąskiego) $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$ (np. w Matlabie: [Q,R]=qr(A,0)),
4. Wyznaczamy macierz:
$$[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T]_{N_u\cdot n_u\times(N\cdot n_y+N_u\cdot n_u)}=[(\mathbf{P}_1)_{N_u\cdot n_u\times N\cdot n_y}\ (\mathbf{P}_2)_{N_u\cdot n_u\times N_u\cdot n_u}]$$
5. Wyznaczamy macierz $\mathbf{K}=\mathbf{P}_1\mathbf{S}_\Psi$ $(\text{dla } \mathbf{\Psi}=\mathbf{I}:\ \mathbf{K}=\mathbf{P}_1\ )$;
macierz wzmocnień regulatora $\overline{\mathbf{K}}_1$ to n_u pierwszych wierszy macierzy $\mathbf{K}$.

Przykład, kolumna Wood-Berry (obiekt MIMO 2x2)

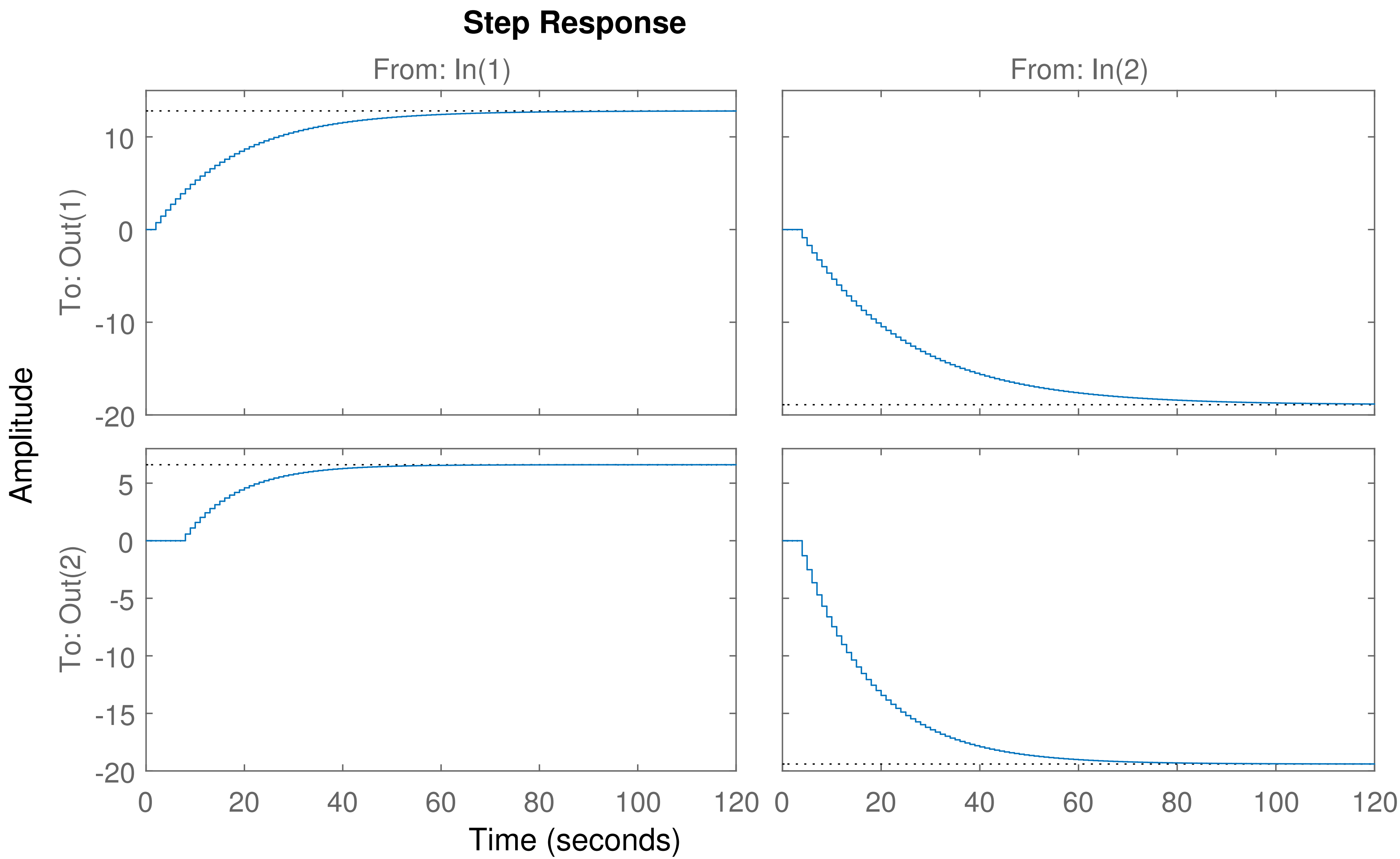
Przypomnijmy model kolumny destylacyjnej metanol-woda, zlinearyzowany w punkcie pracy (**Wood and Berry, 1973**) –
– model obiektu MIMO o 2 wejściach ($n_u = 2$) i 2 wyjściach ($n_y = 2$) oraz jednym zakłóceniu:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \dfrac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \dfrac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \dfrac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{3.8e^{-8s}}{14.9s+1} \\ \dfrac{4.9e^{-3s}}{13.2s+1} \end{bmatrix} F(s)$$

Dyskretyzując model ciągły (Matlab funkcja ”c2d”) z okresem próbkowania $Tp = 1$ (ze względu na wartości opóźnień) dostajemy:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.744z^{-1}}{z-0.9419} & \dfrac{-0.8789z^{-3}}{z-0.9535} \\ \dfrac{0.5786z^{-7}}{z-0.9123} & \dfrac{-1.302z^{-3}}{z-0.9329} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{0.2467z^{-8}}{z-0.9351} \\ \dfrac{0.3575z^{-3}}{z-0.927} \end{bmatrix} F(z)$$

Przykład, kolumna Wood-Berry (2)



Przykład, kolumna Wood-Berry (3)

Projektując regulator DMC (jeden z przykładów na następnym wykładzie) przyjęto $N = 30$, $N_u = 10$; przy $n_y = 2$, $n_u = 2$ daje to wymiar 60×20 macierzy dynamicznej $\mathbf{M}$, a macierz $\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}$ jest wymiaru 20×20.

Projektowanie doprowadziło też do przyjęcia wartości $\psi_1 = 1, \psi_2 = 1$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$. Dla takich parametrów mamy uwarunkowania:

- $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}) = \mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) = 1.69 \cdot 10^6$,
- $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\underline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = \mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 5.15 \cdot 10^4$.

Zmieniając współczynniki kary mielibyśmy:

- Dla $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$: $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 5.19 \cdot 10^4$,
- Dla $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.1$: $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 4.07 \cdot 10^5$.

Zmieniając horyzonty predykcji i sterowania (przy $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$) mielibyśmy:

- Dla $N = 20$, $N_u = 10$: $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) = 4.65 \cdot 10^5$, $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 1.4 \cdot 10^4$,
- Dla $N = 30$, $N_u = 5$: $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) = 4.73 \cdot 10^5$, $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 3.1 \cdot 10^4$,
- Dla $N = 10$, $N_u = 3$: $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) = 5.15 \cdot 10^3$, $\mathrm{cond}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\underline{\mathbf{\Lambda}}) = 6.1 \cdot 10^2$.