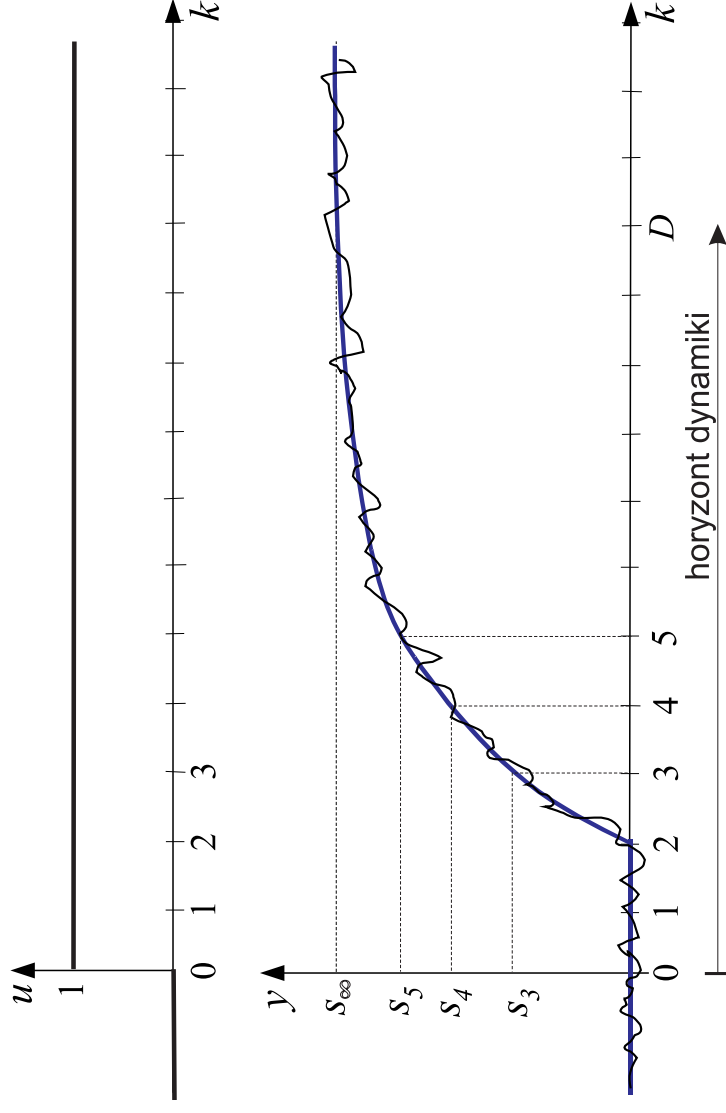


Dyskretna odpowiedź skokowa

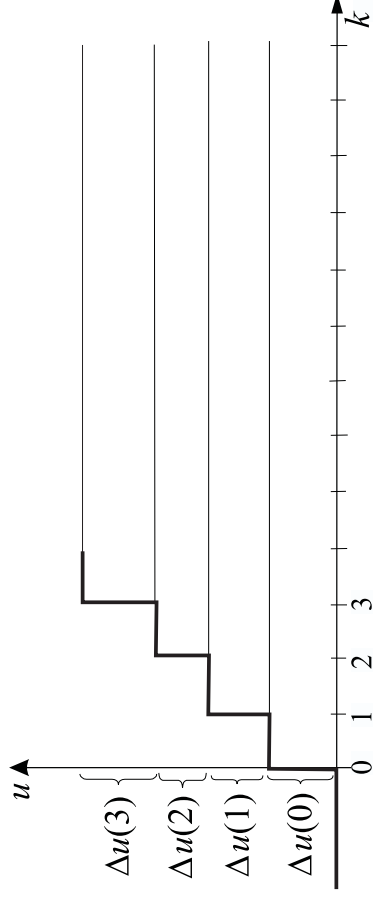


Przykład odpowiedzi wyjścia obiektu y na skok sterowania u , dla obiektu jednoinercyjnego z opóźnieniem $\tau = 2T_p$, gdzie T_p – okres próbkowania.

D – horyzont dynamiki, tzn. można przyjąć: $s_k = s_\infty$ dla $k \geq D$.

Model obiektu SISO w postaci dyskretnej odpowiedzi skokowej

Znając dyskretną odpowiedź skokową obiektu $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ można modelować dyskretną odpowiedź wyjścia na dowolne sterowanie dyskretne (schodkowe):
traktujemy sygnał schodkowy jako sumę skoków rozpoczynających się w kolejnych chwilach, o różnych amplitudach:



Korzystając z zasady superpozycji możemy napisać:

$$y(1) = y(0) + s_1 \Delta u(0),$$

$$y(2) = y(0) + s_2 \Delta u(0) + s_1 \Delta u(1),$$

$$y(3) = y(0) + s_3 \Delta u(0) + s_2 \Delta u(1) + s_1 \Delta u(2),$$

$$y(4) = y(0) + s_4 \Delta u(0) + s_3 \Delta u(1) + s_2 \Delta u(2) + s_1 \Delta u(3),$$

itd., czyli

$$y(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Model obiektu SISO w postaci dyskretnej odpowiedzi skokowej (2)

$$y(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

W DMC estymata zakłócenia niemierzalnego $d(k)$ w chwili k : różnica wartości zmierzonej $y(k)$ i wartości wyliczanej z modelu w chwili $k-1$ na chwilę k :

$$d(k) = y(k) - [y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j)].$$

W DMC zakłada się brak wiedzy o zmianach wartości zakłócenia na horyzoncie predykcji, stąd model zakłócenia (zwany często *modelem zakłócenia typu DMC*):

$$d(k+1|k) = d(k+2|k) = \dots = d(k+N|k) = d(k),$$

tn. dla predykcji przyjmujemy stałe zakłócenie, równe wyznaczonemu w chwili k .

Stąd **predykcja na chwilę $k+p$** :

$$y(k+p|k) = y(0) + \sum_{j=1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) + d(k), \quad \text{ale :}$$

dla $p-j < 0$: $\Delta u(k+p-j)$ to znane przyrosty z poprzednich chwil (przeszłość),

dla $p-j \geq 0$: $\Delta u(k+p-j)$ to przyrosty wyznaczone w chwili k : $\Delta u(k+p-j|k)$. Stąd:

$$y(k+p|k) = y(0) + \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + \sum_{j=p+1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) + d(k).$$

Model obiektu SISO w postaci dyskretnej odpowiedzi skokowej (3)

Mamy:

$$d(k) = y(k) - [y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j)]$$

$$y(k+p|k) = y(0) + \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + \sum_{j=p+1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) + d(k).$$

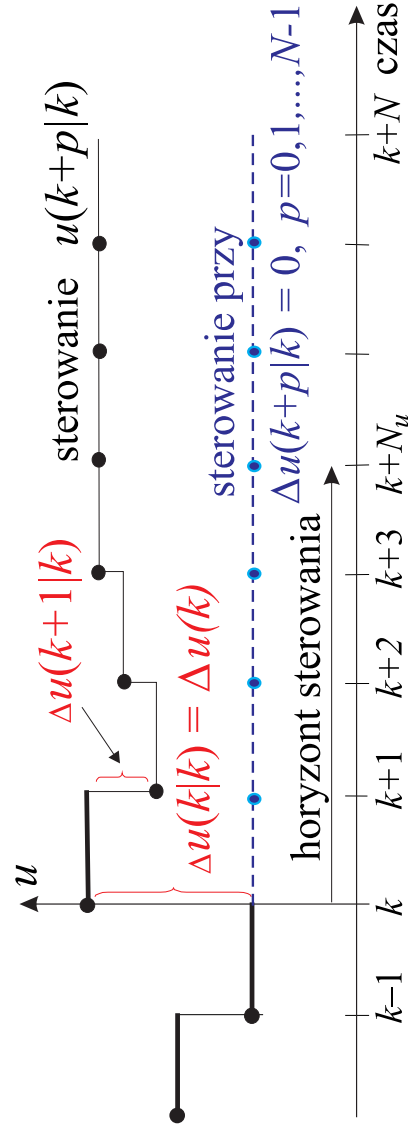
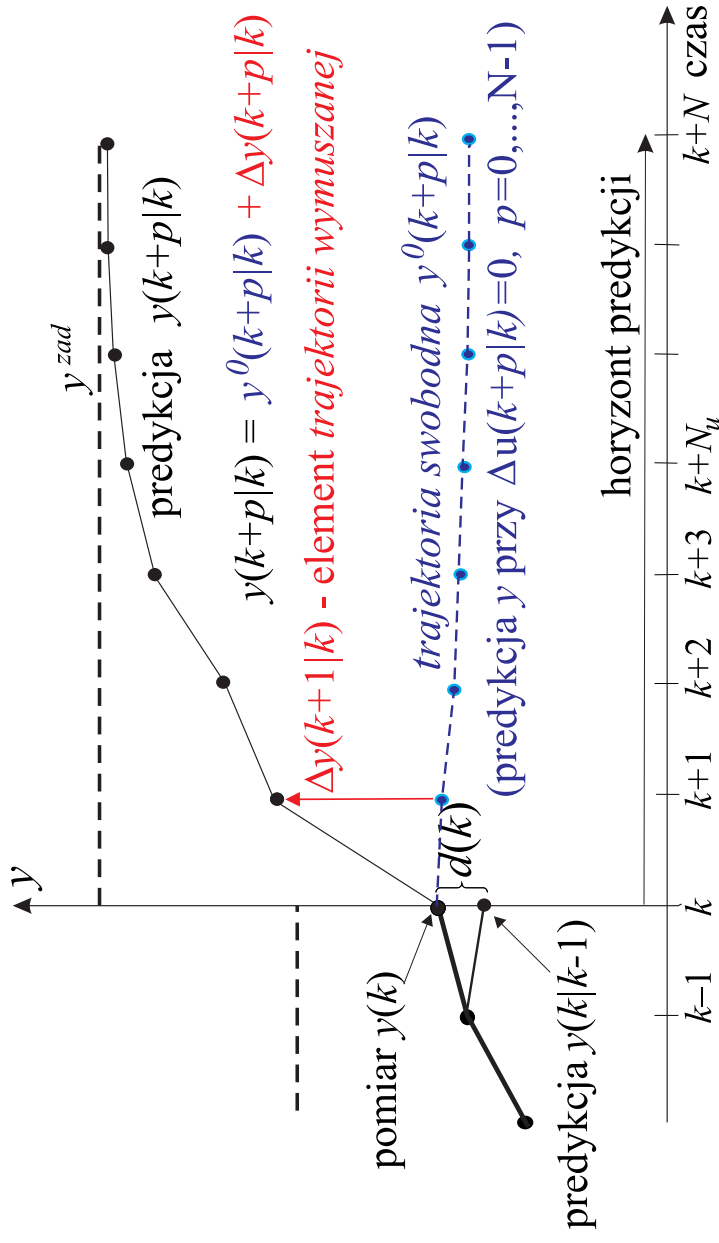
Wstawiając pierwsze równanie do drugiego:

$$y(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + \sum_{j=p+1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) - \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j), \quad p = 1, \dots, N$$

Przekształcając:

$$\begin{aligned} y(k+p|k) &= \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + y(k) + \sum_{j=1}^k s_{j+p} \Delta u(k-j) - \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j) \\ &= \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + y(k) + \sum_{j=1}^k (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k-j) \\ &= \Delta y(k+p|k) + y^0(k+p|k), \quad p = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Zasada regulacji predykcyjnej– z modelem liniowym

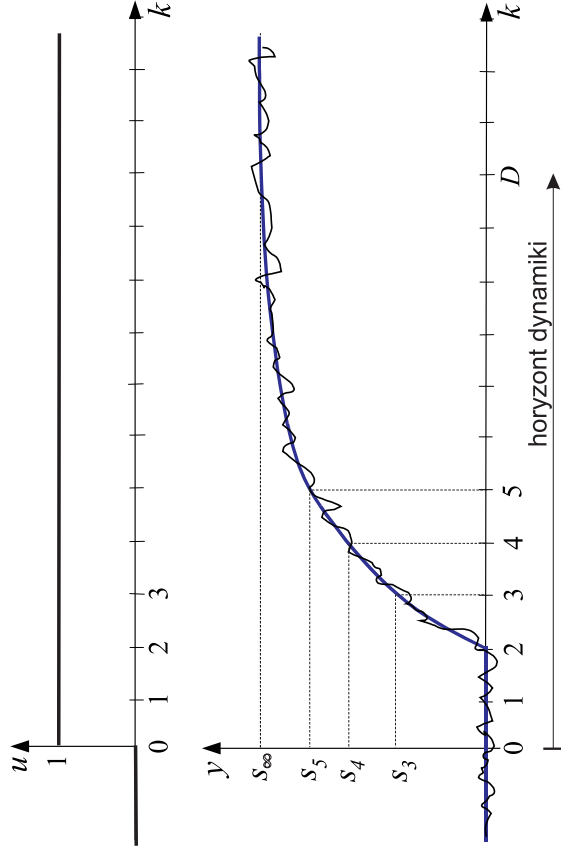


Model obiektu SISO w postaci dyskretnej odpowiedzi skokowej (4)

Mamy:

$$\Delta y(k+p|k) = \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k)$$

$$y^0(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^k (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k-j)$$



D – horyzont dynamiki,
tzn. można przyjąć:
 $s_k = k_m = s_\infty$ dla $k \geq D$.

Stąd:

$$s_{j+p} - s_j = 0 \text{ dla } j \geq D,$$

czyli:

$$y^0(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^{D-1} (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k-j), \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Model MIMO w postaci macierzy dyskretnych odpowiedzi skokowych

Rozważamy obiekt wielowymiarowy (MIMO – *Multi-Input Multi-Output*)

– o n_y wyjściach: $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n_y}]^T \in \mathbb{R}^{n_y}$ oraz

– o n_u sterowaniach: $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$.

Skokowi j -tego sterowania u_j (przy pozostałych sterowaniach ustalonych) odpowiadaj odpowiedzi skokowe $s^{ij} = [s_1^{ij} \ s_2^{ij} \ \dots \ s_D^{ij}]$ na wszystkich wyjściach y_i , $i = 1, \dots, n_y$ – stąd **obiekt MIMO jest modelowany przez zestaw $n_y \cdot n_u$ skończonych odpowiedzi skokowych $s^{ij} = [s_1^{ij} \ s_2^{ij} \ \dots \ s_D^{ij}]$** , gdzie indeks i określa numer zmiennej wyjściowej, $i = 1, \dots, n_y$, a indeks j numer sterowania, $j = 1, \dots, n_u$.

Model ten wygodnie jest przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{S}_l = \begin{bmatrix} s_l^{11} & s_l^{12} & s_l^{13} & \dots & s_l^{1n_u} \\ s_l^{21} & s_l^{22} & s_l^{23} & \dots & s_l^{2n_u} \\ s_l^{31} & s_l^{32} & s_l^{33} & \dots & s_l^{3n_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_l^{n_y 1} & s_l^{n_y 2} & s_l^{n_y 3} & \dots & s_l^{n_y n_u} \end{bmatrix}_{n_y \times n_u}, \quad l = 1, 2, \dots, D,$$

gdzie każda z macierzy \mathbf{S}_l składa się z odpowiadających chwili l współczynników s_l^{ij} wszystkich odpowiedzi skokowych, $i = 1, 2, \dots, n_y$, $j = 1, 2, \dots, n_u$.

Model obiektu jest reprezentowany przez D macierzy \mathbf{S}_l o wymiarze $n_y \times n_u$ – zamiast przez $n_y \cdot n_u$ pojedynczych odpowiedzi skokowych (wektorów o wymiarze D).

Model MIMO w postaci macierzy dyskretnych odpowiedzi skokowych (2)

Zestaw macierzy \mathbf{S}_l można traktować jako **wielowymiarową macierzową odpowiedź skokową** $\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_D\}$.

Wszystkie wzory uzyskane dla obiektu SISO bezpośrednio przenoszą się na przypadek obiektu MIMO, jedynie zamiast każdego ze składowych współczynników s_l pojedynczej odpowiedzi skokowej należy podstawiać macierz \mathbf{S}_l , $l = 1, 2, \dots, D$.

Stąd, zależności opisujące elementy trajektorii swobodnej i **trajektorii wymuszanej** wyjść przewidywanych są dla obiektu MIMO postaci:

$$y^0(k + p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^{D-1} (\mathbf{S}_{j+p} - \mathbf{S}_j) \Delta u(k - j), \quad p = 1, 2, \dots, N,$$
$$\Delta y(k + p|k) = \sum_{j=1}^p \mathbf{S}_j \Delta u(k + p - j|k), \quad p = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie zmienne wyjściowe i sterowania są teraz wektorami:

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_{n_y}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_{n_u}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_u}.$$

DMC - trajektoria wymuszana wyjść predykowanych

Mamy:

$$\Delta y(k + p|k) = \sum_{j=1}^p \mathbf{S}_j \Delta u(k + p - j|k), \quad p = 1, 2, \dots, N,$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} \Delta y(k + 1|k) \\ \Delta y(k + 2|k) \\ \Delta y(k + 3|k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta y(k + N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{N_u} & \mathbf{S}_{N_u-1} & \mathbf{S}_{N_u-2} & \dots & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_{N_u+1} & \mathbf{S}_{N_u} & \mathbf{S}_{N_u-1} & \dots & \mathbf{S}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_{N-1} & \mathbf{S}_{N-2} & \dots & \mathbf{S}_{N-N_u+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k + 1|k) \\ \Delta u(k + 2|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix}.$$

tn. trajektoria wymuszana wyjść predykowanych:

$$\Delta Y(k) = \mathbf{M} \cdot \Delta U(k),$$

gdzie $\mathbf{M}_{(N \cdot n_y) \times (N_u \cdot n_u)}$ – macierz dynamiczna (*dynamic matrix*)

DMC - trajektoria wymuszana wyjść predykowanych (2)

Na przykład, w przypadku obiektu SISO oraz $N = 6$ i $N_u = 3$, dostajemy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \\ s_5 & s_4 & s_3 \\ s_6 & s_5 & s_4 \end{bmatrix} \cdot$$

Mamy więc trajektorię wymuszaną:

$$\begin{bmatrix} \Delta y(k+1|k) \\ \Delta y(k+2|k) \\ \Delta y(k+3|k) \\ \Delta y(k+4|k) \\ \Delta y(k+5|k) \\ \Delta y(k+6|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \\ s_5 & s_4 & s_3 \\ s_6 & s_5 & s_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \Delta u(k+2|k) \end{bmatrix}$$

Macierz \mathbf{M} ma charakterystyczną postać *macierzy Toeplitza*: każda kolejna kolumna jest przesuniętą o jedną pozycję w dół kolumną poprzednią, z wypełnieniem powstającego w pierwszym wierszu wolnego miejsca zerem.

DMC - trajektoria swobodna wyjść predykowanych

Mamy:

$$y^0(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^{D-1} (\mathbf{S}_{j+p} - \mathbf{S}_j) \Delta u(k-j), \quad p = 1, 2, \dots, N,$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ \vdots \\ y^0(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{S}_D - \mathbf{S}_{D-1} \\ \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{S}_{D+1} - \mathbf{S}_{D-1} \\ \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{S}_{D+2} - \mathbf{S}_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{N+1} - \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_{N+2} - \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_{N+3} - \mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{S}_{N+D-1} - \mathbf{S}_{D-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(D-1)) \end{bmatrix}$$

Czyli w zwartym zapisie, trajektoria swobodna wyjść predykowanych :

$$Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \cdot \Delta U^P(k),$$

gdzie

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^P = \mathbf{M}_{(N \cdot n_y) \times ((D-1) \cdot n_u)}^P, \quad \Delta U^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(D-1)) \end{bmatrix}$$

Regulatory DMC

Regulator numeryczny DMC:

w każdym kroku rozwiązywane jest zadanie optymalizacji:

$$\min_{\Delta U(k)} \{ \|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \mathbf{M}\Delta U(k)\|_{\underline{\Psi}}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\underline{\Lambda}}^2 \}$$

z ograniczeniami : $-\Delta U_{\max} \leq \Delta U(k) \leq \Delta U_{\max}$

$$U_{\min} \leq U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U(k) \leq U_{\max}$$

$$Y_{\min} \leq Y^0(k) + \mathbf{M}\Delta U(k) \leq Y_{\max}$$

gdzie

$$Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \cdot \Delta U^P(k)$$

zależy od bieżących pomiarów i modelu, a \mathbf{M} od modelu obiektu.

Regulator analityczny DMC:

nie uwzględniamy ograniczeń przy wyznaczeniu wektora optymalnych sterowań:

$$\Delta \hat{U}(k) = [\mathbf{M}^T \underline{\Psi} \mathbf{M} + \underline{\Lambda}]^{-1} \mathbf{M}^T \underline{\Psi} \cdot [Y^{zad}(k) - Y^0(k)] = \mathbf{K} \cdot [Y^{zad}(k) - Y^0(k)],$$

stąd **prawo regulacji DMC** ma postać:

$$\Delta u(k) = \Delta \hat{u}(k|k) = \overline{\mathbf{K}}_1 \cdot [Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \cdot \Delta U^P(k)],$$

gdzie $\overline{\mathbf{K}}_1$ składa się z n_u pierwszych wierszy macierzy \mathbf{K} .

Regulator analityczny DMC – struktura

Prawo regulacji:

$$\Delta u(k) = \bar{\mathbf{K}}_1 \cdot [Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \cdot \Delta U^P(k)],$$

Przedstawiając:

$$\mathbf{M}^P = [\mathbf{M}_1^P \ \mathbf{M}_2^P \ \dots \ \mathbf{M}_{D-1}^P],$$

gdzie każda podmacierz \mathbf{M}_j^P jest wymiaru $(n_y \cdot N) \times n_u$,

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = [\mathbf{K}_{1,1} \ \mathbf{K}_{1,2} \ \dots \ \mathbf{K}_{1,N}],$$

gdzie każda podmacierz $\mathbf{K}_{i,j}$ jest wymiaru $n_u \times n_y$, możemy zapisać prawo regulacji w postaci

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + \bar{\mathbf{K}}_1 [Y^{zad}(k) - Y(k)] - \sum_{j=1}^{D-1} (\bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}_j^P) \Delta u(k-j) \\ &= u(k-1) + \sum_{p=1}^N \mathbf{K}_{1,p} [y^{zad}(k+p|k) - y(k)] - \sum_{j=1}^{D-1} \mathbf{K}_j^u \Delta u(k-j) \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{K}_j^u = \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}_j^P, \quad j = 1, 2, \dots, D-1, \quad \text{jest wymiaru } n_u \times n_u.$$

Jeśli

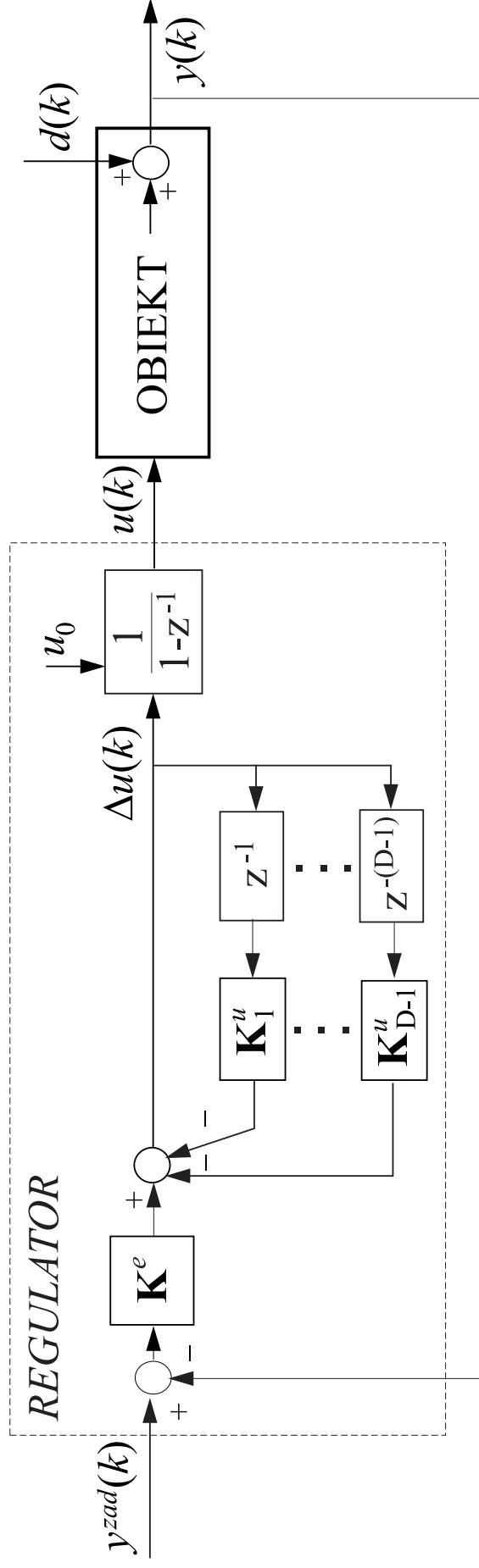
$$y^{zad}(k+1|k) = y^{zad}(k+2|k) = \dots = y^{zad}(k+N|k) = y^{zad}(k),$$

to prawo regulacji upraszcza się do postaci

$$u(k) = u(k-1) + \mathbf{K}^e [y^{zad}(k) - y(k)] - \sum_{j=1}^{D-1} \mathbf{K}_j^u \Delta u(k-j), \quad \text{gdzie } \mathbf{K}^e = \sum_{p=1}^N \mathbf{K}_{1,p}.$$

Regulator analityczny DMC – struktura (2)

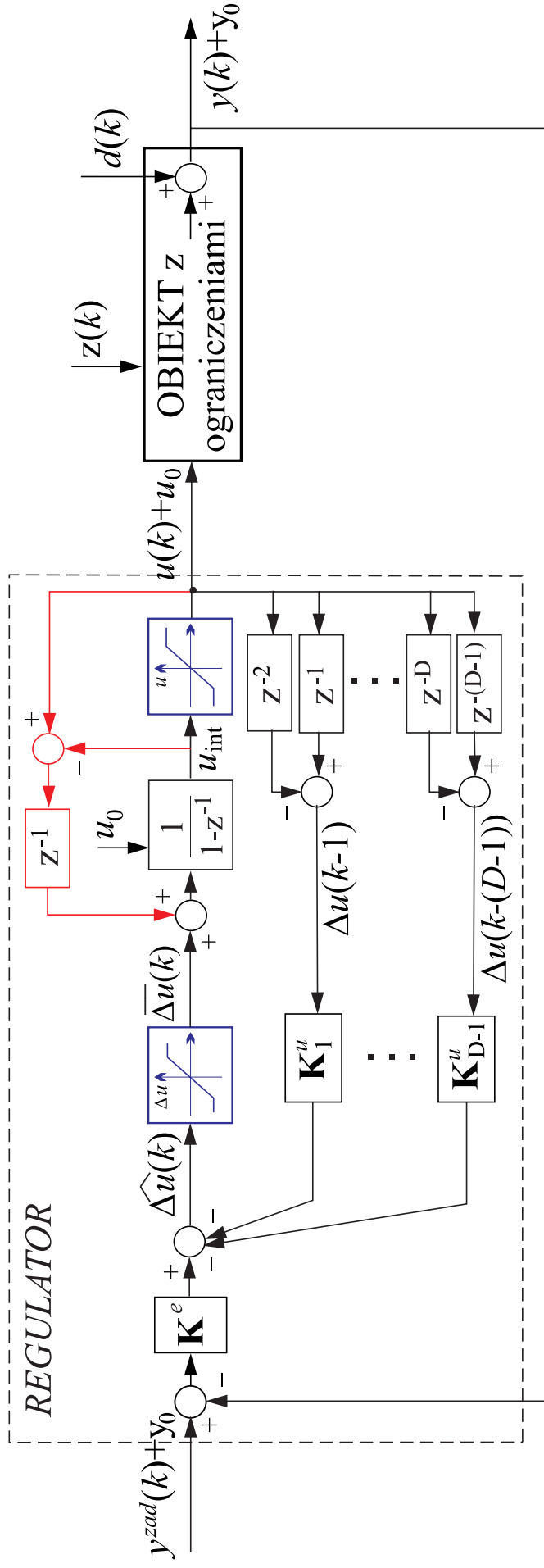
$$u(k) = u(k-1) + \mathbf{K}^e [y^{zad}(k) - y(k)] - \sum_{j=1}^{D-1} \mathbf{K}_j^u \Delta u(k-j)$$



Struktura analitycznego (bez ograniczeń) regulatora DMC, dla wartości zadanej ustalonej na horyzoncie predykcji na wartości $y^{zad}(k)$.

Punkt pracy (punkt w którym wyznaczona odpowiedź skokowa): (u_0, y_0) , załączamy regulator ze stanem początkowym integratora u_0 (pokazane na rysunku).

Regulator analityczny DMC – przycinanie sterowania do ograniczeń



Struktura układu regulacji z analitycznym regulatorem DMC i z uwzględnieniem informacji o ograniczeniach szybkości zmian i amplitudy sterowania **przez przycinanie sygnałów przyrostu sterowania i amplitudy sterowania**, oraz z **mechanizmem anti-windup (górna pętla sprzężenia)**

Uwaga: sprzężenia zwrotne regulatora są **od ograniczonych sterowań $u(k)$ podawanych na obiekt**, a nie od nieograniczonych przyrostów $\Delta \hat{u}(k)$ wyznaczonych prawem regulacji.

Punkt pracy (punkt w którym wyznaczona odpowiedź skokowa): (u_0, y_0) , załączamy regulator (sumator) ze stanem początkowym u_0 (pokazane na rysunku).

Regulator analityczny DMC – przykład SISO

Obiekt SISO opisany modelem w postaci odpowiedzi skokowej

$$\frac{s_1 \mid s_2 \mid s_3 \mid s_4 \mid s_5 \mid s_6}{0 \mid 0 \mid 0.2 \mid 0.5 \mid 0.6 \mid 0.62} \quad (D = 6).$$

Przyjmujemy horyzonty: $N = 6, N_u = 3$.

Predykcja wyjść zależna od przeszłych sterowań, $Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)$:

$$\begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ y^0(k+4|k) \\ y^0(k+5|k) \\ y^0(k+6|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \mathbf{M}^P \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \\ \Delta u(k-4) \\ \Delta u(k-5) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & s_4 - s_3 & \dots & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.02 \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & s_5 - s_3 & \dots & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.12 & 0.02 \\ s_4 - s_1 & s_5 - s_2 & s_6 - s_3 & \dots & 0.5 & 0.6 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0.6 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ s_{N+1} - s_1 & s_{N+2} - s_2 & s_{N+3} - s_3 & \dots & 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.02 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.12 & 0.02 \\ 0.5 & 0.6 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.6 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Regulator analityczny DMC – przykład SISO (2)

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.02 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.12 & 0.02 \\ 0.5 & 0.6 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.6 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \\ 0.62 & 0.62 & 0.42 & 0.12 & 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^P & \mathbf{M}_2^P & \mathbf{M}_3^P & \mathbf{M}_4^P & \mathbf{M}_5^P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \\ s_5 & s_4 & s_3 \\ s_6 & s_5 & s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ 0.62 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy $\underline{\Psi} = \mathbf{I}$ oraz $\underline{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}$, wówczas

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.0344 + \lambda & 0.772 & 0.43 \\ 0.772 & 0.65 + \lambda & 0.4 \\ 0.43 & 0.4 & 0.29 + \lambda \end{bmatrix}$$

Regulator analityczny DMC – przykład SISO (3)

Dla $\lambda = 0.01$ dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.7171 & 1.5996 & -0.4519 & 0.0678 \\ 0 & 0 & -2.6932 & -0.9300 & 2.5508 & -0.6326 \\ 0 & 0 & 1.1297 & -1.0529 & -2.0868 & 2.4130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_1 \\ \overline{\mathbf{K}}_2 \\ \overline{\mathbf{K}}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Przyjmując

$$y^{zad}(k+1|k) = \dots = y^{zad}(k+6|k) = y^{zad}(k)$$

otrzymujemy prawo regulacji:

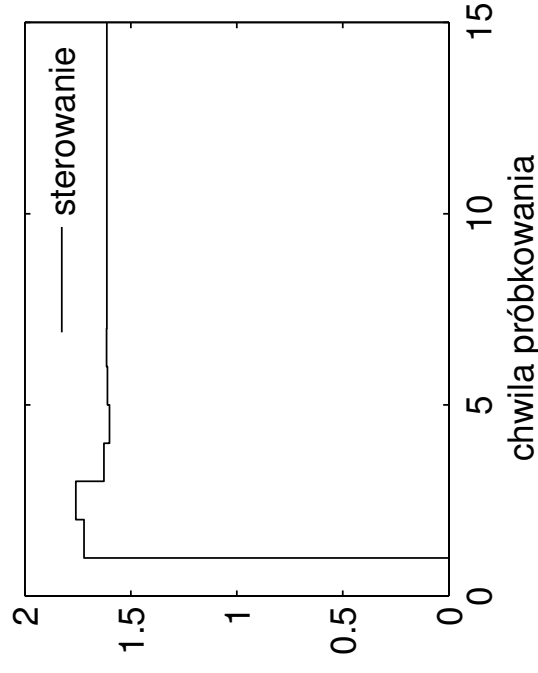
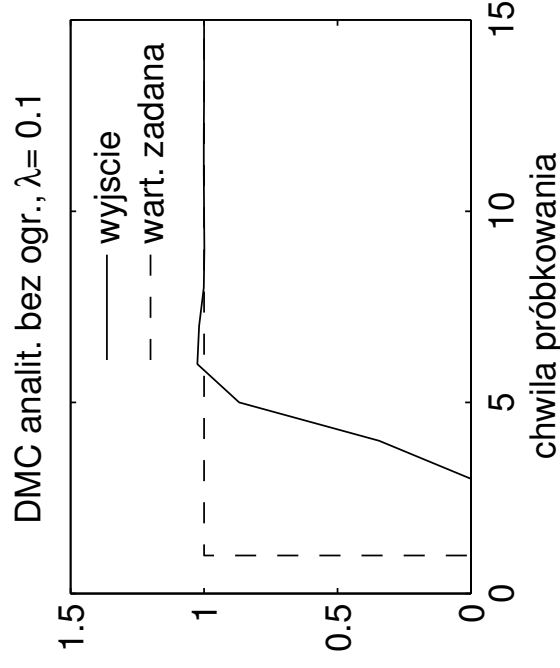
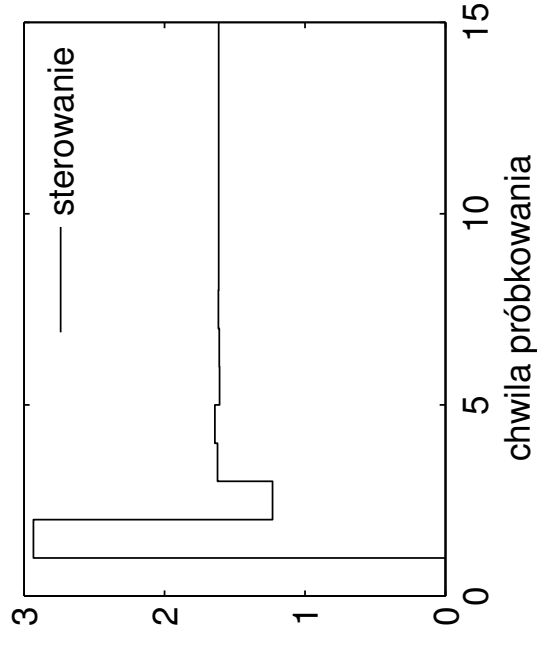
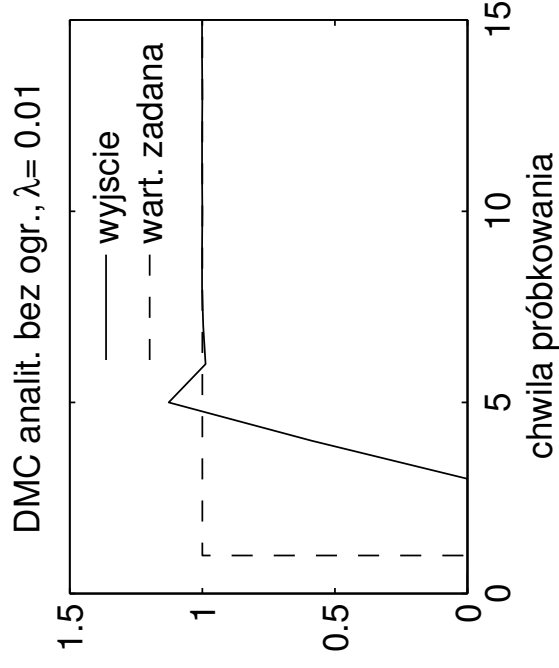
$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}(k) &= \left(\sum_{p=1}^6 k_{1,p} \right) (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^5 (\overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}_j^P) \Delta u(k-j) \\ &= k^e (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^5 k_j^u \Delta u(k-j), \\ \text{gdzie} \quad k^e &= 2.9327, \quad \mathbf{k}^u = \begin{bmatrix} 1.5802 & 1.7839 & 1.2317 & 0.3519 & 0.0587 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dla $\lambda = 0.1$ współczynniki wektora sprzężeń zwrotnych regulatora DMC wynoszą

$$k^e = 1.7201, \quad \mathbf{k}^u = \begin{bmatrix} 0.9774 & 1.0546 & 0.7225 & 0.2064 & 0.0344 \end{bmatrix}$$

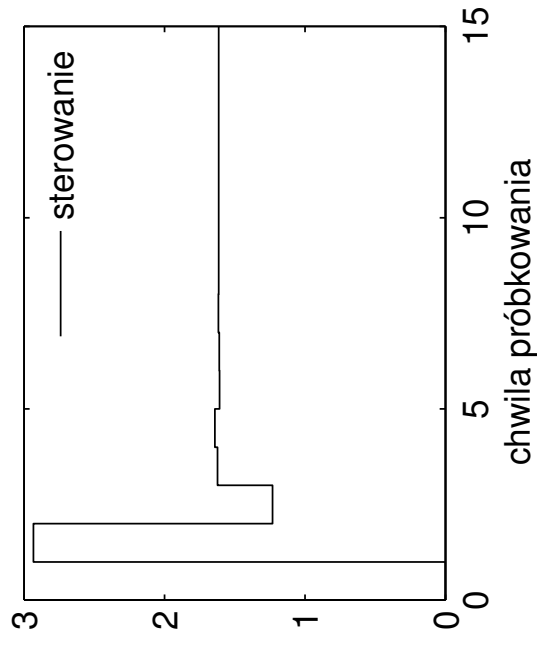
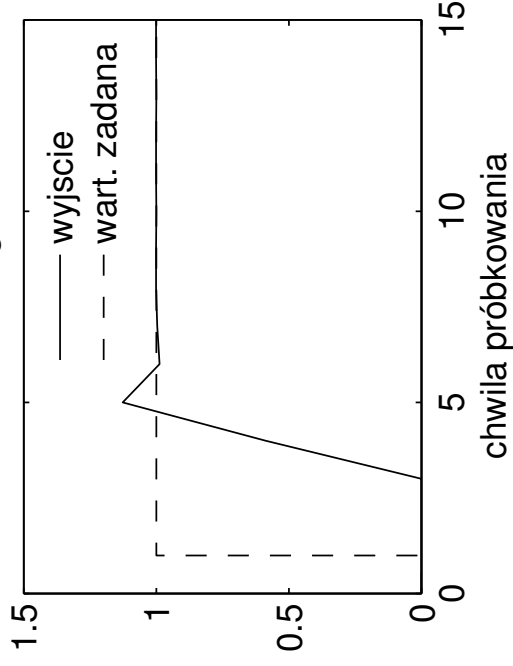
(mają wyraźnie mniejsze wartości).

Regulator analityczny DMC – przykład SISO, wyniki bez ograniczeń

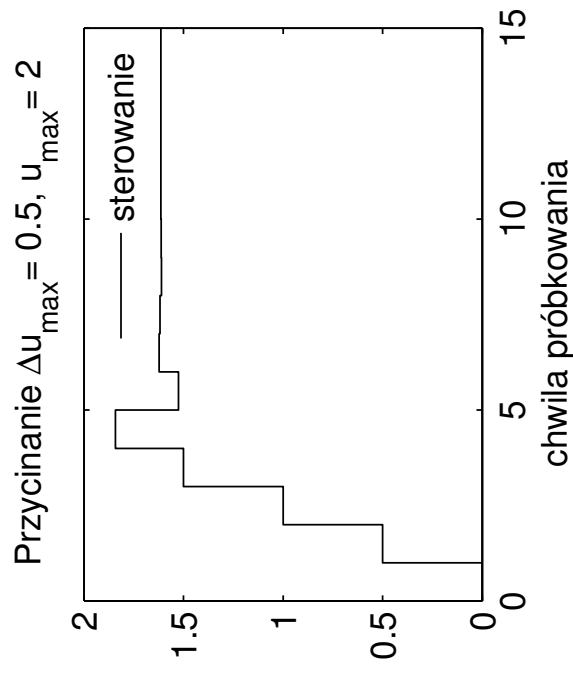
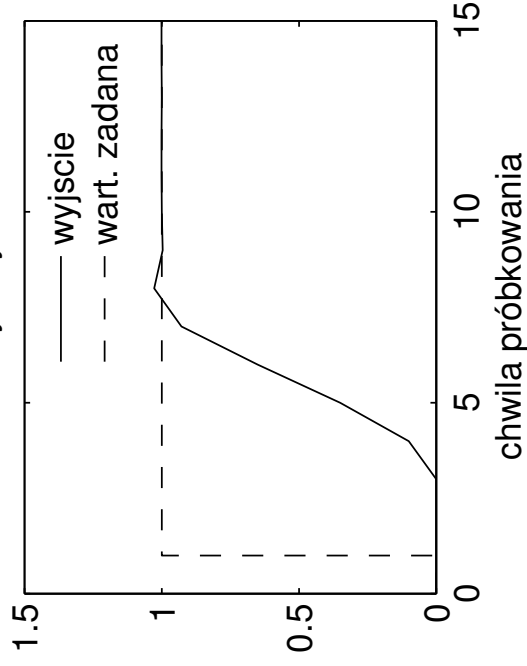


Regulator analityczny DMC – przykład SISO, z ograniczeniami sterowania

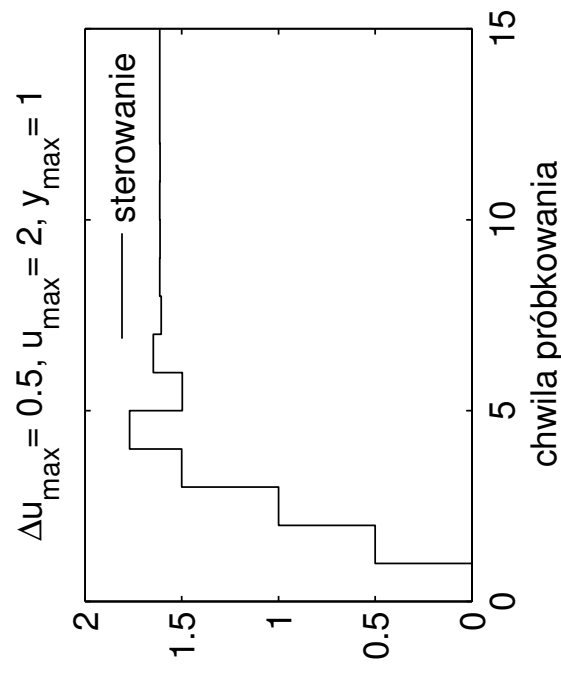
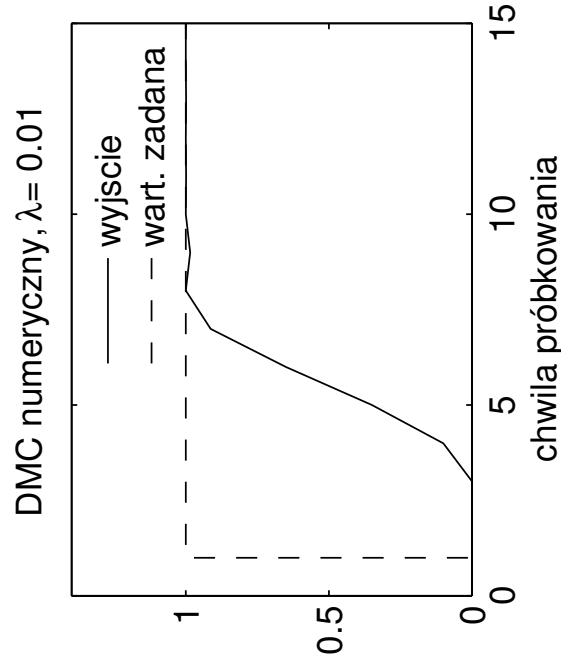
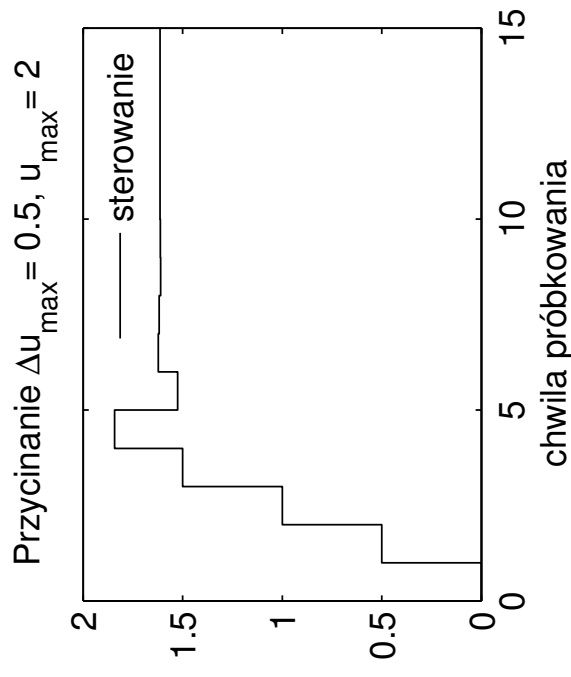
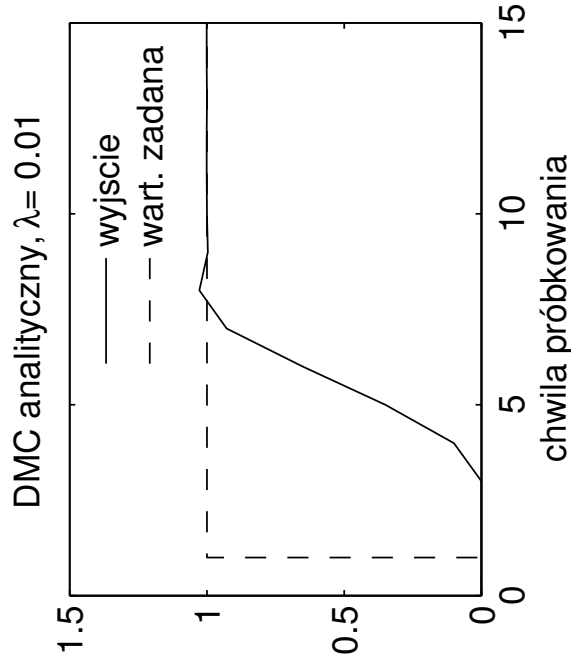
DMC analit. bez ogr., $\lambda=0.01$



DMC analityczny, $\lambda=0.01$



Regulator numeryczny DMC – przykład SISO, z ogr. sterowania i wyjścia



Regulator DMC – tłumienie zakłóceń niemierzalnych

Model zakłóceń niemierzalnych (zwany też: modelem zakłóceń typu DMC):

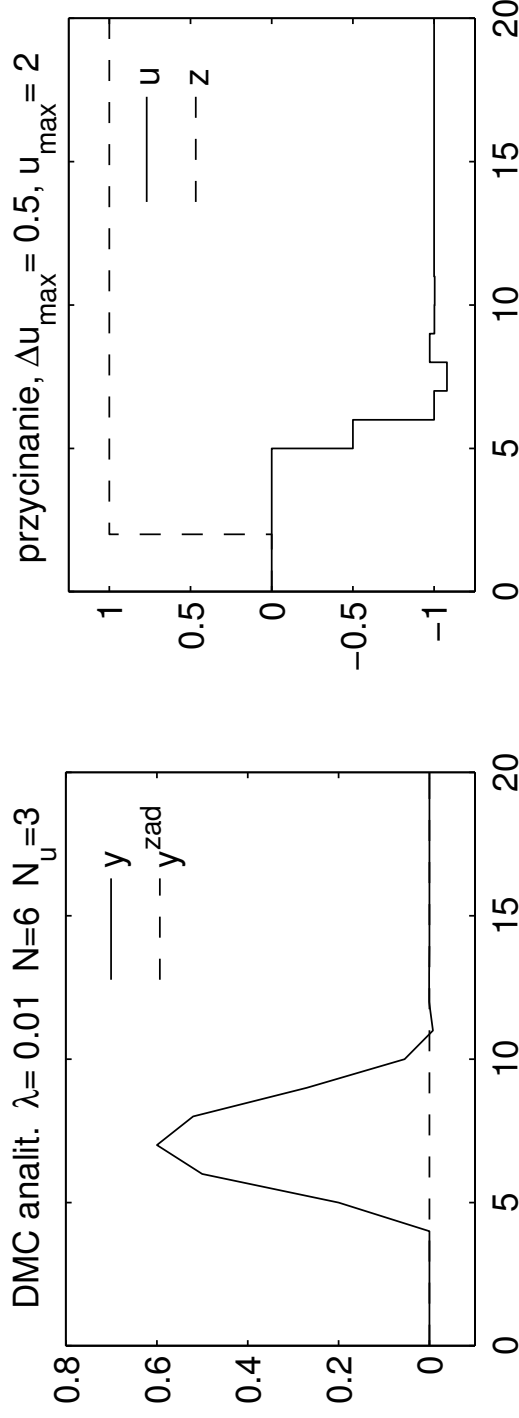
$$d(k) = y(k) - [y(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{S}_j \Delta u(k-j)],$$

$$d(k+1|k) = d(k+2|k) = \dots = d(k+N|k) = d(k)$$

sprawdza się bardzo dobrze w sytuacjach typowych w regulacji procesów przemysłowych – dla niemierzonych zakłóceń skokowo, ale rzadko zmiennych, jak i wolnozmiennych.

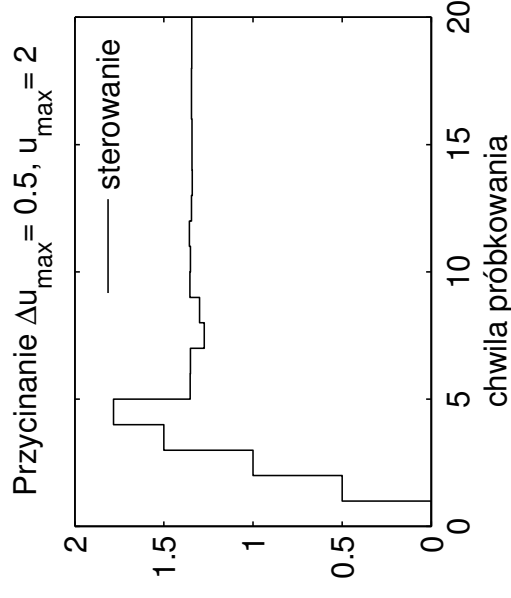
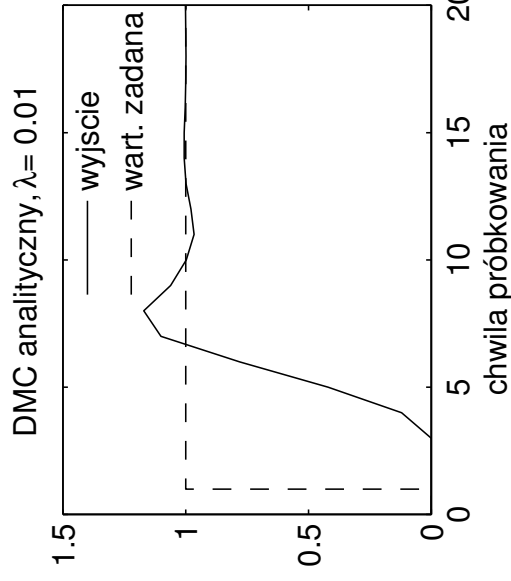
Regulator DMC z takim modelem zakłóceń zapewnia zerowe uchyby *ustalone* – tak jak klasyczne regulatory z całkowaniem, PI czy PID.

Tłumienie zakłócenia niemierzonego skokowego:



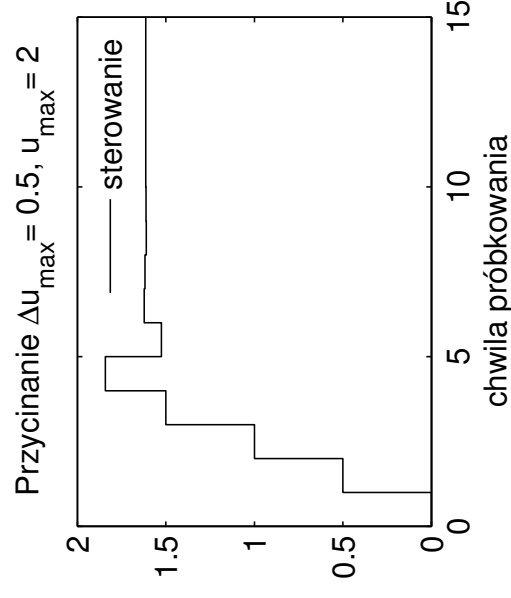
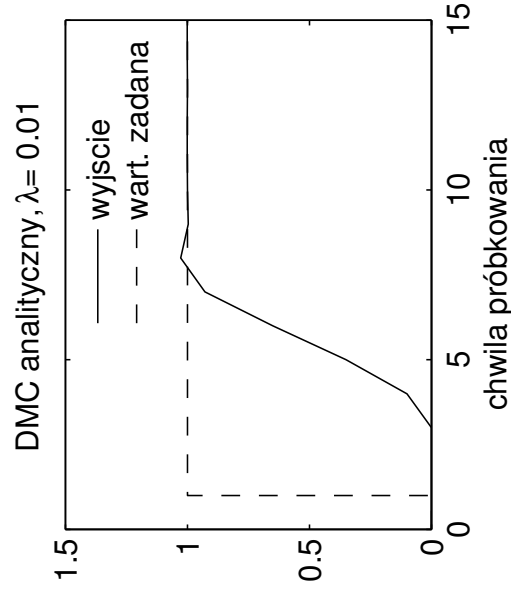
Odpowiedź na na skok jednostkowy zakłócenia niemierzalnego $z(k)$ na wejściu obiektu SISO (przykład poprzedni) w chwili $k=2$, w układzie regulacji z regulatorem analitycznym DMC uwzględniającym ograniczenia.

Regulator DMC – tłumienie błędów modelowania, przykład SISO cd.



Wyniki symulacji w układzie regulacji z regulatorem analitycznym DMC, **wzmocnienie obiektu zwiększone o 20%.**

Dla porównania:



Wyniki symulacji w układzie regulacji z regulatorem analitycznym DMC, **wzmocnienia obiektu i modelu równe.**

Regulator DMC – przykład MIMO 2x2, kolumna Wood-Berry (WB)

Przypomnijmy model kolumny destylacyjnej metanol-woda, zlinearyzowany w punkcie pracy (**Wood and Berry, 1973**) –
– model obiektu MIMO o 2 wejściach ($n_u = 2$) i 2 wyjściach ($n_y = 2$) oraz jednym zakłóceniu:

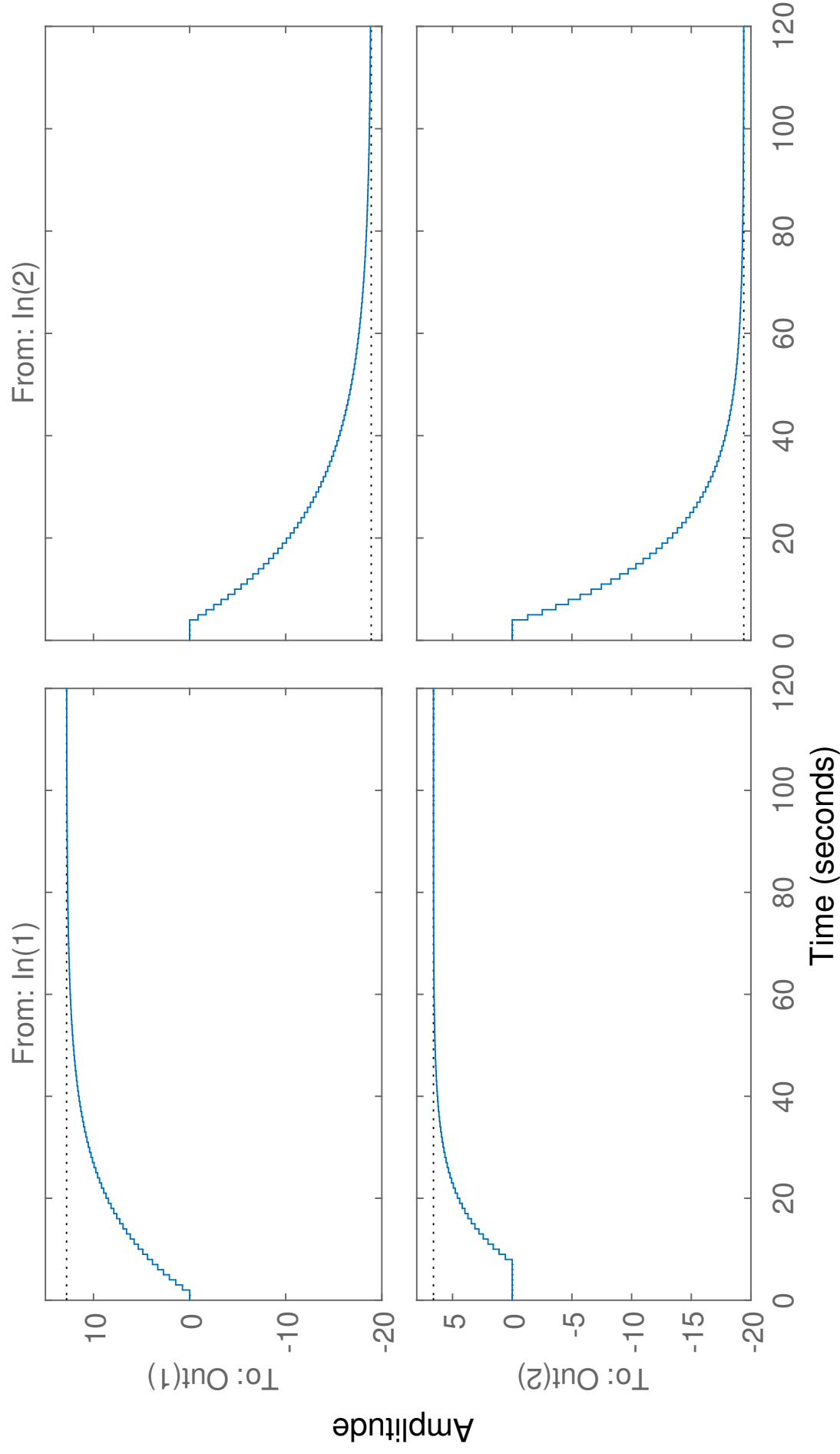
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s + 1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s + 1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s + 1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8s}}{14.9s + 1} \\ \frac{4.9e^{-3s}}{13.2s + 1} \end{bmatrix} F(s)$$

Chcemy uzyskać model **w postaci dyskretnej odpowiedzi skokowej**, stąd najpierw zdyskretyzujemy model ciągły (funkcją "c2d") – z okresem próbkowania $T_p = 1$, ze względu na wartości opóźnień:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.744z^{-1}}{z - 0.9419} & \frac{-0.8789z^{-3}}{z - 0.9535} \\ \frac{0.5786z^{-7}}{z - 0.9123} & \frac{-1.302z^{-3}}{z - 0.9329} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0.2467z^{-8}}{z - 0.9351} \\ \frac{0.3575z^{-3}}{z - 0.927} \end{bmatrix} F(z)$$

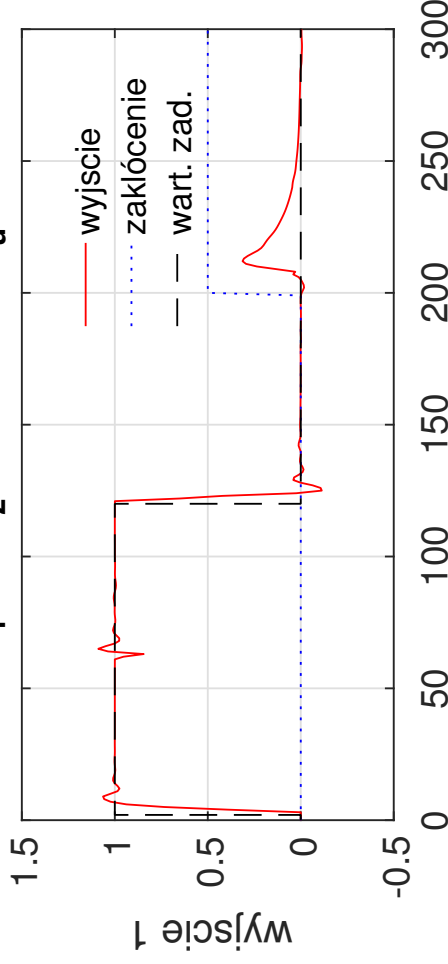
Przykład kolumna WB (2) – odpowiedzi skokowe obiektu z $T_p = 1$

Step Response

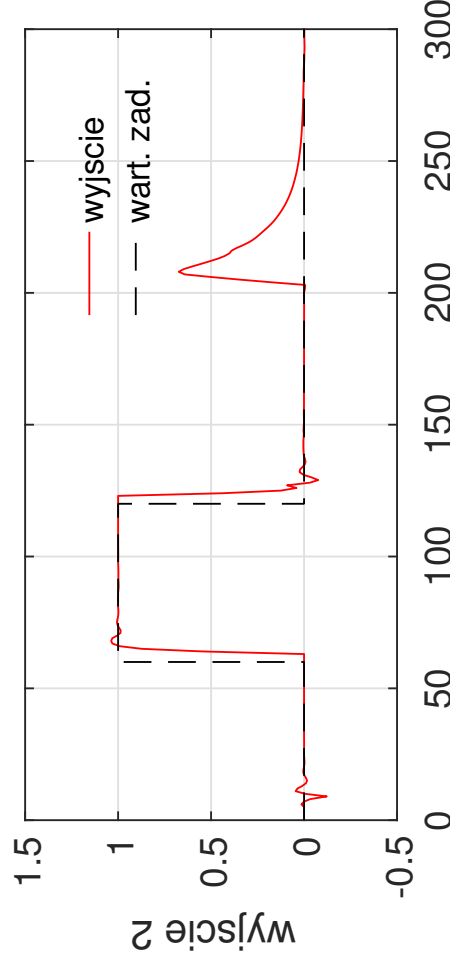
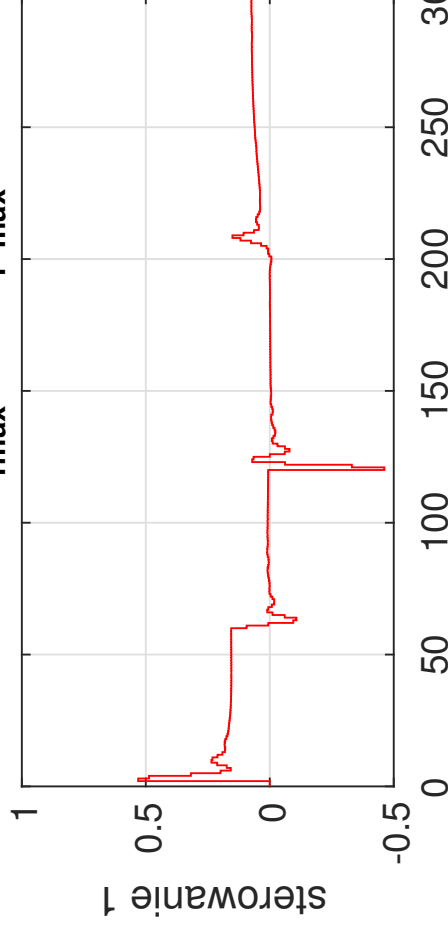


Regulator DMC – przykład kolumna WB (3)

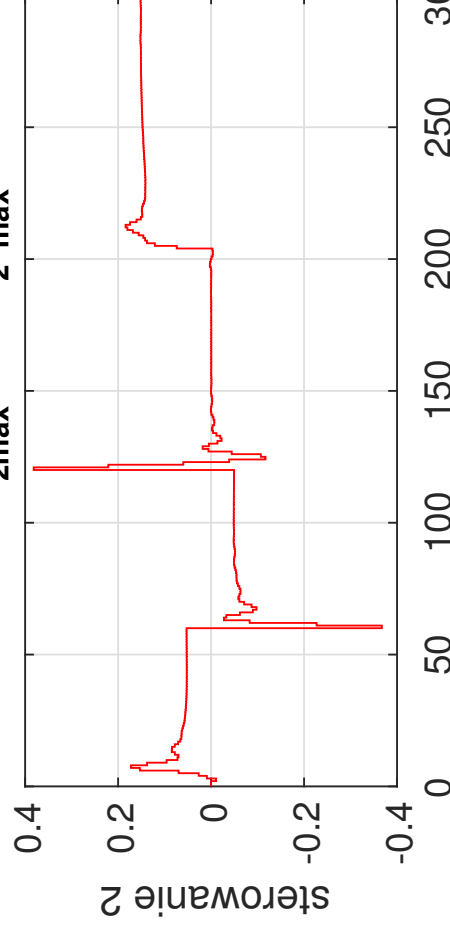
WB DMC num., $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $N = 30$, $N_u = 10$, $T_p = 1$, $N_D = 80$



Ogr.: $\Delta u_{1\max} = 2$, $|u_1|_{\max} = 2$



Ogr.: $\Delta u_{2\max} = 2$, $|u_2|_{\max} = 2$



chwila próbkowania

Trajektorie wyjść i sterowań w układzie regulacji DMC z $T_p = 1$, $N_D = 80$, skoki wartości zadanych i zakłócenia.

Macierzowa odpowiedź skokowa dla DMC (program ogólny, przykładowy obiekt kolumna WB)

```
function S=DMCstepmatrices(Tp,timefinal)
% konstrukcja macierzowej odpowiedzi skokowej dla DMC, zakładając timefinal= Tp*D, gdzie
% Tp - okres próbkowania, D - horyzont dynamiki obiektu.
% Przykład obiektu: transmitancje ciągłe obiektu 2x2 (kolumna WB):
s=tf('s');
WBtf11=12.8*exp(-s)/(16.7*s+1);
WBtf12=-18.9*exp(-3*s)/(21*s+1);
WBtf21=6.6*exp(-7*s)/(10.9*s+1);
WBtf22=-19.4*exp(-3*s)/(14.4*s+1);
WBtf=[WBtf11 WBtf12;WBtf21 WBtf22];
% dyskretyzacja z okresem próbkowania Tp:
WBdtf=c2d(WBtf,Tp);
% Dyskretna odpowiedź skokowa wielowymiarowa wg konwencji Matlab:
Y=step(WBdtf,timefinal); % macierz o wymiarze (timefinal/Tp+1) x ny x nu na odcinku
                        % czasu od t=0 do t=timefinal z krokiem Tp
% Dyskretna odpowiedź skokowa macierzowa S o wymiarze ny x nu x timefinal/Tp, pierwsza
% macierz dla czasu dyskr.k=1, ostatnia dla czasu dyskr. k=D=timefinal/Tp (D macierzy):
[nt,ny,nu]=size(Y); % nt=D+1 (Y zawiera też wartość wyjść w chwili 0, macierz S nie)
S=zeros(ny,nu,nt-1);
for i=1:ny
    for j=1:nu
        S(i,j,:)=Y(2:nt,i,j);
    end
end
```

Macierzowa odpowiedź skokowa z $T_p=1$ (dla pierwszych 10 chwil czasu, kolumna WB)

$S(:, :, 1) =$	0	0	0
	0		0
$S(:, :, 2) =$	0.7440	0	
	0		0
$S(:, :, 3) =$	1.4447	0	
	0		0
$S(:, :, 4) =$	2.1047	-0.8789	
	0	-1.3015	
$S(:, :, 5) =$	2.7263	-1.7169	
	0	-2.5157	
$S(:, :, 6) =$	3.3118	-2.5160	
	0	-3.6484	
$S(:, :, 7) =$	3.8633	-3.2779	
	0	-4.7052	
$S(:, :, 8) =$	4.3827	-4.0044	
	0.5786	-5.6910	
$S(:, :, 9) =$	4.8720	-4.6971	
	1.1064	-6.6107	
$S(:, :, 10) =$	5.3328	-5.3576	
	1.5880	-7.4687	

Regulator DMC – macierze M i M^P (program ogólny)

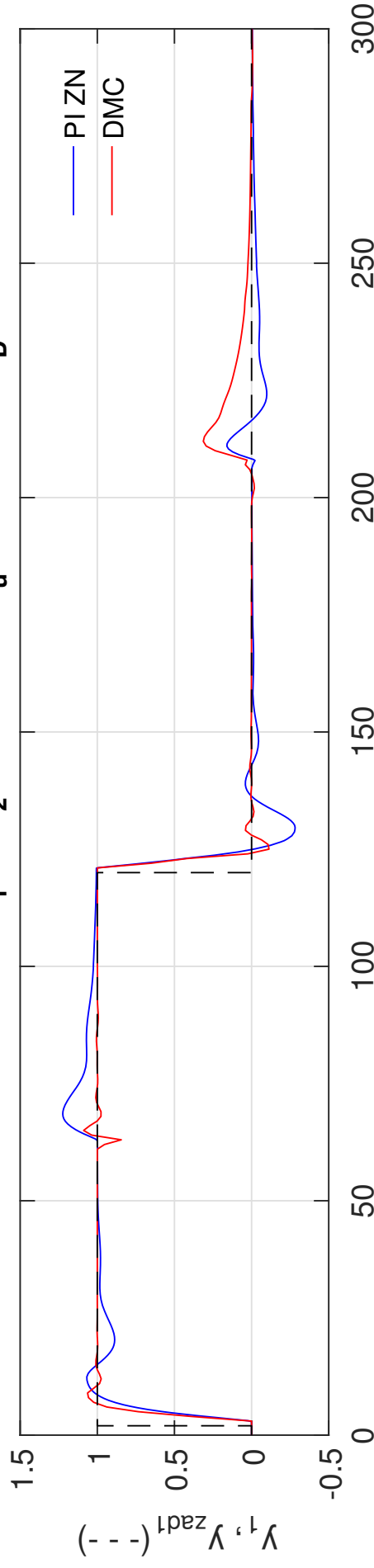
```
function [M,MP]=DMCmatrices(S,N,Nu)
% script "DMCmatrices" macierze M i MP regulatora DMC,
% DANE WEJŚCIOWE (wymagane):
% macierz skończonych odpowiedzi skokowych S(ny,nu,D), gdzie:
%   ny = dim y; nu = dim u; D - horyzont dynamiki od k=1 do k=D
% N - horyzont predykcji;
% Nu - horyzont sterowania
[ny,nu,D]=size(S); % D - liczba dyskretnych chwil czasu odpowiedzi skokowej
% Macierz dynamiczna M:
M=zeros(N*ny,Nu*nu);
for i=1:N, M((i-1)*ny+1:(i-1)*ny+ny,1:nu)=S(:,min(i,D)); end
for i=2:Nu
    M(:,(i-1)*nu+1:(i-1)*nu+nu)=[zeros((i-1)*ny,nu); M(1:(N-i+1)*ny,1:nu)];
end
% macierz MP:
MP=zeros(ny*N,nu*(D-1));
for i=1:D-1
    for j=1:N
        MP((j-1)*ny+1:j*ny,(i-1)*nu+1:i*nu)=S(:,min(i+j,D))-S(:, :,i);
    end
end
```


Macierz M^P kolumny WB dla $N=10$ – lewy fragment wymiaru 20×8 :

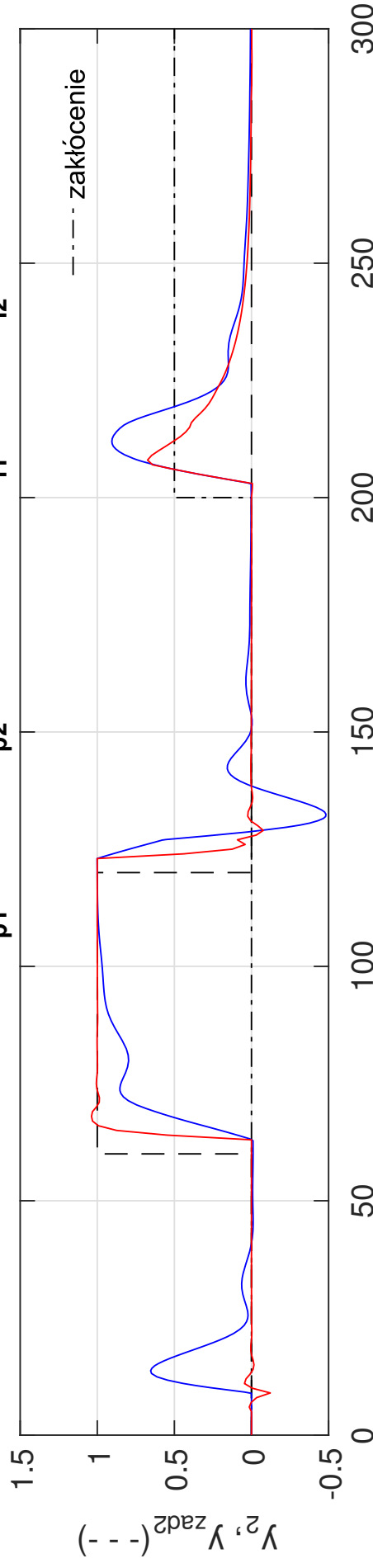
0.7440	0	0.7007	0	0.6600	-0.8789	0.6216	-0.8380
0	0	0	0	0	-1.3015	0	-1.2142
1.4447	0	1.3607	-0.8789	1.2816	-1.7169	1.2071	-1.6371
0	0	0	-1.3015	0	-2.5157	0	-2.3469
2.1047	-0.8789	1.9824	-1.7169	1.8671	-2.5160	1.7586	-2.3990
0	-1.3015	0	-2.5157	0	-3.6484	0	-3.4037
2.7263	-1.7169	2.5679	-2.5160	2.4186	-3.2779	2.2780	-3.1255
0	-2.5157	0	-3.6484	0	-4.7052	0.5786	-4.3895
3.3118	-2.5160	3.1194	-3.2779	2.9380	-4.0044	2.7673	-3.8182
0	-3.6484	0	-4.7052	0.5786	-5.6910	1.1064	-5.3092
3.8633	-3.2779	3.6388	-4.0044	3.4273	-4.6971	3.2281	-4.4787
0	-4.7052	0.5786	-5.6910	1.1064	-6.6107	1.5880	-6.1672
4.3827	-4.0044	4.1280	-4.6971	3.8881	-5.3576	3.6621	-5.1084
0.5786	-5.6910	1.1064	-6.6107	1.5880	-7.4687	2.0273	-6.9677
4.8720	-4.6971	4.5888	-5.3576	4.3221	-5.9873	4.0709	-5.7089
1.1064	-6.6107	1.5880	-7.4687	2.0273	-8.2692	2.4282	-7.7144
5.3328	-5.3576	5.0228	-5.9873	4.7309	-6.5878	4.4559	-6.2814
1.5880	-7.4687	2.0273	-8.2692	2.4282	-9.0159	2.7939	-8.4111
5.7668	-5.9873	5.4316	-6.5878	5.1159	-7.1604	4.8186	-6.8274
2.0273	-8.2692	2.4282	-9.0159	2.7939	-9.7126	3.1275	-9.0610

Regulator DMC – przykład kolumna WB (4)

WB DMC num., $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $N=30$, $N_u=10$, $T_p=1$, $N_D=80$



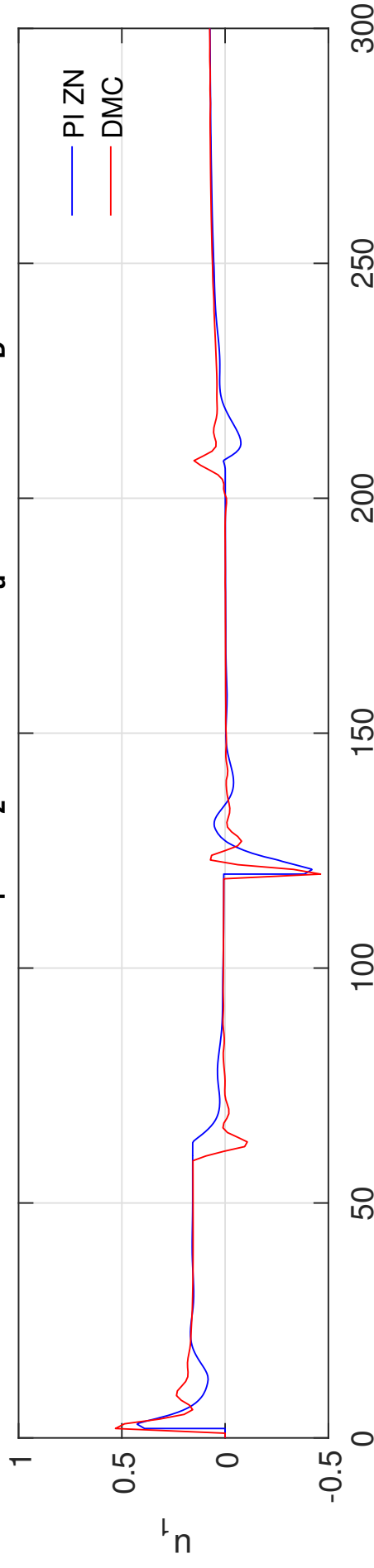
PI ciągły ZN detuning: $k_{p1}/3=0.39$, $k_{p2}/3=-0.073333$, $k_{i1}/3=0.1$, $k_{i2}/0.8=0.125$



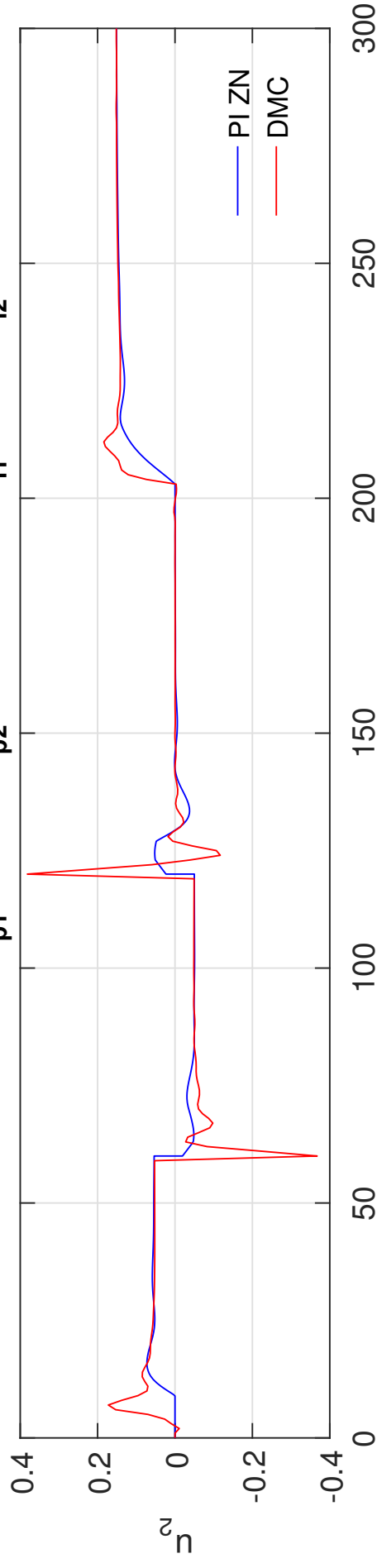
Trajektorie wyjść w układach regulacji **wielopętlowym PID (nastawy BLT)** i **DMC** ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$)

Regulator DMC – przykład kolumna WB (4a)

WB DMC num., $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $N=30$, $N_u=10$, $T_p=1$, $N_D=80$



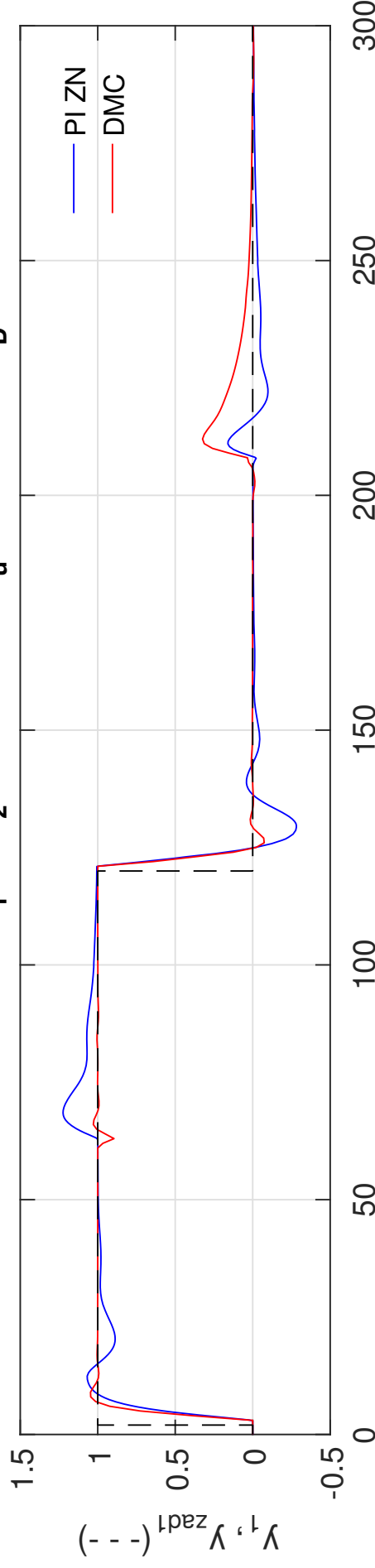
PI ciągły ZN detuning: $k_{p1}/3=0.39$, $k_{p2}/3=-0.073333$, $k_{i1}/3=0.1$, $k_{i2}/0.8=0.125$



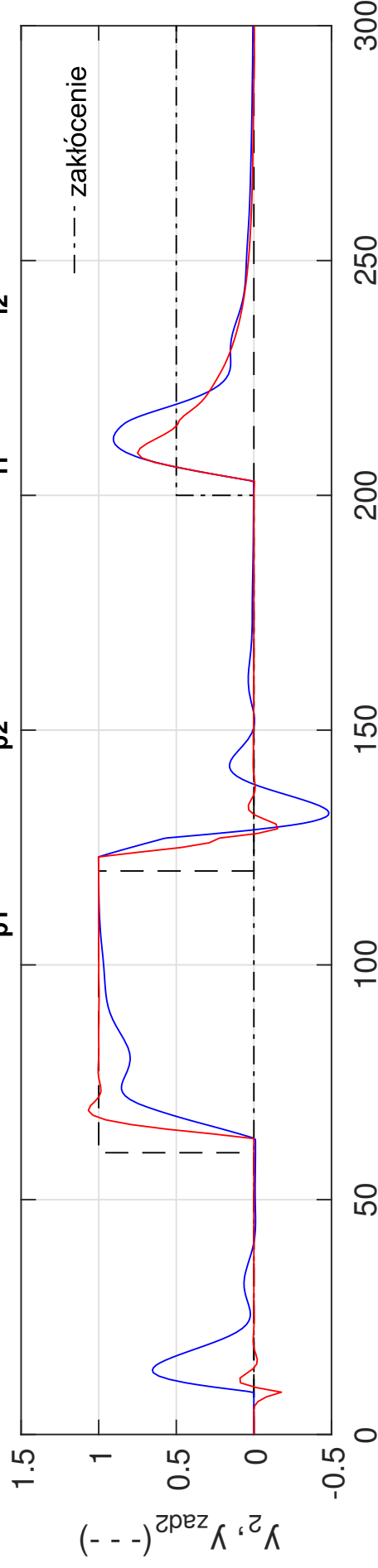
Trajektorie sterowań w układach regulacji **wielopętlowym PID (nastawy BLT) i DMC** ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$)

Regulator DMC – przykład kolumna WB (5)

WB DMC num., $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $T_p=1$, $N_D=80$



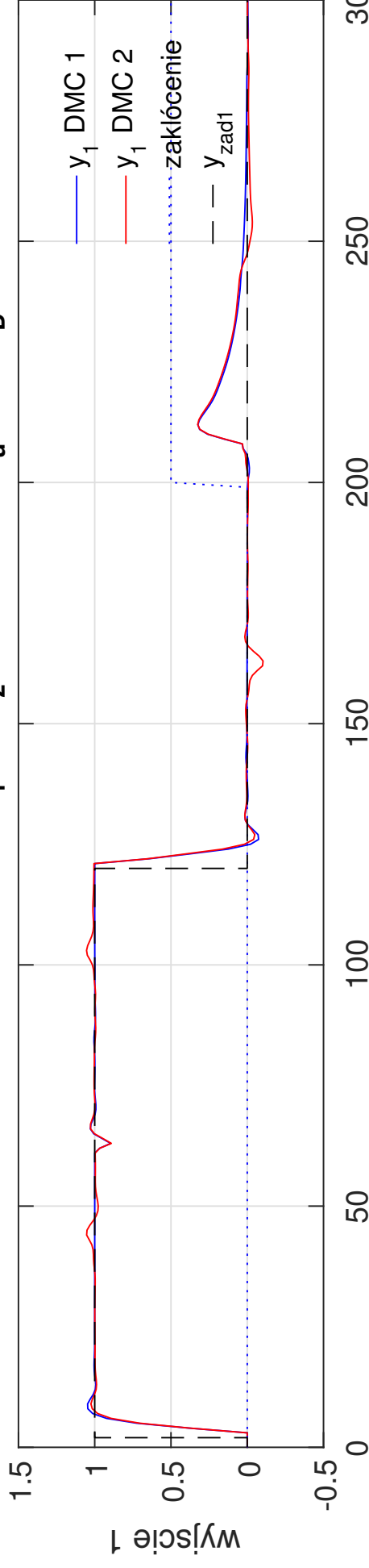
PI ciągły ZN detuning: $k_{p1}/3=0.39$, $k_{p2}/3=-0.073333$, $k_{i1}/3=0.1$, $k_{i2}/0.8=0.125$



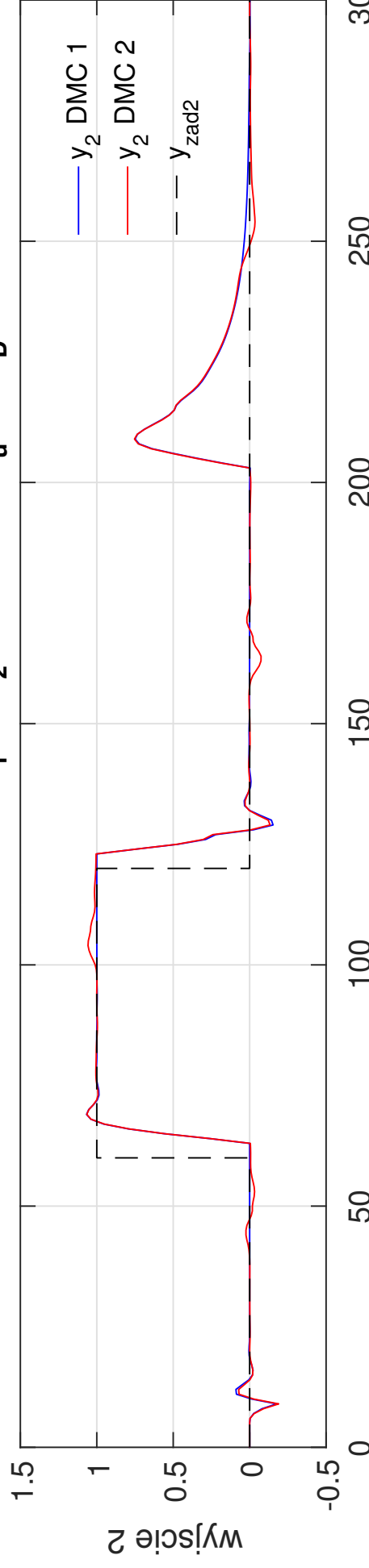
Trajektorie wyjść w układach regulacji **wielopętlowym PID** (nastawy BLT) i **DMC** ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=10$)

Regulator DMC z różnymi horyzontami – przykład kol. WB (6)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$



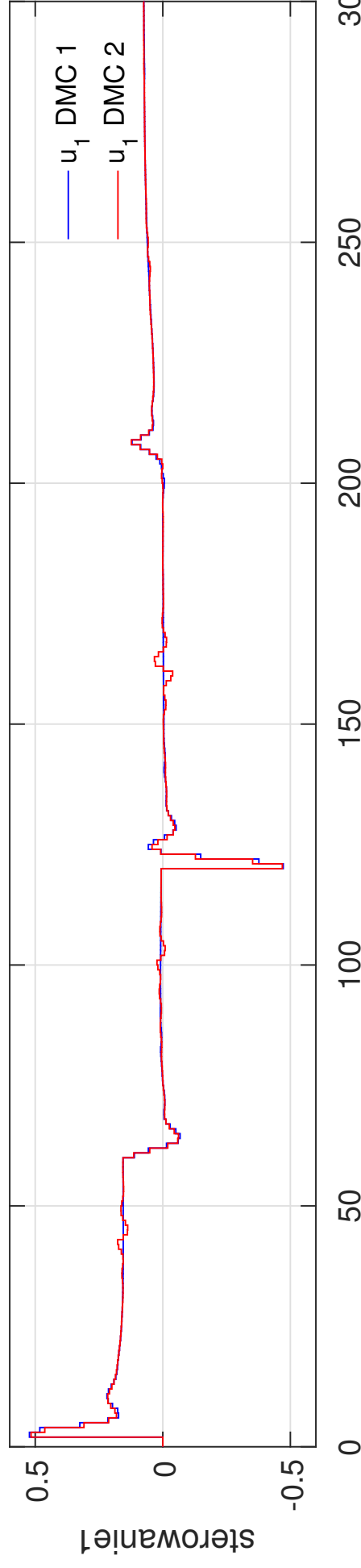
WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=40$



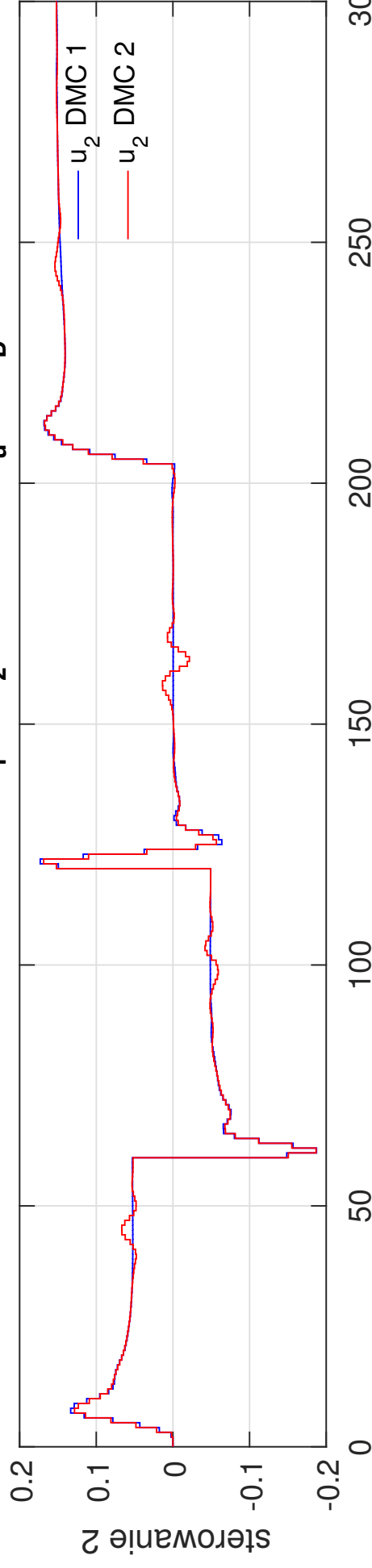
Trajektorie wyjść w układach regulacji DMC z $T_p = 1$ przy różnych długościach horyzontów N , N_u i N_D .

Regulator DMC z różnymi horyzontami – przykład kol. WB (6a)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$



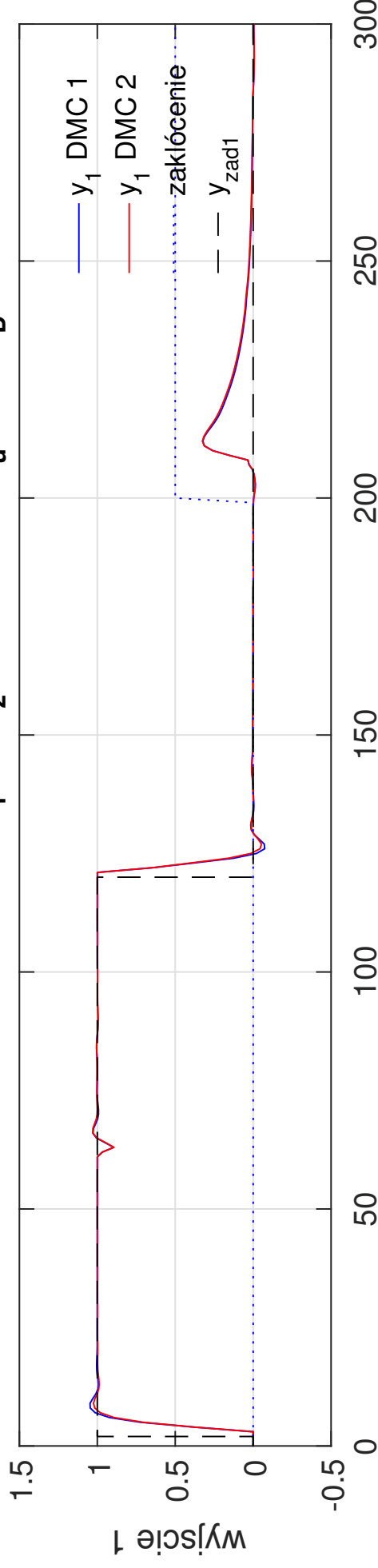
WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=40$



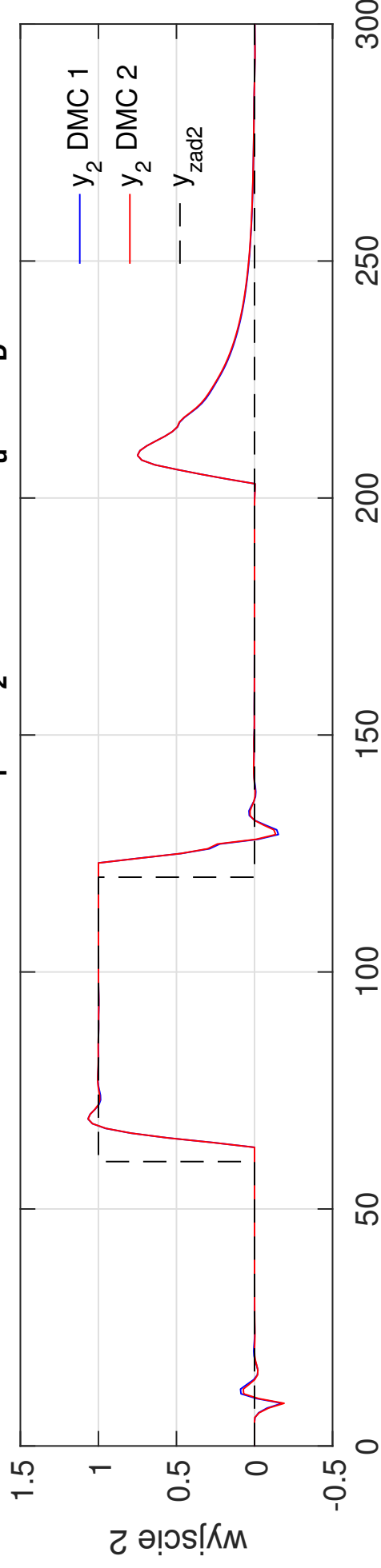
Trajektorie sterowań w układach regulacji DMC z $T_p = 1$ przy różnych długościach horyzontów N , N_u i N_D .

Regulator DMC z różnymi horyzontami – przykład kol. WB (7)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=30$, $N_D=80$



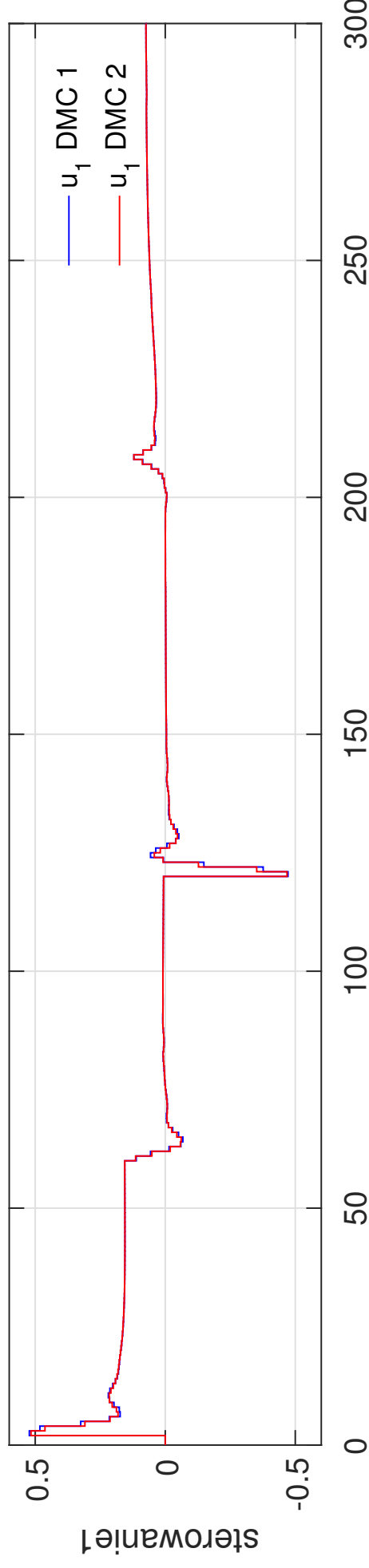
WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=15$, $N_D=80$



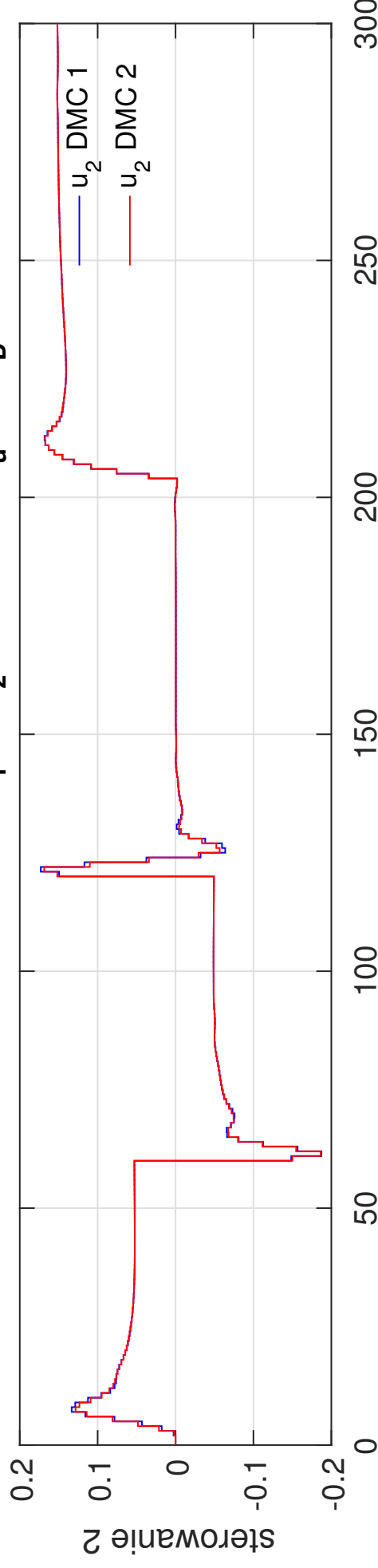
Trajektorie wyjść w układach regulacji DMC z $T_p = 1$ przy różnych długościach horyzontów N i N_u .

Regulator DMC z różnymi horyzontami – przykład kol. WB (7a)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=10$, $N_D=80$



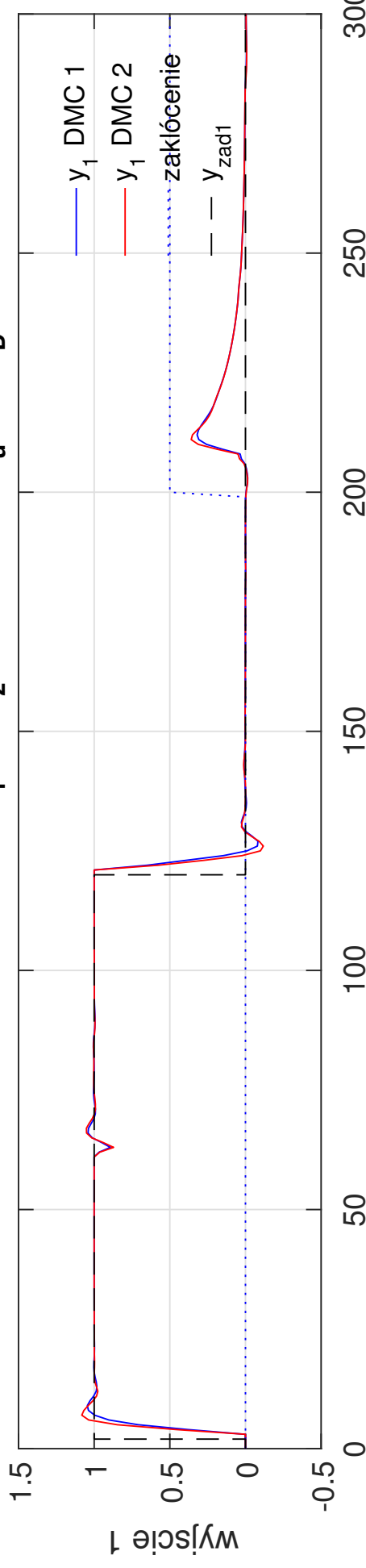
WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=15$, $N_D=80$



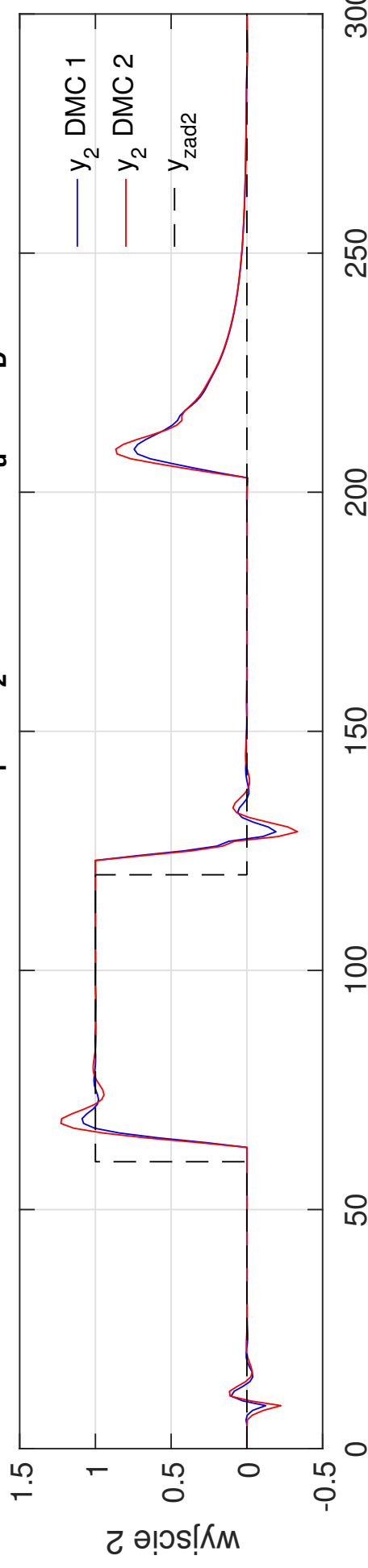
Trajektorie sterowań w układach regulacji DMC z $T_p=1$ przy różnych długościach horyzontów N i N_u .

Regulator DMC, błędy modelowania – przykład kol. WB (8)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=80$



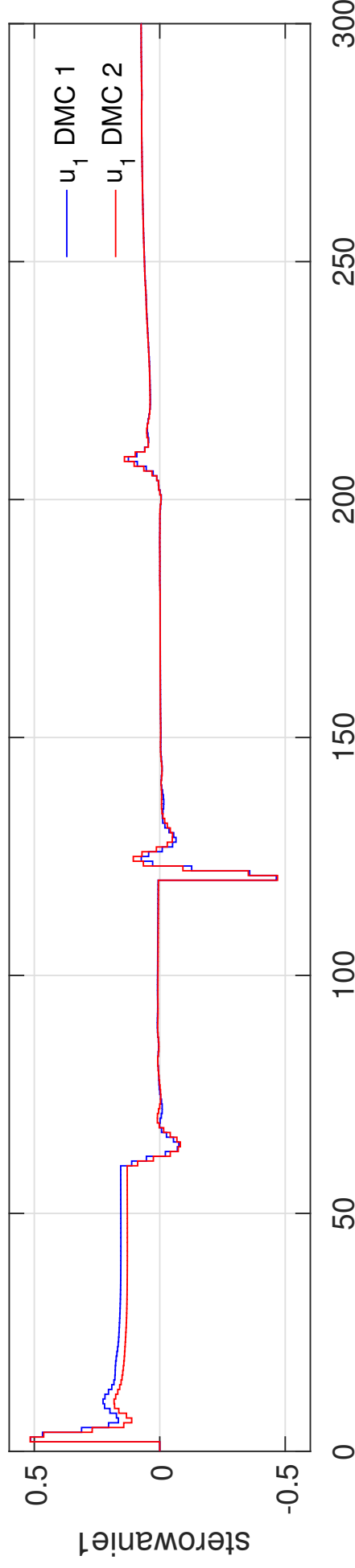
WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=80$



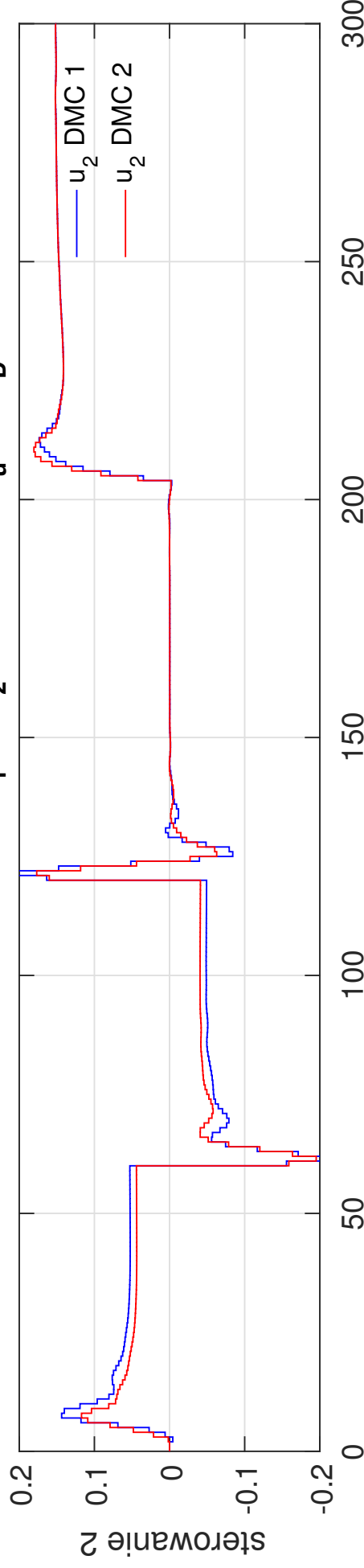
Trajektorie wyjść w układach z obiektem równym modelowi i **obiektem o wzmacnieniu większym o 20% (DMC 2)**

Regulator DMC, błędy modelowania – przykład kol. WB (8a)

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=80$



WB DMC 2 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=15$, $N_u=5$, $N_D=80$



Trajektorie sterowań w układach z obiektem równym modelowi i **obiektem o wzmacnieniu większym o 20% (DMC 2)**

DMC – kompensacja zakłóceń mierzonych

Przy projektowaniu układów sterowania **obowiązuje zasada:**

wpływ istotnych zakłóceń mierzonych powinien być wstępnie kompensowany w otwartej strukturze sterowania

– do tego potrzebny jest model wpływu zakłóceń mierzonych z na wyjścia, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$.

Niech $\{\mathbf{S}_l^z, l = 1, 2, 3, \dots\}$ – macierzowa odpowiedź skokowa wyjść obiektu na skoki wartości z . Wówczas model obiektu:

$$y(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{S}_j \Delta u(k-j) + \sum_{j=1}^k \mathbf{S}_j^z \Delta z(k-j),$$

gdzie $\Delta z(k-j) = z(k-j) - z(k-j-1), j = 1, \dots, k$.

Zakładając brak wiedzy o przyszłych zmianach zakłóceń, tzn. **zerowe zmiany na horyzoncie predykcji: $\Delta z(k+p|k) = 0, p = 1, \dots, N$** , dostajemy pełny model

$$\begin{aligned} y(k+p|k) = & y(k) + \sum_{j=1}^p \mathbf{S}_j \Delta u(k+p-j|k) + \sum_{j=1}^{D-1} (\mathbf{S}_{j+p} - \mathbf{S}_j) \Delta u(k-j) + \\ & + \mathbf{S}_p^z \Delta z(k) + \sum_{j=1}^{D_z-1} (\mathbf{S}_{j+p}^z - \mathbf{S}_j^z) \Delta z(k-j), \quad p = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Uwaga. Wartość aktualna $\Delta z(k)$ jest znana ($z(k)$ zmierzone) – stąd składnik $\mathbf{S}_p^z \Delta z(k)$ powyżej, natomiast $\Delta u(k) = \Delta u(k|k)$ ma być dopiero wyznaczone, stąd składnik $\mathbf{S}_p \Delta u(k)$ występuje w części wymuszanej trajektorii wyjść predykowanych.

DMC – kompensacja zakłóceń mierzonych (2)

W zapisie zwartym na horyzoncie predykcji:

$$Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) + \mathbf{M}^{zP} \Delta Z^P(k),$$

gdzie

$$\mathbf{M}^{zP} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^z & \mathbf{S}_2^z - \mathbf{S}_1^z & \mathbf{S}_3^z - \mathbf{S}_2^z & \cdots & \mathbf{S}_{D_z}^z - \mathbf{S}_{D_z-1}^z \\ \mathbf{S}_2^z & \mathbf{S}_3^z - \mathbf{S}_1^z & \mathbf{S}_4^z - \mathbf{S}_2^z & \cdots & \mathbf{S}_{D_z+1}^z - \mathbf{S}_{D_z-1}^z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_N^z & \mathbf{S}_{N+1}^z - \mathbf{S}_1^z & \mathbf{S}_{N+2}^z - \mathbf{S}_2^z & \cdots & \mathbf{S}_{N+D_z-1}^z - \mathbf{S}_{D_z-1}^z \end{bmatrix} \quad (N \cdot n_y) \times (D_z \cdot n_u)$$

\mathbf{M}^{zP} jest macierzą o strukturze analogicznej jak macierz \mathbf{M}^P , ale rozszerzoną o pierwszą kolumnę (macierzową) odpowiadającą pierwszej kolumnie macierzy \mathbf{M} , gdyż w chwili k , $\Delta z(k)$ jest już zrealizowaną (i zmierzoną) wartością zakłóceń (natomiast $\Delta u(k) = \Delta u(k|k)$ jest zmienną decyzyjną).

Wszystkie rozważania przeprowadzone dotychczas dotyczące zarówno analitycznej jak i numerycznej wersji algorytmu DMC pozostają słuszne, tylko składowa swobodna $Y^0(k)$ jest rozszerzona o wpływ zakłóceń; w szczególności: prawo sterowania (bez ograniczeń) dane jest teraz wzorem

$$\Delta u(k) = \overline{\mathbf{K}}_1 [Y^{zad}(k) - Y(k)] - \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) - \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}^{zP} \Delta Z^P(k)$$

gdzie $\Delta Z^P(k) = [\Delta z(k) \Delta z(k-1) \cdots \Delta z(k - (D_z - 1))]^T$.

DMC – kompensacja zakłóceń mierzonych (3)

$$\Delta u(k) = \overline{\mathbf{K}}_1 [Y^{zad}(k) - Y(k)] - \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) - \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}^{zP} \Delta Z^P(k)$$

Rozpisując macierz \mathbf{M}^{zP} , podobnie jak poprzednio macierz \mathbf{M}^P , jako

$$\mathbf{M}^{zP} = [\mathbf{M}_0^{zP} \mathbf{M}_1^{zP} \mathbf{M}_2^{zP} \dots \mathbf{M}_{D_z-1}^{zP}]$$

oraz wykorzystując strukturę macierzy \mathbf{K} dostajemy

$$\Delta u(k) = \mathbf{K}^e [y^{zad}(k) - y(k)] - \sum_{j=1}^{D-1} \mathbf{K}_j^u \Delta u(k-j) - \sum_{j=0}^{D_z-1} \mathbf{K}_j^z \Delta z(k-j)$$

gdzie $\mathbf{K}_j^z = \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}_j^{zP}$, $j = 0, 1, \dots, D_z - 1$

Prawo sterowania (bez ograniczeń) zawiera więc dodatkowo sprzężenia zwrotne od aktualnej i poprzednich wartości zakłóceń.

Regulator DMC – przykład kolumna WB, cd.

Przypomnijmy model kolumny destylacyjnej metanol-woda, zlinearyzowany w punkcie pracy (**Wood and Berry, 1973**) –

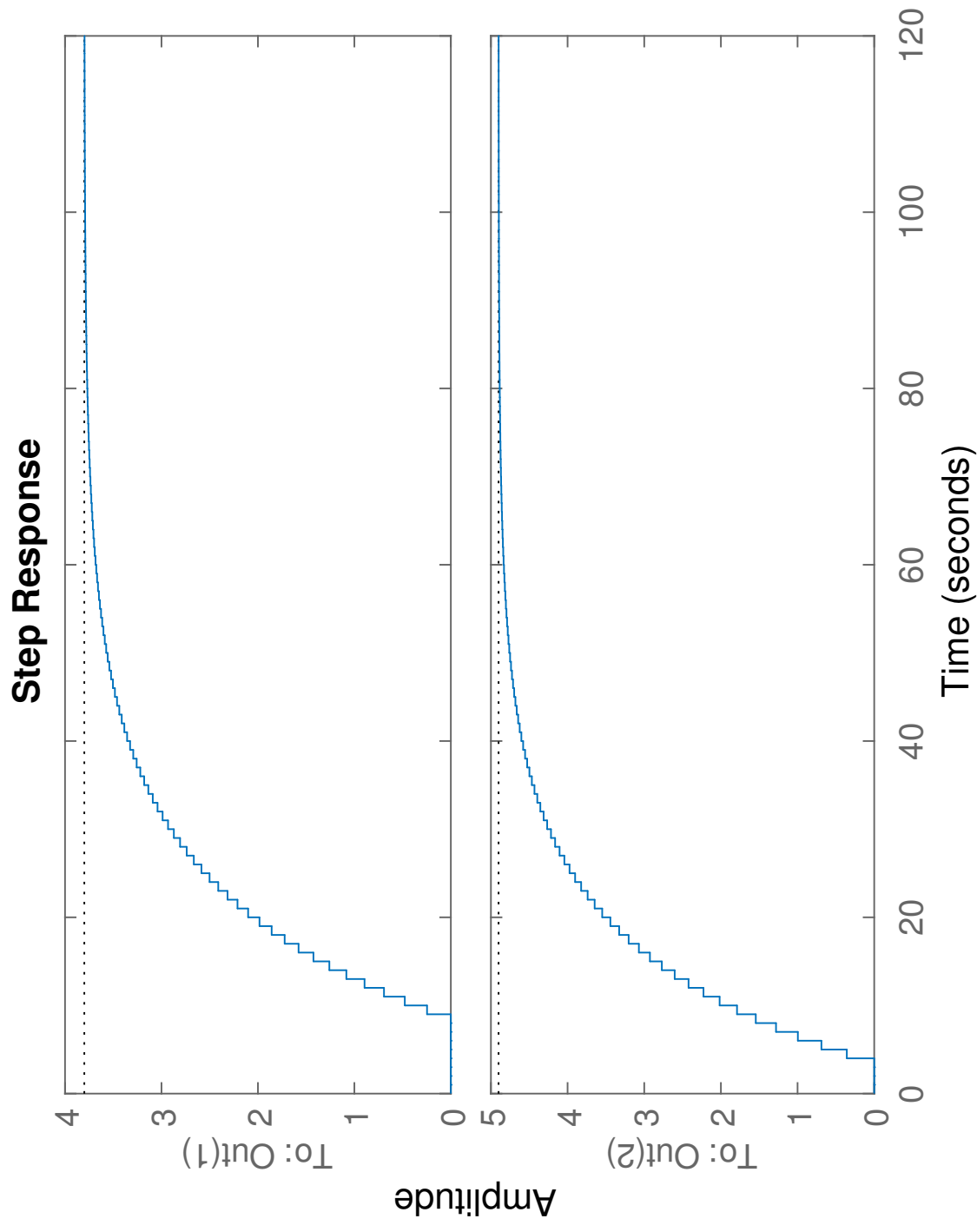
– model obiektu MIMO o 2 wejściach ($n_u = 2$) i 2 wyjściach ($n_y = 2$) oraz jednym zakłóceniu F :

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s + 1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s + 1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s + 1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8s}}{14.9s + 1} \\ \frac{4.9e^{-3s}}{13.2s + 1} \end{bmatrix} F(s)$$

Po dyskretyzacji z okresem próbkowania $T_p = 1$:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.744z^{-1}}{z - 0.9419} & \frac{-0.8789z^{-3}}{z - 0.9535} \\ \frac{0.5786z^{-7}}{z - 0.9123} & \frac{-1.302z^{-3}}{z - 0.9329} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0.2467z^{-8}}{z - 0.9351} \\ \frac{0.3575z^{-3}}{z - 0.927} \end{bmatrix} F(z)$$

Przykład kolumna WB cd. (2) – odpowiedzi wyjść na skok zakłócenia



Macierzowa odpowiedź skokowa zakłócenia dla DMC (program ogólny, obiekt kolumna WB)

```
function Sz=WBerryCtimetfz2Sz(Tp,timefinal)
% konstrukcja macierzowej odpowiedzi skokowej zakłócenia dla DMC,
% zakładając timefinal= Tp*Dz, Dz -- liczba elementów odp. skokowej
%
% przykład obiektu: transmitancje ciągłe zakłócenia (WB):
s=tf('s');
WBtfZ1=3.8*exp(-8*s)/(14.9*s+1);
WBtfZ2=4.9*exp(-3*s)/(13.2*s+1);
WBtfZ=[WBtfZ1;WBtfZ2];
WBdtfZ=c2d(WBtfZ,Tp);
% Dyskretna odpowiedź skokowa wielowymiarowa wg konwencji Matlaba:
Ydstepz=step(WBdtfZ,timefinal); % macierz o wymiarze (timefinal/Tp)+1 x ny x nz na odcinku
                                % czasu od t=0 do t=timefinal z krokiem Tp
% Dyskretna odpowiedź skokowa macierzowa Sz o wymiarze ny x nz x timefinal/Tp; pierwsza
% macierz dla czasu dyskr. k=1, ostatnia dla czasu dyskr. k=Dz=timefinal/Tp (Dz macierzy
[nt,ny,nz]=size(Ydstepz); % nt=D+1 (Ydstepz zawiera też wartość wyjść w chwili 0, Sz nie)
Sz=zeros(ny,nz,nt-1);
for i=1:ny
    for j=1:nz
        Sz(i,j,:)=Ydstepz(2:nt,i,j); %
    end
end
```

Macierzowa odpowiedź skokowa zakłócenia z $T_p=1$ (dla pierwszych 10 chwil czasu, kolumna WB):

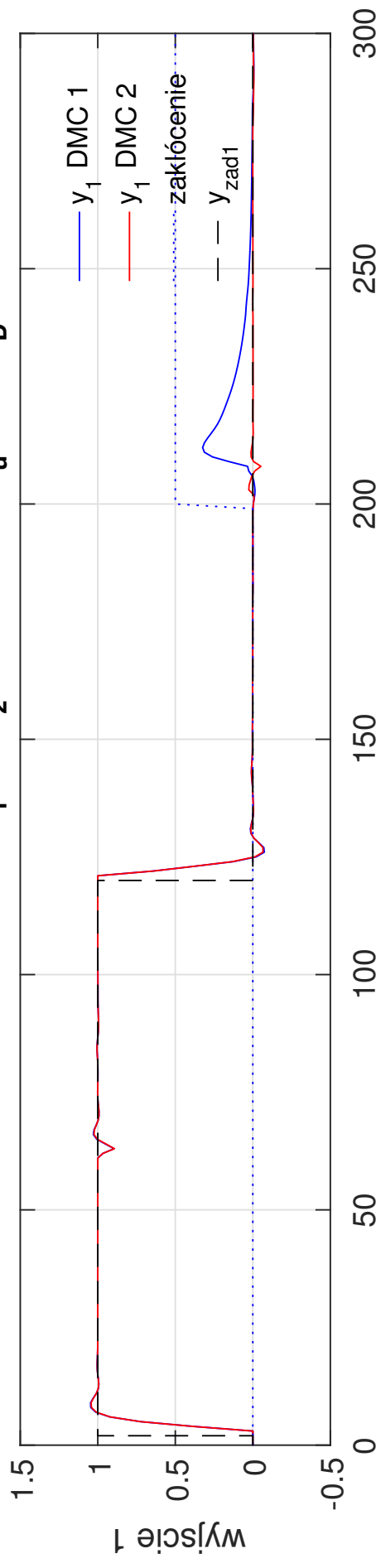
$Sz(:, :, 1) =$	0 0
$Sz(:, :, 2) =$	0 0
$Sz(:, :, 3) =$	0 0
$Sz(:, :, 4) =$	0 0.3575
$Sz(:, :, 5) =$	0 0.6889
$Sz(:, :, 6) =$	0 0.9962
$Sz(:, :, 7) =$	0 1.2810
$Sz(:, :, 8) =$	0 1.5450
$Sz(:, :, 9) =$	0.2467 1.7898
$Sz(:, :, 10) =$	0.4773 2.0167

Regulator DMC – macierz M^{zP} (program ogólny)

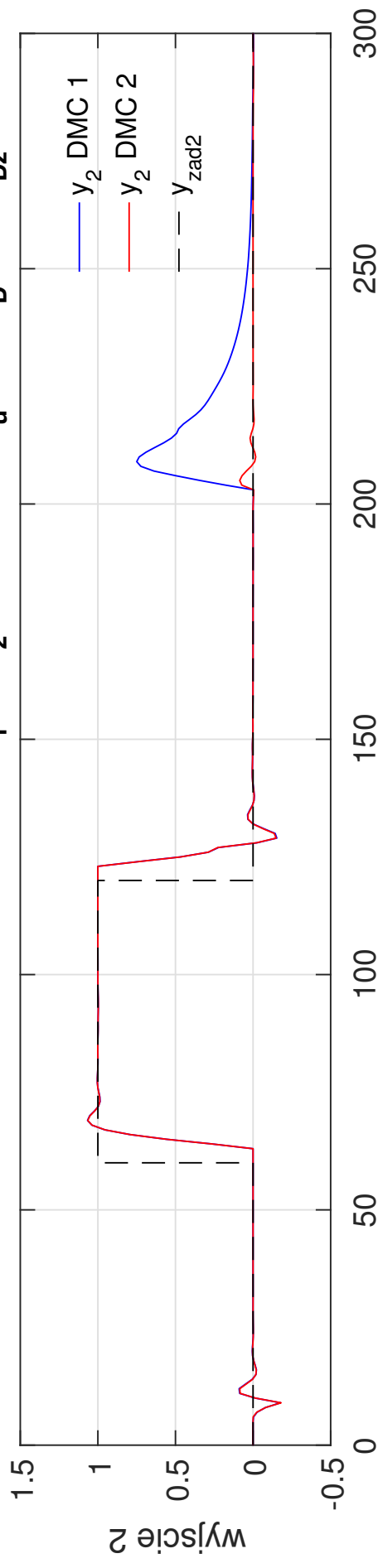
```
function MzP=DMCmatrixMzP(Sz,N,Nu)
% script "DMCmatrixMzP" macierze MzP regulatora DMC,
% DANE WEJŚCIOWE (wymagane):
% macierz skończonych odpowiedzi na skoki zakłóceń Sz(ny,nz,Dz), gdzie ny = dim y,
% nz = dim z; Dz - horyzont dynamiki zakłóceń od k=1 do k=Dz (uwzględniany w Sz)
% N - horyzont predykcji,
% Nu - horyzont sterowania.
%
[ny,nz,Dz]=size(Sz);
% Mz1 - pierwsza kolumna macierz dynamicznej Mz:
Mz1=zeros(N*ny,nz);
for i=1:N, Mz1((i-1)*ny+1:(i-1)*ny+ny,1:nz)=Sz(:,min(i,Dz)); end
% macierz MP:
MzPO=zeros(ny*N,nz*(Dz-1));
for i=1:Dz-1
    for j=1:N
        MzPO((j-1)*ny+1:j*ny,(i-1)*nz+1:i*nz)=Sz(:,min(i+j,Dz))-Sz(:,i);
    end
end
MzP=[Mz1 MzPO];
```


Przykład kolumna WB, cd. (3) – regulator DMC z kompensacją zakłócenia

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$



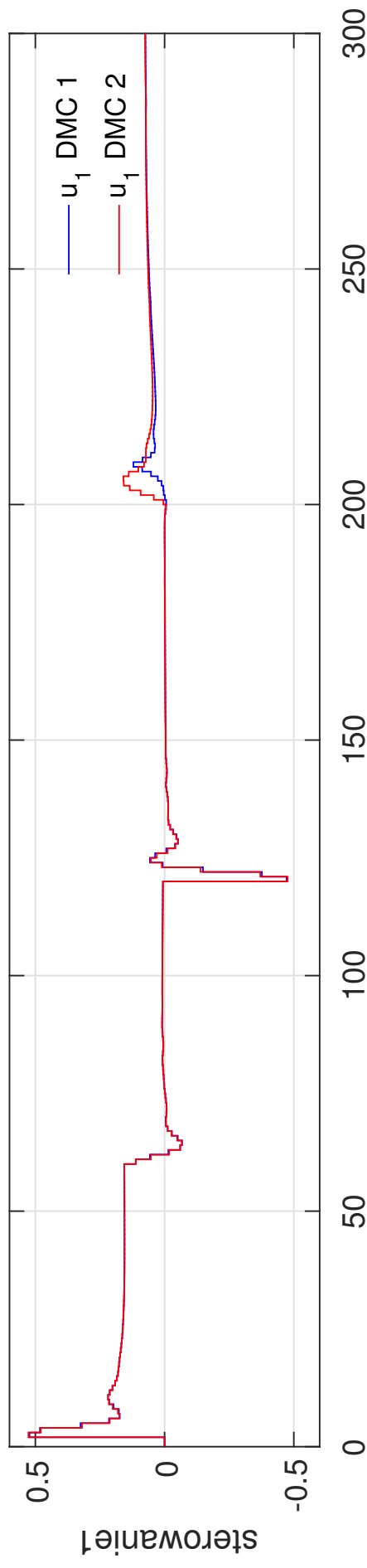
WB DMC 2 num. (z komp. zakł.): $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$, $N_{Dz}=80$



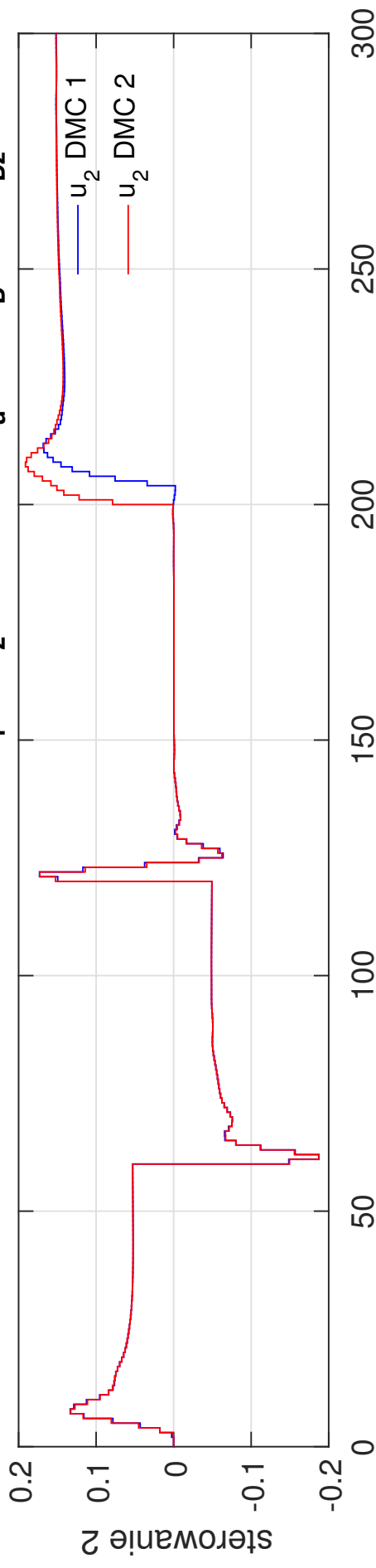
Trajektorie wyjść w układach regulacji DMC z $T_p = 1$ bez pomiaru oraz z pomiarem i kompensacją zakłócenia.

Przykład kolumna WB, cd. (4) – regulator DMC z kompensacją zakłócenia

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$



WB DMC 2 num. (z komp. zakł.): $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N=30$, $N_u=10$, $N_D=80$, $N_{Dz}=80$



Trajektorie sterowań w układach regulacji DMC z $T_p = 1$ bez pomiaru oraz z pomiarem i kompensacją zakłócenia.

Regulator DMC – strojenie parametrów

Podstawowymi parametrami dostajalnymi algorytmu MPC (stąd i DMC) generującego sterowania w wyniku optymalizacji funkcji kryterialnej są:

N – horyzont predykcji, **nie powinien być za krótki** w stosunku do dynamiki obiektu.

N_u – horyzont sterowania, z reguły $N_u < N$, regulator **MPC jest stosunkowo mało wrażliwy na N_u** (byle nie był skrajnie mały), im dłuższy tym większy wymiar zadania optymalizacji.

Ψ , Λ – macierze współczynników wagowych w funkcji kryterialnej; w ogólności macierze te mogą być również zmienne na horyzoncie predykcji, tzn. $\Psi(p)$, $\Lambda(p)$. **Wpływają na stabilność i odporność układu regulacji.**

T_p – okres próbkowania (czas powtarzania interwencji regulatora), **ważny parametr dla każdego MPC, szczególnie dla DMC**. Zbyt mała wartość T_p w stosunku do dynamiki obiektu prowadzi do dużej wartości D , stąd do dużych wymiarów macierzy M i M^P . Z drugiej strony, T_p nie może być zbyt duży w stosunku do zmienności odpowiedzi skokowych, tak aby dostatecznie dokładnie opisywały one dynamikę obiektu.

Regulator DMC – przykład kolumna WB, zwiększenie T_p^*

Okres próbkowania $T_p = 1$ jest mały w porównaniu ze stałymi czasowymi kolumny, przyjęty ze względu na dokładną reprezentację opóźnień - co skutkuje dużym horyzontem dynamiki $D = 120$.

Dyskretyzując model ciągły (funkcją "c2d") z okresem próbkowania $T_p = 2$ dostajemy transmitancję:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} \frac{0.744z + 0.7007}{z - 0.8871} \\ z^{-4} \frac{0.5786z + 0.5278}{z - 0.8324} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-2} \frac{-0.8789z - 0.838}{z - 0.9092} \\ z^{-2} \frac{-1.302z - 1.214}{z - 0.8703} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^{-4} \frac{0.4773}{z - 0.8744} \\ z^{-2} \frac{0.3575z + 0.3314}{z - 0.8594} \end{bmatrix} F(z)$$

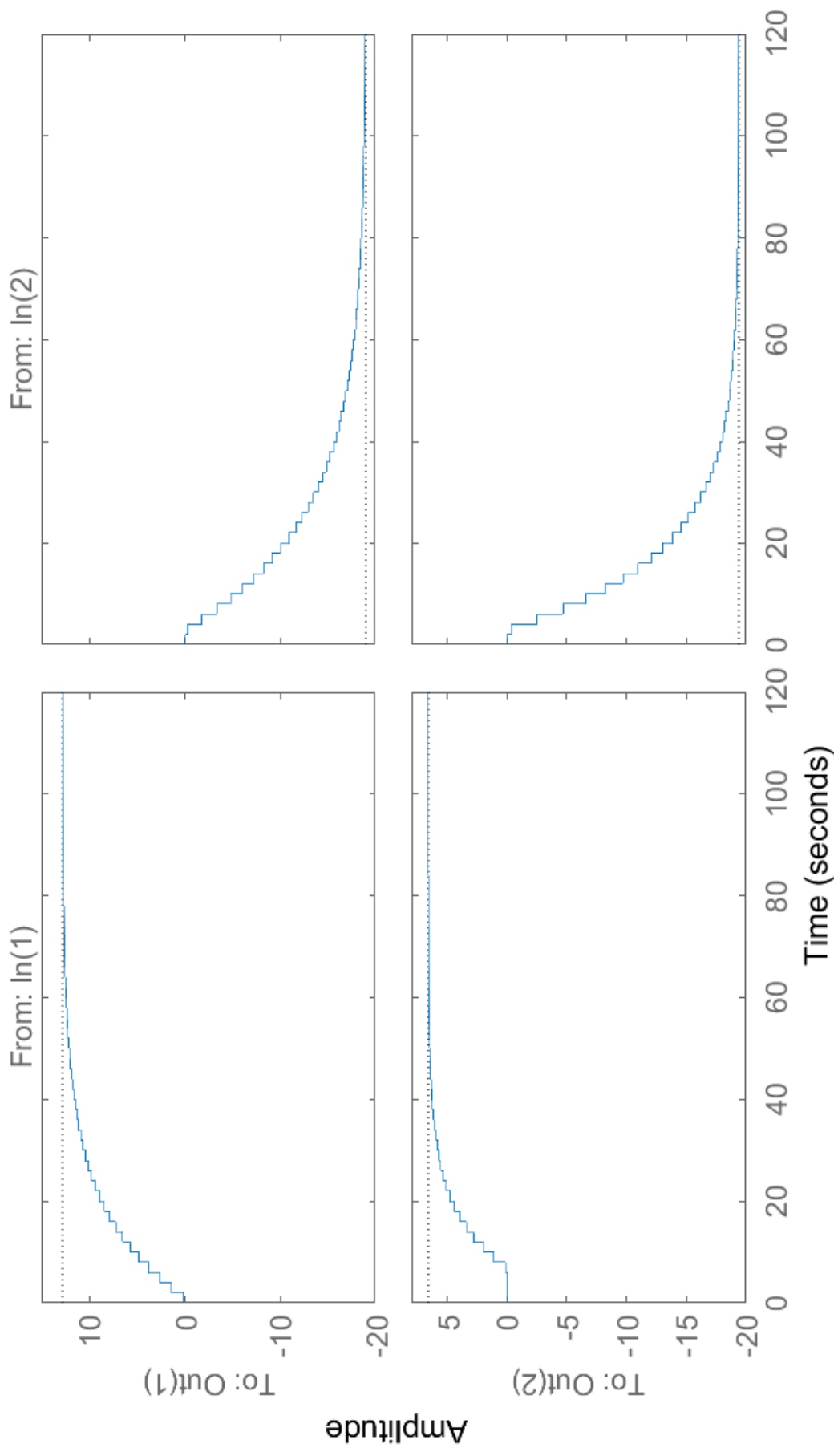
Jak wynika z przebiegu odpowiedzi skokowych, teraz można przyjąć $D = 60$ (ale niedokładna reprezentacja opóźnień).

Będziemy symulować układ regulacji z regulatorem DMC z $T_p = 2$, ale w pętli regulacji modelując obiekt jako dyskretny z $T_p = 1$ (i $D = 120$).

**materiał uzupełniający*

Przykład kolumna WB – odpowiedzi skokowe obiektu z $T_p = 2^*$

Step Response

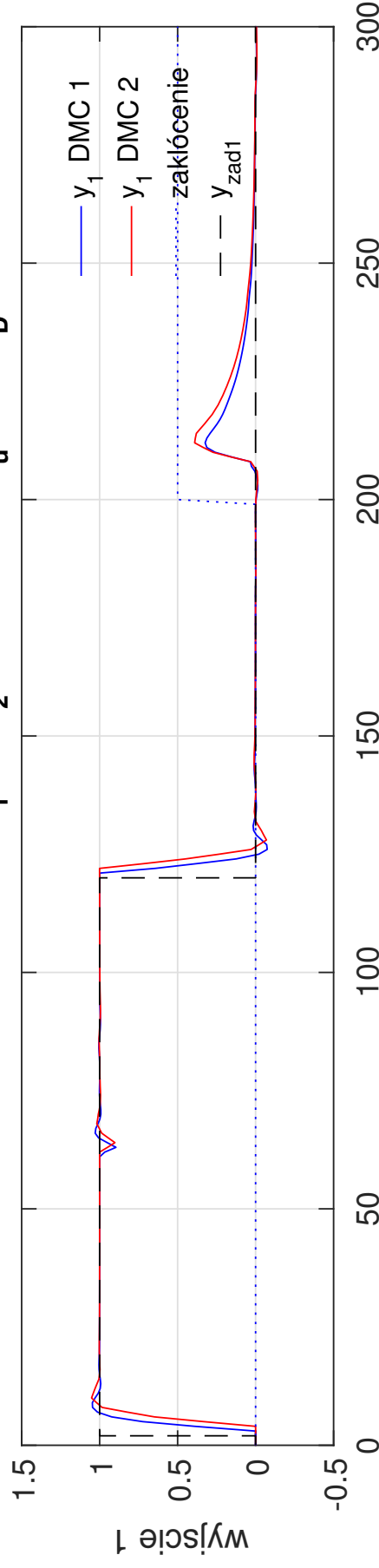


m

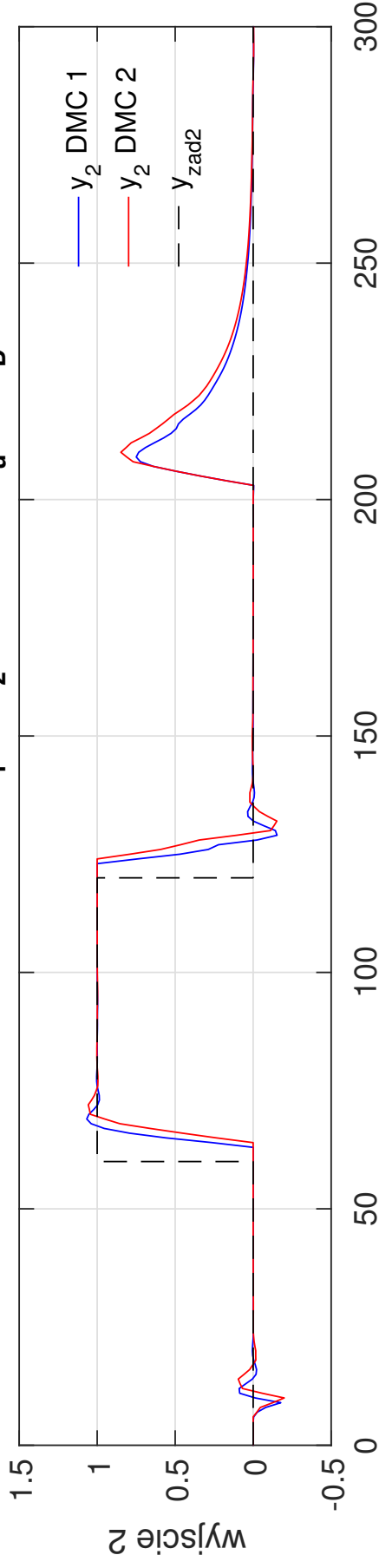
**materiał uzupełniający*

Regulator DMC – przykład kolumna WB, trajektorie z $T_p = 1$ i $T_p = 2^*$

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=10$, $N_D=80$



WB DMC 2 num.: $T_p=2$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=5$, $N_D=40$

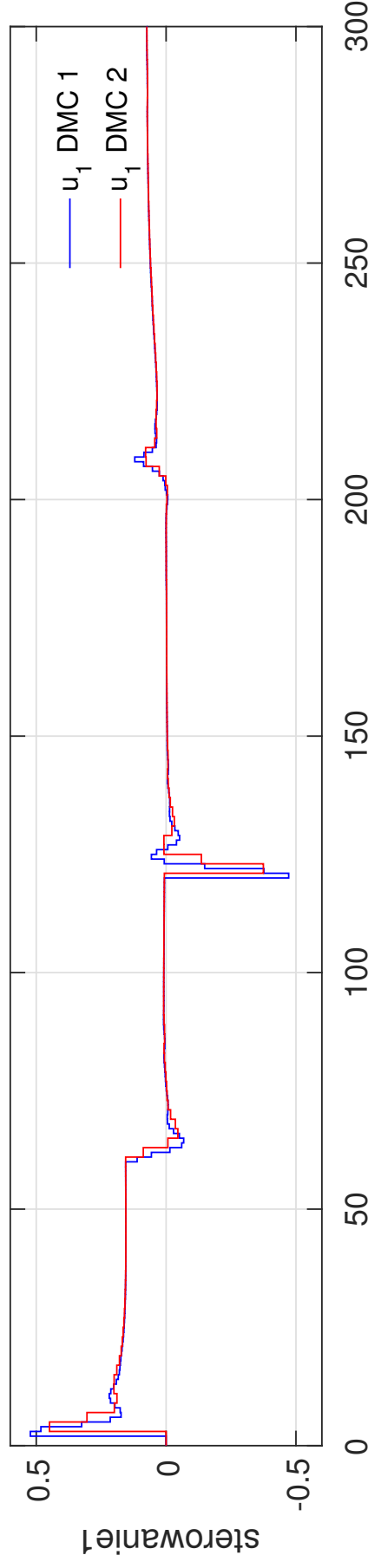


Trajektorie wyjść w regulacji DMC z $T_p = 1$ oraz $T_p = 2$ przy równych (fizycznie) horyzontach.

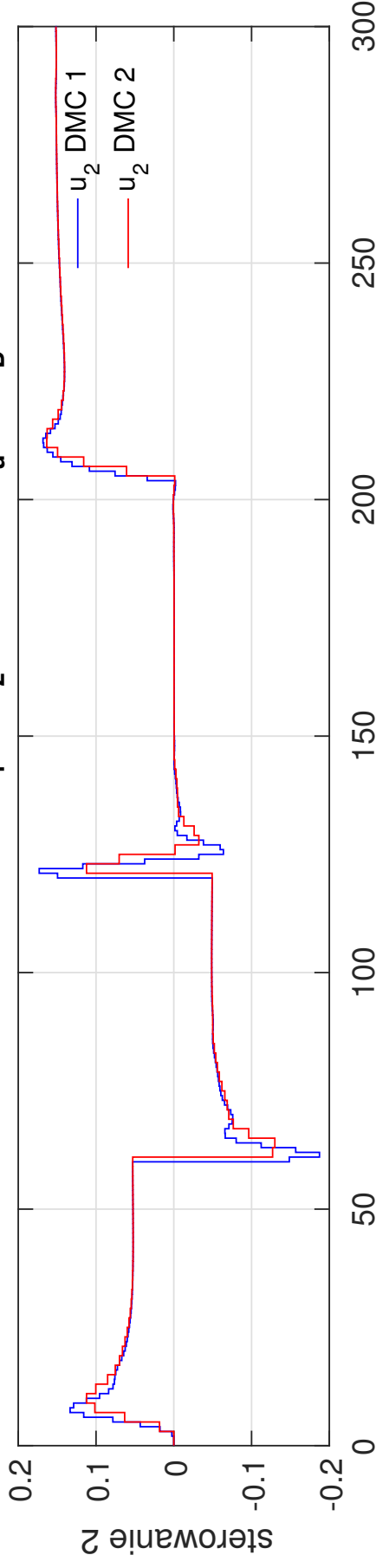
**materiał uzupełniający*

Regulator DMC – przykład kolumna WB, trajektorie z $T_p = 1$ i $T_p = 2^*$

WB DMC 1 num.: $T_p=1$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=30$, $N_u=10$, $N_D=80$



WB DMC 2 num.: $T_p=2$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=10$, $N_u=15$, $N_u=5$, $N_D=40$



Trajektorie sterowań w regulacji DMC z $T_p = 1$ oraz $T_p = 2$ przy równych (fizycznie) horyzontach.

**materiał uzupełniający*