GPC dla obiektu SISO – model obiektu

Dla obiektu SISO przyjmujemy model w postaci liniowego równania różnicowego:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k), \quad (*)$$

gdzie $d(k)$ jest zakłóceniem, modelowanym jako przedziałami stałe lub całkowany dyskretny szum biały (tzn. $d(k+1) = d(k) + \epsilon(k)$, gdzie $\epsilon(k)$ to szum biały).

Najlepszą prognozą przyszłych wartości takiego zakłócenia jest jego aktualna wartość, tzn. na horyzoncie predykcji przyjmujemy:

$$d(k+1|k) = d(k+2|k) = \cdots = d(k+N|k) = d(k),$$

Uwaga: Definiując operator opóźnienia o okres impulsowania T_p jako z^{-1} , możemy model $(*)$ przedstawić w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned}
(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}) \cdot y(k) &= (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B}) \cdot u(k-1) + d(k), \\
A(z^{-1}) \cdot y(k) &= B(z^{-1}) \cdot u(k-1) + d(k) \\
&= B(z^{-1}) z^{-1} \cdot u(k) + d(k),
\end{aligned}$$

skąd dostajemy model w postaci transmitancji dyskretnych torów sterowania i zakłócenia:

$$y(k) = \frac{(b_0 + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B}) z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}} \cdot u(k) + \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}} \cdot d(k).$$

GPC dla obiektu SISO – macierz dynamiczna M

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k) \quad (*)$$

Zakładając:

– zerowy stan ustalony ($y(k) = 0,\ k \leqslant 0$) i brak zakłócenia ($d(k) = 0$),
– sterowanie w postaci skoku jednostkowego w chwili zero: $u(k) = 0 \text{ dla } k < 0,\ u(k) = 1 \text{ dla } k \geqslant 0$,

z modelu $(*)$ można bezpośrednio obliczyć ciąg elementów $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ odpowiedzi skokowej:

$$\begin{aligned}
y(1) &= s_1 = b_0 \\
y(2) &= s_2 = -a_1 s_1 + b_0 + b_1 \\
y(3) &= s_3 = -a_1 s_2 - a_2 s_1 + b_0 + b_1 + b_2 \\
y(4) &= s_4 = -a_1 s_3 - a_2 s_2 - a_3 s_1 + b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\
& \vdots \\
y(k) &= s_k = -\sum_{i=1}^{\min\{k-1, n_A\}} a_i s_{k-i} + \sum_{i=0}^{\min\{k-1, n_B\}} b_i
\end{aligned}$$

a stąd macierz dynamiczną $\mathbf{M}$ potrzebną dla wyliczania trajektorii wymuszanej wyjść na horyzoncie predykcji.

GPC dla obiektu SISO – trajektoria swobodna wyjść (rekurencyjnie)

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k) \quad (*)$$

Stosując **model** $(*)$ **do predykcji wyjść**, mamy dla chwili następnej $(k+1)$:

$$\begin{aligned} y(k+1|k) = & -a_1 y(k) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+1) + \\ & + b_0 u(k|k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \cdots + b_{n_B} u(k-n_B) + d(k), \end{aligned}$$

gdzie $y(k), y(k-1), y(k-2), \ldots$ to wartości zmierzone wyjść procesu , a zakłócenie w chwili k modelowane jest analogicznie jak w algorytmie DMC:

$$d(k) = y(k) - y(k|k-1) = y(k) - \left[-\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_B} b_i u(k-1-i) \right],$$

$$d(k+1|k) = d(k+2|k) = \cdots = d(k+N|k) = d(k).$$

Dla predykcji odpowiedzi swobodnej $y^0(k+p|k),\ p = 1, 2, \ldots, N$, zakładamy w modelu $(*)$ $u(k+p|k) = u(k-1),\ p = 0, 1, \ldots, N-1$, mamy stąd kolejno i rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} y^0(k+1|k) = & -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+1) + \\ & + b_0 u(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \cdots + b_{n_B} u(k-n_B) + d(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^0(k+2|k) = & -a_1 y^0(k+1|k) - a_2 y(k) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+2) + \\ & + b_0 u(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-1) \cdots + b_{n_B} u(k-n_B+1) + d(k), \end{aligned}$$

itd.

GPC dla obiektu SISO – trajektoria swobodna wyjść (rekurencyjnie) 2

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} y^0(k+1|k) = & -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+1) + \\ & +b_0 u(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \cdots + b_{n_B} u(k-n_B) + d(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^0(k+2|k) = & -a_1 y^0(k+1|k) - a_2 y(k) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+2) + \\ & +b_0 u(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-1) \cdots + b_{n_B} u(k-n_B+1) + d(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^0(k+3|k) = & -a_1 y^0(k+2|k) - a_2 y^0(k+1|k) - a_3 y(k) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A+3) + \\ & +b_0 u(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B+2) + d(k), \end{aligned}$$

itd.

czyli mamy ogólny wzór dla rekurencyjnego liczenia trajektorii swobodnej:

$$\begin{aligned} y^0(k+p|k) = & -\sum_{i=1}^{\min\{n_A,p-1\}} a_i y^0(k+p-i|k) - \sum_{i=\min\{n_A,p-1\}+1}^{n_A} a_i y(k+p-i) + \\ & + \sum_{i=0}^{\min\{n_B,p\}} b_i u(k-1) + \sum_{i=\min\{n_B,p\}+1}^{n_B} b_i u(k-1+p-i) + d(k), \\ & \qquad p = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

GPC dla obiektu SISO – algorytmy regulatora

Mając policzoną macierz dynamiczną $\mathbf{M}$ (tylko raz, **off-line**), oraz policzoną **w danej chwili** k (rekurencyjnie) trajektorię swobodną:

$$Y^0(k) = \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ \vdots \\ y^0(k+N|k)] \end{bmatrix},$$

możemy:

– zastosować **regulator GPC analityczny rekurencyjny**:

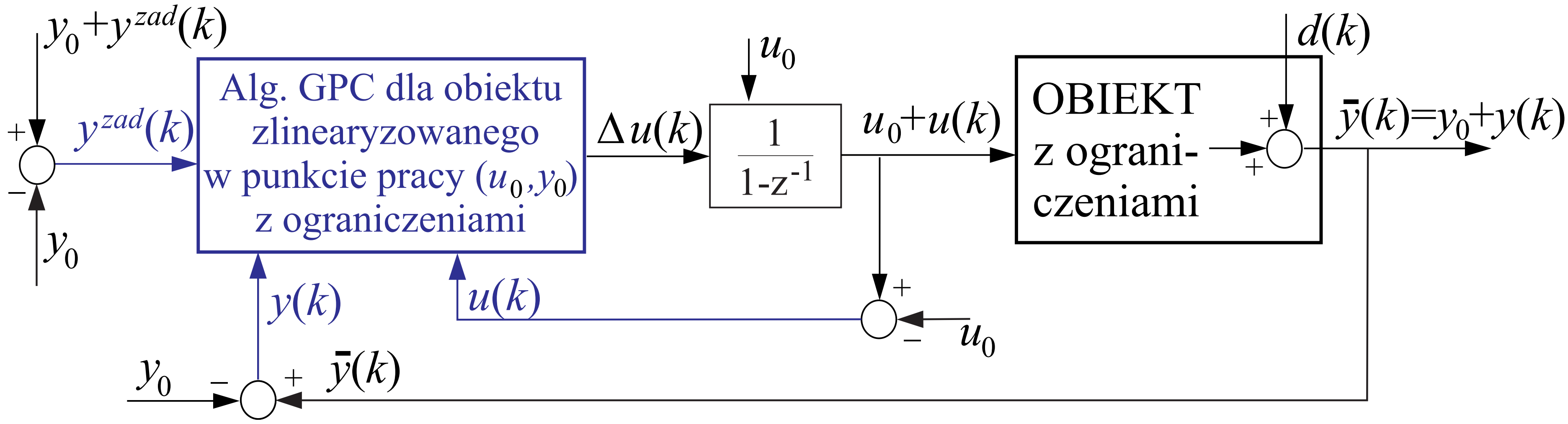
$$\triangle u(k) = \triangle \hat{u}(k|k) = \overline{\mathbf{k}}_1 [Y^{zad}(k) - Y^0(k)],$$

gdzie $\overline{\mathbf{k}}_1$ – pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{K} = [\mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1} \mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}}$;

– zastosować **regulator GPC numeryczny** (z ograniczeniami):
wyznaczający $\triangle u(k)$ z numerycznej optymalizacji zadania programowania kwadratowego.

GPC dla obiektu SISO – realizacja algorytmu dla obiektu (oryginalnego)

Model liniowy (w szczególności dany równaniem różnicowym) to z reguły model zlinearyzowany w punkcie pracy (u_0, y_0), co trzeba odpowiednio uwzględnić przy realizacji regulatora (zmienne przyrostowe !), np. dla regulatora numerycznego:



a dla analitycznego trzeba jeszcze dodać rzutowanie na ograniczenia, jak w PID czy DMC.

Przy liczeniu elementów składowej swobodnej trajektorii wyjść $y^0(k+p|k)$ należy brać pod uwagę wartości: zadaną, wyjścia i sterowania jako zmienne przyrostowe względem punktu pracy (punktowi pracy odpowiada $y^{zad}(k)=0$).
Ograniczenia w zadaniu optymalizacji powinny być też dla zmiennych modelu zlinearyzowanego.

GPC dla obiektu SISO – Przykład

Obiekt SISO rozważany dla algorytmu DMC, opisany dyskretną odpowiedzią skokową:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
0	0	0.2	0.5	0.6	0.62

$(D = 6)$.

Tak jak poprzednio $N_1 = 3$, $N_u = 3$, $N = 6$ oraz $\underline{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{I}$, $\underline{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda\mathbf{I}$. Punkt pracy: (u_0, y_0)=(0,0).

Dla algorytmu GPC obiekt opiszemy dyskretnym równaniem różnicowym

$$y(k) + ay(k-1) = b_2 u(k-3) + b_3 u(k-4) + d(k) \qquad (*)$$

odpowiadającego inercji z opóźnieniem τ równym dwu okresom próbkowania (wynika bezpośrednio z odpowiedzi skokowej obiektu). Dopasowując, przy $d(k) = 0$, parametry modelu do punktów odpowiedzi skokowej metodą najmniejszych kwadratów, uzyskano

$$(1 - 0.2676z^{-1})y(k) = (0.1989z^{-2} + 0.2552z^{-3})z^{-1}u(k)$$

tzn.

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.2676z^{-1}$$
$$B(z^{-1}) = 0.1989z^{-2} + 0.2552z^{-3}$$

Mamy więc

$$a_1 = -0.2676, \quad n_A = 1$$
$$b_0 = b_1 = 0, \; b_2 = 0.1989, \; b_3 = 0.2552, \quad n_B = 3$$

GPC dla obiektu SISO – Przykład (2)

$$y(k) = -ay(k-1) + b_2u(k-3) + b_3u(k-4) + d(k) \qquad (*)$$

Stosując model $(*)$ (przy $d(k) = 0$) wyznaczamy pierwszych $N = 6$ współczynników odpowiedzi skokowej, a następnie macierz $\mathbf{M}$:

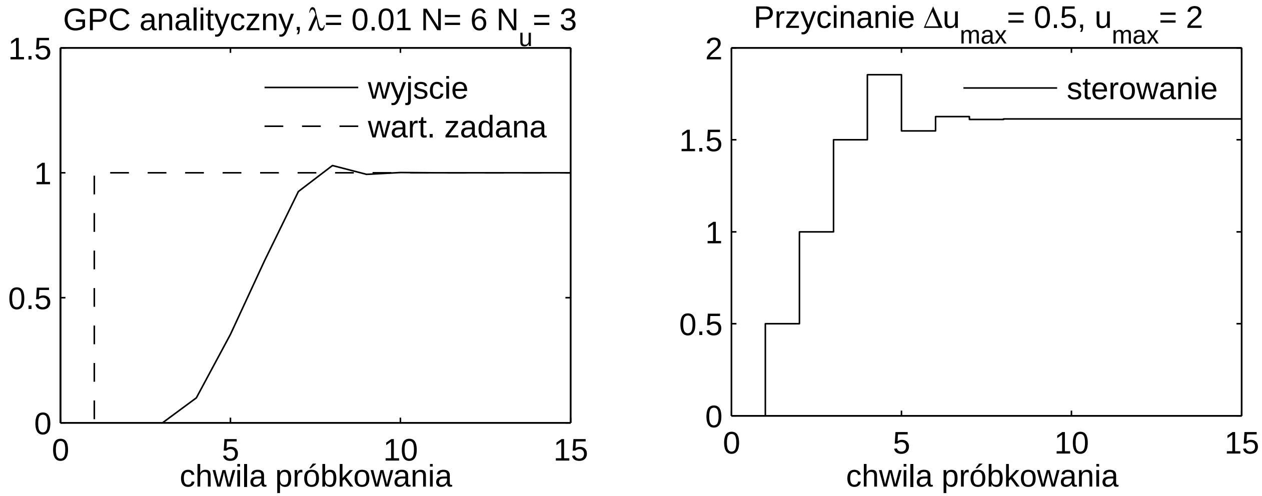
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1989 & 0 & 0 \\ 0.5073 & 0.1989 & 0 \\ 0.5899 & 0.5073 & 0.1989 \\ 0.6120 & 0.5899 & 0.5073 \end{bmatrix}$$

Stosując wzór $(*)$ przy $u(k+p|k) = u(k-1)$, rekurencyjnie, mamy trajektorię swobodną:

$$\begin{aligned}
y^0(k+1|k) &= -a_1y(k) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) + d(k), \\
y^0(k+2|k) &= -a_1y^0(k+1|k) + b_2u(k-1) + b_3u(k-2) + d(k), \\
y^0(k+3|k) &= -a_1y^0(k+2|k) + b_2u(k-1) + b_3u(k-1) + d(k), \\
y^0(k+4|k) &= -a_1y^0(k+3|k) + b_2u(k-1) + b_3u(k-1) + d(k), \\
y^0(k+5|k) &= -a_1y^0(k+4|k) + b_2u(k-1) + b_3u(k-1) + d(k), \\
y^0(k+6|k) &= -a_1y^0(k+5|k) + b_2u(k-1) + b_3u(k-1) + d(k),
\end{aligned}$$

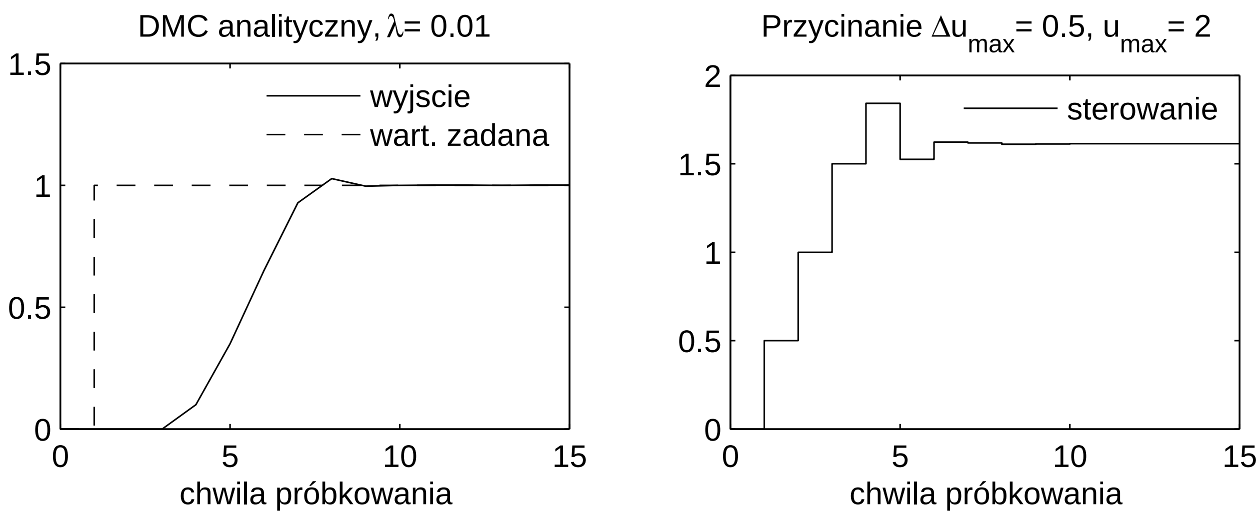
gdzie estymata zakłócenia: $d(k) = y(k) + a_1y(k-1) - b_2u(k-3) - b_3u(k-4)$.

GPC dla obiektu SISO – Przykład (3)



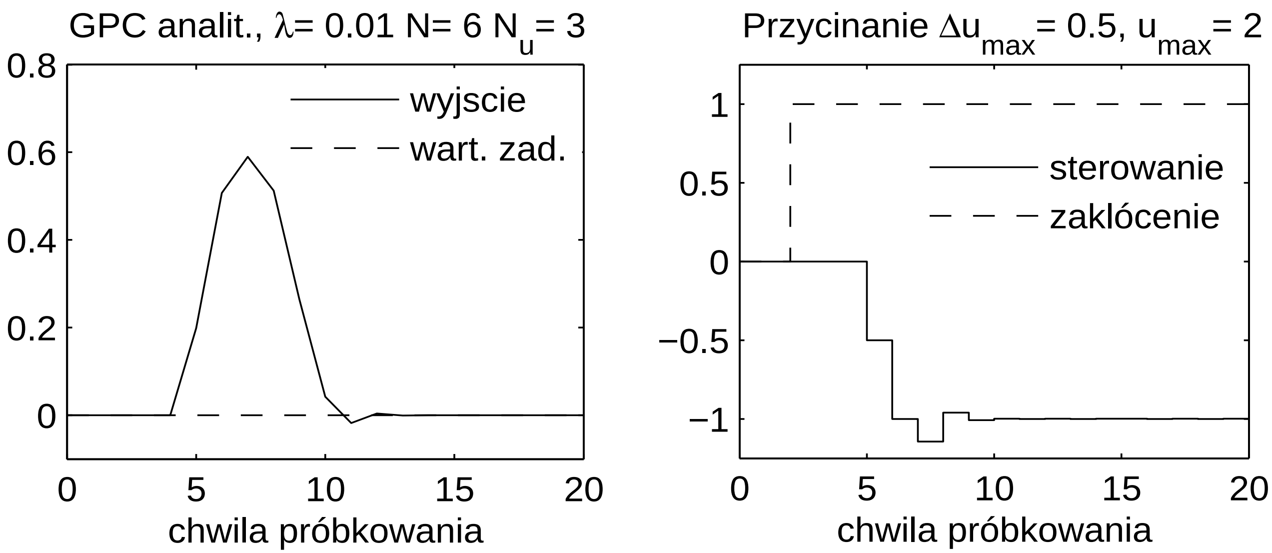
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym.

Dla porównania:



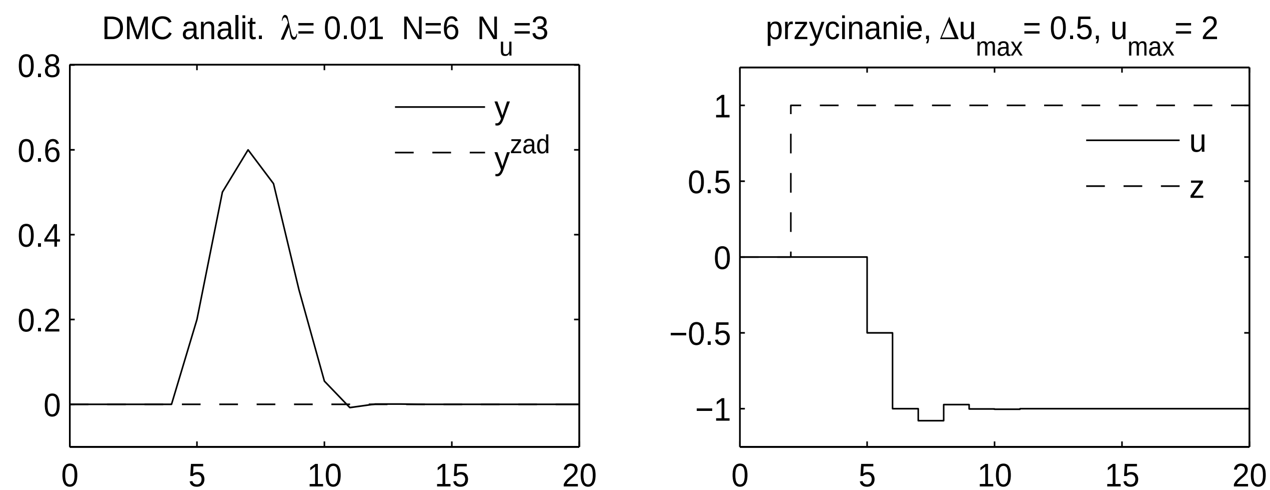
Wyniki symulacji z regulatorem DMC analitycznym.

GPC dla obiektu SISO – Przykład (4)



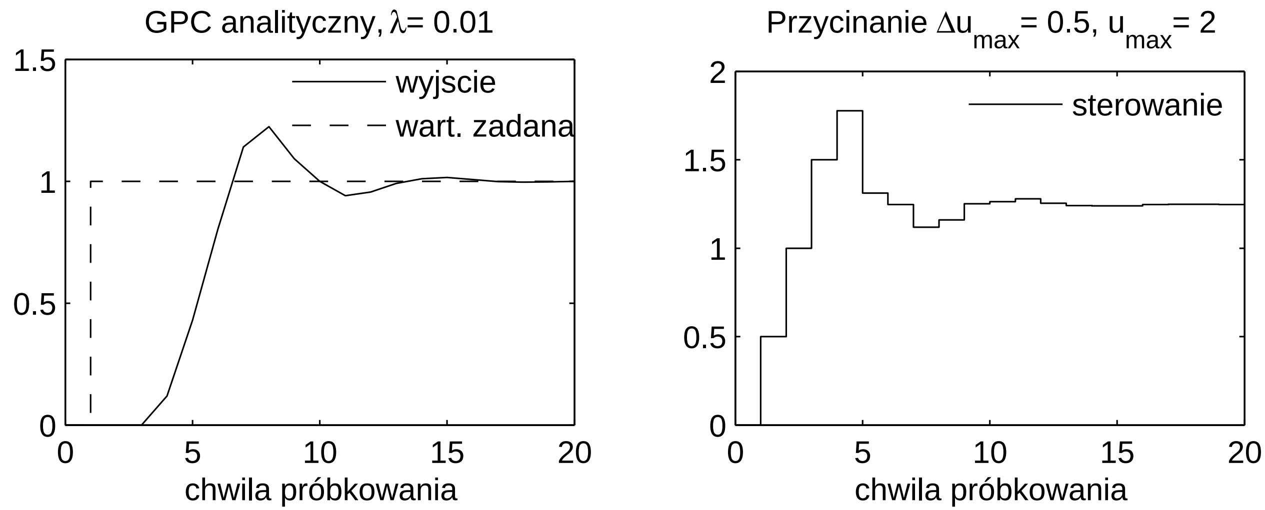
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, skok jednostkowy zakłócenia na wejściu obiektu w chwili k=2.

Dla porównania:

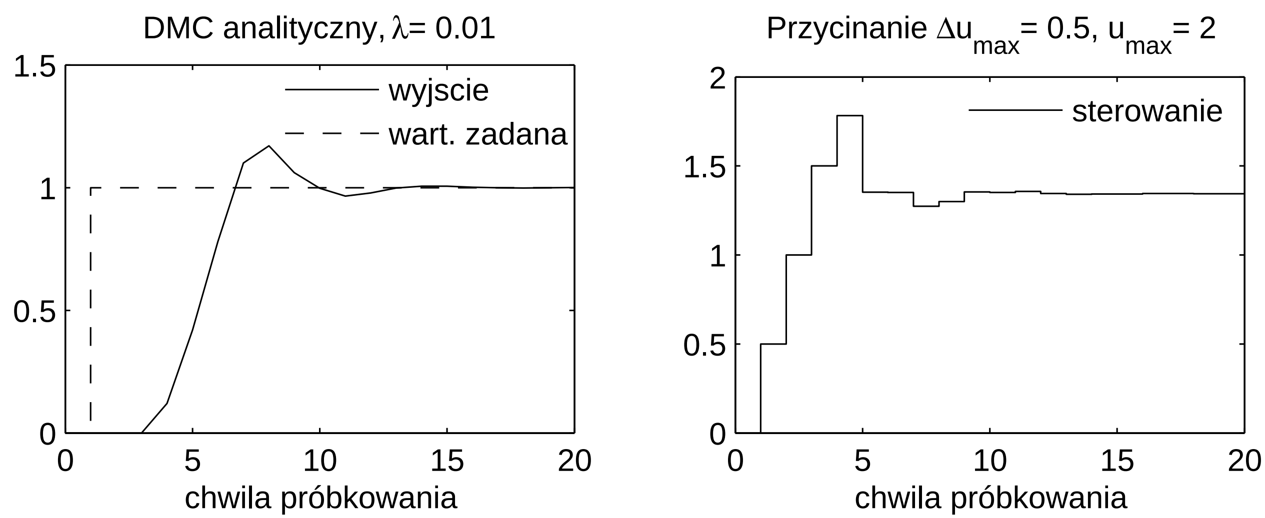


Wyniki symulacji z regulatorem DMC analitycznym, skok jednostkowy zakłócenia na wejściu obiektu w chwili k=2.

GPC dla obiektu SISO – Przykład (5)



Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, wzmocnienie obiektu zwiększone o 20%. Dla porównania:



Wyniki symulacji z regulatorem DMC analitycznym, wzmocnienie obiektu zwiększone o 20%.

GPC dla obiektu SISO: jawne prawo regulacji – przykład cd.

Kontynuując przykład, dla skrócenia obliczeń, ograniczymy horyzont predykcji do $N = 4$, a horyzont sterowania do $N_u = 2$ (jeśli opóźnienie $\tau > 0$, to zawsze $N_u \leqslant N - \tau$, w przykładzie $\tau = 2$).

Dla naszego modelu obiektu:

$$y(k) = 0.2676z^{-1}y(k-1) + 0.1989u(k-3) + 0.2552u(k-4)$$

mamy estymatę zakłócenia:

$$d(k) = y(k) - 0.2676\,y(k-1) - 0.1989\,u(k-3) - 0.2552\,u(k-4)$$

i rekurencyjnie liczoną trajektorię swobodną:

$$\begin{aligned}
y^0(k+1|k) &= 0.2676\,y(k) + 0.1989\,u(k-2) + 0.2552\,u(k-3) + d(k),\\
y^0(k+2|k) &= 0.2676\,y^0(k+1|k) + 0.1989\,u(k-1) + 0.2552\,u(k-2) + d(k),\\
y^0(k+3|k) &= 0.2676\,y^0(k+2|k) + 0.1989\,u(k-1) + 0.2552\,u(k-1) + d(k),\\
y^0(k+4|k) &= 0.2676\,y^0(k+3|k) + 0.1989\,u(k-1) + 0.2552\,u(k-1) + d(k).
\end{aligned}$$

Wszystkie elementy $y^0(k+p|k)$ trajektorii swobodnej **zależą w istocie jedynie od** $y(k)$**,** $y(k-1)$ **oraz** $u(k-1)$**,** $u(k-2)$**,** $u(k-3)$**,** $u(k-4)$ **–** **jawna zależność** ukryta jest z powodu rekurencji.

Zależność jawną można wyznaczyć **eliminując rekurencję**:

– wstawiając $y^0(k+1|k)$ do wzoru na $y^0(k+2|k)$ i wzór na $d(k)$ do obu wzorów dostajemy:

$$\begin{aligned}
y^0(k+2|k) = {}& 1.3392y(k) - 0.3392y(k-1) + 0.1989u(k-1) + \\
& +0.3084u(k-2) - 0.1838u(k-3) - 0.3235u(k-4),
\end{aligned}$$

GPC dla obiektu SISO: jawne prawo regulacji – przykład cd. (2)

$$\begin{aligned}
y^0(k+1|k) &= 0.2676\,y(k) + 0.1989\,u(k-2) + 0.2552\,u(k-3) + d(k),\\
y^0(k+2|k) &= 1.3392y(k) - 0.3392y(k-1) + 0.1989u(k-1) + \\
&\qquad +0.3084u(k-2) - 0.1838u(k-3) - 0.3235u(k-4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^0(k+3|k) &= 0.2676\,y^0(k+2|k) + 0.4541\,u(k-1) + d(k),\\
y^0(k+4|k) &= 0.2676\,y^0(k+3|k) + 0.4541\,u(k-1) + d(k).
\end{aligned}$$

Dalej eliminując rekurencję:

– wstawiając jawny wzór na $y^0(k+2|k)$ i wzór na $d(k)$ do wzoru rekurenc. na $y^0(k+3|k)$ dostajemy:

$$\begin{aligned}
y^0(k+3|k) &= 1.3584y(k) - 0.3584y(k-1) + 0.5073u(k-1) + \\
&\qquad +0.0825u(k-2) - 0.2481u(k-3) - 0.3419u(k-4),
\end{aligned}$$

– wstawiając jawny wzór na $y^0(k+3|k)$ i wzór na $d(k)$ do wzoru rekurenc. na $y^0(k+4|k)$ dostajemy:

$$\begin{aligned}
y^0(k+4|k) &= 1.3635y(k) - 0.3635y(k-1) + 0.5899u(k-1) + \\
&\qquad +0.0221u(k-2) - 0.2653u(k-3) - 0.3467u(k-4),
\end{aligned}$$

(Przypomnijmy, w przykładzie mamy: $n_A = 1,\ n_B = 3$)

GPC dla obiektu SISO: jawne prawo regulacji – przykład cd.(3)

Macierz dynamiczna dla $N = 4$ i $N_u = 2$ ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1989 & 0 \\ 0.5073 & 0.1989 \end{bmatrix}$$

stąd dla $\lambda = 0.1$:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} \mathbf{M} + \underline{\mathbf{\Lambda}}]^{-1} \mathbf{M}^T \underline{\mathbf{\Psi}} = [\mathbf{M}^T \mathbf{M} + 0.1\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6140 & 1.1220 \\ 0 & 0 & -0.4439 & 0.6140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{k}}_1 \\ \overline{\mathbf{k}}_2 \end{bmatrix}$$

czyli prawo sterowania:

$$\begin{aligned}
\triangle u(k) &= \overline{\mathbf{k}}_1 [Y^{zad}(k) - Y^0(k)] \\
&= [0.6140 \;\; 1.1220] \begin{bmatrix} y^{zad}(k) - y^0(k+3|k) \\ y^{zad}(k) - y^0(k+4|k) \end{bmatrix} \\
&= [0.6140 \;\; 1.1220] \begin{bmatrix} y^{zad}(k) - [1.3584y(k) - 0.3584y(k-1) + 0.5073u(k-1) + \\ \quad + 0.0825u(k-2) - 0.2481u(k-3) - 0.3419u(k-4)] \\ y^{zad}(k) - [1.3635y(k) - 0.3635y(k-1) + 0.5899u(k-1) + \\ \quad + 0.0221u(k-2) - 0.2653u(k-3) - 0.3467u(k-4)] \end{bmatrix} \\
&= 1.736y^{zad}(k) - 2.3639y(k) + 0.6279y(k-1) - 0.9734u(k-1) - 0.0755u(k-2) + \\
&\qquad + 0.45u(k-3) + 0.5989u(k-4)
\end{aligned}$$

lub w postaci **równoważnej alternatywnej**:

$$\begin{aligned}
\triangle u(k) = {} & 1.736(y^{zad}(k) - y(k)) + 0.6279\triangle y(k) - 0.9734\triangle u(k-1) - 1.0489\triangle u(k-2) + \\
& - 0.5989\triangle u(k-3).
\end{aligned}$$

GPC dla obiektu SISO: jawne prawo regulacji (bez ograniczeń) - OGÓLNIE

Przedstawiony przykład zilustrował jeden ze sposobów wyznaczania jawnego prawa regulacji GPC i jego dwie równoważne postacie.

Można **ogólnie wykazać**, że dla modelu obiektu postaci:

$$y(k) = -\sum_{j=1}^{n_A} a_j y(k-j) + \sum_{j=1}^{n_B+1} b_j u(k-j)$$

jawne prawo regulacji ma postać:

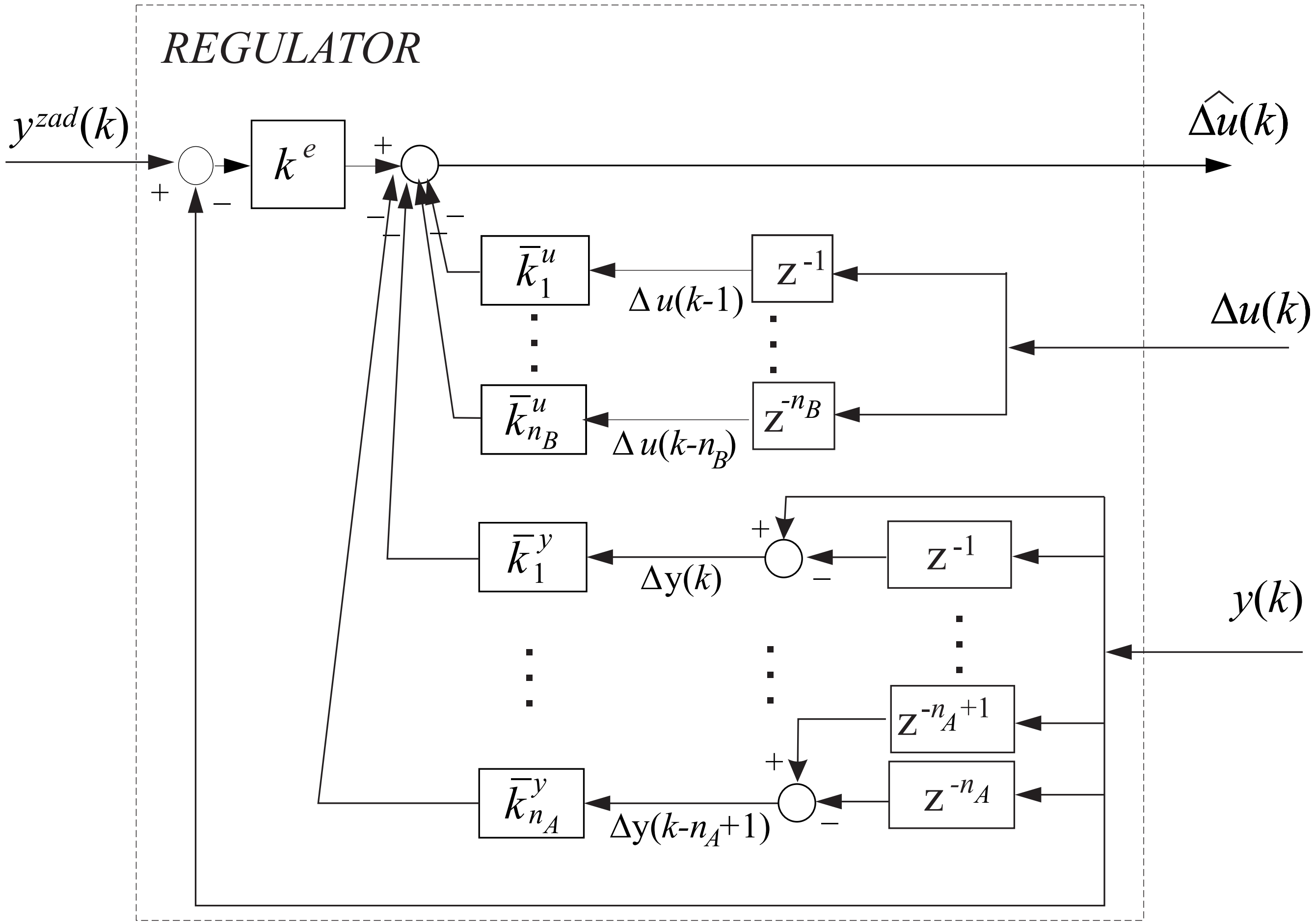
$$\triangle\hat{u}(k) = k^e y^{zad}(k) - \sum_{j=0}^{n_A} k_j^y y(k-j) - \sum_{j=1}^{n_B+1} k_j^u u(k-j)$$

lub równoważnie:

$$\triangle\hat{u}(k) = k^e (y_k^{zad} - y(k)) - \sum_{j=1}^{n_A} \bar{k}_j^y \triangle y(k-j+1) - \sum_{j=1}^{n_B} \bar{k}_j^u \triangle u(k-j)$$

GPC dla obiektu SISO – struktura analitycznego jawnego prawa regulacji

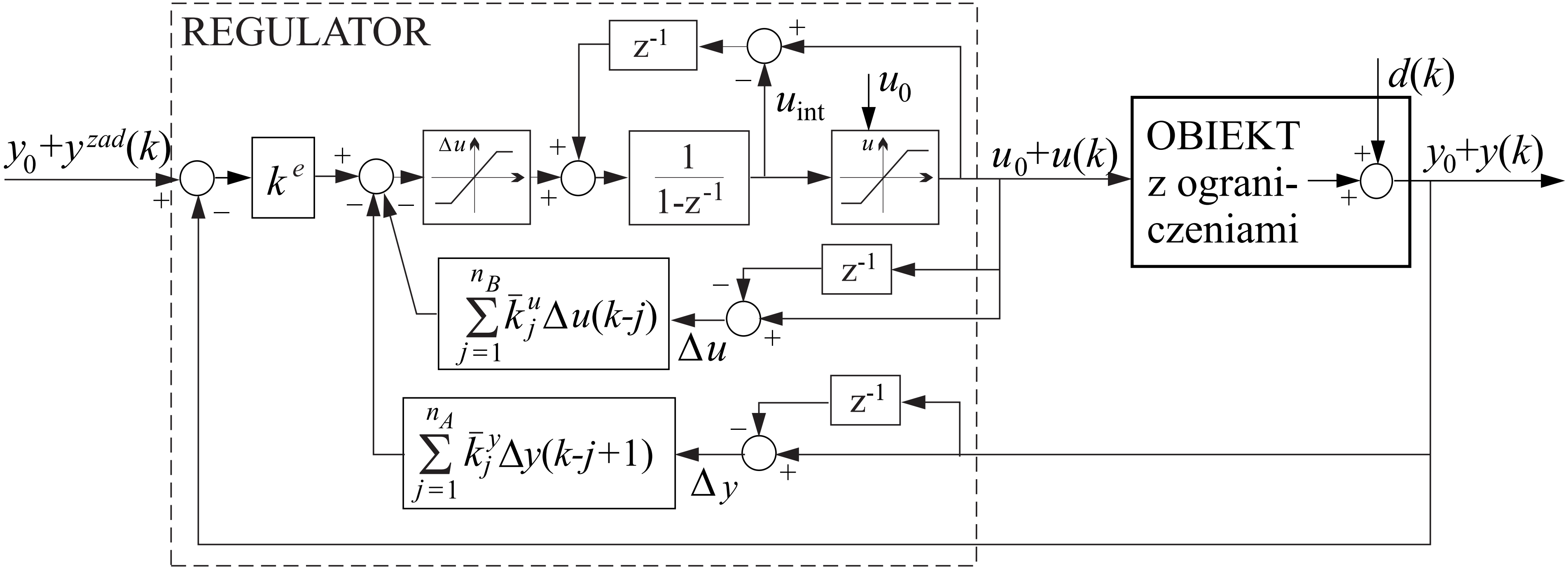
$$\triangle\hat{u}(k) = k^e(y_k^{zad} - y(k)) - \sum_{j=1}^{n_A} \bar{k}_j^y \triangle y(k-j+1) - \sum_{j=1}^{n_B} \bar{k}_j^u \triangle u(k-j)$$



Uwaga: Sygnały tu występujące to przyrostowe w punkcie pracy (y_0, u_0).

GPC dla obiektu SISO – struktura analitycznego jawnego prawa regulacji, z uwzględnieniem ograniczeń sterowania (przez przycinanie)

$$\triangle\hat{u}(k) = k^e(y_k^{zad} - y(k)) - \sum_{j=1}^{n_A} \bar{k}_j^y \triangle y(k-j+1) - \sum_{j=1}^{n_B} \bar{k}_j^u \triangle u(k-j)$$



Punkt pracy: (u_0, y_0) – w którym wyznaczono model zlinearyzowany dany równaniem różnicowym; załączamy regulator ze stanem początkowym integratora u_0 (pokazane na rysunku).

GPC dla obiektu MIMO - model obiektu (podejście skalarne MISO)

Model MIMO w postaci n_y **dyskretnych równań różnicowych (**$n_y \times n_u$ **transmitancji dyskretnych)** można traktować jako n_y obiektów MISO (multi-input single-output), tzn. zależności każdego z wyjść y_m, $m = 1, \ldots, n_y$, od wszystkich (n_u) sterowań.

Struktura tych modeli MISO jest identyczna jak modelu SISO : – model dla obiektu SISO był :

$$\begin{aligned} y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + \\ + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k), \end{aligned}$$

natomiast dla każdego z n_y modeli MISO mamy:

$$\begin{aligned} y_m(k) = -a_1^m y_m(k-1) - \cdots - a_{n_A^m} y(k-n_A^m) + \\ + b_0^{m,1} u_1(k-1) + \cdots + b_{n_B^{m,1}}^{m,1} u_1(k-n_B^{m,1}-1) + \\ + b_0^{m,2} u_2(k-1) + \cdots + b_{n_B^{m,2}}^{m,2} u_2(k-n_B^{m,2}-1) + \\ \vdots \\ + b_0^{m,n_u} u_{n_u}(k-1) + \cdots + b_{n_B^{m,n_u}}^{m,n_u} u_{n_u}(k-n_B^{m,n_u}-1) + d_m(k); \end{aligned}$$

czyli w zwięzłym zapisie:

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^{n_A^m} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{i=0}^{n_B^{m,j}} b_i^{m,j} u_j(k-1-i) + d_m(k), \quad m = 1, \ldots, n_y.$$

GPC dla obiektu MIMO - model obiektu (podejście skalarne MISO) (2)

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^{n_A^m} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{i=0}^{n_B^{m,j}} b_i^{m,j} u_j(k-1-i) + d_m(k), \quad m = 1, \ldots, n_y.$$

gdzie

$$d_m(k) = y_m(k) - \left[-\sum_{i=1}^{n_A^m} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{i=0}^{n_B^{m,j}} b_i^{m,j} u_j(k-1-i) \right]$$

są estymatami zakłóceń niemierzalnych wyliczonymi w chwili k, $m = 1, ..., n_y$.

Wykorzystując powyższe wzory:

- liczymy odpowiedzi skokowe każdego z wyjść na każde ze sterowań, a stąd macierzową odpowiedź skokową i macierz dynamiczną $\mathbf{M}$,
- liczymy rekurencyjnie poszczególne elementy odpowiedzi swobodnej każdego z wyjść na horyzoncie predykcji,

analogicznie jak dla obiektu SISO.

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu (podejście MISO), przykład

Przykład transmitancji ciągłej obiektu MIMO o 2 wejściach ($n_u = 2$) i 2 wyjściach ($n_y = 2$), reprezentującej małosygnałowy model reaktora przepływowego w punkcie pracy $^{*)}$:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+0.7s} & \dfrac{5}{1+0.3s} \\ \dfrac{1}{1+0.5s} & \dfrac{2}{1+0.4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Dokonując dyskretyzacji z okresem próbkowania $T_p = 0.03$ (funkcja "c2d" pakietu Matlab) dostajemy transmitancję dyskretną postaci

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.041951z^{-1}}{1-0.958048z^{-1}} & \dfrac{0.475812z^{-1}}{1-0.904837z^{-1}} \\ \dfrac{0.058235z^{-1}}{1-0.941764z^{-1}} & \dfrac{0.144513z^{-1}}{1-0.927743z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$^{*)}$E. Camacho, C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer, London, 1999.

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu (podejście MISO), przykład (2)

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.041951z^{-1}}{1-0.958048z^{-1}} & \dfrac{0.475812z^{-1}}{1-0.904837z^{-1}} \\ \dfrac{0.058235z^{-1}}{1-0.941764z^{-1}} & \dfrac{0.144513z^{-1}}{1-0.927743z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Zapis w postaci dwóch obiektów MISO:

$$y_1(k) = \frac{0.041951z^{-1}}{1-0.958048z^{-1}}u_1(k) + \frac{0.475812z^{-1}}{1-0.904837z^{-1}}u_2(k)$$

$$y_2(k) = \frac{0.058235z^{-1}}{1-0.941764z^{-1}}u_1(k) + \frac{0.144513z^{-1}}{1-0.927743z^{-1}}u_2(k)$$

Sprowadzając prawą stronę każdego z równań do wspólnego mianownika:

$$y_1(k) = \frac{0.041951z^{-1}(1-0.904837z^{-1})u_1(k) + 0.475812z^{-1}(1-0.958048z^{-1})u_2(k)}{(1-0.958048z^{-1})(1-0.904837z^{-1})}$$

$$y_2(k) = \frac{0.058235z^{-1}(1-0.927743z^{-1})u_1(k) + 0.144513z^{-1}(1-0.941764z^{-1})u_2(k)}{(1-0.941764z^{-1})(1-0.927743z^{-1})}$$

Uwaga: rząd wielomianu mianownika to suma rzędów wielomianów w mianownikach sumowanych transmitancji – przy większej liczbie wejść prowadzi to do modeli o wysokich rzędach.

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu (podejście MISO), przykład (3)

co prowadzi do dwóch równań dyskretnych dla obiektów MISO:

$$(1 - 1.862885z^{-1} + 0.866877z^{-2})y_1(k) = \\ (0.041951 - 0.037959z^{-1})u_1(k-1) + (0.475812 - 0.455851z^{-1})u_2(k-1),$$

$$(1 - 1.869508z^{-1} + 0.873715z^{-2})y_2(k) = \\ (0.058235 - 0.054027z^{-1})u_1(k-1) + (0.144513 - 0.136097z^{-1})u_2(k-1),$$

lub równoważnie:

$$y_1(k) = 1.862885y_1(k-1) + 0.866877y_1(k-2) + \\ + 0.041951u_1(k-1) - 0.037959u_1(k-2) + 0.475812u_2(k-1) - 0.455851u_2(k-2),$$

$$y_2(k) = 1.869508y_2(k-1) + 0.873715y_2(k-2) + \\ + 0.058235u_1(k-1) - 0.054027u_1(k-2) + 0.144513u_2(k-1) - 0.136097u_2(k-2),$$

tzn.

$$y_1(k) = -a_1^1y_1(k-1) - a_2^1y_1(k-2) + \\ + b_0^{1,1}u_1(k-1) + b_1^{1,1}u_1(k-2) + b_0^{1,2}u_2(k-1) + b_1^{1,2}u_2(k-2),$$

$$y_2(k) = -a_1^2y_2(k-1) - a_2^2y_2(k-2) + \\ + b_0^{2,1}u_1(k-1) + b_1^{2,1}u_1(k-2) + b_0^{2,2}u_2(k-1) + b_1^{2,2}u_2(k-2),$$

GPC dla obiektu MIMO – przykład (podejście MISO) (4)

Wyznaczymy wzory na trajektorie wyjść prognozowanych dla wartości horyzontów: predykcji $N = 3$ i sterowania $N_u = 2$.

Wyznaczamy elementy odpowiedzi skokowych, a nastepnie macierz dynamiczną:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04195 & 0.47581 & 0 & 0 \\ 0.05824 & 0.14451 & 0 & 0 \\ 0.08214 & 0.90635 & 0.04195 & 0.47581 \\ 0.11308 & 0.27858 & 0.05824 & 0.14451 \\ 0.12065 & 1.29591 & 0.08214 & 0.90635 \\ 0.16473 & 0.40297 & 0.11308 & 0.27858 \end{bmatrix}$$

Wzór na predykcję, $Y^{pred}(k) = Y^0(k) + \mathbf{M}\Delta U\,(k)$, przyjmuje w rozważanym przypadku postać:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1|k) \\ y_2(k+1|k) \\ y_1(k+2|k) \\ y_2(k+2|k) \\ y_1(k+3|k) \\ y_2(k+3|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0(k+1|k) \\ y_2^0(k+1|k) \\ y_1^0(k+2|k) \\ y_2^0(k+2|k) \\ y_1^0(k+3|k) \\ y_2^0(k+3|k) \end{bmatrix} + \mathbf{M} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k|k) \\ \Delta u_2(k|k) \\ \Delta u_1(k+1|k) \\ \Delta u_2(k+1|k) \end{bmatrix}$$

GPC dla obiektu MIMO – przykład (podejście MISO) (5)

Składową swobodną trajektorii wyjść $Y^0(k)$ liczymy w sposób rekurencyjny:

$$
\begin{aligned}
y_1^0(k+1|k) &= -a_1^1 y_1(k) - a_2^1 y_1(k-1) + b_0^{1,1} u_1(k-1) + \\
&\quad + b_1^{1,1} u_1(k-1) + b_0^{1,2} u_2(k-1) + b_1^{1,2} u_2(k-1) + d_1(k) \\
y_2^0(k+1|k) &= -a_1^2 y_2(k) - a_2^2 y_2(k-1) + b_0^{2,1} u_1(k-1) + \\
&\quad + b_1^{2,1} u_1(k-1) + b_0^{2,2} u_2(k-1) + b_1^{2,2} u_2(k-1) + d_2(k) \\
y_1^0(k+2|k) &= -a_1^1 y_1^0(k+1|k) - a_2^1 y_1(k) + b_0^{1,1} u_1(k-1) + \\
&\quad + b_1^{1,1} u_1(k-1) + b_0^{1,2} u_2(k-1) + b_1^{1,2} u_2(k-1) + d_1(k)
\end{aligned}
$$

itd. aż do

$$
\begin{aligned}
y_2^0(k+3|k) &= -a_1^2 y_2^0(k+2|k) - a_2^2 y_2^0(k+1|k) + b_0^{2,1} u_1(k-1) + \\
&\quad + b_1^{2,1} u_1(k-1) + b_0^{2,2} u_2(k-1) + b_1^{2,2} u_2(k-1) + d_2(k)
\end{aligned}
$$

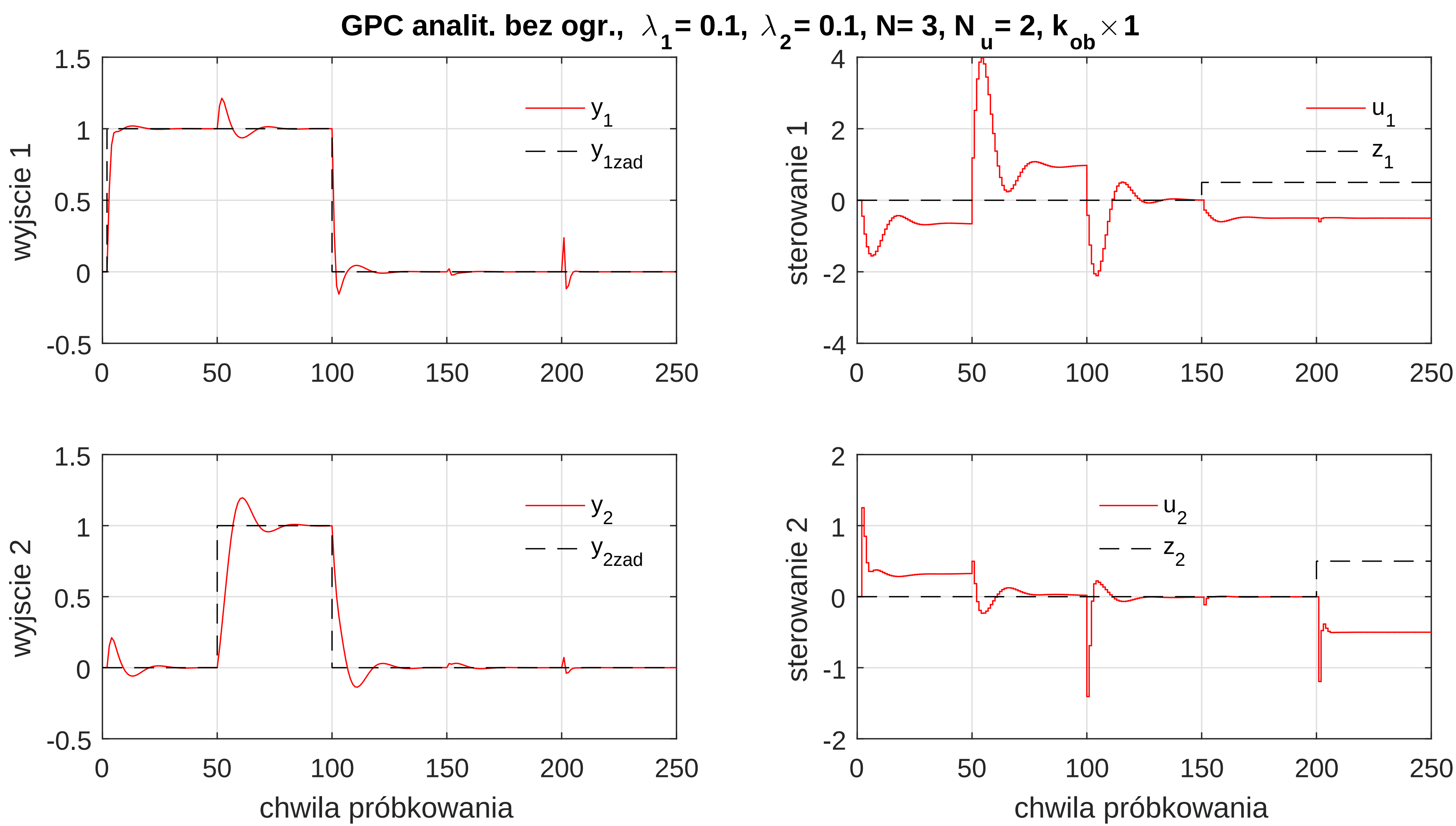
GPC dla obiektu MIMO – przykład (podejście MISO) (6)

Sttałe na horyzoncie predykcji zakłócenia $d(k)$ są różnicą między wyjściami (zmierzonymi) obiektu w chwili k a wyjściami modelu na chwilę k obliczonymi w chwili $k-1$:

$$\begin{aligned} d_1(k) &= y_1(k) - \Big[-a_1^1 y_1(k-1) - a_2^1 y_1(k-2) + \\ &\quad + b_0^{1,1} u_1(k-1) + b_1^{1,1} u_1(k-2) + b_0^{1,2} u_2(k-1) + b_1^{1,2} u_2(k-2)\Big] \\ d_2(k) &= y_2(k) - \Big[-a_1^2 y_2(k-1) - a_2^2 y_2(k-2) + \\ &\quad + b_0^{2,1} u_1(k-1) + b_1^{2,1} u_1(k-2) + b_0^{2,2} u_2(k-1) + b_1^{2,2} u_2(k-2)\Big] \end{aligned}$$

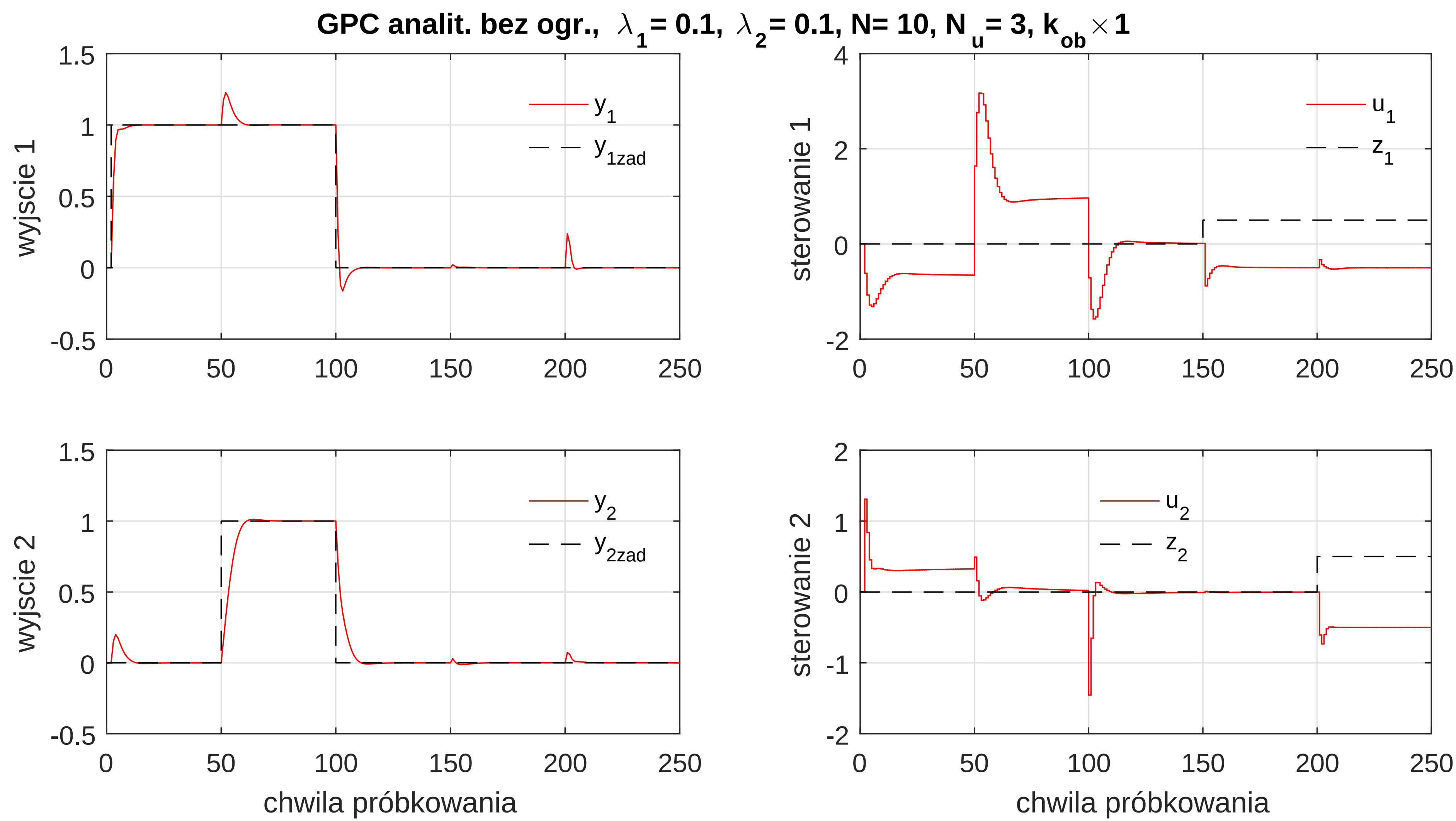
Przyjęto $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, początkowo przy $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.1$.

GPC dla obiektu MIMO – przykład (7)



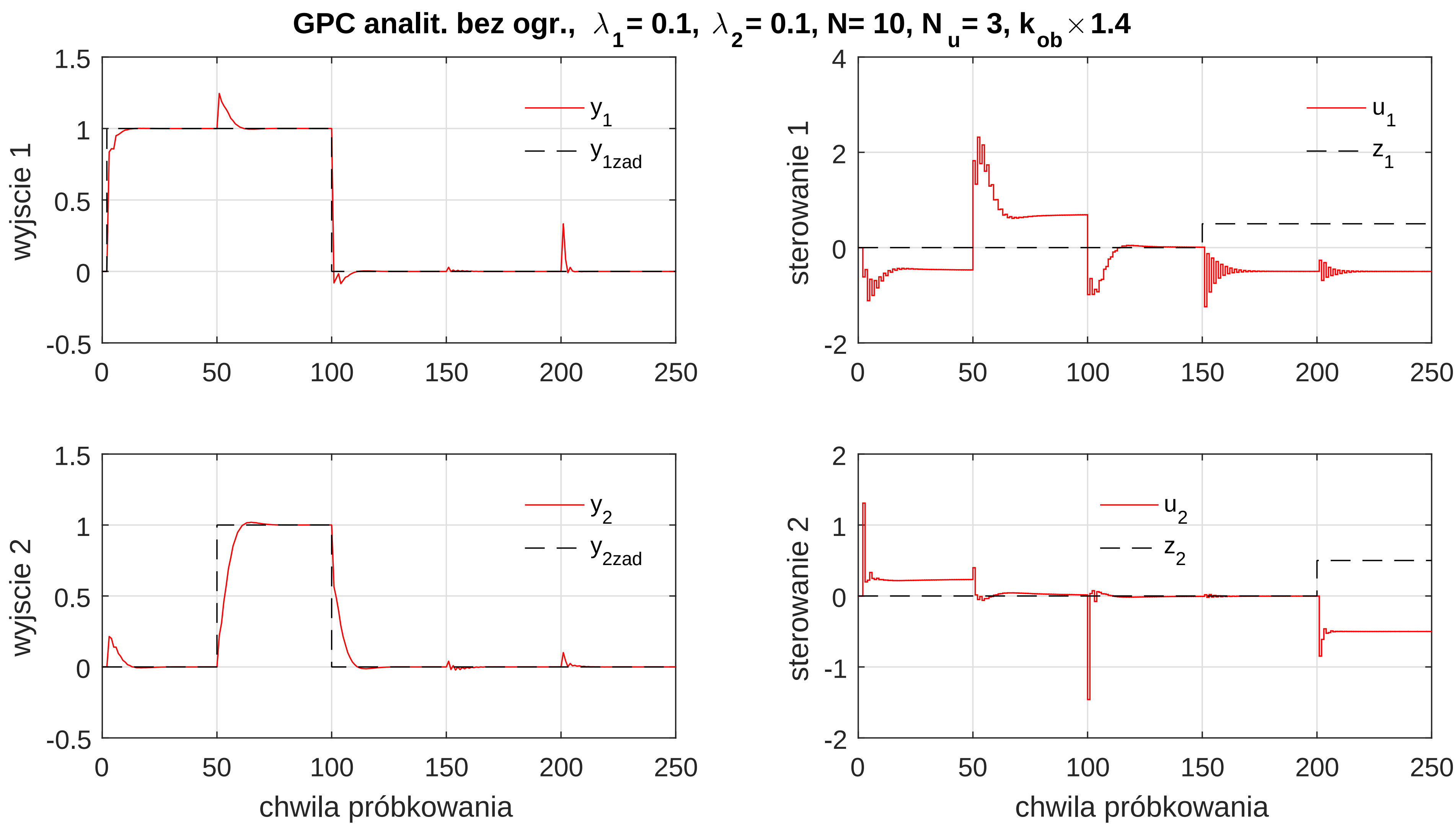
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, bez ograniczeń, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu (parametry jak w przykładzie).

GPC dla obiektu MIMO – przykład (8)



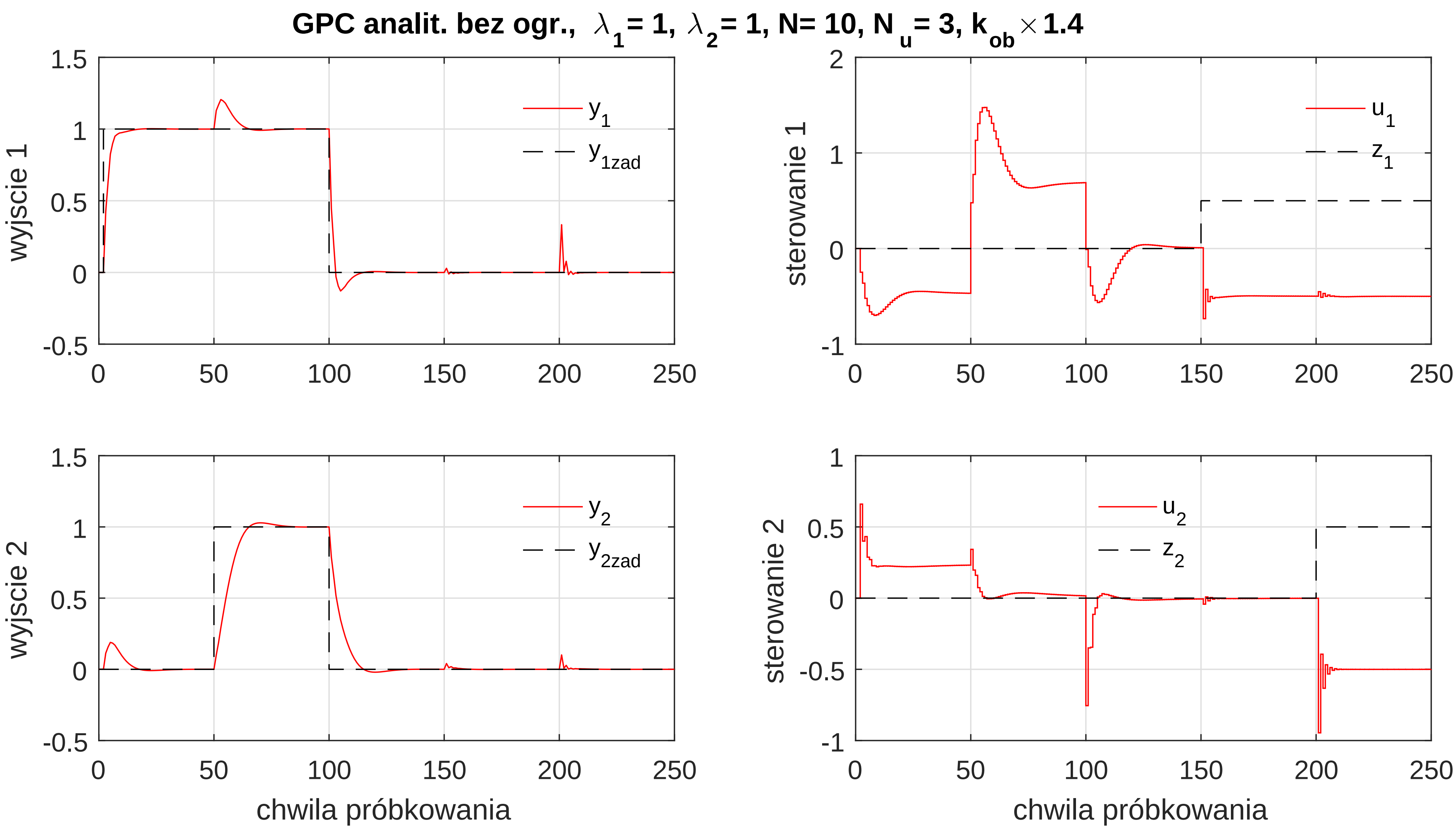
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, bez ograniczeń, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu, horyzonty wydłużone do $N = 10$, $N_u = 3$.

GPC dla obiektu MIMO – przykład (9)



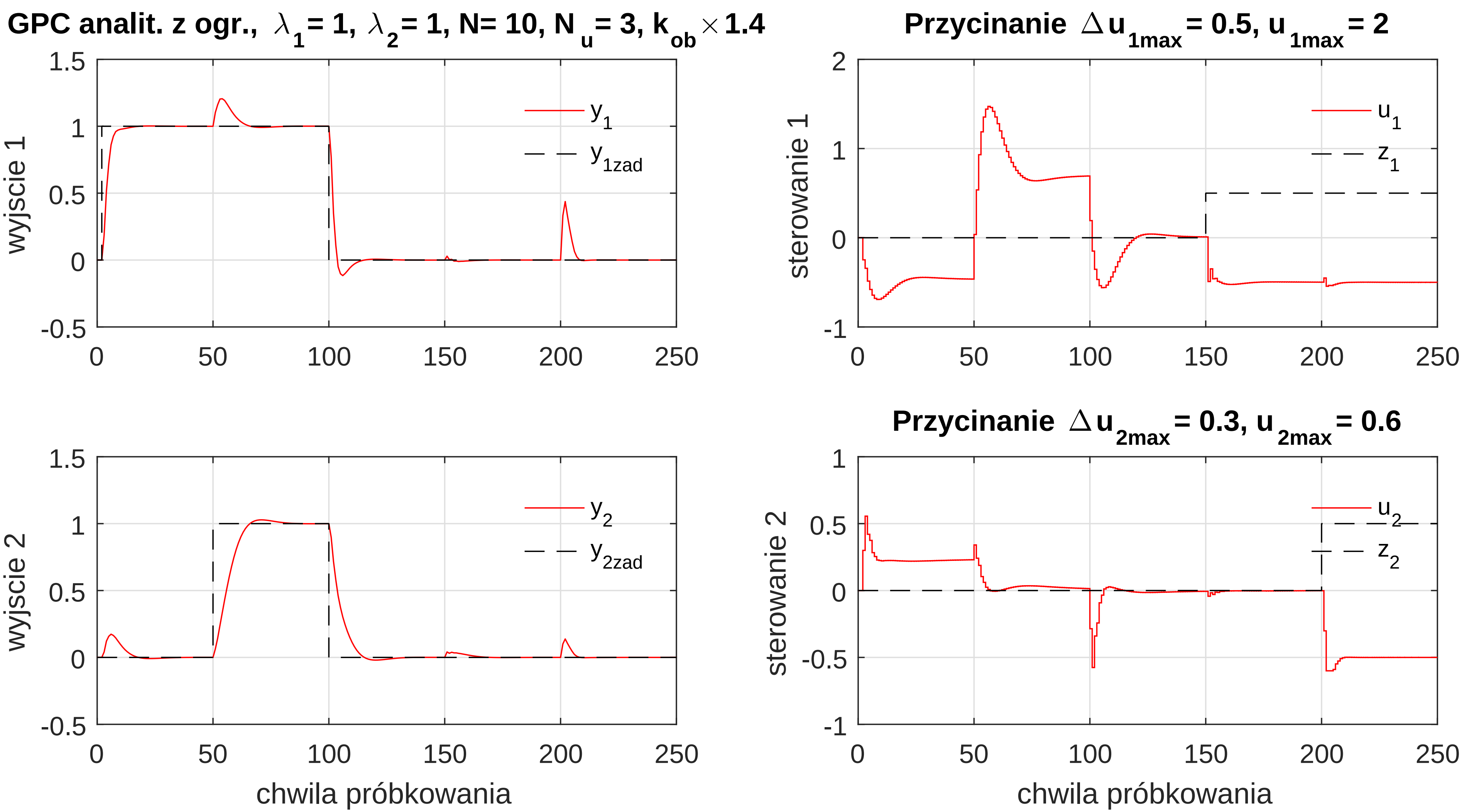
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, bez ograniczeń, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu, wzmocnienie obiektu zwiększone o 40%.

GPC dla obiektu MIMO – przykład (10)



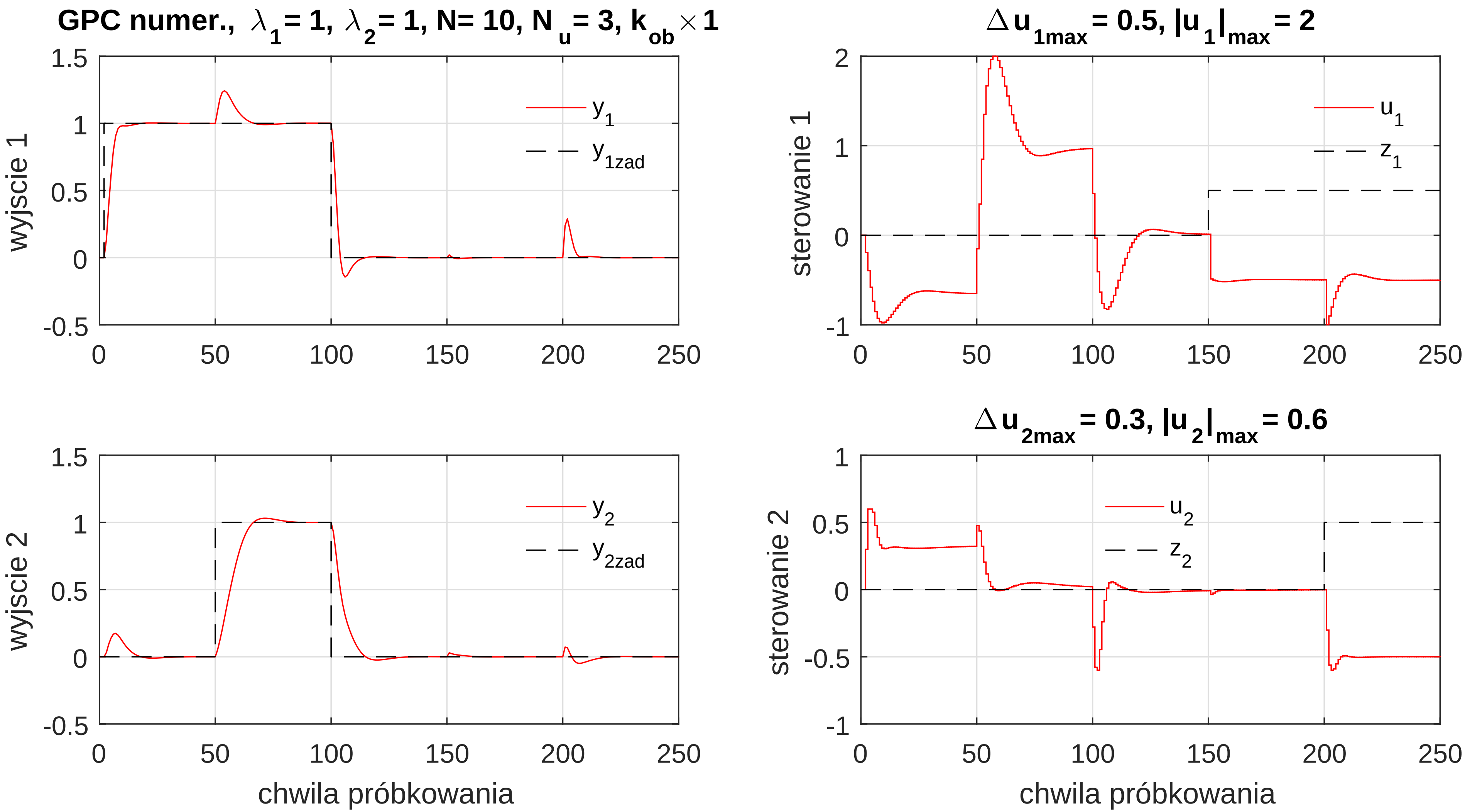
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym, bez ograniczeń, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu, wzmocnienie obiektu zwiększone o 40%, zwiększone współczynniki kary $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$.

GPC dla obiektu MIMO – przykład (11)



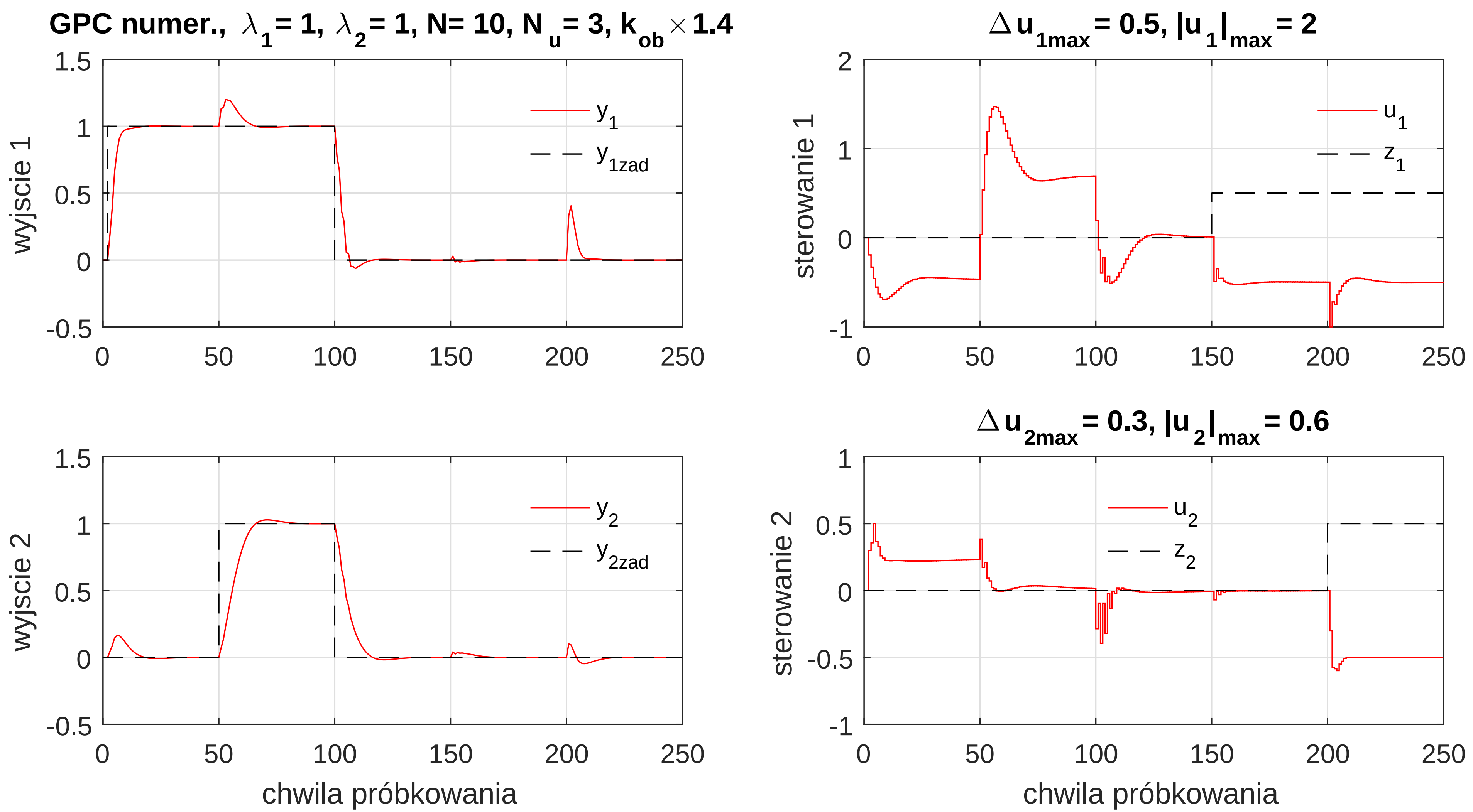
Wyniki symulacji z regulatorem GPC analitycznym z ograniczeniami (przycinanie sterowania do ograniczeń), skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu.

GPC dla obiektu MIMO – przykład (12)



Wyniki symulacji z regulatorem GPC numerycznym z ograniczeniami, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu (model równy obiektowi).

GPC dla obiektu MIMO – przykład (13)



Wyniki symulacji z regulatorem GPC numerycznym z ograniczeniami, skoki wartości zadanych i zakłóceń na wejściach obiektu (wzmocnienie obiektu zwiększone o 40%).

GPC dla obiektu MIMO - model obiektu, podejście MIMO (macierzowe)*

Model dla obiektu SISO był:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_A} y(k-n_A) + b_0 u(k-1) + \cdots + b_{n_B} u(k-n_B-1) + d(k),$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}) \cdot y(k) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B}) z^{-1} \cdot u(k) + d(k),$$

tzn. równoważnie:

$$A(z^{-1}) \cdot y(k) = B(z^{-1}) z^{-1} \cdot u(k) + d(k),$$

Dla obiektu MIMO ($y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$) model ten można bezpośrednio uogólnić, do postaci:

$$\mathbf{A}(z^{-1}) y(k) = \mathbf{B}(z^{-1}) z^{-1} u(k) + d(k),$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ są macierzami wielomianowymi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{1} + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \mathbf{A}_2 z^{-2} + \cdots + \mathbf{A}_{n_A} z^{-n_A}, \\
\mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \mathbf{B}_2 z^{-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n_B} z^{-n_B},
\end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{A}(z^{-1})$ jest macierzą diagonalną, zaś $d(k)$ to zakłócenie (przedziałami) stałe (lub biały szum $e(k)$ całkowany: $d(k+1) = d(k) + e(k)$).

Wygodniej jest traktować obiekt MIMO jako n_y obiektów MISO (multi-input single-output).

**material uzupełniający*

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu (podejście MIMO), przykład*

W przykładzie poprzednim wyznaczono równania dyskretne dla dwóch obiektów MISO:

$$(1-1.862885z^{-1}+0.866877z^{-2})y_1(k)=$$
$$(0.041951-0.037959z^{-1})u_1(k-1)+(0.475812-0.455851z^{-1})u_2(k-1),$$
$$(1-1.869508z^{-1}+0.873715z^{-2})y_2(k)=$$
$$(0.058235-0.054027z^{-1})u_1(k-1)+(0.144513-0.136097z^{-1})u_2(k-1),$$

Przedstawiając te modele w jednym modelu MIMO $\mathbf{A}(z^{-1})y(k)=\mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} A^1(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A^2(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a_1^1z^{-1}+a_2^1z^{-2} & 0 \\ 0 & 1+a_1^2z^{-1}+a_2^2z^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-1.862885z^{-1}+0.866877z^{-2} & 0 \\ 0 & 1-1.869508z^{-1}+0.873715z^{-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} B^{1,1}(z^{-1}) & B^{1,2}(z^{-1}) \\ B^{2,1}(z^{-1}) & B^{2,2}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^{1,1}+b_1^{1,1}z^{-1} & b_0^{1,2}+b_1^{1,2}z^{-1} \\ b_0^{2,1}+b_1^{2,1}z^{-1} & b_0^{2,2}+b_1^{2,2}z^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.041951-0.037959z^{-1} & 0.475812-0.455851z^{-1} \\ 0.058235-0.054027z^{-1} & 0.144513-0.136097z^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**material uzupełniający*

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu (podejście MIMO), przykład (2)*

Ze względu na strukturę macierzy $\mathbf{A}$, do symulacji i predykcji w dziedzinie czasu model

$$\mathbf{A}(z^{-1})y(k) = \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k) \quad \Leftrightarrow \quad [\,\mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}(z^{-1})\,]y(k) = \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k)$$

wygodniej jest zapisać w postaci:

$$y(k) = -\bar{\mathbf{A}}(z^{-1})y(k) + \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k).$$

Np. w rozważanym przykładzie 2×2, mamy:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} \bar{A}^1(z^{-1}) & 0 \\ 0 & \bar{A}^2(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 z^{-1} + a_2^1 z^{-2} & 0 \\ 0 & a_1^2 z^{-1} + a_2^2 z^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1.862885z^{-1} + 0.866877z^{-2} & 0 \\ 0 & -1.869508z^{-1} + 0.873715z^{-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**materiał uzupełniający*

GPC dla obiektu MIMO – równania skalarne i macierz dynamiczna M*

Model macierzowy

$$y(k) = -\bar{\mathbf{A}}(z^{-1})y(k) + \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k).$$

można zapisać jako m modeli skalarnych odpowiedzi wyjścia y_m na n_u sterowań u_j, $j = 1, ..., n_u$ (struktura tych modeli MISO identyczna jak modelu SISO !):

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u}\sum_{i=0}^{n_B} b_i^{m,j} u_j(k-1-i) + d_m(k)$$

gdzie a_i^m to elementy wielomianów $\bar{A}^m$ (i A^m), $b_i^{m,j}$ to elementy wielomianów $B^{m,j}$ (założyliśmy, że każdy z wielomianów jest tego samego stopnia, $n_A^m = n_A$, $n_B^{m,j} = n_B$, co nie zmniejsza ogólności rozważań).

Z zależności powyższej dostajemy natychmiast wzór na elementy odpowiedzi skokowej (identycznie jak dla modelu SISO), dla każdej pary wejście ($j-$te) – wyjście ($m-$te):

$$s_k^{m,j} = -\sum_{i=1}^{\min\{k-1, n_A\}} a_i^m s_{k-i}^{m,j} + \sum_{i=0}^{\min\{k-1, n_B\}} b_i^{m,j}, \quad m = 1, ..., n_y,\ j = 1, ..., n_u.$$

Znając elementy wielowymiarowej odpowiedzi skokowej wyliczamy macierz dynamiczną $\mathbf{M}$, a stąd trajektorie wymuszane wyjść na horyzoncie predykcji – jak w algorytmie DMC.

*_material uzupełniający_

GPC dla obiektu MIMO – równania skalarne*

Mamy modele odpowiedzi $m-$tego wyjścia y_m na n_u sterowań u_j, $j = 1, \ldots, n_u$:

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u}\sum_{i=0}^{n_B} b_i^{m,j} u_j(k-1-i) + d_m(k), \quad m = 1, \ldots, n_y.$$

Struktura tego modelu jest identyczna jak dla obiektu SISO, stąd rozumując analogicznie, dostajemy rekurencyjnie elementy składowej swobodnej trajektorii wyjść prognozowanych:

$$y_m^0(k+p|k) = -\sum_{i=1}^{\min\{n_A,p-1\}} a_i^m y_m^0(k+p-i|k) - \sum_{i=\min\{n_A,p-1\}+1}^{n_A} a_i^m y_m(k+p-i) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_u}\left[\sum_{i=0}^{\min\{n_B,p\}} b_i^{m,j} u_j(k-1) + \sum_{i=\min\{n_B,p\}+1}^{n_B} b_i^{m,j} u_j(k-1+p-i)\right] + d_m(k)$$

$m = 1, \ldots, n_y$, $p = 1, \ldots, N$, gdzie

$$d_m(k) = y_m(k) - \left[-\sum_{i=1}^{n_A} a_i^m y_m(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u}\sum_{i=0}^{n_B} b_i^{m,j} u_j(k-1-i)\right]$$

są estymatami zakłóceń wyliczonymi w chwili k, $m = 1, \ldots, n_y$.

**materiał uzupełniający*

GPC dla obiektu MIMO – przykład cd.*

Przykład dyskretnej transmitancji obiektu o 2 wejściach ($n_u = 2$) i 2 wyjściach ($n_y = 2$):

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.041951z^{-1}}{1-0.958048z^{-1}} & \dfrac{0.475812z^{-1}}{1-0.904837z^{-1}} \\ \dfrac{0.058235z^{-1}}{1-0.941764z^{-1}} & \dfrac{0.144513z^{-1}}{1-0.927743z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Mamy model w postaci $y(k) = -\bar{\mathbf{A}}(z^{-1})y(k) + \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k) + d(k)$, gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} \bar{A}^1(z^{-1}) & 0 \\ 0 & \bar{A}^2(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 z^{-1} + a_2^1 z^{-2} & 0 \\ 0 & a_1^2 z^{-1} + a_2^2 z^{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.862885z^{-1} + 0.866877z^{-2} & 0 \\ 0 & -1.869508z^{-1} + 0.873715z^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} B^{1,1}(z^{-1}) & B^{1,2}(z^{-1}) \\ B^{2,1}(z^{-1}) & B^{2,2}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^{1,1} + b_1^{1,1} z^{-1} & b_0^{1,2} + b_1^{1,2} z^{-1} \\ b_0^{2,1} + b_1^{2,1} z^{-1} & b_0^{2,2} + b_1^{2,2} z^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.041951 - 0.037959z^{-1} & 0.475812 - 0.455851z^{-1} \\ 0.058235 - 0.054027z^{-1} & 0.144513 - 0.136097z^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**materiał uzupełniający*

GPC dla obiektu MIMO – model obiektu, przykład cd.*

Macierze wielomianowe $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{B}$ modelu MIMO

$$y(k) = -\bar{\mathbf{A}}(z^{-1})y(k) + \mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}u(k)$$

można zapisać w MATLABie jako trójwymiarowe (trzeci wymiar – wielomianowy):
– macierz $\bar{\mathbf{A}}$ o wymiarze $n_y \times n_y \times n_A$,
– macierz $\mathbf{B}$ o wymiarze $n_y \times n_u \times (n_B+1)$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} -1.862885z^{-1} + 0.866877z^{-2} & 0 \\ 0 & -1.869508z^{-1} + 0.873715z^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1.862885 & 0 \\ 0 & -1.869508 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 0.866877 & 0 \\ 0 & 0.873715z^{-2} \end{bmatrix} z^{-2} \\
&= \bar{\mathbf{A}}(:,:,1)\, z^{-1} + \bar{\mathbf{A}}(:,:,2)\, z^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 0.041951 - 0.037959z^{-1} & 0.475812 - 0.455851z^{-1} \\ 0.058235 - 0.054027z^{-1} & 0.144513 - 0.136097z^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.041951 & 0.475812 \\ 0.058235 & 0.144513 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.037959 & -0.455851 \\ -0.054027 & -0.136097 \end{bmatrix} z^{-1} \\
&= \mathbf{B}(:,:,1) + \mathbf{B}(:,:,2)\, z^{-1}
\end{aligned}$$

**material uzupełniający*

GPC – obliczenie macierzy dynamicznej*

```
function M=GPCmatrixM(A,B,N,Nu)
% macierz dynamiczna M dla modelu MIMO y(k)=-A*y(k)+B*u(k-1),
% A - macierz diagonalna wym. ny x ny x nA;  B - macierz wym. ny x nu x nB+1,
% N - dla horyzont predykcji; Nu - horyzont sterowania
ny=size(B,1); nu=size(B,2); nB=size(B,3)-1; nA=size(A,3);
 % Współczynniki odpowiedzi skokowej macierzowej na horyzoncie N:
S=zeros(ny,nu,N);
for ks=1:N
    for m=1:ny
        for j=1:nu
           sx=0; for i=1:min(ks-1,nA), sx=sx-A(m,m,i)*S(m,j,ks-i); end
           for i=1:min(ks,nB+1), sx=sx+B(m,j,i); end
           S(m,j,ks)=sx;
        end
    end
end
M=zeros(N*ny,Nu*nu);   % Macierz dynamiczna
for i=1:N, M((i-1)*ny+1:(i-1)*ny+ny,1:nu)=S(:,:,i); end
for i=2:Nu
    M(:,(i-1)*nu+1:(i-1)*nu+nu)=[zeros((i-1)*ny,nu); M(1:(N-i+1)*ny,1:nu)];
end
```

**material uzupełniający*

GPC – fragment programu liczący rekurencyjnie wektor składowej swobodnej predykcji wyjść (macierzowo)*

```
% wektor składowej swobodnej predykcji wyjść Y0 o długości ny*N
% dla modelu obiektu MIMO y(k)=-A*y(k)+B*u(k-1), gdzie
% A - macierz diagonalna wym. ny x ny x nA;  B - macierz wym. ny x nu x nB+1,
% k - bieżąca chwila czasu
% y - wektor bieżącego i poprzednich wyjść y(1:ny,1:k)
% u - wektor poprzednich sterowań u(1:nu,1:k-1)
 ...
    dk=zeros(ny,1);
    for i=1:nA, dk=dk-A(:,:,i)*y(:,max(1,k-i)); end
    for i=1:nB+1, dk=dk+B(:,:,i)*u(:,max(1,k-i)); end
    dy=y(:,k)-dk;  %estymata zakłócenia
    Y0matrix=zeros(ny,N);  %(macierz pomocnicza do obliczeń predykcji )
    for p=1:N
        yx=zeros(ny,1);
         for i=1:min(nA,p-1),    yx=yx-A(:,:,i)*Y0matrix(:,p-i); end
         for i=min(nA,p-1)+1:nA, yx=yx-A(:,:,i)*y(:,k+p-i); end
         for i=0:min(nB,p),    yx=yx+B(:,:,i+1)*u(:,k-1); end
         for i=min(nB,p)+1:nB, yx=yx+B(:,:,i+1)*u(:,max(1,k-1+p-i)); end
         Y0matrix(:,p)=yx+dy;
    end
    for i=1:N, Y0((i-1)*ny+1:(i-1)*ny+ny)=Y0matrix(:,i); end
```

**material uzupełniający*