華中科技大學

机器人技术基础课程作业

课　程　机器人技术基础

姓　名　陈志平

学　号　U201410626

班　级　机械 1402 班

一.SCARA 机器人建模

1. 运动学方程（按照图 5-6 形式建立方程）

SCARA 机器人有三个旋转关节，和一个移动关节，建立其 D-H 表：如下

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	0	θ_4+L_0	0

由齐次变换知识可得，SCARA 各连杆的变换矩阵为：${}^0_1\mathrm{T}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_1 & -\mathrm{S}_1 & 0 & 0\\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{C}_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$${}^1_2\mathrm{T}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_2 & -\mathrm{S}_2 & 0 & L_1\\ \mathrm{S}_2 & \mathrm{C}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} {}^2_3\mathrm{T}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_3 & -\mathrm{S}_3 & 0 & L_2\\ \mathrm{S}_3 & \mathrm{C}_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} {}^3_4\mathrm{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \theta_4+L_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中$\mathrm{C_i}$表示 $\cos\theta_\mathrm{i}$，$\mathrm{S_i}$表示 $\sin\theta_\mathrm{i}$。由上述各连杆变换矩阵之积，可得运动学方程：

$${}^0_4\mathrm{T}={}^0_1\mathrm{T}{}^1_2\mathrm{T}{}^2_3\mathrm{T}{}^3_4\mathrm{T}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_4) & -\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & -l_1cos\theta_1-l_2cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_4) & \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1sin\theta_1+l_2sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0 & 0 & -1 & \theta_4+L_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. 运动学逆解

令 SCARA 机器人末端执行器期望位姿为：

$${}^S_T T(\theta)=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}={}^0_1\mathrm{T}{}^1_2\mathrm{T}{}^2_3\mathrm{T}{}^3_4\mathrm{T}{}^S_T\mathrm{T}(0)=$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & -l_1sin\theta_1-l_2sin(\theta_1+\theta_2)-(l_1+l_2)\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1cos\theta_1+l_2cos(\theta_1+\theta_2)+(l_1+l_2)\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\ 0 & 0 & -1 & \theta_4+2L_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中：${}^S_T\mathrm{T}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & L_1+L_2\\ 0 & 0 & 1 & L_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

由 3.4 可得，$p_z=(2L_0+\theta_4)$

所以$\theta_4=p_z-2L_0$

由 1.4 和 2.4 可得

且有$p_x - o_x * (L_1 + L_2) = -l_1 sin\theta_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$

$$p_y + o_y * (L_1 + L_2) = l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

可得，$\theta_2 = \arccos(p_x^2 + p_y^2 + 2(L_1 + L_2)\left(-p_x o_x + p_y o_y\right) + 2L_1 L_2)$（式 1）

而$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = arccosn_x$

所以

$$\theta_1 + \theta_3 = -\arccos\left(p_x^2 + p_y^2 + 2(L_1 + L_2)\left(-p_x o_x + p_y o_y\right) + 2L_1 L_2\right) + arccosn_x$$

将θ_2代入式 1 中，可得

$$\theta_1 = arcsin - \frac{(L_1 + L_2 COS\theta_2)(p_y + o_y * (L_1 + L_2)) + L_2 sin\theta_2 (p_x - o_x * (L_1 + L_2))}{l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 cos\theta_2}$$（式 2）

故，$\theta_3 = arccosn_x - (\theta_1 + \theta_2)$

3. 雅可比矩阵

sCARA 机器人的特点是各个关节的运动旋量的方向都是固定的，各个旋量轴的线矢量上的一定是θ的函数，取为

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ r_2 = \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 \\ l_1 cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ r_3 = \begin{bmatrix} -l_1 sin\theta_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

计算各个关节的运动旋量坐标，则得

$${}_T^S J^S(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & l_1 cos\theta_1 & l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & l_1 sin\theta_1 & l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 讨论其在参考形位处（图 6-5）的奇异性、可操作性；

在参考形位处，杆一和杆二在同一条直线上，关节三只能沿着切线方向移动，故自由度降低，为奇异点，因为雅可比矩阵非满秩，所以可操作性为0.

5. 讨论其在参考形位处（图 6-5）的末端操作刚度。

由于此为四自由度机器人，建立其柔度矩阵过于复杂，且都为参数值，采用 matlab 计算其特征值，最终值过长，如下：

$$\lambda_1 = \frac{1}{k_4}$$

$$\lambda_2 = ((\mathrm{k1} * \mathrm{k2} \ + \ \mathrm{k1} * \mathrm{k3} \ + \ \mathrm{k2} * \mathrm{k3} \ + \ \mathrm{L2}^2 * \mathrm{k1} * \mathrm{k2} * \sin(\mathrm{x1} \ + \ \mathrm{x2})^2$$

$$+ \ \mathrm{L1}^2 * \mathrm{k1} * \mathrm{k2} * \cos(\mathrm{x1})\hat{}2 \ + \ \mathrm{L1}\hat{}2 * \mathrm{k1} * \mathrm{k3} * \cos(\mathrm{x1})\hat{}2$$

$$+ \ \mathrm{L1}\hat{}2 * \mathrm{k1} * \mathrm{k2} * \sin(\mathrm{x1})\ (\ldots\ldots \text{长达 A4 纸三面的结果。})$$

λ_3 =同上

λ_4 = 同上

其中 k4 为第四关节的刚度，为 Z 轴方向，所以这个方向柔性较差，刚度较好，而其他方向较差。

二. 采用 Matlab 编写轨迹生成程序

a) 三阶多项式&五阶多项式

代码程序：

```
function y=TriF(varargin)
    syms t;
    B=[];
    A=[]*t;
if nargin == 5
    tt=varargin{1};
    for j=1:2
        for i=0:3
            if j==1
            A(1,i+1)=0;
            else
                A(2,i+1)=t.^i;
            end
        end
    end
    A(1,1)=1;
```

```
    for i=2:3
        for j=0:3
            if rem(i,2)==0
           A(i+1,j+1)=0;
            else
           A(i+1,j+1)=diff(A(i-1,j+1));
            end
        end
    end
 A(3,2)=A(4,2);
for i=1:4
    B(i,1)=varargin{i+1};
end
m=A(2,:);
n=subs(A\B,tt);
y=m*n;
elseif nargin == 7
    tt=varargin{1};
    for j=1:2
        for i=0:5
            if j==5
            A(1,i+1)=0;
            else
                A(2,i+1)=t.^i;
            end
        end
    end
    A(1,1)=1;
    for i=2:5
        for j=0:5
            if rem(i,2)==0
           A(i+1,j+1)=0;
            else
           A(i+1,j+1)=diff(A(i-1,j+1));
             end
        end
    end
     A(3,2)=A(4,2);
      A(5,3)=A(6,3);
for i=1:6
    B(i,1)=varargin{i+1};
end
m=A(2,:);
n=subs(A\B,tt);
```

```
y=m*n;
end
end
```

结果展示：

```
>> y_3=TriF(1,120,60,0,0)

y_3 =

120*t^3 - 180*t^2 + 120

>> y_5=TriF(1,120,60,0,0,0,0)

y_5 =

- 360*t^5 + 900*t^4 - 600*t^3 + 120
```

如上图，得出，三阶多项式为：

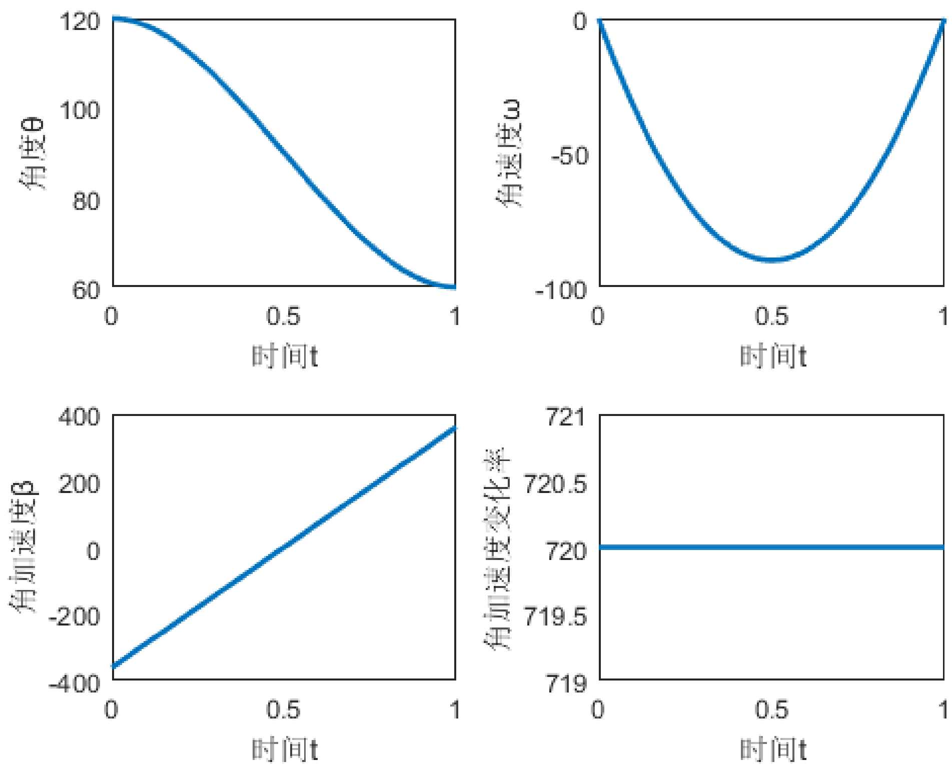
$$\theta = 120t^3 - 180 * t^2 + 120$$

五阶多项式为：

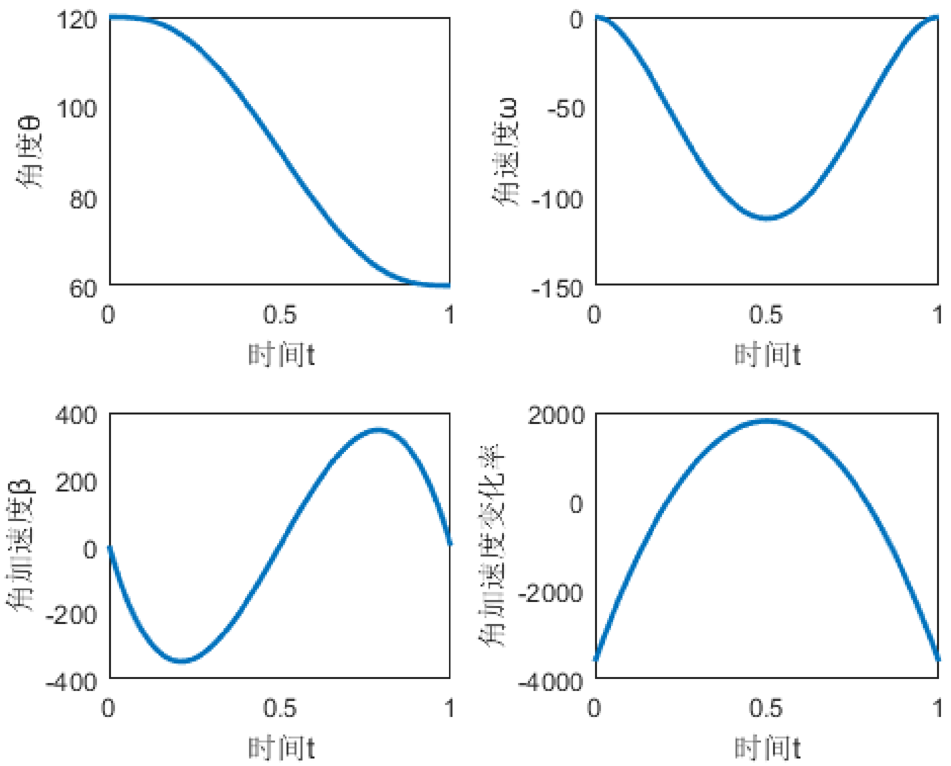
$$\theta = -360t^5 + 900 * t^4 - 600t^3 + 120$$

绘图如下

三　　阶



五　　　阶



结果讨论：

三阶和五阶拟合的直线相差不大，但五阶的平滑度较好

b）两段带有中间点的三阶多项式

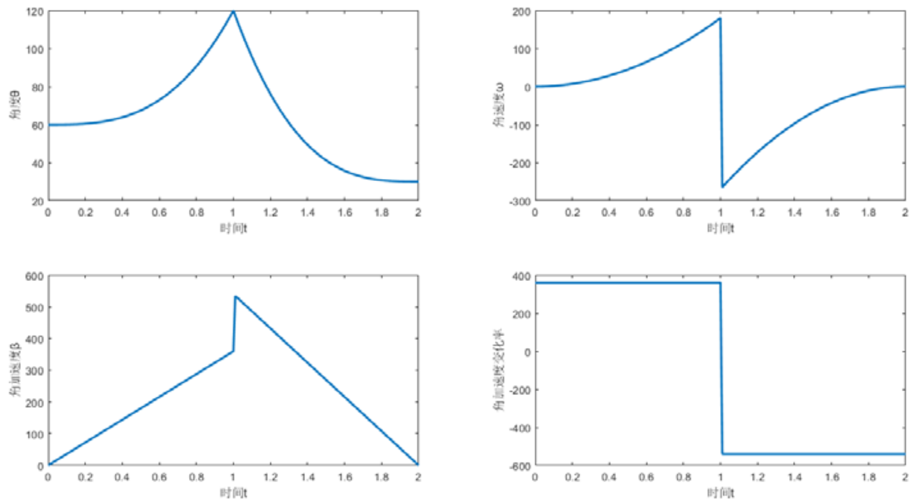
代码程序：

```
function y=BiF(varargin)
syms t;
A=[]*t;
for i=0:3
    A(1,i+1)=t.^i;
end
if nargin == 5
m=varargin{1};
if m==1
for i=1:4
   B(1,i)=subs(A(1,i),0);
end
for i=1:4
   B(2,i)=subs(A(1,i),1);
end
```

```
for i=1:4
    B(3,i)=subs(diff(A(1,i)),0);
end
for i=1:4
    B(4,i)=subs(diff(diff(A(1,i))),0);
end
end
if m==2
for i=1:4
    B(1,i)=subs(A(1,i),1);
end
for i=1:4
    B(2,i)=subs(A(1,i),2);
end
for i=1:4
    B(3,i)=subs(diff(A(1,i)),2);
end
for i=1:4
    B(4,i)=subs(diff(diff(A(1,i))),2);
end
end
C=[];
for i=1:4
    C(i,1)=varargin{i+1};
end
n=B\C;
y=A*n;
end
end
```

结果展示:

```
>> y_1=BiF(1,60,120,0,0)
y_2=BiF(2,120,30,0,0)

y_1 =

60*t^3 + 60


y_2 =

- 90*t^3 + 540*t^2 - 1080*t + 750
```



结果讨论：
题目中给出的条件为，起点和终点的角速度和角加速度为 0，条件多余，造成最终两段曲线速度和加速度不能平缓结合，所以不能实现。

题目有问题，应该去掉起点和终点角加速度为 0 的条件。

改进后：

```
ttt=[1 0 0 0 0 0 0 0;
    1 1 1 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 1 1 1 1;
    0 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 2 3;
    0 1 2 3 0 -1 0 0;
    0 0 2 6 0 0 -2 0];
y=[60;120;120;30;0;0;0;0];
syms t;
A=[]*t;
for i=0:3
    A(1,i+1)=t.^i;
end
B=ttt\y;
B1=B(1:4,:);
B2=B(5:8,:);
y=A*B1;
x=A*B2;
yy=diff(y);xx=diff(x);
```

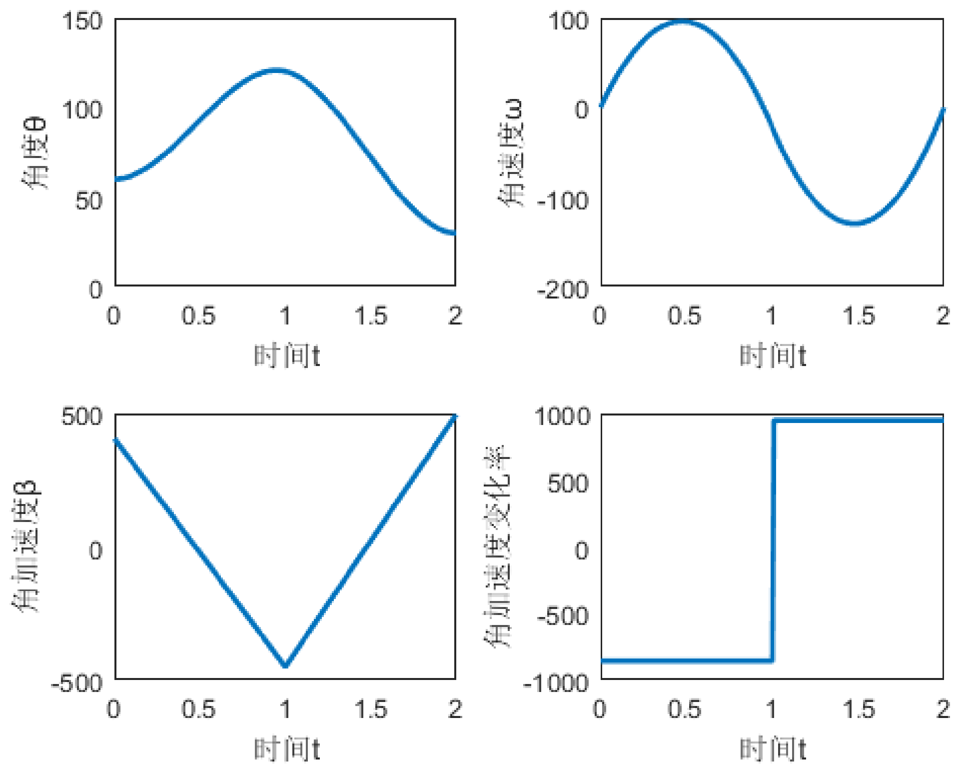
```
yyy=diff(yy);xxx=diff(xx);
yyyy=diff(yyy);xxxx=diff(xxx);

subplot(2,2,1)
tt=0:0.01:1;
m1=subs(y,tt);
tt=1.01:0.01:2;
m2=subs(x,tt-1);
tt=0:0.01:2;
m=[m1,m2];
plot(tt,m,'LineWidth',2);
xlabel('Ê±¼ät');
ylabel('½Ç¶È¦È');

subplot(2,2,2)
tt=0:0.01:1;
m1=subs(yy,tt);
tt=1.01:0.01:2;
m2=subs(xx,tt-1);
tt=0:0.01:2;
m=[m1,m2];
plot(tt,m,'LineWidth',2);
xlabel('Ê±¼ät');
ylabel('½ÇËÙ¶È¦Ø');

subplot(2,2,3)
tt=0:0.01:1;
m1=subs(yyy,tt);
tt=1.01:0.01:2;
m2=subs(xxx,tt-1);
tt=0:0.01:2;
m=[m1,m2];
plot(tt,m,'LineWidth',2);
xlabel('Ê±¼ät');
ylabel('½Ç¼ÓËÙ¶È¦Â');

subplot(2,2,4)
tt=0:0.01:1;
m1=subs(yyyy,tt);
tt=1.01:0.01:2;
m2=subs(xxxx,tt-1);
tt=0:0.01:2;
m=[m1,m2];
plot(tt,m,'LineWidth',2);
```

```
xlabel('Ê±¼ät');
ylabel('½Ç¼ÓËÙ¶È±ä»¯ÂÊ');
```

结果展示：

```
y_1 =

- (285*t^3)/2 + (405*t^2)/2 + 60

>> y_2

y_2 =

(315*t^3)/2 - 225*t^2 - (45*t)/2 + 120
```

其中第二段的时间段为[0,1],绘图时右移动一个单位



结果讨论：

去掉起点和终点加速度为 0 的条件后，可以实现题目要求，但在角加速度变化率上，跳跃较大。平滑性较好。

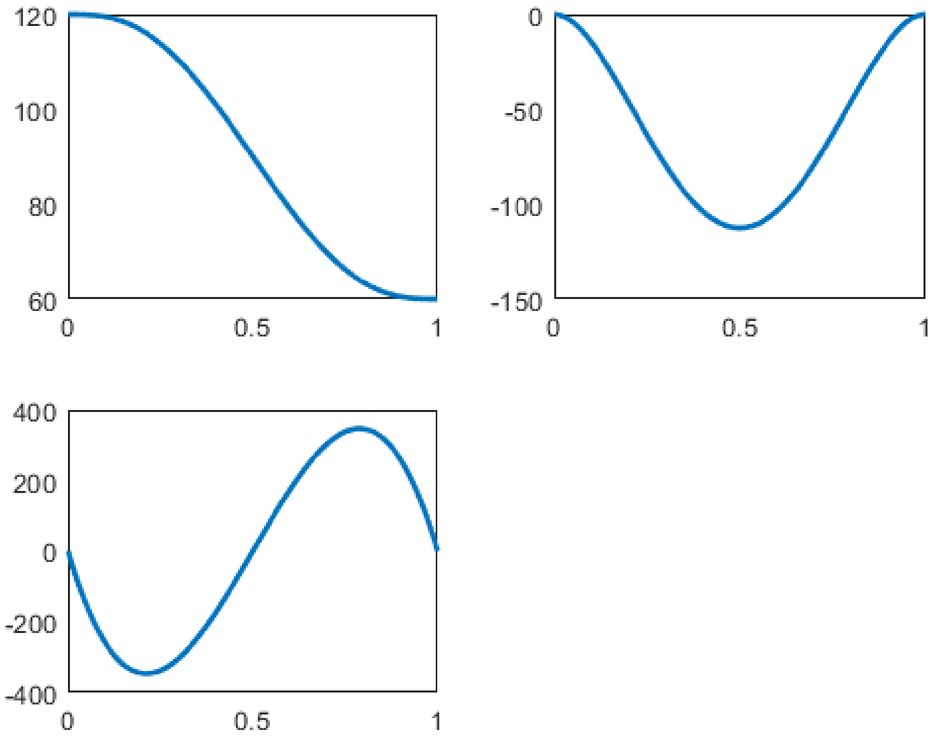
c） 用工具箱检验

代码程序：

```
clear all;
Q0=120;QF=60;
[Q,QD,QDD] = jtraj(Q0, QF, 1001, 0, 0);
subplot(2,2,1)
```

```
tt=0:0.001:1;
plot(tt,Q,'LineWidth',2);
subplot(2,2,2)
tt=0:0.001:1;
plot(tt,QD,'LineWidth',2);
subplot(2,2,3)
tt=0:0.001:1;
plot(tt,QDD,'LineWidth',2);
```

结果展示：



结果讨论：

与五阶比较，完全一致，所以，程序生成是正确的。