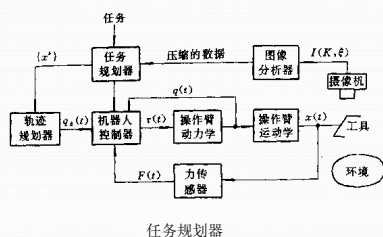


第八章 轨迹生成

本章内容

- 6.1 轨迹规划的一般性问题
- 6.2 关节轨迹的插值
- 6.3 笛卡尔空间规划方法

□ 规划实际上就是一种问题求解技术，即从某个特定问题的初始状态出发，构造一系列操作步骤(也称算子)，使之达到解决该问题的目标状态。



□ 轨迹指的是每个自由度的位置、速度和加速度的时间历程，描述了操作臂在多维空间中的期望运动。

➤ 这个问题包括：

- 1) 如何通过人机交互指定通过空间的一条轨迹或路径
 - 允许用户通过简单的描述来指定机器人的期望运动
- 2) 规划好的轨迹如何在计算机中进行描述
 - 到达目标的准确路径、时间历程、速度曲线等
- 3) 通过内部表达式计算轨迹的问题——即轨迹生成问题
 - 要以某种速率计算轨迹点，此速率叫做路径更新率

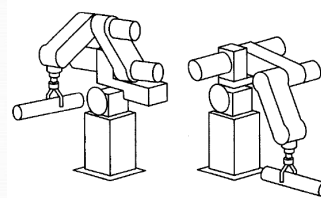
8.1 轨迹规划的一般性问题

- 描述方法：通常将操作臂的运动看作是工具坐标系{T}相对于工作坐标系{S}的运动。
- 适用对象：
 - 各种操作臂；
 - 同一操作臂上装夹的各种工具；
 - 移动工作台(例如传送带)。这时，工作坐标系{S}的位姿随时间而变化。

□ 点位作业(Pick and Place operation)

- 如用于上、下料机器人，需要描述它的起始状态和目标状态，即工具坐标系的起始值 $\{T_0\}$ 和目标值 $\{T_f\}$ 。在此，用“点”这个词表示工具坐标系的位置和姿态(位置)。例如起始点和目标点等。

7



在执行轨迹的过程中，操作臂以平滑的方式从初始位置运动到期望的目标位置

8

□ 连续路径运动

- 对于另外一些作业，如弧焊和曲面加工等，不仅要规定操作臂的起始点和终止点，而且要指明两点之间的若干中间点(称路径点)，必须沿特定的路径运动(路径约束)。
- 这类称为连续路径运动(continuous-path motion)或轮廓运动(contour motion)，而前者称点到点运动(Point-to-point motion, PTP)

9

- ◆ 在规划机器人的运动时，还需要弄清楚在其路径上是否存在障碍物(障碍约束)。路径约束和障碍约束的组合将机器人的规划与控制方式划分为四类，如表所示。

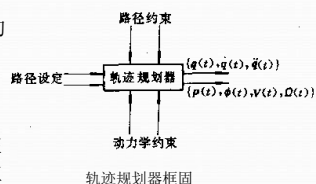
表6-1 操作臂控制方式

		障碍约束	
		有	无
路径约束	有	离线无碰撞路径规划+在线路径跟踪	离线路径规划+在线路径跟踪
	无	位置控制+在线障碍探测和避障	位置控制

10

6.1 轨迹规划的一般性问题

- 输入：
路径的“设定”和“约束”；
- 输出：
操作臂末端手部的“位姿序列”，表示手部在各离散时刻的中间形位(configurations)



11

□ 操作臂最常用的轨迹规划方法：

- 第一种方法要求用户对于选定的轨迹结点(插值点)上的位姿、速度和加速度给出一组显式约束(例如连续性和光滑程度等)，轨迹规划器从一类函数(例如 n 次多项式)中选取参数化轨迹。对结点进行插值，并满足约束条件；
- 优缺点：约束的设定和轨迹规划均在关节空间进行。由于对操作臂手部(直角坐标形位)没有施加任何约束，用户很难弄清手部的实际路径，因此可能会发生与障碍物相碰。

12

□操作臂最常用的轨迹规划方法：

- 第二种方法要求用户给出运动路径的解析式；如直角坐标空间中的路径，轨迹规划器在关节空间或直角坐标空间中确定一条轨迹来逼近预定的路径。
- 优缺点：路径约束是在直角坐标空间中给定的，而关节驱动器是在关节空间中受控的。因此，为了得到与给定路径十分接近的轨迹，首先必须采用某种函数逼近的方法将直角坐标路径约束转化为关节坐标路径约束，然后确定满足关节路径约束的参数化路径。

13

□轨迹规划要求：所规划的轨迹函数必须连续和平滑，使得操作臂的运动平稳。

- 在关节空间规划：将关节变量表示成时间函数，并规划它的一阶和二阶时间导数。（运动学正解、雅克比矩阵及其导数）
- 在直角坐标空间规划：将末端位姿、速度、加速度表示成时间函数，而相应的关节位移、速度、加速度由给定的操作空间信息导出。（求运动学反解、逆雅克比矩阵及其导数）

14

小结

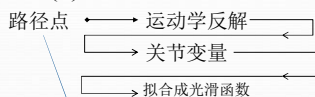
- 用户根据作业任务给出各个路径结点
 - 空间约束
 - 瞬时属性
- 规划器的任务包含：轨迹描述与生成（计算更新）
 - 解变换方程；
 - 进行运动学反解；
 - 插值运算等；
- 关节空间规划；操作空间规划

15

8.2 关节轨迹的插值

16

一般过程：路径点用工具坐标系{T}相对于工作坐标系{S}的位姿来表示



机器人在起始点和终止点手臂的形位

- 优点：计算简单
缺点：易出现碰撞

17

□关节插值函数的约束条件：

- 例如抓取物体时，手部运动方向(起始点)，提升物体离开方向(提升点)；
- 放下物体(下放点)和停止点等结点上的位姿、速度和加速度的要求。
- 与此相应的各个关节位移、速度、加速度在整个时间间隔内连续性要求；
- 其极值必须在各个关节变量的容许范围之内等。

18

1 三次多项式插值

边界约束条件

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0$$

确定一个三次多项式

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

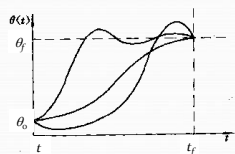


图6-3 单个关节的不同轨迹曲线

1 三次多项式插值

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

运动轨迹上的速度和加速度为

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \end{cases}$$

代入相应的约束条件，得到有关系数的四个线性方程

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(t_f) = \theta_f \\ \dot{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases}$$

20

1 三次多项式插值

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases}$$

可解得，

$$a_0 = \theta_0;$$

$$a_1 = 0;$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0);$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0).$$

21

1 三次多项式插值

例子，单关节操作臂的运动轨迹曲线

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

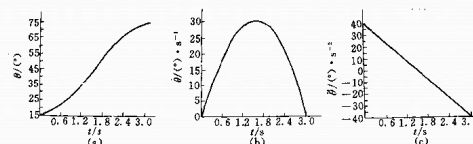


图6-4 三次多项式插值函数
(a) 角位移; (b) 角速度; (c) 角加速度

22

2 过路径点的三次多项式插值

a) 求插值函数

把所有路径点也看作是“起始点”或“终止点”。

- 分段确定所要求的三次多项式插值函数
- 把路径点平滑地连接起来。
- 这些“起始点”和“终止点”的关节运动速度不再是零。

$$\begin{cases} \theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(t_f) = \theta_f \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 = a_1 \\ \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases}$$

23

2 过路径点的三次多项式插值

b) 确定路径点上的关节速度 $\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_f$

可由以下方法规定：

- (1) 根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定每个路径点的关节速度
- (2) 在直角坐标空间或关节空间中采用适当的启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。
- (3) 为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动地选择路径点的速度。

24

2 过路径点的三次多项式插值

b) 确定路径点上的关节速度

可由以下三种方法规定：

- (1) 根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定每个路径点的关节速度

利用操作臂在此路径点上的逆雅可比，把该点的直角坐标速度“映射”为所要求的关节速度。当然，如果操作臂的某个路径点是奇异点，这时就不能任意设置速度值。

25

2 过路径点的三次多项式插值

b) 确定路径点上的关节速度

可由以下三种方法规定：

- (1) 根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定每个路径点的关节速度

- (2) 在直角坐标空间或关节空间中采用适当的启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。

- (3) 为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动地选择路径点的速度。

26

2 过路径点的三次多项式插值

b) 确定路径点上的关节速度

- (2) 在直角坐标空间或关节空间中采用适当的启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。

例如，

- 如果相邻线段的斜率在路径点处改变符号，则把速度选定为零；
- 如果相邻线段不改变符号，则选取路径点两侧的线段斜率

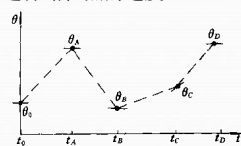


图6-5 路径点上速度的自动生成

图中细实线表示过路径点时的关节运动速度

27

2 过路径点的三次多项式插值

b) 确定路径点上的关节速度

- (3) 为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动地选择路径点的速度。

为了保证路径点处的加速度连续，可以设法用两条三次曲线在路径点处按一定规则联接起来，拼凑成所要求的轨迹。

约束条件：联接处不仅速度连续，而且加速度也连续。

28

2 过路径点的三次多项式插值

约束条件：联接处不仅速度连续，而且加速度也连续。

路径点：

$$\theta_0 \rightarrow \theta_v \rightarrow \theta_g$$

相应时间区间为 $[0, t_f]$ 和 $[0, t_g]$

分段插值多项式为：

$$\begin{aligned} \theta_0 \rightarrow \theta_v & \quad \theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \\ \theta_v \rightarrow \theta_g & \quad \theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \end{aligned}$$

29

2 过路径点的三次多项式插值

约束条件：联接处仅考虑速度连续，而且加速度也连续。

$$\begin{aligned} \theta_0 \rightarrow \theta_v \rightarrow \theta_g & \quad \begin{aligned} \theta_v(t) &= a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \\ \theta_g(t) &= a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \end{aligned} \end{aligned}$$

对这两个多项式的约束是

$$\begin{aligned} \theta_v(0) &= \theta_0 \\ \theta_v(t_f) &= \theta_v = \theta_g(0) \\ \theta_g(t_g) &= \theta_g \\ \dot{\theta}_v(0) &= 0 = \dot{\theta}_g(t_f) \\ \dot{\theta}_v(t_f) &= \dot{\theta}_g(0) \\ \ddot{\theta}_v(t_f) &= \ddot{\theta}_g(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_{10} \\ \theta_v &= a_{10} + a_{11}t_f + a_{12}t_f^2 + a_{13}t_f^3 \\ \theta_v &= a_{20} \\ \theta_g &= a_{20} + a_{21}t_g + a_{22}t_g^2 + a_{23}t_g^3 \\ 0 &= a_{11} \\ 0 &= a_{21} + 2a_{22}t_f + 3a_{23}t_f^2 \\ a_{11} + 2a_{12}t_f + 3a_{13}t_f^2 &= a_{21} \\ 2a_{12} + 6a_{13}t_f &= 2a_{22} \end{aligned}$$

30

以上约束组成了含有8个未知数的8个线性方程。
对于 $t_{f1} = t_{f2} = t_f$ 的情况，这个方程组的解为

$$\theta_v(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad \theta_g(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \theta_0 \\ a_{11} &= 0 \\ a_{12} &= \frac{12\theta_v - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2} \\ a_{13} &= \frac{-8\theta_v + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= \theta_v \\ a_{21} &= \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f} \\ a_{22} &= \frac{-12\theta_v + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2} \\ a_{23} &= \frac{8\theta_v - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3} \end{aligned}$$

31

3 高级多项式插值

约束：起点、终点满足位置、速度和加速度约束

采用五次多项式进行插值：

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$$

多项式满足6个约束条件，

$$\theta_0, \theta_f, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_f, \ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_f$$

解得：

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

32

►6个约束条件

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 \\ \ddot{\theta}_0 &= 2a_2 \\ \ddot{\theta}_f &= 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 \end{aligned}$$

□解得

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \end{aligned}$$

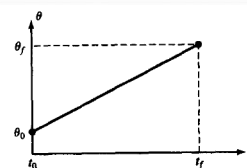
$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_5 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5} \end{aligned}$$

33

4 用抛物线过渡的线性插值

- 对于给定的起始点和终止点的关节角度，若选择直线插值函数来表示路径的形状。

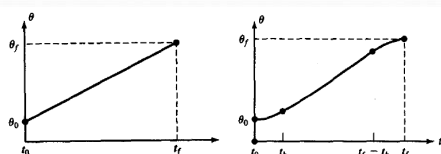
- 尽管每个关节都作匀速运动，但是手部的运动轨迹一般不是直线。
- 显然，单纯线性插值将导致在结点处关节运动速度不连续，加速度无限大。



34

4 用抛物线过渡的线性插值

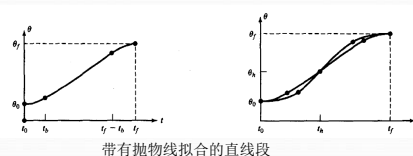
- 选择直线插值函数来表示路径的形状。
- 为了生成一条位移和速度都连续的平滑运动轨迹，在使用线性插值时，把每个结点的邻域内增加一段抛物线的“缓冲区间”。



35

4 用抛物线过渡的线性插值

- 由于抛物线对于时间的二阶导数为常数，即相应区段内的加速度恒定不变
- 这样使得速度平滑过渡，不致在结点处产生速度“跳跃”，
- 从而使整个轨迹上的位移和速度都连续。

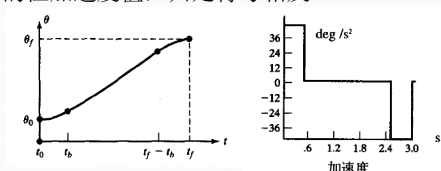


带有抛物线拟合的直线段

36

4 用抛物线过渡的线性插值

- 带有抛物线过渡域的线性轨迹：线性函数与两段抛物线函数平滑地衔接在一起形成的轨迹
- 为了构造这段运动轨迹，假设两端的过渡域(抛物线)具有相同的持续时间，因而在这两个域中采用相同的恒加速度值，只是符号相反。



37

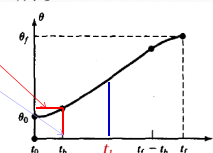
4 用抛物线过渡的线性插值

- 以固定加速度平稳地改变速度，由于过渡域终点的速度必须等于线性域的速度，所以

$$\dot{\theta}_b = \frac{\theta_f - \theta_b}{t_f - t_b}$$

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2$$

- 设过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}$ ，则过渡域终点的角度为



38

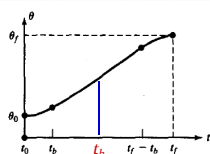
4 用抛物线过渡的线性插值(续)

$$\ddot{\theta} \cdot t_b = \frac{\theta_f - \theta_b}{t_f - t_b} \quad \theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2$$

令 $t = 2t_b$ ，联立上述两式可得，

$$\ddot{\theta} \cdot t_b^2 - \ddot{\theta} \cdot t \cdot t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

- 对于任意给定的 θ_f, θ_0, t ，可以根据上式选择相应的 $\ddot{\theta}, t_b$ 得到路径曲线。



39

4 用抛物线过渡的线性插值(续)

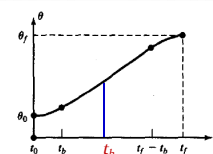
$$\ddot{\theta} \cdot t_b^2 - \ddot{\theta} \cdot t \cdot t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

通常，对于给定的加速度值 $\ddot{\theta}$ ，求

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

其中约束条件为， $\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0) \geq 0$

显然，对于每一指定的加速度值，有一组解。



40

例：设有一个旋转关节的单自由度操作臂处于静止状态时， $\theta_0 = 15^\circ$ ，要在3s之内平稳运动到达终止位置： $\theta_f = 15^\circ$ ，并且在终止点的速度为零。1) 求三次多项式插值函数及角速度、角加速度；2) 设计出两条带有抛物线过渡域的线性轨迹。

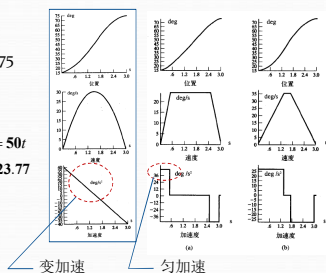
1)

$$\theta(t) = 15 + 20t^2 - 4.44t^3$$

2) (a) 选定 $\dot{\theta}(t) = 40t - 13.32t^2$ 得 $t_b = 0.475$
 $\ddot{\theta}(t) = 40 - 26.64t$
 $[0 \sim t_b]: \ddot{\theta} = 50$

(b) 选定 $\dot{\theta}(t) = 15 + 25t^2$ 得 $\dot{\theta}(t) = 50t$
 $\ddot{\theta}(t) = 23.77t$ $\ddot{\theta}(t) = 23.77$
 $[t_b \sim t_f]: \ddot{\theta} = 26$

3) 轨迹的特征



41

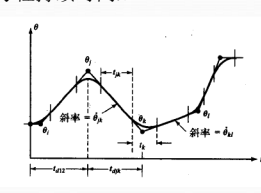
5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

在有路径点的情况下，确定带有抛物线过渡域的线性轨迹。

- 某个关节在运动中设有 n 个路径点，若 $j, k \neq 1, 2; k, l \neq n-1, n$
- 相邻的路径点之间抛物线过渡的线性插值

对于内部路径段，求解下列方程持续时间 t_k

$$\begin{cases} \dot{\theta}_k = \frac{\theta_k - \theta_{j-1}}{t_{dk}}; \\ \ddot{\theta}_k = \text{sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k|; \\ t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} = t_{dk} - \frac{1}{2} t_j - \frac{1}{2} t_k \end{cases}$$



42

8.3 笛卡尔空间规划方法

43

- 作业顺序的描述
用操作臂终端抓手位姿的笛卡尔坐标结点序列规定。
- 物体对象的描述
与物体固接坐标系的位姿和物体几何形状
- 路径点的描述
工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位姿。

44

6.3 笛卡尔空间规划方法

一、物体对象的描述

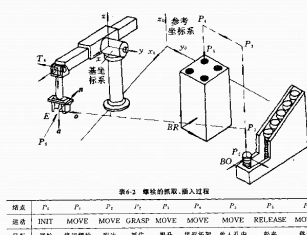
二、作业的描述

$$P_i \Rightarrow {}^0T$$

- 用符号表示沿直线运动的各结点的位姿

$$P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

- 参照这些结点的位姿，将作业描述为如表6-2所示的手部的一连串运动和动作。



45

三、两个节点之间的“直线”运动

- 对于两结点 P_i 和 P_{i+1} 定义的路径段，生成一系列中间点。

- 结点之间的运动可以描述为：

$${}^0T = {}^0T_B {}^B P_i {}^6T^{-1} \longrightarrow {}^0T = {}^0T_B {}^B P_{i+1} {}^6T^{-1}$$

- 其中， 6T 是工具坐标系 $\{E\}$ 相对末端坐标系 $\{6\}$ 的变换。
 ${}^B P_i$ 和 ${}^B P_{i+1}$ 分别为两结点 P_i 和 P_{i+1} 相对于目标坐标系 $\{B\}$ 的齐次变换。

46

三、两个节点之间的“直线”运动

- 对于两结点 P_i 和 P_{i+1} 定义的路径段，生成一系列中间点。

- 结点之间的运动可以描述为：

$${}^0T = {}^0T_B {}^B P_i {}^6T^{-1} \longrightarrow {}^0T = {}^0T_B {}^B P_{i+1} {}^6T^{-1}$$

- 引入 $D(\lambda): \lambda=t/T, \lambda \in [0,1]$ 。T为该轨迹段的总时间。

$$\text{令 } D(0)=I, {}^B P_i D(1)={}^B P_{i+1}$$

$$\text{有: } D(1)={}^B P_i^{-1} {}^B P_{i+1}$$

- 采用驱动变换 $D(\lambda)$ 的结点间运动写为

$${}^0T(\lambda)={}^0T_B {}^B P_i D(\lambda) {}^6T^{-1}$$

47

对于结点 P_i 和 P_{i+1} ，即

$${}^B P_i = \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B P_{i+1} = \begin{bmatrix} n_{i+1} & o_{i+1} & a_{i+1} & p_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可求 $D(1)={}^B P_i^{-1} {}^B P_{i+1}$

$$D(1) = \begin{bmatrix} n_i \cdot n_{i+1} & n_i \cdot o_{i+1} & n_i \cdot a_{i+1} & n_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ o_i \cdot n_{i+1} & o_i \cdot o_{i+1} & o_i \cdot a_{i+1} & o_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ a_i \cdot n_{i+1} & a_i \cdot o_{i+1} & a_i \cdot a_{i+1} & a_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

48

工具坐标系从节点 P_i 到 P_{i+1} 的运动可分解为一个平移运动和两个旋转运动

- 平移运动的齐次变换矩阵: $L(\lambda)$
- 使工具轴线与预期的接近方向 a 对准的转动: $R_a(\lambda)$
- 绕工具轴线(a)使方向矢量 o 对准的转动: $R_o(\lambda)$

则驱动函数,

$$D(\lambda) = L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda)$$

平移运动的齐次变换

使a轴对准

使o轴对准

49

$$D(\lambda) = L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda)$$

已知平移 p , a 轴方位, o 轴方位

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

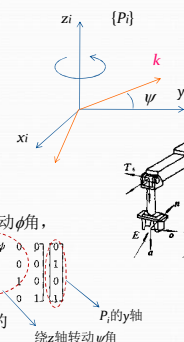
采用任意轴角公式表示对准 a 轴的转动

$$R_a(\lambda) = \begin{bmatrix} s^2\phi\psi c(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & -s\phi c\psi s(\lambda\theta) & c\phi s(\lambda\theta) & 0 \\ -s\phi c\psi s(\lambda\theta) & c^2\phi\psi c(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & s\phi s(\lambda\theta) & 0 \\ -c\phi s(\lambda\theta) & -s\phi s(\lambda\theta) & c(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使方向矢量 o 对准的转动: P_i 的 y 轴绕 z 轴转动 ϕ 角,

$$R_o(\lambda) = \begin{bmatrix} c(\lambda\phi) & -s(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ s(\lambda\phi) & c(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} -s\phi \\ c\phi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

注意到, 向量 k 是 P_i 的 y 轴绕 z 轴转动 ψ 角得到的



50

当 λ 随时间线性变化, 则 $D(\lambda)$ 所代表的合成运动将是一个恒速移动和二恒速转动的复合。得

$$D(\lambda) = L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda)$$

其中,

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{dn}{d\lambda} & \frac{do}{d\lambda} & \frac{da}{d\lambda} & \frac{dp}{d\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{do}{d\lambda} = \begin{bmatrix} -s(\lambda\phi)[s^2\phi\psi c(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\phi c\psi s(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-s\phi c\psi s(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[c^2\phi\psi c(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-c\phi s(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\phi s(\lambda\theta)] \end{bmatrix};$$

$$\frac{da}{d\lambda} = \begin{bmatrix} c\phi s(\lambda\theta) \\ s\phi s(\lambda\theta) \\ c(\lambda\theta) \end{bmatrix}; \quad \frac{dp}{d\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix};$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{do}{d\lambda} \times \frac{da}{d\lambda}$$

51

- 对于 $D(\lambda) = L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda)$, 采用求逆变换方法解代数方程, 可得

$$\begin{aligned} x &= n_1 \cdot (p_{i+1} - p_i)_x \\ y &= o_1 \cdot (p_{i+1} - p_i)_x \\ z &= a_1 \cdot (p_{i+1} - p_i)_x \end{aligned}$$

相对于坐标系[B]的表示

$$\phi = \text{Atan} \left[\frac{o_1 \cdot a_{i+1}}{n_1 \cdot a_{i+1}} \right], \quad -\pi \leq \phi < \pi;$$

$$\theta = \text{Atan} \left[\frac{(n_1 \cdot a_{i+1})^2 + (o_1 \cdot a_{i+1})^2}{a_1 \cdot a_{i+1}} \right]^{1/2}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

$$\psi = \text{Atan} \left[\frac{s\phi}{c\phi} \right]; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi.$$

52

课程考查报告:

双面打印(A4纸)的纸质报告, 封面: 课程名, 姓名、学号、班级. 11月19日交到东楼B211

1. SCARA机器人建模(参考图5-6, 5-12, 6-5)

- 1) 建立运动学方程, 推导运动学逆解, 并建立其雅可比矩阵;
- 2) 讨论其在参考形位处(图6-5)的奇异性、可操作性;
- 3) 讨论其在参考形位处(图6-5)的末端操作刚度。

53

2. 采用Matlab编写轨迹生成程序

本练习的目的是建立单关节多项式关节空间轨迹生成方程(如果是多关节, 则需要 n 次运用本结果)。针对下面三种情况, 编写一个MATLAB程序建立关节空间轨迹生成器。对给定的任务输出结果。对于每种情况, 给出关于关节角、角速度、角加速度以及角加速度变化率(即: 加速度对时间的导数)的多项式函数。对于每种情况, 打印出结果(纵坐标为角度、角速度、角加速度和角加速度变化率, 所有时间单位相同——通过核对MATLAB的作图子函数 *subplot* 完成这项工作)。不要只是作出图来——还需要做一些讨论, 以此检验你的结果是否有意义? 以下是三种情况:

- a) 三阶多项式。在初始点和终止点, 令角速度为0。已知 $\theta_i = 120^\circ$ (起始点), $\theta_f = 60^\circ$ (终止点), $t_f = 1s$ 。
- b) 五阶多项式。在初始点和终止点, 令角速度和角加速度为0。已知 $\theta_i = 120^\circ$ (起始点), $\theta_f = 60^\circ$ (终止点), $t_f = 1s$ 。将计算结果(函数与图形)与题(a)中使用三阶多项式的结果进行比较。
- c) 两段带有中间点的三阶多项式。在起始点和终止点, 令角速度和角加速度为0。不必令在中间点的角速度为0——必须保证两段多项式在那点上的时间重合, 使二者的速度和加速度相同, 证明可以满足此条件。已知 $\theta_i = 60^\circ$ (起始点), $\theta_m = 120^\circ$ (中间点), $\theta_f = 30^\circ$ (终止点), 并且 $t_i = t_f = 1s$ (即相对时间步长 $t = 2s$)。
- d) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检验(a)和(b)的结果。试用函数 *traj()*。