

SCARA 机器人的拉格朗日动力学建模

崔敏其^{1,2}

(1.华南理工大学广州学院 工程研究院 广东 广州 510800;

2.香港中文大学 机械与自动化工程学系,香港)

摘 要:以 SCARA 型四自由度机器人为研究对象,采用 Denavit-Hartenberg 方法建立 SCARA 机器人的运动学模型,重点使用拉格朗日公式法对 SCARA 机器人的动力学模型进行了详细地推导,并得出 SCARA 机器人的动力学方程。同时归纳使用拉格朗日公式法推导机器人动力学模型的一般方法,该方法适用于其他构型机器人的动力学建模。最后对机械臂动力学方程的一般形式进行解析。使用拉格朗日公式法获得准确的机器人动力学模型可以为机器人的结构设计、关键件的选型以及控制器的设计和仿真提供依据。

关键词: SCARA 机器人 动力学模型 拉格朗日动力学公式 动力学仿真

中图分类号: TH16 ;TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3997(2013)12-0076-03

Dynamical Modeling of SCARA Robot Based on Lagrange Formulation

CUI Min-qi^{1,2}

(1.Engineering Research Institute , Guangzhou College of South China University of Technology , Guangdong Guangzhou 510800 , China 2.The Department of Mechanical and Automation Engineering , The Chinese University of Hong Kong , Hong Kong , China)

Abstract It describes the derivation for the dynamical model of 4-DOF SCARA robot. Denavit-Hartenberg method was used to derive the kinematic model of SCARA robot. The dynamics model was derived based on Lagrange Formulation. The equations of motion for SCARA robot were presented by the result of the derivation. As well as describing the mathematical derivation , the procedures of using Lagrange Formulation method , which can be applied on the other robots with different configurations , were summarized here. At last , the dynamics equation of manipulator was analyzed. The accurate dynamics model which derived by Lagrange Formulation can contribute to the selection of major components , structure design , controler design and simulation for robots.

Key Words SCARA Robot ;Dynamics Model ;Lagrange Formulation ;Dynamics Simulation

1 引言

拉格朗日公式是一种基于系统的做功及能量交换情况来推导系统动力学方程的是一种数学解析法。拉格朗日公式和牛顿欧拉迭代方法一样,常用于机器人动力学模型的推导。针对 SCARA 机器人,使用拉格朗日公式法,详细地推导其动力学方程,并进行分析。

2 SCARA 的正运动学

在使用拉格朗日公式法进行动力学建模前,首先需要完成 SCARA 机器人的正运动学的求解(计算齐次变换矩阵和雅可比矩阵)。

如图 1 所示,建立 SCARA 机器人的各连杆坐标系,并设定各连杆参数。SCARA 机器人的 Denavit-Hartenberg 参数,如表 1 所示。

表 1 SCARA 机器人 Denavit-Hartenberg 连杆参数表
Tab.1 Denavit-Hartenberg Link Parameters of SCARA

连杆 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	π	L_2	d_3	0
4	0	0	0	θ_4

表中 α_{i-1} —连杆转角 μ_{i-1} —连杆长度 μ_i —连杆偏距 θ_i —关节角。

由连杆变换矩阵公式:

$${}^i T_{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

和变换传递式:

来稿日期 2013-02-14

作者简介 崔敏其(1987-)男 广东广州 硕士研究生 工程师 主要研究方向 机器人技术及其应用

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \quad (2)$$

可得 机器末端({4}原点)到基坐标系的齐次变换矩阵:

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} c_{12-4} & s_{12-4} & 0 & c_1L_1+c_{12}L_2 \\ s_{12-4} & -c_{12-4} & 0 & s_1L_1+s_{12}L_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

通过计算各连杆坐标系关于{0}坐标系的齐次变换矩阵,可以计算出 SCARA 机器人的雅克比矩阵:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1s_1-L_2s_{12} & -L_2s_{12} & 0 & 0 \\ L_1c_1+L_2c_{12} & L_2c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

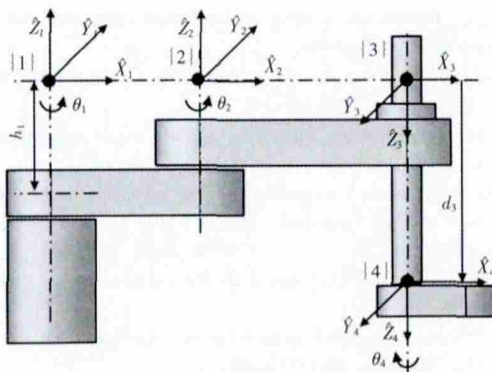


图1 连杆坐标系布局

Fig.1 Link Frames Assignment

3 拉格朗日公式法的一般步骤

使用拉格朗日公式推导机械臂动力学方程的一般步骤如下:

(1)选定机器人的广义坐标 q 。虽然广义坐标的选定并不唯一,但是一般地,优先选择使用D-H方法(详见^[1])所确定的运动学参数;

(2)确定作用在机器人系统上,并且对系统可以做功的非保守力;

(3)计算机器人系统的总动能 K 、总势能 U 以及拉格朗日量 $L=K-U$;

(4)计算拉格朗日公式所需的偏导数;

(5)计算机器人系统的广义力 F ;

(6)代入使用拉格朗日公式求得系统动力学方程

4 动力学模型的推导

根据机器人的Denavit-Hartenberg连杆参数,选定机器人的广义坐标 $q=(\theta_1 \ \theta_2 \ d_3 \ \theta_4)^T$,如图1所示。

确定作用在机器人系统上,并且对系统可以做功的非保守力。假设机器人末端与环境的作用力 f 为0,那么对于SCARA机器人系统而言,“不做功的非保守力”是各关节电机的驱动力,准确地说,是各关节的输入力矩(力)。它们分别是 τ_1, τ_2, τ_3 以及 τ_4 。

计算机器人系统的总动能 K 和总势能 U ,然后计算拉格朗

日量 L 。为了计算机器人各连杆的动能和势能,定义机器人各连杆的质心分别为 C_1, C_2, C_3 和 C_4 ,各连杆质心位置矢量分别为 p_{C1}, p_{C2}, p_{C3} 和 p_{C4} ,如图2所示。设各连杆的质量分别为 m_1, m_2, m_3, m_4 ,连杆1关于其关节轴的惯性矩为 I_1 ,连杆 i 关于其质心坐标系 Z 轴的惯量矩为 I_{zz} 。

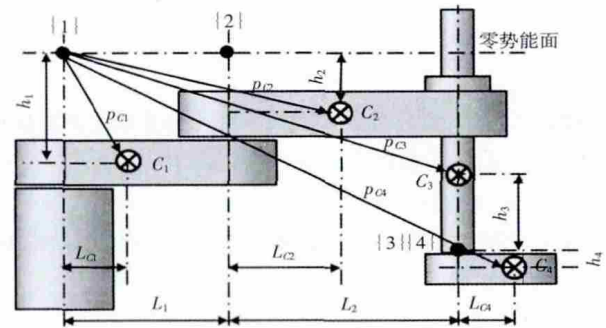


图2 连杆质心及位置向量

Fig.2 Mass Centers of Links and Position Vectors

SCARA 机器人各连杆的质心位置向量分别是:

$$P_{C1} = (c_1L_{C1} \ s_1L_{C1} \ -h_1)^T$$

$$P_{C2} = (c_1L_1+c_{12}L_{C2} \ s_1L_1+s_{12}L_{C2} \ -h^2)^T$$

$$P_{C3} = (c_1L_1+c_{12}L_2 \ s_1L_1+s_{12}L_2 \ h_3-d_3)^T$$

$$P_{C4} = \begin{bmatrix} c_1L_1+c_{12}L_2+c_{124}L_{C4} \\ s_1L_1+s_{12}L_2+s_{124}L_{C4} \\ -d_3-h_4 \end{bmatrix}$$

首先计算机器人各连杆的动能。

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 \quad K_2 = \frac{1}{2}I_{zz2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2v_{C2}^2$$

$$K_3 = \frac{1}{2}I_{zz3}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3v_{C3}^2$$

$$K_4 = \frac{1}{2}I_{zz4}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_4)^2 + \frac{1}{2}m_4v_{C4}^2$$

其中连杆2、3、4的质心线速度分别为:

$$v_{C2} = \dot{\theta}_1L_1 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)r_{xy2}$$

$$v_{C3} = \sqrt{[\dot{\theta}_1L_1 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)(L_2+r_{xy3})]^2 + \dot{d}_3^2}$$

$$v_{C4} = \sqrt{[\dot{\theta}_1L_1 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)L_2 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_4)r_{xy4}]^2 + \dot{d}_3^2}$$

机器人总动能为 $K=K_1+K_2+K_3+K_4$ 。

然后进行各连杆的势能计算。各连杆的势能分别为 $U_1=-m_1gh_1$,

$U_2=-m_2gh_2$, $U_3=m_3g(h_3-d_3)$, $U_4=-m_4g(d_3+h_4)$ 。机器人总势能为 $U=U_1+U_2+U_3+U_4$ 。

完成机器人总动能 K 以及机器人总势能 U 的计算后,便可以计算拉格朗日量 $L=K-U$,由于篇幅的限制,此处略去 L 的详细计算结果。

计算拉格朗日公式所需的偏导数:分别计算拉格朗日量 L 关于各关节角速度的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$,关于时间 t 的导数 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$,拉格朗日量 L 关于关节角 q 的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial q}$ 。

计算机器人系统的广义力 F 。假设 SCARA 机器人各关节发生微小角位移 δq , 可以计算在微小位移下机器人所做的虚功:

$$\delta W = \tau_1 \delta \theta_1 + \tau_2 \delta \theta_2 + \tau_3 \delta d_3 + \tau_4 \delta \theta_4 + f^T J(q) \delta q$$

$$= (\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4) \delta q + (J(q) f)^T \delta q \quad (5)$$

广义力的计算方法为求虚功 δW 关于微小角位移 δq 的偏导数, 即:

$$F = \frac{\partial}{\partial (\delta q)} (\delta W) = (\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4)^T + J^T(q) f \quad (6)$$

如前文所述, 假设机器人末端与环境的作用力 f 为 0, 则 $J^T(q) f = 0$, 所以 SCARA 机器人所受到的广义力为:

$$F = (\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4)^T \quad (7)$$

将计算所得的各偏导数结果以及广义力分别代入使用拉格朗日公式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F \quad (8)$$

即可求得系统动力学方程。

一般地, 机械臂动力学方程的一般形式为:

$$H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (9)$$

式中 $H(q)$ —惯性矩阵, 它是一个角对称矩阵, 各非零元素的取值大小取决于机器人各关节角的大小。 $H(q) \ddot{q}$ 表征机器人所受到的惯性力的大小。

$C(q, \dot{q})$ 为离心力和科氏力矩阵, 表征 SCARA 机器人所受到的离心力和科氏力的大小。离心力和科氏力矩阵各非零元素的取值大小取决于机器人各关节角的大小以及各关节角速度的大小。

$G(q)$ 为重力矩阵, 表征 SCARA 机器人所受到的重力的大小。重力矩阵各非零元素的取值大小取决于机器人各关节角的大小。

τ 为关节力矩(力)输入矩阵。表征各轴电机通过传动装置对机器人各关节轴的输入力矩。

将拉格朗日动力学方程整理成机械臂动力学方程一般形式, 即可获得 SCARA 机器人具体的动力学方程:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & 0 & H_{24} \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & H_{44} \end{bmatrix}}_{H(q)} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \\ C_4 \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}}_{\tau} \quad (10)$$

5 结论

使用拉格朗日公式法, 详细地推导了 SCARA 机器人的动力学方程(过程略)。此推导过程适用于大部分机械臂的动力学推导问题。概括地说, 使用拉格朗日公式法进行动力学建模的一般步骤为: 正运动学求解, 求雅可比矩阵, 选定机器人的广义坐标, 确定作用在机器人系统上并且对系统可以做功的非保守力, 计算机器人系统的总动能、总势能以及拉格朗日量, 拉格朗日公式所需的偏导数、机器人系统的广义力, 最后将各参数代入拉格朗日公式, 并将其整理成机器人动力学方程一般形式。获得准确的机器人动力学模型有助于机器人的结构设计、关键件的选型以及控制器的设计和仿真。

参考文献

- [1] Craig J J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control 3rd ed [M]. Prentice Hall, 2005: 62-89.
- [2] Megahed S F M. Principles of robot modelling and simulation [M]. John Wiley & Sons, Inc., 1993: 186-191.
- [3] Choset H M. Principles of Robot Motion: theory, algorithms, and implementations [M]. MIT Press, 2005: 349-372.
- [4] Ishibashi N, Maeda Y. Learning of inverse-dynamics for SCARA robot [C]. SICE Annual Conference (SICE), 2011 Proceedings of. IEEE, 2011: 1300-1303.
- [5] Josephs H, Huston R. Dynamics of Mechanical Systems [M]. CRC Press, 2002: 415-418.
- [6] Niku S B. Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications [M]. Hoboken, NJ: Wiley, 2011: 147-169.
- [7] Lewis F L, Abdallah C T, Dawson D M. Control of Robot Manipulators [M]. New York: Macmillan Publishing Company, 2000: 64-90.
- [8] 翟敬梅, 康博, 张铁. 六自由度喷涂机器人动力学分析及仿真 [J]. 机械设计与制造, 2012(1): 187-189.
- [9] 谢存禧, 张铁. 机器人技术与应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [10] Xie Cun-xi, Zhang Tie. Application of Robotics [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 2005.

(上接第 75 页)

参考文献

- [1] 胡耀斌, 厉善元, 胡良斌. 基于神经网络的滚动轴承故障诊断方法的研究 [J]. 机械设计与制造, 2012(2): 187-189.
- [2] 吴涛, 原思聪, 孟欣. 滚动轴承振动诊断的 SOM 神经网络方法 [J]. 机械设计与制造, 2010(1): 198-200.
- [3] 杜文辽, 李安生, 孙旺. 基于蚁群 SVDD 和聚类方法的旋转机械故障诊断 [J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(9): 1440-1444.
- [4] Liu Hai-ning, Li Shan-yuan, Hu Liang-bin. Fault diagnosis of rolling bearing based on neural network [J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(2): 187-189.
- [5] Wu Tao, Yuan Si-cong, Meng Xin. Vibrating diagnosis of rolling bearings based on self-organizing feature map neural network [J]. Machinery Design & Manufacture, 2010(1): 198-200.
- [6] Du Wen-liao, Li An-sheng, Sun Wang. Fault diagnosis of rotating mechanism Based on ant colony SVDD algorithm and cluster method [J]. Shanghai Jiaotong Univ.(Sci.), 2012, 46(9): 1440-1444.

- [4] 刘海宁. 基于稀疏编码的设备状态识别及其重型轧辊磨床监测应用 [D]. 上海: 上海交通大学, 2012.
- [5] Liu Hai-ning. Sparse coding based machine condition recognition and its application in the condition monitoring of a heavy roller grinder [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong Univ., 2011.
- [6] Bearings vibration data set, Available at [OL]. <http://www.eecs.cwru.edu/laboratory/bearing/download.html>.
- [7] Hu Q, He Z, Zhang Z, Zi Y. Fault diagnosis of rotating machinery based on improved wavelet package transform and SVMs ensemble [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(2): 688-705.
- [8] Saravanan N, Ramachandran KI. Incipient gear box fault diagnosis using discrete wavelet transform (DWT) for feature extraction and classification using artificial neural network (ANN) [J]. [OL]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(6): 4168-4181.
- [9] The SOM Toolbox for Matlab, Available at <http://www.cis.hut.fi/projects/somtoolbox/>.