Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 03

Inducción matemática y estructural

Presenta

Valeria Camacho Hernández - 322007273

Asignatura

Estructuras Discretas 2025-2

Profesor

Ulises Rodríguez Domínguez

Ayudante

Irvin Javier Cruz González

Fecha

Viernes 11 de abril del 2025

Tarea 03

1. [3 puntos] Inducción en sentido contrario

Considera que la siguiente desigualdad $P(n)$ se cumple para cierto valor de $n \geq 1$ (puedes comprobar para alguna $n > 1$ que se cumple)

$$P(n): \quad x_1 x_2 \ldots x_n \leq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}{n^n} \tag{1}$$

(a) Partiendo de que $P(n)$ es cierta, demuestra que $P(n) \to P(n-1)$ para $n > 1$ (mostrando que puedes obtener $P(n-1)$ partiendo de $P(n)$). Para ello considera también que

$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \tag{2}$$

Respuesta: Procedemos por inducción en sentido contrario.

- Casos Base:

  1) Sea $n = 1$. Entonces $n - 1 = 1 - 1 = 0$, y tenemos

  $$x_1 \leq \frac{(x_1)^1}{1^1} = \frac{x_1}{1} = x_1$$

  Esta desigualdad claramente se cumple con la igualdad, es decir, tenemos

  $$x_1 \leq x_1$$

  $\therefore P(1)$ se cumple.

  2) Sea $n = 2$. Entonces $n - 1 = 2 - 1 = 1$, y tenemos

  $$x_1 x_2 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}$$

  Queremos que se cumpla para para todos $x_1, x_2 > 0$ (porque es una división). Entonces, primero desarrollamos el lado derecho

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4} = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}$$

Entonces tenemos que

$$x_1x_2 \leq \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}$$

Multiplicamos ambos lados por 4 para evitar fracciones

$$4x_1x_2 \leq x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

Restamos $4x_1x_2$ de ambos lados

$$0 \leq x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 = (x_1-x_2)^2$$

Ahora, como sabemos que el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero, esta desigualdad se cumple

$$(x_1-x_2)^2 \geq 0$$

$\therefore P(2)$ también es verdadera para cualquier $x_1, x_2 > 0$.

- Hipótesis de Inducción: Sea

$$x_n = (\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1})$$

- Paso inductivo: Por demostrar:

$$x_1x_2...x_{n-1} \leq (\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1})^n$$

Tenemos que, podemos reescribir, por definición de antecesor, como

$$= x_1x_2...x_{n-1}x_n \leq (\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n}{n})^n$$

Distribuimos los exponentes

$$= x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \leq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n)^n}{n^n}$$

Ahora sustituyo por la Hipótesis de Inducción en cada lado y desarrollo en ambos lados para llegar a lo que quiero demostrar.

- Lado izquierdo

$$= x_1 x_2 \dots x_{n-1} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n} \right)$$

Divido por el término $(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1})$.

$$= \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \cdot \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n} \right)}{\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n} \right)}$$

Se cancelan términos y llegamos a

$$= x_1 x_2 \dots x_{n-1}$$

- Lado derecho

$$= \frac{\left(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1} \right)^n}{n^n}$$

Simplificamos el numerador

$$= \frac{\left((x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) * (1 + \frac{1}{n-1}) \right)^n}{n^n}$$

Simplificamos la suma del numerador

$$= \frac{\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) * \left(\frac{n}{n-1}\right)\Big)^n}{n^n}$$

Desarrollamos numerador

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^n * n^n}{(n-1)^n * n^n}$$

Se cancelan los términos n^n

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^n}{(n-1)^n}$$

Entonces tenemos

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^n$$

Ahora, como en el lado izquierdo dividimos por el término $(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1})$, en este lado también lo hago

$$= \frac{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}\right)}$$

Desarrollamos la fracción. Primero aplicamos ley del sandwich

$$= \frac{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n * (n-1)}{(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})}$$

Eliminamos el factor $n - 1$ y simplificamos

$$= \frac{\frac{({}^n x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^n}{(n-1)^{n-1}}}{(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})}$$

Simplificamos

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

Simplificamos y llegamos a

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{(n-1)}\right)^{n-1}$$

Entonces, tenemos que

$$x_1 x_2 ... x_{n-1} \leq (\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1})^{n-1}$$

$\therefore$ Se cumple por inducción en en sentido contrario $P(n-1)$. ★

2. [3 puntos] Inducción sobre árboles

Considera el caso de un árbol binario denso $\mathcal{T}$, es decir en donde hay la cantidad máxima de nodos en el mismo.

Notación: Sea $\mathcal{T} = tree(t_1, c, t_2)$ un árbol.

(a) Define una función recursiva $CH(\mathcal{T})$ para contar el número de hojas en el árbol denso $\mathcal{T}$.

Respuesta: Estamos trabajando con un un árbol binario denso, donde solo ocurre en los niveles más bajos que tengamos una hoja, es decir, un nodo sin hijos (no tiene ni subárbol izquierdo t_1 ni derecho t_2). Por lo que propongo la siguientes funciones.

1) $\mathcal{CH}(\mathcal{T}) = 1$; Es el caso cuando el árbol es una hoja, es decir, no tiene hijos (subárboles izquierdo ni derecho), por lo que se cuenta ese mismo y por eso contamos 1.
2) $\mathcal{CH}(\mathcal{T}) = CH(t_1) + CH(t_2)$; Es el caso cuando cuenta el árbol si tiene dos hijos (subárboles izquierdo ni derecho). En este caso, las hojas de $\mathcal{T}$ son todas las hojas de sus subárboles izquierdo y derecho. Por lo que vamos sumando recursivamente las hojas de ambos.

(b) Considera otra función recursiva $CN(\mathcal{T})$ para contar el número de nodos internos en el árbol denso $\mathcal{T}$ como la del ejemplo visto en clase.

Respuesta: Propongo la siguiente función.

1) $CN(\mathcal{T}) = 0$; Es el caso cuando $\mathcal{T}$ es una hoja (no tiene subárboles izquierdo ni derecho), por lo que no se cuenta como nodo interno.
2) $CN(\mathcal{T}) = 1 + CN(t_1) + CN(t_2)$; Es el caso cuando el nodo tiene dos hijos. Contamos 1 por el nodo actual (que es interno), y luego sumamos recursivamente los nodos internos de los subárboles izquierdo y derecho.

(c) En base a los dos puntos anteriores demuestra usando inducción que

$$CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1. \tag{3}$$

Respuesta: Procedemos por inducción estructural.

- Casos Base:
  1) $\mathcal{CH}(\mathcal{T}) = 1$
  2) $CN(\mathcal{T}) = 0$

  Por demostrar: $CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1$

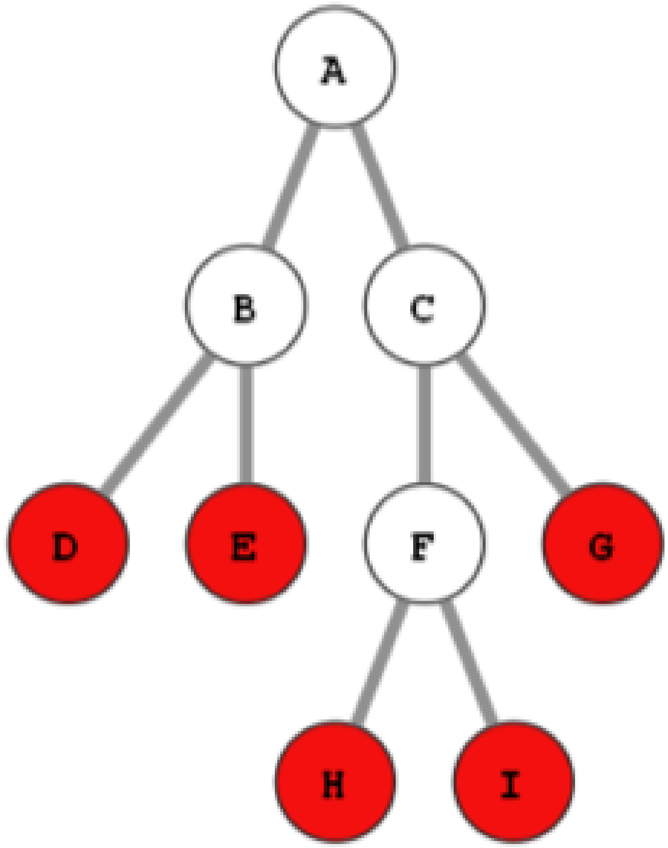
  Supongamos que $\mathcal{T}$ es una hoja. Entonces, por definición, tenemos que $CH(\mathcal{T}) = 1 \quad \text{y} \quad CN(\mathcal{T}) = 0$. Así, tenemos $CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1 = 0 + 1 = 1$

  $\therefore$ Se cumple que $CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1$

- Hipótesis de Inducción:
  1) $\mathcal{CH}(t_1) = \mathcal{CN}(t_1) + 1$
  2) $\mathcal{CH}(t_2) = \mathcal{CN}(t_2) + 1$

  .
- Paso Inductivo: Sea $\mathcal{T} = tree(t_1, c, t_2)$ un árbol.
  Por demostrar: $CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1$
  Tenemos que $\mathcal{CH}(\mathcal{T})$
  $= \mathcal{CH}(t_1) + \mathcal{CH}(t_2)$; por definición de $\mathcal{CH}$
  $= (\mathcal{CN}(t_1) + 1) + (\mathcal{CN}(t_2) + 1)$; aplicamos H.I.
  $= \mathcal{CN}(t_1) + \mathcal{CN}(t_2) + 2$; sumamos
  $= \mathcal{CN}(t_1) + \mathcal{CN}(t_2) + 2 - 1$; restamos 1
  $= \mathcal{CN}(t_1) + \mathcal{CN}(t_2) + 1$
  $= \mathcal{CN}(\mathcal{T}) + 1$

  $\therefore$ Se cumple $CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1$ para cualquier $\mathcal{T}$ $\bigstar$.



3. [4 puntos] Recorriendo el árbol y obteniendo información

Define una función recursiva que siempre reciba tres argumentos: un árbol, una lista y un número, y devuelva una lista.

(a) El argumento árbol $\mathcal{T}$ de la función puede estar vacío o tener nodos inicialmente, y el primer nodo c de $\mathcal{T}$ que se inspecciona en la función es la raíz de $\mathcal{T}$.

(b) El argumento lista ℓ, en donde se concatenará información del árbol, se le pasa vacío inicialmente, pero puede ser no vacío si se está llamando recursivamente después de concatenar información.

(c) El argumento tipo número se le pasa con valor de 0 inicialmente, pero deberá ir aumentando en las llamadas recursivas para contar la cantidad total de pasos hasta llegar a una hoja.

(d) **El propósito de la función es devolver una lista con todas las hojas en el árbol y la profundidad a la que se encuentra cada hoja** (cantidad de pasos desde la raíz a la hoja). Por ejemplo, si se le pasa el siguiente árbol de la figura, la función debe devolver la lista `[D2, E2, H3, I3, G2]`, indicando que D, E y G están en profundidad 2, y H e I están a profundidad 3. El orden en que se añada cada elemento de la lista no importa.

Respuesta: Propongo lo siguiente. Sea $\ell = [\ \ ]$ (lista vacía) y sea $\mathcal{T} = tree(t_1, c, t_2)$ un árbol.

1) $\mathcal{R}(\emptyset, \ell, n) = \ell$; Este es el caso base cuando $\mathcal{T}$ es un árbol vacío, entonces no hay nada que procesar y simplemente devolvemos la lista acumuladora tal como estaba (vacía).
2) $\mathcal{R}(tree(\emptyset, c, \emptyset), \ell, n) = \ell ++ [cn]$; Este es el caso base cuando haya hojas, donde c es el valor en la hoja y n el nivel de profundidad, y si el nodo actual no tiene hijos, es una hoja, entonces añadimos a la lista el par cn, es decir, el valor de la hoja y su profundidad.
3) $\mathcal{R}(tree(t_1, c, t_2), \ell, n) = \mathcal{R}(t_2, \mathcal{R}(t_1, \ell, n+1), n+1)$; Este es el caso recursivo, cuando el árbol no es vacío y el nodo actual c tiene al menos un hijo. Primero se procesa el subárbol izquierdo t_1, aumentando la profundidad en 1, y el resultado de esa llamada se pasa a la lista donde se van acumulando. Luego procesa el subárbol derecho t_2, también aumentando la profundidad. En cada llamada recursiva, si se encuentra una hoja (es decir, un nodo sin hijos), se añade a la lista junto con su profundidad actual. De este modo, se va recorriendo todo el árbol desde la raíz hacia las hojas, y a medida que se baja por cada nivel del árbol, se incrementa el valor del contador de profundidad. La lista donde se van acumulando permite mantener los resultados de cada recorrido y nos aseguramos de que ninguna hoja ni su profundidad se pierdan en el proceso. Como el orden de las hojas en la lista final no importa, con esto hacemos que todas las hojas sean procesadas y agregadas correctamente, contando su profundidad desde la raíz con su valor de la hoja. ★

Frase (Martes 01 de abril del 2025)

"A veces lo que parece un final es sólo un nuevo comienzo."