1. Introducción

Para comprender las matemáticas, es fundamental entender qué constituye un argumento matemático válido, es decir, una demostración. Así, para aprender matemáticas, no basta con leer sobre un tema, es necesario construir activamente argumentos matemáticos. Además, comprender la demostración de un teorema permite modificar sus resultados para aplicarlos a nuevas situaciones.

La lógica matemática es la base de las demostraciones, ya que nos proporciona las reglas necesarias para evaluar la validez de los argumentos. No se centra en el contenido específico de un argumento, sino en su estructura formal, asegurando que la conclusión sea coherente con las premisas y que no haya errores en el razonamiento.

En este ensayo, exploraremos la base de la demostración: la lógica. Primero, definiremos qué es una demostración. Luego, analizaremos la diferencia entre lógica proposicional y lógica de predicados, junto con sus propiedades y ejemplos. Finalmente, estudiaremos cuatro métodos de demostración: tablas de verdad, interpretaciones, derivaciones y tableaux.

2. ¿Qué es una demostración?

Las demostraciones son esenciales en matemáticas, y por lo tanto no solo sirven para verificar la validez de resultados matemáticos, sino que también tienen aplicaciones en la computación, como la comprobación de que los programas producen la salida correcta en todos los casos y la validación de algoritmos.

Una demostración es un razonamiento lógico que establece la verdad de un enunciado matemático mediante una secuencia de pasos basados en reglas de la lógica y teoremas previos (Rosen, 2019).

Su propósito es garantizar que cada paso sea válido, proporcionando una justificación rigurosa de por qué un resultado es cierto. En términos generales, una demostración es una estructura lógica que confirma la veracidad de una afirmación.

Parte fundamental de la matemática es su lenguaje, el cual se usa para expresar proposiciones de manera precisa y sin ambigüedad. Una proposición es una afirmación con un único valor de verdad: verdadero (V, true ó 1) o falso (F, false ó 0). Aunque solemos enunciar proposiciones en lenguaje ordinario, esto puede dificultar la evaluación de su validez debido a la ambigüedad de las palabras (Gómez Laveaga, 2019). Aquí es donde la lógica matemática juega un papel clave: proporciona herramientas para formular proposiciones y reglas para deducir conclusiones válidas, permitiéndonos determinar si un razonamiento es correcto.

Un argumento lógico es una secuencia de premisas que conducen a una conclusión. Se considera correcto si la verdad de sus premisas garantiza necesariamente la verdad de la conclusión. Este principio es fundamental en las matemáticas y en la lógica formal, ya que permite construir demostraciones rigurosas.

3. ¿Cuál es la diferencia entre lógica proposicional y lógica de predicados?

3.1 Lógica proposicional

Por un lado, la lógica proposicional se encarga de analizar enunciados que pueden ser verdaderos o falsos, sin considerar su estructura interna. Estos enunciados, llamados proposiciones, se combinan mediante operadores lógicos para formar expresiones más complejas, cuya veracidad puede determinarse mediante reglas formales.

3.1.1 Funcionamiento

Las proposiciones son expresiones o afirmaciones, que tienen uno y sólo un valor de verdad asignado: verdadero (V) o falso (F). Generalmente usamos el lenguaje ordinario para enunciar las proposiciones, esto nos puede dificultar la decisión de si un razonamiento es válido o no, debido a que las palabras pueden tener distintos significados y son presa de interpretación (Gómez Laveaga, 2019) Para ello, las evaluamos mediante conectivos lógicos.

3.1.2 Operadores lógicos:

- Negación ($\neg p$): Invierte el valor de verdad de la proposición. Si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa, y viceversa.

- Conjunción ($p \land q$): Representa "p y q". Es verdadera solo si ambas proposiciones son verdaderas.

- Disyunción ($p \lor q$): Representa "p o q". Es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.

- Implicación ($p \Longrightarrow q$): Expresa "si p, entonces q". Es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa.

- Bicondicional ($p \iff q$): Indica "p si y solo si q". Es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

3.1.2 Propiedades de los operadores

1. Conmutatividad: El orden de los operandos no afecta el resultado. Por ejemplo, $p \land q = q \land p$, pero la implicación $p \to q$ no es conmutativa.

2. Asociatividad: El agrupamiento de los operandos no afecta el resultado. Ejemplo: $(p \land q) \land r = p \land (q \land r)$, pero la implicación no es asociativa.

3. Elemento Identidad: Un elemento que no cambia el resultado al operar con él. Ejemplo: $p \land \text{true} = p$ y $p \lor \text{false} = p$.

4. Elemento Neutro: Un elemento que, al operar con cualquier valor, siempre da como resultado el mismo elemento. Ejemplo: $p \lor \text{true} = \text{true}$ y $p \land \text{false} = \text{false}$.

5. Idempotencia: Operar un valor consigo mismo no cambia el resultado. Ejemplo: $p \land p = p$ y $p \lor p = p$.

3.1.4 Ejemplos

3.1.5 Limitaciones.

Debemos mencionar que en la lógica proposicional, solo trabajamos con proposiciones completas, como "El cielo es azul" o "Está lloviendo", y las combinamos con operadores lógicos. Sin embargo, no podemos decir cosas como "Todos los perros son mamíferos" o "Existe un número que es mayor que 5" porque estas afirmaciones requieren hablar sobre individuos (perros, números) dentro de un conjunto más grande (todos los perros, todos los números). Para expresar este tipo de ideas, necesitamos la lógica de predicados.

La lógica proposicional solo trabaja con proposiciones completas, como "El cielo es azul" o "Está lloviendo", y las combina mediante operadores lógicos.

Sin embargo, no permite expresar afirmaciones sobre individuos o conjuntos, como "Todos los perros son mamíferos" ó "Existe un número mayor que 5".

Estas afirmaciones requieren referirse a objetos específicos (perros, números) dentro de un conjunto más grande (todos los perros, todos los números). Para expresar este tipo de ideas, necesitamos la lógica de predicados, que introduce cuantificadores y variables para hablar sobre elementos dentro de un dominio.

3.2 Lógica de predicados

En lógica proposicional, las proposiciones son unidades indivisibles que expresan enunciados completos, como por ejemplo "Juan estudia" (denotado como p). Estas proposiciones no se descomponen más allá de ser verdaderas o falsas. Sin embargo, en lógica de predicados, podemos descomponer un enunciado en términos más específicos, utilizando predicados. Por ejemplo, podemos expresar la proposición "Juan estudia" como $E(Juan)$, donde $E(x)$ es un predicado que significa "x estudia".

Además, en lógica de predicados podemos expresar relaciones entre objetos. Por ejemplo, si queremos decir "Juan es amigo de Carlos", podemos escribirlo como $A(Juan,Sarah)$, donde $A(x,y)$ es un predicado que indica que "x es amigo de y". De este modo, la lógica de predicados no solo nos permite hablar de propiedades de individuos, sino también de relaciones entre ellos.

Asimismo, podemos hacer afirmaciones generales sobre un conjunto de elementos, como: $\forall x(P(x) \Longrightarrow A(x))$, donde $P(x)$ significa "x es una persona" y $A(x)$ significa "x es alto".

3.2.1 Funcionamiento

La lógica de predicados es una extensión de la lógica proposicional que permite tratar con enunciados más complejos mediante el uso de predicados, cuantificadores y variables. Se utiliza para expresar enunciados sobre objetos en un dominio determinado.

Predicado: Es una función que toma uno o más argumentos y devuelve un valor de verdad. El predicado \(P(x) \) es verdadero o falso dependiendo del valor de \(x \).
Cuantificadores.
Variables: Son símbolos que representan objetos en un dominio. Los cuantificadores se aplican sobre estas variables para crear proposiciones más generales.

3.2.2 Cuantificadores:

Los cuantificadores son símbolos que indican cuántos elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad.

3.2.2.1 Universal ($\forall$).

Quiere decir "para todo" y expresa que una propiedad se cumple para todos los elementos de un dominio.

- Notación: $\forall x P(x)$
- Significado: "Para todo x, se cumple $P(x)$".
- Ejemplo: Si $P(x)$ significa "x es un número par", entonces, $\forall x P(x)$ significa "Todos los números en el dominio son pares".
- Forma negativa: $\neg (\forall xP(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$ que se lee como "Existe al menos un x para el cual $P(x)$ no es cierto".
- Ejemplo: Si la afirmación original era "Todos los gatos son blancos", su negación sería "Existe al menos un gato que no es blanco".

3.2.2. 2 Existencial ($\exists$).

Quiere decir "Existe al menos uno" e indica que existe al menos un elemento en el dominio que cumple con una propiedad dada.

- Notación: $\exists$xP(x)
- Significado: "Existe al menos un x tal que $P(x)$ es verdadero".
- Ejemplo: Si $P(x)$ significa "x es un número impar", entonces $\exists$xP(x) significa "Existe al menos un número impar en el dominio".

- Forma negativa: $\neg (\exists xP(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$ que se lee como "Para todo x, $P(x)$ no se cumple", es decir, "Ningún x cumple P(x)".
- Ejemplo: Si la afirmación original era "Existe al menos un estudiante que aprobó", su negación sería "Ningún estudiante aprobó".

3.2.2. Combinaciones y ejemplos

Podemos combinar cuantificadores para expresar ideas más complejas.

Ejemplo 1:

"No todas las aves en el parque pueden volar".

$A(x)$: ser ave,

$V(x)$: x puede volar,

$En(x, y)$: x esta en y,

$P(x)$: x es parque.

$\exists x\exists y (A(x) \land   En(x, y) \land   P(y) \land   \neg V(x) \land   x \neq y)$

Hay seres en algún parque que no son aves y pueden volar

$\neg(\forall x \forall y ((P(y) \land   \neg A(x) \land   En(x, y) \land   x \neq y) \Longrightarrow \neg V(x)))$

Ejemplo 2:

$P (x): x$ es cuervo.

$F (x):x$ es inteligente.

Juicio universal afirmativo: Todos los cuervos son inteligentes es $\forall x (P (x) \Longrightarrow F (x))$

Juicio existencial afirmativo: Algunos cuervos son inteligentes es $\exists x (P (x) \land   F (x))$

Juicio existencial negativo: Algunos cuervos no son inteligentes es $\forall x (P (x) \land   \neg F (x))$

Juicio universal negativo: Ningun cuervo es inteligente es $ \forall x (P (x) \Longrightarrow \neg F (x)), \neg \exists x (P (x) \land   F (x))$

En resumen, la diferencia clave entre lógica proposicional y lógica de predicados es su capacidad para expresar relaciones y propiedades sobre objetos dentro de un conjunto. La lógica de predicados permite hablar de individuos específicos, propiedades generales y relaciones entre ellos, mientras que la lógica proposicional se limita a expresiones indivisibles que no permiten este tipo de análisis más detallado.

4. Métodos de demostración

4.1 Tablas de verdad

La tabla de verdad nos muestra todas las posibles combinaciones de valores de verdad (verdadero o falso) de las proposiciones que forman una expresión lógica.

Esto nos permite clasificar a las fórmulas en: tautologías (se evalúan a verdadero en todos los estados posibles), contradicciones (se evalúan a falso en todos los posibles estados) o contingencias (no son ni tautologías ni contradicciones).

4.1.1 Funcionamiento

Una tabla de verdad se construye de la siguiente manera:

1. Listar las proposiciones: Comienza con las proposiciones simples de la expresión que estás analizando.
2. Generar todas las combinaciones de valores de verdad: El número de combinaciones crece de la forma 2^n.
3. Evaluar cada valor.

**4.1.2 Ejemplos

imagen

4.1.3 Consideraciones

Analizar la validez de un argumento mediante su tabla de verdad no es recomendable en el caso general, ya que el número de filas crece exponencialmente, 2^n, según la cantidad de variables lógicas involucradas.

4.2 Interpretaciones

El método de interpretaciones evalúa una fórmula lógica asignando valores de verdad a sus variables y verificando si la fórmula es verdadera en todos los casos posibles. Se basa en la función de interpretación I, que asigna 0 o 1 a cada variable y extiende la evaluación a expresiones más complejas.

Para asignar el estado, utilizamos una función que asocia a cada variable proposicional un valor de verdad, y como hay n variables, el número total de posibles asignaciones o estados es 2^n . Es decir, cada conjunto de variables tiene un número finito de combinaciones de verdad y falsedad.

Debemos tomar en cuenta que para hacer la asignación, utilizamos las reglas de evaluación para los operadores lógicos: la negación ($\neg$), la disyunción ($\vee$), la conjunción ($\wedge$), la implicación ($\rightarrow$) y la bicondicional ($\leftrightarrow$). Estas reglas permiten determinar cuándo una fórmula es satisfacible en una interpretación específica, lo que significa que existe al menos una asignación en la que la fórmula es verdadera.

Para demostrar la validez de un argumento, se puede utilizar el concepto de consecuencia lógica. En este contexto, un argumento de la forma:

4.2.1 Funcionamiento:

1. Definimos un conjunto de variables proposicionales.
2. Damos una interpretación I.
3. Aplicamos reglas:

   imagen

4. Una vez asignados los valores a las variables, se sigue evaluando la fórmula siguiendo las reglas lógicas. Si la fórmula es verdadera para todas las posibles interpretaciones, se dice que es una tautología.

Dado esto, existen dos métodos principales para demostrar la validez de un argumento:

4.2.1 Método directo

4.2.2 Método indirecto (refutación o contradicción)

4.2.3 Ejemplo

4.2.4 Consideraciones

Forzar un valor a una fórmula significa que, con base en la interpretación y los valores previos de las variables o fórmulas, su valor es necesariamente 1 (verdadero) o 0 (falso).

Por ejemplo, si sabemos que $I(p \Longrightarrow q)=1$ e $I(q)=0$, entonces $I(p)$ debe ser 0. Esto se debe a que, si fuera 1, la definición de la implicación haría que $I(p \Longrightarrow q)=0$, lo cual contradice la información dada.

Si en el método indirecto no se encuentra una contradicción o en el método directo no se fuerza la conclusión a ser verdadera, el argumento es incorrecto. En este caso, la interpretación dada funcionará como un contraejemplo, ya que las premisas serán verdaderas, pero la conclusión falsa.

Por último si tenemos muchas variables, el número de interpretaciones crece exponencialmente 2^n, lo cual no es muy eficiente, sin embargo es muy intuitivo por las reglas.

4.3 Derivaciones

El método de derivaciones se utiliza para demostrar la validez de un argumento, partiendo de las premisas y aplicando reglas de inferencia para llegar a la conclusión.

4.3.1 Funcionamiento

Premisas: Comienza con un conjunto de premisas que son las afirmaciones dadas, de las cuales se busca llegar a la conclusión.

Aplicamos reglas de equivalencias lógicas se usan para reescribir las proposiciones en formas equivalentes, lo cual es útil para simplificar las expresiones o hacer más clara la deducción.
Son las siguientes:
imagenes

Aplicamos reglas lógicas para derivar nuevas proposiciones. Estas reglas permiten transformar las proposiciones existentes en otras que son lógicas y válidas. Son las siguientes:
imagenes

Conclusión: El objetivo es obtener una proposición que sea la conclusión que se deseaba probar, demostrando que es válida a partir de las premisas dadas.

4.3.2 Ejemplos

4.3.3 Consideraciones

Como podemos ver, cada paso en el proceso de derivación está basado en reglas y leyes lógicas bien definidas, lo que garantiza la validez de la conclusión si las premisas son correctas, por lo que hay que tener cuidado al aplicarlas, en especial porque se pueden combinar diferentes tipos de reglas de inferencia y equivalencias lógicas para manejar argumentos complejos

4.4 Tableux

El método de Tableaux se utiliza para la lógica de predicados y lógica proposicional, para verificar la validez de un argumento o la satisfacibilidad de una proposición.

4.4.1. Funcionamiento

El primer paso consiste en tomar la fórmula para la que se desea construir el tableau y colocarla como la raíz del árbol. A partir de ahí, el proceso sigue una serie de pasos específicos dependiendo del tipo de operador que aparece en la fórmula.

Para ello nos guiamos de las siguientes reglas:

imagenes

Mientras vamos desarrollando, debemos procurar abrir el menor número de ramas posibles y siempre tratar de cerrar lo antes posible una rama. Para ello, primero podemos descomponer las fórmulas que no abran ramas (usar las α-reglas y las σ-reglas antes que las β-reglas), luego, descomponemos las fórmulas que cierren ramas.

Algo importante es que cuando trabajamos con conjunciones, podemos encontrar una contradicción dentro de una rama si tienes una proposición atómica (como p) y su negación (como ¬p) en la misma rama. Si esto ocurre, esa rama se cierra porque una proposición y su negación no pueden ser verdaderas al mismo tiempo.

Para determinar si una fórmula es una tautología, usamos la reducción al absurdo:

1. Negamos la fórmula.
2. Construimos a partir de ella el tableaux.
3. Tenemos dos opciones:
    a. Si todas las ramas se cierran, significa que la negación de la fórmula es contradictoria, lo que implica que la fórmula original es siempre verdadera (es una tautología). Esto es porque la negación de una tautología siempre es una contradicción, y al cerrarse todas las ramas del tableau, demostramos que no hay interpretación posible que haga que la fórmula negada sea verdadera.
    b. Si al menos una rama queda abierta, la negación es satisfacible, lo que significa que la fórmula original no es una tautología.

De otra manera, podemos no negar y procedemos de la siguiente manera:

1. Construimos a partir de la fórmula original el tableaux.
2. Tenemos tres opciones:

a. Si todas las ramas quedan abiertas, significa que la fórmula es insatisfacible, lo cual es incorrecto en la mayoría de los casos cuando queremos verificar tautologías.
b. Si algunas ramas se cierran y otras quedan abiertas, significa que la fórmula es simplemente satisfacible (es verdadera en algunos casos pero no en todos, por lo que no es tautología).
c. Si todas las ramas se cierran, significa que la fórmula es una contradicción (nunca es verdadera).

4.4.2 Ejemplo

4.4.3 Consideraciones

De acuerdo a Miranda y Viso Gurovich (2016), las fórmulas representadas en un tableau deben estar conformadas por conjunciones y disyunciones o constantes. Estas últimas son fórmulas atómicas, como los valores de verdad (true, false) o las proposiciones básicas (p, q, r), y sus negaciones. Es importante destacar que, aunque en un inicio algunas fórmulas pueden contener operadores más complejos como la implicación o la bicondicional, no es necesario preocuparse, ya que las podemos simplificar en disyunciones y conjunciones. Además, la negación de una fórmula disyuntiva o conjuntiva se puede eliminar utilizando las leyes de De Morgan, lo que permite transformar las expresiones y trabajar con una forma más sencilla.

Algo importante, es que debemos mantener la asociatividad de los operadores. Esto significa que se debe respetar la precedencia original de los operadores, asegurando que todos los paréntesis que indican esta precedencia sean explícitos en las fórmulas.

Como podemos ver, es un método visual, lo que facilita seguir el razonamiento, y podemos saber si es insatisfacible de una manera estructurada.

5. Favorito del autor

Personalmente, a pesar de que en un inicio no lo comprendía, prefiero el método de tableaux porque es una representación visual que estructura el problema. Al construir el árbol, el razonamiento se sigue paso a paso, lo que facilita entender cómo se llega a la conclusión. Es como seguir un camino directo, ya que las ramas permiten visualizar rápidamente si no se tratará de una tautología, porque faltan variables para cerrar las ramas, o bien, dejarse abiertas según el caso. Considero este método más visual y organizado.

6. Conclusión

La lógica matemática no solo es la base de muchas ramas teóricas de la computación, sino que también tiene aplicaciones prácticas fundamentales que permiten el desarrollo de sistemas seguros y eficientes en diversas áreas de la ciencia de la computación, desde la programación hasta la inteligencia artificial.

7. Bibliografía

Gómez Laveaga, C. (2019). Álgebra Superior: Curso completo (1.a ed.). Facultad de Ciencias.

Miranda, F. E., & Viso Gurovich, E. (2016). Matemáticas Discretas (2.a ed.). Las Prensas de Ciencias.

Rosen, K. H. (2019). Discrete Mathematics and its applications (8.a ed.). McGraw-Hill.

Frase (Martes 11 de marzo del 2025): Your life isn’t yours if you always care what others think.