

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



## PARTICIPACIÓN 05

### Subdivisiones

PRESENTA

Valeria Camacho Hernández - 322007273

ASIGNATURA

Gráficas y Juegos 2025-2

PROFESOR

César Hernández Cruz

AYUDANTE

Iñaki Cornejo de la Mora

FECHA

Viernes 14 de marzo del 2025

## Participación 05

1. Demuestre que si una gráfica  $G$  distinta de  $K_2$  no tiene vértices de corte, entonces la gráfica  $G'$  obtenida al subdividir una arista en  $G$  tampoco tiene vértices de corte.

Respuesta: Sea una gráfica  $G$ , la cual no es  $K_2$ , es decir, no es solo dos vértices conectados por una arista, y que además no tiene vértices de corte. Entonces, eliminar cualquier vértice de  $G$ , no desconecta la gráfica.

Por demostrar: Al subdividir cualquier arista en  $G$ , la nueva gráfica  $G'$  tampoco tendrá vértices de corte.

Sea una arista  $uv$  en  $G$ , la cual subdividimos. Entonces agregamos un nuevo vértice  $w$  en medio de  $uv$  y reemplazamos  $uv$  por dos nuevas aristas  $uw$  y  $wu$ . Con esto obtenemos la subgráfica  $G'$ .

El nuevo vértice  $w$  nos da 2 casos:

1) Si eliminamos  $w$ , las aristas  $uw$  y  $wu$  desaparecen, entonces la gráfica  $G'$  termina siendo simplemente  $G$ . Luego, como  $G$  es conexa por hipótesis, entonces sigue existiendo un camino entre  $u$  y  $v$  en  $G$ . Por lo tanto,  $w$  no es un vértice de corte, pues  $G'$  sin  $w$  sigue siendo conexa.

2) Sea  $x$  un vértice propio de  $G$ , distinto a  $w$ . Si eliminamos  $x$  de  $G$ , la gráfica sigue siendo conexa, pues sabemos que  $G$  no tiene vértices de corte, por lo que  $G$  no se desconecta. Luego, si eliminamos  $x$  en  $G'$ , tampoco se desconecta la gráfica porque la única diferencia con  $G$  es la subdivisión de una arista, lo cual no cambia la conectividad de la gráfica. Sin embargo, como  $G$  es conexa sin  $x$ , entonces  $G'$  también lo será. Por lo tanto, cualquier vértice original  $x$  distinto a  $w$  tampoco es un vértice de corte.

En ambos casos, el nuevo vértice  $w$  ni los vértices originales de  $G$  generan desconexiones. Entonces la eliminación de cualquier vértice en  $G'$  no desconecta la gráfica. Por lo tanto,  $G'$  sigue siendo conexa tras eliminar cualquier vértice.

$\therefore$  Como ni el nuevo vértice  $w$  ni los vértices originales son de corte,  $G'$  tampoco tiene vértices de corte. ★