Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 03

Presentan

- Nelson Osmar Garcia Villa - 322190357
- Valeria Camacho Hernández - 322007273
- Mauricio Casillas Álvarez - 322196342

Asignatura

Gráficas y Juegos 2025-2

Profesor

César Hernández Cruz

Ayudante

Iñaki Cornejo de la Mora

Fecha

Viernes 28 de Febrero del 2025

Tarea 03

1. Sea G una gráfica, y recuerde que c_G denota al número de componentes conexas de G. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c_G \leq c_{G-e} \leq c_G + 1$.

   Respuesta:

   Demostración de $c_G \leq c_{G-e}$

   - Por definición, al eliminar una arista e, no podemos reducir el número de componentes conexas, ya que solo estamos eliminando una conexión, no añadiendo ninguna.
   - Demostración:
     - Si e es una arista que conecta dos vértices en la misma componente conexa, al eliminarla, esos dos vértices siguen estando en la misma componente conexa (a menos que e sea un puente).
     - Si e es un puente, al eliminarla, la componente conexa se divide en dos, aumentando el número de componentes conexas en 1.
     - En ningún caso el número de componentes conexas disminuye.
   - Por lo tanto, $c_G \leq c_{G-e}$.

   Demostración de $c_{G-e} \leq c_G + 1$:

   - Por definición, al eliminar una arista e, el número de componentes conexas no puede aumentar en más de 1, ya que solo estamos eliminando una conexión entre dos vértices.
   - Demostración:
     - Si e no es un puente, entonces su eliminación no afecta el número de componentes conexas, es decir, $c_{G-e} = c_G$.
     - Si e es un puente, entonces su eliminación divide una componente conexa en dos, aumentando el número de componentes conexas en 1, es decir, $c_{G-e} = c_G + 1$.
     - En ningún caso el número de componentes conexas aumenta en más de 1.
   - Por lo tanto, $c_{G-e} \leq c_G + 1$.

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K. Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. (Sugerencia: Un ejercicio de la tarea anterior puede resultar de utilidad.)

   Respuesta:

   $\Rightarrow$) Si G es escindible completa, entonces no contiene C_4 ni $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

   Supongamos que G es escindible completa con partición (S, K), donde S es un conjunto independiente y K es un clan. Entonces:

- Como S es un subconjunto independiente, no hay aristas entre vértices en S. Por lo tanto, cualquier subconjunto de tres vértices en S sería un $\overline{P_3}$. Sin embargo, como cada vértice en S está contectado a todos los vértices de K, no se puede tener tres vértices no adyacentres en G. Esto se debe a que cualquier vértice de S está conectado a todos los vértices de K, lo que impide que existan tres vértices en G que sean mutuamente no adyacentes. Además, cualquier intento de incluir vértices de K en un $\overline{P_3}$ tampoco es posible, pues los vértices de K están completamente conectados entre sí, por lo que no puede haber tres vértices en K que sean mutuamente no adyacentes. Así, tampoco se puede que incluyan vértices de S y K.

  $\therefore$ No puede contener un $\overline{P_3}$.

- Cada par de vértices en K está conectado por una arista, sin embargo, como los vértices en S son independientes, no puede haber un ciclo de longitud 4 que tenga solo a los vértices en S porque no tienen aristas entre ellos y necesitaríamos al menos dos vértices conectados entre sí en S. Así, para formar un C_4, necesitarías 4 vértices con conexiones específicas que no son posibles en esta estructura, ya que no hay ciclos que involucren vértices de S y K.

  $\therefore$ No puede contener un C_4.

$\therefore$ Como G es escindible completa, no puede contener a $\overline{P_3}$ ni C_4 como subgráficas inducidas.

$\Leftarrow$) Si G no contiene C_4 ni $\overline{P_3}$, entonces es escindible completa.

Supongamos que G no contiene C_4 ni $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Sean las particiones (S, K), entonces:

- Como G no contiene $\overline{P_3}$, no tiene tres vértices que formen un camino. Esto implica que G es una unión de clanes (gráficas completas) y conjuntos independientes, ya que no pude haber caminos de longitud 3 entre tres vértices dentro de un mismo conjunto.
- Como G no contiene C_4, no tiene ciclos de longitud 4, se puede construir una partición de G en dos subconjuntos S (el conjunto de todos los vértices que no están conectados entre sí (es decir, S es un conjunto independiente) y K (el conjunto de todos los vértices que están completamente conectados entre sí), en los que los vértices de S están conectados a todos los vértices de K, pero no hay conexiones dentro de S ni dentro de K.

$\therefore$ Como G no contiene C_4 ni $\overline{P_3}$, cada vértice en S debe estar conectado a todos los vértices en K. De lo contrario, se formarían subgráficas prohibidas.

Por lo tanto, una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene C_4 ni $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. Esto se debe a la estructura particular de la partición (S, K), donde S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S está conectado a todos los vértices en K. ★

3. (a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

Respuesta:

Supongamos que G es conexa, lo que quiere decir que para cualquier partición de su conjunto de vértices en dos conjuntos X y Y, existe al menos una arista de un extremo en X y otra en Y (hay una forma de alcanzarse cualesquiera dos vértices).

Si vemos a $|V|$ como un número n, el termino $|E| > \binom{|V|-1}{2}$ representa el número de aristas en una gráfica completa, es decir:

$\binom{|V|-1}{2} \Rightarrow \binom{n-1}{2} = \frac{n-1(n-1-1)}{2} = \frac{n-1(n-2)}{2}$

La condición $|E| > \binom{|V|-1}{2}$ habla sobre el número de aristas en G, la cual debe ser mayor al número de aristas de una gráfica completa con $|V|-1$ vértices, entonces existe una arista de más, de las aristas que se necesitan para completar la gráfica.

Si G al momento de agregar todos los vértices y aristas y acabar la gráfica completa con $|V|-1$ vértices, hay un vértice sobrante, pero no podría tener más aristas que la gráfica completa, sin embargo la hipótesis dice que $|E|$ tiene que ser mayor que $\binom{|V|-1}{2}$, implica que hay al menos una arista que conecta el vértice restante con la gráfica completa.

Entonces en G existe una gráfica completa, y hacemos que el vértice aislado sea adyacente a cualquier vértice de una gráfica completa, es conexa por definición.

$\therefore G$ es conexa $\blacksquare$

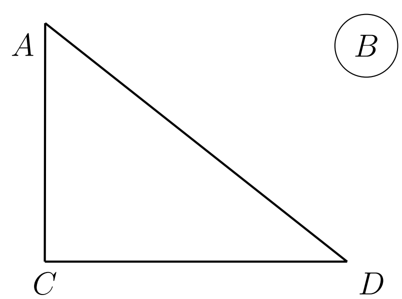
(b) Para cada $n > 3$ encuentre una gráfica inconexa de orden n con $|E| = \binom{n-1}{2}$.

Respuesta:

Una gráfica inconexa es aquella en la que no existe al menos un camino que conecte dos vértices en la gráfica.

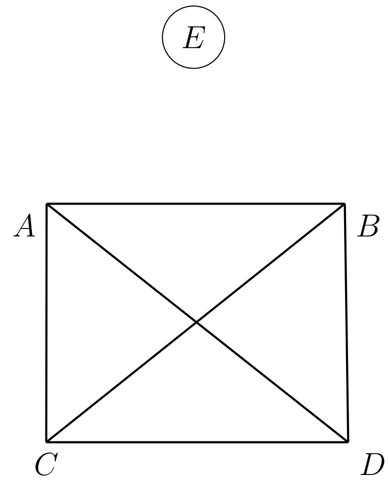
Para $n = 4$; $|E| = \binom{4-1}{2}$

$|E| = \binom{3}{2} = \frac{3(2)}{2} = 3$

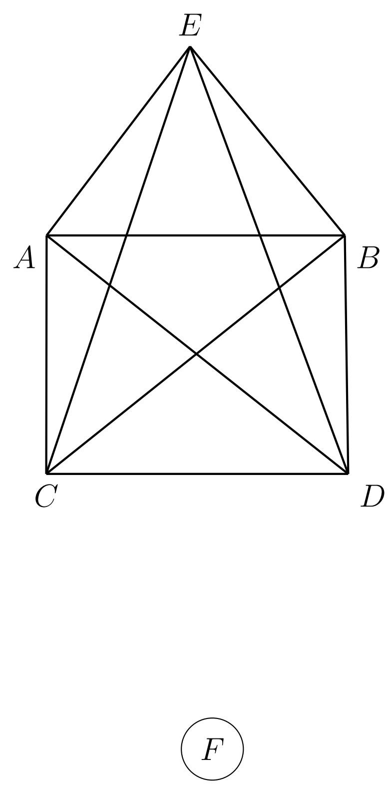


Para $n = 5$; $|E| = \binom{5-1}{2}$

$|E| = \binom{4}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$



Para $n = 6$; $|E| = \binom{6-1}{2}$
$|E| = \binom{5}{2} = \frac{5(4)}{2} = 10$



Todas estas gráficas cumplen con la definición de una gráfica de orden n, es decir de n vértices y aparte de eso es inconexa, implica la falta de acceder a partir de un vértice cualquiera de la gráfica completa al vértice con el circulo.

Como se puede ver el patrón es aquel en el que para n en el conjunto de los vértices le restamos uno y hacemos la gráfica completa de dicho orden, al final agregamos el vértice faltante.

4. (a) Demuestre que si $\delta > \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1$, entonces G es conexa.

Respuesta:

Sea P una trayectoria $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$. de longitud máxima en G, es decir un camino que no se puede extender y que no repite vértices.

Cada vértice de la gráfica G, es decir $d(v_k)$, tiene un grado mínimo de δ, entonces cada v_k en P tiene al menos δ vecinos.

Supongamos que existe un vertice u que no pertenece a la trayectoria P, el grado de u tiene por lo menos δ, al igual que en vecinos. Si $\delta > \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1$, este vértice u debe de estar conectado con algún vértice de P, de este modo u tiene adyacencia con la trayectoria P.

Entones todos los vértices de la gráfica con una partición X y Y existe al menos una arista de un subconjunto de vértices a otro.

$\therefore G$ es conexo

(b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica $\left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1\right)$-regular e inconexa.

Respuesta:

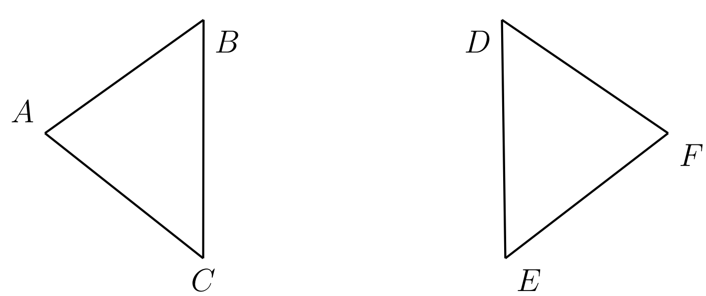
Una k-regular es aquella en la que para cada vértice $v \in V$ tienen exactamente k aristas conectadas a otros vértices en V.

Para $|V| = 4$; $\left(\left\lfloor \frac{|4|}{2} \right\rfloor - 1\right)$

$(\lfloor 2 \rfloor - 1) = 1$, es decir 1-regular

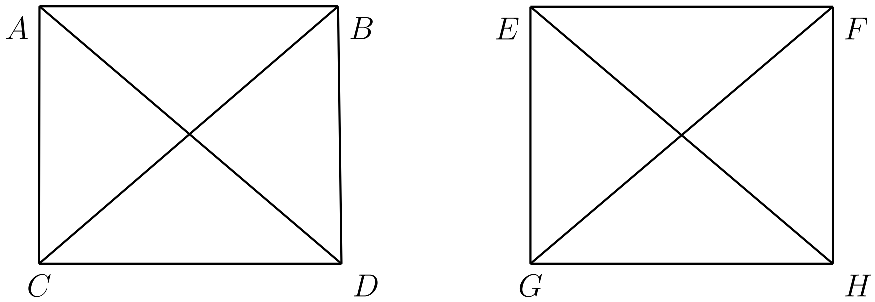
Para $|V| = 6$; $\left(\left\lfloor \frac{|6|}{2} \right\rfloor - 1\right)$

$(\lfloor 3 \rfloor - 1) = 2$, es decir 2-regular



Para $|V| = 8$; $\left(\left\lfloor \frac{|8|}{2} \right\rfloor - 1\right)$

$(\lfloor 4 \rfloor - 1) = 3$, es decir 3-regular



Todas estas gráficas cumplen con la definición de una gráfica k-regular y que su $|V|$ sea par, es decir una gráfica que su conjunto de vértices sea par y que cada vértice tiene k aristas o grados adyacentes entre ellos. Como se puede ver el patrón, es aquel en el que para el $|V|$ sea par, dividimos entre 2 dicho conjunto, y hacemos las gráficas completas de orden n, sin agregar ninguna arista entre ellas.

5. Demuestre que si D no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

   Respuesta: Sea D una gráfica dirigida sin lazos y que $\delta^+ \geq 1$, es decir, todo vértice en D tiene al menos un arco saliente.

   Por demostrar: D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

   Consideremos un camino dirigido $P = (v_1, v_2, ..., v_k$ en D. Esto significa que no podemos extenderlo más agregándole vértices. Luego, como D es un digrafo con $\delta^+ \geq 1$, todo vértice en ella tiene al menos un arco saliente, en particular v_k tiene al menos un arco saliente.

   Como P es maximal, todos los arcos salientes de v_k deben apuntar a vértices que ya están en P. Si v_k tuviera un arco saliente a un vértice que este fuera de P, podríamos extender a P, lo cual contradice su maximalidad.

   Por lo tanto,v_k tiene al menos un arco saliente que apunta a algún vértice en P, donde $1 \leq i \leq k$. Este arco es (v_k, v_i) en D.

   Entonces, como P es un camino dirigido y v_k tiene el arco saliente mencionado que apunta a un vértice v_i en P, este arco conecta el último vértice v_k con un vértice anterior v_i, lo cual crea un ciclo dirigido $C = (v_i, v_{i+1}, ..., v_k, v_i)$, donde v_i es el vérice final e inicial del ciclo, $v_{i+1}, ..., v_k$ son los vértices intermedios del cilo, y (v_l, v_i) es el arco que cierra el ciclo. Entonces, la longitud del ciclo C es $k - i + 1$, pues incluye los vértices $v_i, v_{i+1}, ..., v_k$ y el arco (v_k, v_i).

   $\therefore C$ es un ciclo dirigido de longitud de al menos $\delta^+ + 1$.

   Por lo tanto, D contiene un ciclo dirigido de longitud de al menos $\delta^+ + 1$. ★

Puntos Extra

1. Demuestre que el número de v_iv_j-caminos de longitud k en G es $(A^k)_{ij}$ donde A es la matriz de adyacencia de G.

Respuesta:

Caso base: Sea $k = 1$, entonces tenemos la matriz $A^k = A^1 = A$, donde $(A)_{ij} = 1$ (por definición de matriz de adyacencia) si hay una arista directa (un camino de longitud 1), desde el vértice i hasta el vértice j, y en caso contrario es $(A)_{ij} = 0$. Esto coindicide exactamente con la definición de caminos de longitud 1, por lo tanto se cumple para el caso base.

Paso Inductivo: Supongamos que para $k = m$, $(A^m)_{ij}$ de la matriz (A^m) cuenta el número de caminos de longitud m desde el vértice i hasta el vértice j.

Por demostrar: $(A^{m+1})_{ij}$ de la matriz (A^{m+1}) cuenta el número de caminos de longitud $m+1$ desde el vértice i hasta el vértice j.

Entonces, por caso base, tenemos que

$$A^{m+1} = A^m \cdot A$$

de donde obtenemos la suma siguiente,

$$(A^{m+1})_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A^m)_{il} \cdot A_{lj}$$

la cual recorre todos los vértices l y para cada uno, $(A^m)_{il} \cdot (A)_{lj}$ cuenta el número de caminos de longitud $m+1$ desde el vértice i hasta el vértice j que pasan por l.

Esto sucede porque, $(A^m)_{il}$ cuenta el número de caminos de longitud m desde el vértice i hasta el vértice l, por hipótesis de inducción. Luego, por definición de matriz de adyacencia, $(A)_{lj} = 1$ si hay una arista directa (un camino de longitud 1), desde el vértice l hasta el vértice j, y $(A)_{lj} = 0$ en caso contrario. Entonces, tenemos el producto $(A^m)_{il} \cdot (A)_{lj}$, el cual nos da dos casos:

- Si $(A)_{lj} = 1$, entonces $(A^m)_{il} \cdot (A)_{lj} = (A^m)_{il}$. Es decir, hay $(A^m)_{il}$ caminos de longitiud m desde i hasta l, y desde l podemos llegar a j en un "paso" más. Por lo tanto, con este producto contamos el número de caminos de longitd $m+1$ desde i hasta j que pasan por l.
- Si $(A)_{lj} = 0$, entonces $(A^m)_{il} \cdot (A)_{lj} = 0$. Es decir, no hay una arista directa l hasta j, por lo que no hay caminos de longitud $m+1$ desde i hasta j que pasan por l.

$\therefore$ $(A^{m+1})_{il}$ cuenta el número de caminos de longitud $m+1$ desde i a j, pues estamos considerando: que haya un camino de longitud m desde i hasta l ó que haya una arista directa longitud 1) desde l hasta j.

Por lo tanto, $(A^k)_{ij}$ de la matriz (A^k) cuenta el número de caminos de longitud k, desde el vértice i hasta el vértice j. ★

2. Sea G una gráfica bipartita de grado máximo k. Demuestre que existe una gráfica bipartita k-regular, H, que contiene a G como subgráfica inducida.

   Respuesta:

   Sea G una gráfica bipartita con grado máximo k. Esto quiere decir que G es una gráfica donde sus vértices están divididos en dos conjuntos disjuntos X y Y de manera que todas las aristas van de X a Y y no a su mismo conjunto. Además, como G tiene grado máximo k, sus vértices pueden tener grado menor o igual a k.

   Queremos construir una gráfica H que sea bipartita, k-regular (todos sus vértices tienen exactamente k aristas) y que contenga a G como subgráfica inducida. Procedemos de la manera siguiente.

   Por hipótesis, sabemos que G tiene grado máximo k, por lo que tenemos los siguientes dos casos:

   Caso 1: Si G ya es k-regular, entonces, todos sus vértices tienen k aristas, por lo que $H = G$. En este caso, H ya es bipartita, k-regular y G es una subgráfica inducida de H.

   Caso 2: Si G no es k-regular, entonces algunos vértices de G tienen grado menor a k. En este caso, agregamos nuevos vértices y aristas de la siguiente manera:

   - Si hay un vértice v en X con grado menor a k, entonces agregamos n necesarios vértices nuevos v_i en Y, de manera que este nuevo vértice cumpla con la cantidad de aristas que le faltan a un vértice para alcanzar el grado k y que además, X conecta con Y.
   - Si hay un vértice v en Y con grado menor a k, entonces agregamos n necesarios vértices nuevos v_i en X para completar el grado, y además, lo conectamos a v.

   En ambos casos, los nuevos vértices en H tienen grado k, conectándolos a otros vértices en H según sea necesario para completar el grado, y que además, sus vértices están divididos en dos conjuntos disjuntos X y Y pues las aristas van de X a Y y no a su mismo conjunto. Por lo tanto es bipartita.

   $\therefore$ H es bipartita (por construcción) y k-regular.

   Ahora, notemos que los vértices de G son un subconjunto de los vértices de H y que las aristas de G son exactamente las aristas de H que conectan los vértices en G, es decir, si dos vértices están conectados en G, también lo están en H, y si dos vértices no están conectados en G, tampoco lo están en H.

   $\therefore$ G es una subgráfica inducida de H.

   Por lo tanto, hemos encontrado que existe una gráfica H bipartita k-regular que contiene a G como subgráfica inducida. ★