Participación: Isomorfismos

Valeria Camacho Hernández
Gráficas y Juegos 2025-2
Prof. César Hernández Cruz
Ayud. Iñaki Cornejo de la Mora
Enero 29, 2025

1 Demostrar que:

1.1 G es isomorfa a G

Sea G un grafo cualquiera.
Por demostrar: $G \cong G$, es decir, que el isomorfismo de grafos es reflexivo.
Definimos la función $f : V \to V$ como $f(v) = v$ para todo $v \in V$. Esta es la función identidad, la cual no cambia la estructura de G.
P.d 1: La función f es biyectiva. Tenemos que f es inyectiva si $f(u) = f(v)$, entonces $u = v$, lo cual es cierto por definición de f. Además, tenemos que f es sobreyectiva, pues para todo $v \in V$, existe $u \in V$ y $u = v$ tal que $f(u) = v$. Por lo tanto, f es biyectiva.
P.d. 2: La función f conserva la adyacencia. Sean $u, v \in V$. Queremos demostrar que $uv \in E(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in E(G)$. Como $f(u) = u$ y $f(v) = v$, esto se reduce a $uv \in E(G)$ si y solo si $uv \in E(G)$, lo cual es cierto por definición. Por lo tanto, f conserva la adyacencia.
Como f es biyectiva y conserva la adyacencia, G es isomorfa a sí misma.

1.2 Si G es isomorfa a H entonces H es isomorfa a G

Sea G y H dos gráficas y sean $V(G)$ y $V(H)$ sus conjuntos de vértices.
Por demostrar: Si $G \cong H$, entonces $H \cong G$.
Supongamos que $G \cong H$. Esto quiere decir que existe una función biyectiva $f : V(G) \to V(H)$ donde $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$. Además, supongamos que existe una función inversa $g : V(H) \to V(G)$ donde $g(f(v)) = v$ y $f(g(w)) = w$.
P.d. 1: La función g conserva la adyacencia. Si $xy \in E(H)$, entonces

$f(g(x))f(g(y)) \in E(H)$. Luego, si $g(x)g(y) \in E(G)$, entonces $f(g(x))f(g(y)) \in E(H)$. Como f es una biyección que preserva la adyacencia, sucede que $g(x)g(y) \in E(G)$.
P.d. 2: La función g es biyectiva. Tenemos que g es inyectiva si $g(x) = g(y)$, entonces $f(g(x)) = f(g(y))$, por definición de la función. Además, tenemos que g es sobreyectiva para todo $v \in V(G)$, existe $w \in V(H)$ donde $g(w) = v$, y por lo tanto g es sobreyectiva.
Como se cumple, g es biyectiva, por lo que $H \cong G$.

1.3 Si G es isomorfa a H y H es isomorfa a I entonces G es isomorfa a I

Sea G, H e I tres gráficas, y sean $V(G), V(H)$ y $V(I)$ sus vértices.
Por demostrar: Si $G \cong H$ y $H \cong I$, entonces $G \cong I$
Supongamos que $G \cong H$ y $H \cong I$. Esto quiere decir que existen dos funciones biyectivas: $f : V(G) \to V(H)$ y $g : V(H) \to V(I)$ donde $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$ y $wx \in E(H) \iff g(w)g(x) \in E(I)$. Además, está $h : V(G) \to V(I)$, que al componerla es $h = g \circ f$, o sea $h(v) = g(f(v))$. Si $uv \in E(G)$, entonces $f(u)f(v) \in E(H)$, y como g conserva la adyacencia, sucede que $g(f(u))g(f(v)) \in E(I)$, o sea $h(u)h(v) \in E(I)$. Luego, si sucede lo anterior, entonces $g(f(u))g(f(v)) \in E(I)$, y por lo tanto $uv \in E(G)$. Así, h conserva la adyacencia.
Como h es biyectiva y conserva la adyacencia, $G \cong I$.