

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



PARTICIPACIÓN 02

Ciclo en gráficas

PRESENTA

Valeria Camacho Hernández - 322007273

ASIGNATURA

Gráficas y Juegos 2025-2

PROFESOR

César Hernández Cruz

AYUDANTE

Iñaki Cornejo de la Mora

FECHA

Viernes 14 de Febrero del 2025

Participación 02

1. Sea D una gráfica cualquiera, demuestre que si D no tiene vértices con ingrado cero, entonces D contiene un ciclo dirigido

Respuesta: Sea D una digráfica sin vértices de ingrado cero, es decir, en D todo vértice tiene al menos un vértice entrante.

P.d.: D es un ciclo dirigido, es decir, hay una secuencia de vértices (v_0, v_1, \dots, v_k) de manera que $v_0 = v_k$ (osea el primero es igual al último) y para cada índice i de vértices, tenemos que v_0, v_{i+1} es un arco en D (osea una conexión dirigida de un vértice a otro).

Supongamos que existe un camino dirigido máximo $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ en D , es decir, es un camino que no puede extenderse más añadiéndole vértices (es el camino más largo), ya sea al principio o al final, sin que repita vértices.

Como D no tiene vértices con ingrado cero, según la hipótesis, entonces el vértice inicial v_0 tiene al menos un arco entrante (v, v_0) , es decir, existe un vértice v tal que $e \in E(D)$ es (v, v_0) .

Ahora, como P es un camino máximo, el vértice v que tiene un arco hacia v_0 ya debe estar en P , pues de lo contrario, a P lo podríamos extender añadiéndole v al principio, lo cual contradice que P es un camino máximo.

Supongamos que $v = v_i$ con $v_i \in V(P)$. Entonces como v_i también tiene un arco entrante desde otro vértice de P , podemos continuar recorriendo el camino desde v_0 hasta v_i . Así, el camino $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_0, v_1, \dots, v_i) = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$, para algún índice $j > i$, forma un ciclo dirigido en D pues todos los arcos existen en D y el ciclo comienza y termina en el mismo vértice.

Por lo tanto, si todo vértice en D tiene al menos un arco entrante, entonces necesariamente debe haber un ciclo dirigido.

$\therefore D$ contiene un ciclo dirigido. ★