

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



## PARTICIPACIÓN 02

Ciclo en gráficas

PRESENTA

Valeria Camacho Hernández - 322007273

ASIGNATURA

Gráficas y Juegos 2025-2

PROFESOR

César Hernández Cruz

AYUDANTE

Iñaki Cornejo de la Mora

FECHA

Viernes 14 de Febrero del 2025

# Participación 02

1. Sea  $D$  una gráfica cualquiera, demuestre que si  $D$  no tiene vértices con ingrado cero, entonces  $D$  contiene un ciclo dirigido

Respuesta: Sea  $D$  una digráfica sin vértices de ingrado cero, es decir, en  $D$  todo vértice tiene al menos un vértice entrante.

P.d.:  $D$  es un ciclo dirigido, es decir, hay una secuencia de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  de manera que  $v_0 = v_k$  (osea el primero es igual al último) y para cada índice  $i$  de vértices, tenemos que  $v_0, v_{i+1}$  es un arco en  $D$  (osea una conexión dirigida de un vértice a otro).

Supongamos que existe un camino dirigido máximo  $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  en  $D$ , es decir, es un camino que no puede extenderse más añadiéndole vértices (es el camino más largo), ya sea al principio o al final, sin que repita vértices.

Como  $D$  no tiene vértices con ingrado cero, según la hipótesis, entonces el vértice inicial  $v_0$  tiene al menos un arco entrante  $(v, v_0)$ , es decir, existe un vértice  $v$  tal que  $e \in E(D)$  es  $(v, v_0)$ .

Ahora, como  $P$  es un camino máximo, el vértice  $v$  que tiene un arco hacia  $v_0$  ya debe estar en  $P$ , pues de lo contrario, a  $P$  lo podríamos extender añadiéndole  $v$  al principio, lo cual contradice que  $P$  es un camino máximo.

Supongamos que  $v = v_i$  con  $v_i \in V(P)$ . Entonces como  $v_i$  también tiene un arco entrante desde otro vértice de  $P$ , podemos continuar recorriendo el camino desde  $v_0$  hasta  $v_i$ . Así, el camino  $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_0, v_1, \dots, v_i) = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ , para algún índice  $j > i$ , forma un ciclo dirigido en  $D$  pues todos los arcos existen en  $D$  y el ciclo comienza y termina en el mismo vértice.

Por lo tanto, si todo vértice en  $D$  tiene al menos un arco entrante, entonces necesariamente debe haber un ciclo dirigido.

$\therefore D$  contiene un ciclo dirigido.  $\star$