Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 02

Presentan

- Nelson Osmar Garcia Villa - 322190357
- Valeria Camacho Hernández - 322007273
- Mauricio Casillas Álvarez - 322196342

Asignatura

Gráficas y Juegos 2025-2

Profesor

César Hernández Cruz

Ayudante

Iñaki Cornejo de la Mora

Fecha

Viernes 21 de Febrero del 2025

Tarea 02

1. Sea D una digráfica de orden n. Demuestre que si D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe un orden total, $v_1, \ldots, v_n$ de V_D, tal que siempre que (v_i, v_j) sea una flecha de D, se tiene que $i < j$.

   Respuesta: Supongamos que toda digráfica D sin ciclos dirigidos con k vértices (donde $k \geq 1$) tiene un ordenamiento topológico. Es decir, existe un orden total (v_1, v_2, v_k) en los vértices de D de manera que, si (v_i, v_j) es un arco en D, entonces $i < j$.

   Casos base:

   - Caso 1: Sea $n = 1$, D tiene un sólo vértice, entonces el orden se cumple inmediato.
   - Caso 2: Sea $n = 2$, entonces tenemos dos subcasos:
     - Si no hay arcos, entonces el orden (o cualquier otro) se cumple inmediato.
     - Si hay un arco (v_1, v_2), entonces el orden es v_1, v_2, el cual cumple $i < j$ pues v_1 debe aparecer antes de v_2.

   Paso Inductivo: Supongamos que es válido para $n = k$.

   Por demostrar: Toda digráfica sin ciclos dirigidos con $k + 1$ vértices tiene un ordenamiento topológico.

   Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos con $k + 1$ vértices.

   Paso inductivo:

   Como D es una digráfica sin ciclos dirigidos (por hipótesis), entonces debe existir al menos un vértice v con ingrado cero, es decir, no tiene arcos entrantes. De lo contrario, si todos los vértices tuvieran al menos un arco entrante, podríamos construir un ciclo dirigido siguiendo los arcos entrantes, lo que contradice la hipótesis.

   Eliminamos el vértice v y todos los arcos salientes de D, con lo que obtenemos una subgráfica inducida D', la cual contiene a todos los vértices de D excepto a v y todos los arcos de D que no están relacionado con v. Observemos que D' sigue siendo una Como D es una digráfica sin ciclos dirigidos, pues eliminar vértices no hace que haya ciclos.

   Como D' tiene k vértices y sigue siendo una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces al aplicar la hipóteis inductiva, obtenemos un orden topológico $v_1, v_2, ..., v_k$, y así cualquier arco (v_i, v_j) en D' cumple que $i < j$.

   Ahora, para D, su orden topológico es el vértice v seguido del orden de D', es decir, su posición es al inicio. Este orden se debe a que si (v_i, v_j) es un arco en D', entonces por hipóteis, $i < j$ se cumple para el orden $(v_1, v_2, ..., v_k)$, y como v está al inicio, tanto i como j incrementan en 1, lo cual no modifica la condición $i < j$. Luego, como v tiene ingrado cero, no hay arcos (v_i, v_j), pues los únicos que tienen a v son los arcos salientes (v, v_i), es por eso so que v está antes de cualquier vértice, así estos cumplen la condición $i < j$. Por último, si (v_i, v_j) es un arco en D pero no en D', tenemos el caso (v, v_j), el cual ya se justificó.

De esta manera, el orden topológico para D es $(v, v_1, v_2, ..., v_k)$.

$\therefore$ Como D' y tienen un orden topológico, entonces se cumple la condición para digráficas sin ciclos dirigidos con $k+1$ vértices.

Por lo tanto, toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene un ordenamiento topológico, quedo demostrado. ★

2. Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3, entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3.

   Respuesta: Supongamos que G tiene diámetro mayor que 3. Es decir, la distancia más grande entre cualquier par de vértices en G es mayor a 3. Esto es que existe al menos un par de vértices u y v en G con distancia 4 o más.

   Por demostrar: $\overline{G}$ la distancia más grande entre cualquier par de vértices es menor a 3.

   Por hipótesis, el diámetro de G es mayor a 3, esto implica que hay al menos un par de vértices que tienen distancia 4 o más.

   Entonces, para $\overline{G}$, la distancia se reduce y se conectan los vértices que en G no lo están (por def. de complemento)

   Así, tenemos dos casos:

   - Si dos vértices u y v son adyancentes en $\overline{G}$, es porque no son adyacentes en G, y por lo tanto la distancia entre ellos es es 1, pues están conectados directamente.
   - Si dos vértices u y v no son adyancentes $\overline{G}$, es porque son adyacentes en G, entonces existe un vértice w que es adyacente a ambos, osea u y v están conectados por w, es decir, u y w son adyacentes y w y v son adyacentes. Por lo tanto, la distancia es de 2.

   En ambos casos, podemos afirmar que el diámetro de $\overline{G}$ es menor a 3.

   Notemos que la operación complemento, siguiendo su definición, lo que hace es invertir las conexiones que hay en G, pues si esta está poco conectado y por ello tiene un diámetro grande, entonces $\overline{G}$ tiene lo inverso: está muy conectado y por ello tiene un diámetro pequeño, las conexiones son más directas.

   $\therefore$ $\overline{G}$ tiene diámetro 1 o 2.

   Por lo tanto, como G tiene diámetro mayor que 3, entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3, queda demostrado. ★

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

   Respuesta: Por definición, sabemos que G es una gráfica conexa, pero no es completa. Esto implica que existen al menos dos vértices u y v que no son adyacentes. Por lo tanto, el camino más corto entre u y v tendrá al menos dos aristas, formando una gráfica inducida P_3.

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.

   Respuesta: Supongamos que dos trayectorias de longitud máxima P y Q no tienen vértices en común. Como G es conexa, existe un camino entre algún vértice de P y algún vértice de Q. Este mismo se puede extender para formar una trayectoria más larga que P y Q. Esto implica que P y Q deben compartir al menos un vértice.

5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

   Respuesta:

   - k = 0: Gráficas sin aristas
   - k = 1: Gráficas donde cada vértice tiene solamente un vecino.
   - k = 2: Gráficas donde cada vértice tiene solamente dos vecinos.

6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

   Respuesta: Supongamos que G es una gráfica con $d(v) \geq 2$. Es decir, todo vértice en G tiene al menos dos vecinos.

   Por demostrar: G contiene un ciclo.

   Sea T una trayectoria máxima en G, entonces $T = (x_0, x_1, x_2, ..., x_k)$, lo cual es un camino en el cual no se repiten vértices y que no puede extenderse más (por definición de de máximilidad), es decir, no podemos añadir más vértices sin que estos se repitan.

   Como $d(v) \geq 2$ (por hipótesis), entonces aseguramos que x_0, tiene al menos dos vecinos, siendo uno de ellos es x_1, como se ve en T, y el otro debe ser x tal que $x \neq x_1$, es decir, no son el mismo.

   Ahora, como T es una trayectoria máxima (por hipótesis), entonces x debe estar dentro de T con algún $i \in \{1, 2, ...k\}$, de lo contrario podríamos extener a T añadiéndole x, lo que contradice la maximalidad de T. De esta manera, podemos cerrar el camino T formando un ciclo.

   Esto ciclo en G se ve de la siguiente manera: $(x_0, x_1, x_2, ..., x_i, x_0)$, donde x_0 está conectado a x_i con $i \geq 2$, lo cual cumple con ser un ciclo, pues x_0 está conectado a x_i, $(x_1, x_2, ..., x_i)$ forma una trayectoria T y no se repiten vértices en el ciclo, excepto x_0 pero porque es el inicio y el final.

   $\therefore$ La condición $|E| \geq |V|$, implica que G tiene al menos dos aristas para garantizar que contiene un ciclo.

   Por lo tanto, G tiene un ciclo. ★

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

   Respuesta:

   $\Rightarrow$) G es k-partita, lo que implica que G no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

   Supongamos que G es k-partita completa. Esto significa que G admite una partición de su conjunto de vértices en k conjuntos independientes, y cada vértice es adyacente a todos los vértices en las otras partes,
   si G tiene como subgráfica inducida a K_{k+1}, la cual es una gráfica completa con $k+1$ vértices conectados todos entre ellos. Como G es k-partita, sus vértices están divididos por k conjunos independientes. Además, si G contiene K_{k+1}, entonces hay $k+1$ vértices todos conectados entre sí, lo que implica que al menos un conjunto independiente contiene dos vértices adyacentes, lo que no cumple con la definción de k-partita completa.

   Por lo tanto, K_{k+1} no es subgráfica inducida de G.

   Ahora supongamos que G tiene como subgráfica inducida a $\overline{P_3}$. Entonces solo existe una arista de un vértice a otro, y la ausencia de las aristas de k-partita completa implica que cuando hay una partición a lo más 3 conjuntos independientes solo existe una partición conectada a otra, dejando a una partición sola, lo cual no cumple con la definición de k-partita.

   $\therefore$ $\overline{P_3}$ no es subgráfica inducida de G.

   $\Leftarrow$] G no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas lo que implica que G es k-partita completa.

   Supongamos que G no contiene a K_{k+1} como subgráfica inducida entonces G no será gráfica completa de k vértices, implica que podemos particionar G en, como máximo, k conjuntos de vértices independientes, es decir, conjuntos donde no hay aristas entre sus elementos. Esta propiedad garantiza que G es una gráfica k-partita

   Ahora suponiendo que G no contiene a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida, entonces P_3 es gráfica inducida de G, como k-partita implica que exista una partición de k conjuntos de vertices independiente podemos ver que hay 3 particiones en P_3 donde no haya aristas dentro de cada conjunto y exista una arista entre cada distintos conjuntos de la partición, cumpliendo con la definición.

   Como G no contiene K_{k+1}, podemos particionar G en k conjuntos independientes. Además, como G no contiene $\overline{P_3}$, cada vértice está conectado a todos los vértices en las otras partes, cumpliendo con la definición de k-partita completa.

   $\therefore$ G es k-partita completa. ■

2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.

Respuesta:

Supongamos por contradicción que G no contiene ciclos impares.

Esto quiere decir que G es una gráfica bipartita, como se demostró en clase, cuyos vértices que pueden dividirse en dos conjuntos X y Y, tales que ambos son independientes y todas las aristas conectan un vértice de X con uno de Y, y viceversa.
Como $|E| > n^2/4$, esto hace que la gráfica aumente su número de aristas a uno mayor al que se permite en una gráfica bipartita, pues esta admite al número máximo de aristas $n^2/4$ con $|V| = n$.

Luego, si $|V| \geq 4$ entonces a dicho número del conjunto de vértices lo sustituimos en la n del conjunto de aristas $|E|$, lo que implica que cuando se empiece a construir la gráfica con los valores en dichos conjuntos (vértices y aristas) hará que en algún momento un vértice de la partición X o Y sea adyacente dentro del mismo conjunto, no cumpliendo con la definición de bipartita, ya que en esta no puede haber aristas dentro de X o dentro de Y.

Por lo tanto, G tiene al menos un ciclo impar $(v_i, v_{i+1}, ..., v_j, v_i)$ con $i < j$, cuya longitud (número de aristas) es un número impar.

$\therefore$ G es una gráfica con ciclo impar. ■

3. Sea $d = (d_1, \ldots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

   (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.

   Respuesta: P.d.: d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.

   $\Leftarrow$] Si d' es gráfica, entonces d es gráfica.

   Supongamos que d' es una gráfica, lo que implica que no tenga lazos ni aristas múltiples. Esto significa que existe una gráfica G' cuyos grados coinciden con d'.

   Si agregamos un nuevo vértice v con grado d_1, d' nos demuestra como desarrollar las aristas de los vértices, conectando v con los d_1 vértices que sea el número más alto de la suceción, siendo los vértices de mayor grado en G'. Luego los d_1 vértices aumentan en 1 por d', entonces el nuevo vértice adquiere grado d_1. Cada uno de los vértices conectados incrementa su grado en 1 sus grados continúan cumpliendo ahora con d la gráfica al final tiene exactamente la sucesión de grados d, generando una gráfica G que cumple con d lo que prueba que d es gráfica.

   $\therefore$ Si d' es gráfica construye a d.

   $\Rightarrow$] Si d es gráfica entonces d' es gráfica. Suponemos que d es gráfica implica que existe una gráfica que cumple con d'.

   Si $d = (d_1, ..., d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Entonces tomamos el d_1, el primer elemento de la sucesión en d y lo eliminamos, luego restamos 1 arista, haciendo que pierdan un grado a los siguientes elementos hasta que llegue a la posición d_{d_1+1}, osea a los vértices que están junto a d_1 obteniendo a d' nuevamente.

   $\therefore$ Si d es gráfica, entonces d' es una gráfica.

   Como se cumplen ambas implicaciones, queda demostrado. ■

(b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d, un certificado de que d no es gráfica.

Respuesta: Algoritmo iterativo.
Input: Una sucesión no creciente de enteros no negativos.
Output: Una gráfica con sucesión de grados d y decir cuando no es gráfica la sucesión

1. $d \leftarrow$ sucesión
2. $d_i \leftarrow$ posicion de los elementos de la sucesión
3. $n \leftarrow$ longitud de d
4. If existe un d_i tal que $d_i < 0$ then
5.   Return Imprimir "No es gráfica"
6. while existen grados positivos en d do
7. $d_1 \leftarrow$ primer elemento de d
8.   If $d_1 \geq n$ then
9.   Return Imprimir "No es gráfica"
10.   Quitar d_1 de d
11.   for $i = 1$ to d_1 do
12. $d_i \leftarrow d_i - 1$
13.   If existe algun $d_i < 0$ then
14.   Return Imprimir "No es gráfica"
15.   Reordenar $d = [d_1, d_2, ...d_n]$
16. If todos los grados son 0 then
17.   Return Imprimir "Es gráfica"
18. Else
19.   Return Imprimir "No es gráfica"