实践指导一： 概率分布(概率密度)、分布函数和上分位点的数值计算

一、 实践问题

1. 问题背景

在 MATLAB 中，对常见概率分布都有相应的概率密度函数(probability density function, 简记为 pdf)；分布函数也叫累积分布函数(cumulative distribution function, 简记为 cdf)；还有逆累积分布函数. 逆累积分布函数就是分布函数的反函数. 例如，随机变量 X 在 x 处的分布函数值是 p=F(x)=P{X≤x}；反过来，给定概率值 p，求出 x 就是在 p 点的逆累积分布函数值. 在 MATLAB 中，所有的概率密度函数都带有后缀 pdf；所有的累积分布函数都带有后缀 cdf；所有的逆累积分布函数都带有后缀 inv. 常见的离散型随机变量的概率分布有：二项分布，泊松分布,几何分布，超几何分布. 常见的连续型随机变量的概率分 布有：均匀分布，指数分布，正态分布. 还有统计函数(又叫抽样分布)：t 分布，χ 2 分布, F 分布.

本实践学习一些经常使用的关于概率分布的基本操作，掌握这些基本操 作将大大提高进行实践和实际应用的能力.

2. 实践目的与要求

(1) 会利用 MATLAB 软件计算离散型随机变量的概率、连续型随机变量概率密度值，以及产生离散型随机变量的概率分布(即分布律)；

(2) 会利用 MATLAB 软件计算分布函数值，或计算形如事件{X≤x}的概率；

(3) 给出概率 p 和分布函数，会求上 α 分位点，或求解概率表达式中的待定参数.

二、 实践操作过程

1. 二项分布

X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则在 n 次试验中 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ \cdots,n.$$

则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记作 X~B(n, p).

(1) 计算在 x 处，参数是 n, p 的二项分布的概率 P{X=x}以及分布律

在 MATLAB 中，二项分布的分布密度函数(分布律)是 binopdf，其调用格式是:

• y=binopdf(x,n,p)　　　　%计算在 x 处，参数是 n, p 的二项分布的概率.

输入参数 x, n, p 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个或两个是标量，另外的输入参数是向量或矩阵，这时，输出形式是向量或矩阵.

例 1-1 事件 A 在每次试验中发生的概率是 0.3，计算在 10 次试验中 A 恰好发生 6 次的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
p=binopdf(6, 10, 0.3)
```

回车后显示:

```
p =
    0.0368
```

结果表明： 参数是 n=10,概率是 p=0.3 的二项分布在 X=6 处的概率为 0.0368.

例 1-2 事件 A 在每次试验中发生的概率是 0.3，求在 4 次试验中 A 发生次数的概率分布.

解 在命令窗口中输入:

```
p=binopdf(0:4,4,0.3)   %0: 4 产生步长为 1 的等差数列 0, 1, 2, 3, 4.
```

回车后显示:

```
p =
    0.2401    0.4116    0.2646  0.0756  0.0081
```

计算的结果是: 参数是 n=4, 概率是 p=0.3 的二项分布的分布律(当 x=0,1,2,3,4 时).

(2) 计算在 x 处,参数是 n,p 的二项分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

二项分布的分布函数是 binocdf, 其调用格式是:

- y=binocdf(x,n,p) %计算在 x 处,参数是 n, p 的二项分布的分布函数值.

输入参数 x, n, p 可以是标量、向量、矩阵.输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个或两个是标量, 另外的输入参数是向量或矩阵, 这时, 输出形式是向量或矩阵.

例 1-3 事件 A 在每次试验中发生的概率是 0.3, 计算在 10 次试验中 A 至少发生 6 次的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
p=binocdf(6,10,0.3)   % 比较例 1-1 命令 binopdf(6,10,0.3).
```

回车后显示:

```
p =
    0.9894
```

结果表明：参数是 n=10, 概率是 p=0.3 的二项分布在 x=6 处的分布函数值 F(6)=P{X≤6}=0.9894.

2. 泊松分布

参数是 λ 的泊松分布 P(λ), 在 X=x 处的概率是

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,...$$

(1) 计算在 x 处, 参数是 λ 的泊松分布的概率 P{X=x}以及分布律

在 MATLAB 中, 泊松分布的分布密度函数是 poisspdf, 其调用格式是:

- y=poisspdf(x, lambda) % 计算在 x 处, 参数是 lambda 的泊松分布的概率.

输入参数 x,lambda 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个是标量, 另一个输入参数是向量或矩阵, 这时, 输出形式是向量或矩阵.

例 1-4 设随机变量 X 服从参数是 3 的泊松分布, 求概率 P{X=6}.

解 在命令窗口中输入:

```
p=poisspdf(6,3)
```

回车后显示:

```
p =
    0.0504
```

结果表明：参数是 λ=3 的泊松分布在 x=6 处的概率为 0.0504.

例 1-5 写出参数为 3 的泊松分布的前 6 项的概率分布.

解 在命令窗口中输入:

```
p=poisspdf(0:5,3)    % 0:5 产生步长为 1 的等差数列 0,1,2,3,4,5.
```

回车后显示:

```
p =
    0.0498   0.1494  0.2240   0.2240   0.1680   0.1008
```

计算的结果是, 参数为 λ=3 的泊松分布的前 6 项的概率(当 x=0,1,2,3,4,5 时).

(2) 计算在 x 处, 参数是 λ 的泊松分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

泊松分布的分布函数是 poisscdf，其调用格式是:

• y=poisscdf(x, lambda)　 %计算在 x 处，参数是 lambda 的泊松分布的分布函数值.

输入参数 x, lambda 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个标量，另外一个输入参数是向量或矩阵，这时，输出形式是向量或矩阵.

例 1-6 设随机变量 X 服从参数是 3 的泊松分布，计算概率 P{X≤6}.

解 在命令窗口中输入:

```
p=poisscdf(6,3)   % 比较例 1-4 命令 poisspdf(6,3).
```

回车后显示:

```
p =
    0.9665
```

结果表明：参数是 λ=3 的泊松分布在 x=6 处的分布函数值 F(6)=P{X≤ 6}=0.9665 .

3. 超几何分布

超几何分布的分布律是

$$P\{X=x\}=\frac{C_K^x C_{M-K}^{N-x}}{C_M^N},\quad x=0,1,2,...,K$$

(1) 计算在 x 处超几何分布的概率 P{X=x}以及分布律

在 MATLAB 中，超几何分布的分布密度函数是 hygepdf，其调用格式是:

• y=hygepdf(x, M, K, N)　 % 计算在 x 处超几何分布的概率.

输入参数 x, M, K, N 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个，两个或三个是标量，另外的输入参数是向量或矩阵，这时，输出形式是向量或矩阵.

例 1-7 如果 10 件产品中有 7 件次品，从中任取 5 件，求其中有 3 件次品的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
p=hygepdf(3,10,5,7)
```

回车后显示:

```
p =
    0.4167
```

例 1-8 如果 10 件产品中有 7 件次品，从中任取 5 件，求其中次品数的分布律.

解 在命令窗口中输入:

```
p=hygepdf(0:5,10,5,7)
```

回车后显示:

```
p =
    0   0   0.0833   0.4167   0.4167   0.0833
```

计算的结果是：当 x=0, 1,2, 3, 4,5 时次品数的分布律.

(2) 计算在 x 处超几何分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

超几何分布的分布函数是 hygecdf，其调用格式是:

• y=hygecdf(x, M, K, N)　 % 输入参数 x,M, K, N 可以是标量、向量、矩阵.

输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个，两个或三 个是标量，另外的输入参数是向量或矩阵,这时，输出形式是向量或矩阵.

例 1-9 10 件产品中有 7 件次品，从中任取 5 件，求其中次品数不超过 3 的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
p=hygecdf(3,10,5,7)   %  比较例 1-7 命令 hygepdf(3,10,5,7).
```

回车后显示:

```
p =
    0.5000
```

结果表明: 从中任取 5 件, 其中次品数不超过 3 的概率 F(3)=P{X≤3}=0.5.

4. 几何分布

参数是 p 的几何分布, 在 X=x 处的概率是

$$P\{X = x\} = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

(1) 计算在 x 处, 参数是 p 的几何分布的概率 P{X=x}以及分布律

在 MATLAB 中, 几何分布的分布密度函数是 geopdf, 其调用格式是:

• y=geopdf(x, p) % 计算在 x 处, 参数是 p 的几何分布的概率.

输入参数 x, p 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中输入参数中可以有一个是标量, 另一个输入参数是向量或矩阵, 这时, 输出形式是向量或矩阵.

例 1-10 设随机变量 X 服从参数是 0.3 的几何分布, 求 X=6 时的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=geopdf(6,0.3)
```

回车后显示:

```
y =
    0.0353
```

例 1-11 设随机变量 X 服从参数是 0.3 的几何分布, 求 X=1,2,⋯,5 时的概率分布.

解 在命令窗口中输入:

```
p=geopdf(1:5,0.3)
```

回车后显示:

```
p =
    0.2100  0.1470  0.1029   0.0720  0.0504
```

计算的结果是: 当 x=1,2,3,4,5 时前 5 项的概率, 或者说概率分布.

(2) 计算在 x 处,参数是 p 的几何分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

几何分布的分布函数是 geocdf, 其调用格式是:

• y=geocdf(x, p) % 计算在 x 处,参数是 p 的几何分布的分布函数值.

输入参数 x, p 可以是标量、向量、矩阵. 输出参数与输入参数的形式一致. 其中 输入参数中可以有一个标量, 另外一个输入参数是向量或矩阵, 这时, 输出形式是向量或矩阵.

例 1-12 设随机变量服从参数是 0.3 的几何分布, 求概率 P{X≤6}.

解 在命令窗口中输入:

```
y=geocdf(6,0.3)   %  比较例 1-10 命令 geopdf(6,0.3).
```

回车后显示:

```
y =
    0.9176
```

结果表明: 参数 p=0.3 的几何分布在 x=6 处的分布函数值是 F(6)=P{X≤ 6}=0.9176.

5. 均匀分布

(1) 计算均匀分布的概率密度函数值

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b, \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

则称 X 在区间(a,b)上服从均匀分布, 记为 X~U(a,b), a, b 为分布参数, 且 a<b.

在 MATLAB 中，用函数 unifpdf 计算均匀分布的概率密度函数值. 其基本调用格式是:

• y=unifpdf(x, a, b)　%输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例 1-16)，可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-13 设随机变量 X 服从区间[2, 6]上的均匀分布，求 X=4 时的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=unifpdf(4,2,6)
```

回车后显示:

```
y =
    0.2500
```

(2) 计算均匀分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

区间(a, b)上的均匀分布的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<a,\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b,\\ 1 & x\ge b.\end{cases}$$

在 MATLAB 中，用函数 unifcdf 计算均匀分布的分布函数值. 其基本调用格式是:

• y=unifcdf(x, a, b)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例 1-16)，可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-14 设随机变量 X 服从区间(2, 6)上的均匀分布，求事件{X≤4}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=unifcdf(4,2,6)   % 比较例 1-13 命令 unifpdf(4,2,6).
```

回车后显示

```
y =
    0.5000
```

结果表明：对于区间(2, 6)上的均匀分布，在 x=4 处的分布函数值 F(4)=P{X ≤ 4}=0.5000.

6. 指数分布

(1) 计算指数分布的概率密度函数值

参数为 μ 的指数分布的概率密度函数是:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}, & x\ge 0,\\ 0 & \text{other}.\end{cases}$$

注意 许多教科书上用概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}, & x\ge 0,\\ 0 & \text{other}.\end{cases}$$

在 MATLAB 中，用函数 exppdf 计算指数分布的概率密度函数值. 其基本调用格式是:

• y=exppdf(x, mu)　% 输入参数可以是标量、向量或矩阵. 一个常数输入参数,可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵，见例 1-16.

例 1-15 设随机变量 X 服从参数是 6 的指数分布，求 X=6 时的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=exppdf(3,6)
```

回车后显示

```
y =
    0.1011
```

例 1-16 设随机变量 X 服从参数分别为 1, 2,6 的指数分布，求 X=2 时的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=exppdf(2,[1, 2, 6])  % [1, 2, 6]为向量，此处表示参数分别为 1, 2, 6.
```

回车后显示:

```
y =
    0.1353    0.1839    0.1194
```

结果表示: 三个参数 μ=1, 2, 6 的指数分布在 x=2 处的概率密度函数值.

(2) 计算指数分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

参数为 μ 的指数分布的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\frac{x}{\mu}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在 MATLAB 中，用函数 expcdf 计算指数分布的分布函数值. 基本调用格 是:

• y=expcdf(x, mu) % 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输 入参数(参见例 1-16), 可以扩展成与另一个输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-17 设随机变量 X 服从参数是 6 的指数分布，求事件{X≤3}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=expcdf(3,6)  %  比较例 1-15 命令 exppdf(3,6).
```

回车后显示:

```
y =
    0.3935
```

计算结果是: 参数 μ=6 的指数分布，在 x=3 处的分布函数值 F(3)=P{X≤3}=0.3935.

7. 正态分布

(1) 计算正态分布的概率密度函数值

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

则称 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布，记为 X～N(μ, σ^2), 其中 μ 和 σ (σ>0)都是常数.

在 MATLAB 中，用函数 normpdf 计算正态分布的概率密度函数值. 其基本调用格式是:

•y=normpdf(x, mu, sigma) %输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例 1-20), 可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩 阵. 要注意，调用 normpdf 时，参数 sigma 是标准差 σ，不是方差 σ^2.

例 1-18 设随机变量 X 服从均值是 6, 标准差是 2 的正态分布，求 X=3 时的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=normpdf(3,6,2)
```

回车后显示:

```
y =
    0.0648
```

计算结果是: 参数 μ=6, σ=2(即均值为 6, 方差为 4)的正态分布，在 x=3 处的概率密

度值.

(2) 计算正态分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

参数为μ, σ^2 的正态分布的分布函数不能用初等函数表示. 在 MATLAB 中, 用函数 normcdf 计算正态分布的分布函数值. 其基本调用格式是:

• y=normcdf(x, mu, sigma) % 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数, 可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵, 见例 1-20.

例 1-19 设随机变量 X 服从均值是 6, 标准差是 2 的正态分布, 求事件{X ≤3}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=normcdf(3, 6, 2)  % 比较例 1-18 命令 normpdf(3, 6, 2).
```

回车后显示:

```
y =
    0.0668
```

结果表明: μ=6, σ=2 的正态分布, 在 x=3 处的分布函数值 F(3)=P{X≤3}=0.0668.

例 1-20 设随机变量 X 服从均值是 6, 标准差是 2 的正态分布, 求三个随机 事件{X≤1}, {X≤3}, {X≤8}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=normcdf([1,3,8],6,2)  % [1,3,8]为向量, 此处表示 x 分别为 1,3,8.
```

回车后显示:

```
y =
    0.0062    0.0668    0.8413
```

计算的结果是: 参数为μ=6, σ=2 的正态分布, 分别在 x=1,3,8 处的分布函数 值 F(1)=P{X≤1}, F(3)=P{X≤3}, F(8)=P{X≤8}.

(3) 计算正态分布的上α分位点,或求解概率表达式中的待定参数

正态分布的上α分位点的定义是 $P\{X>z_\alpha\}=\alpha$. 在 MATLAB 中没有直接计算分位点的函数, 我们可以通过逆累积分布函数来计算分位点. 正态分布的逆累积分布函数是 norminv, 其基本调用格式是:

•y=norminv(p, mu, sigma) % 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例 1-20), 可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵. 注意: 输入参数 p 是概率, 其范围在[0,1]之间, 它与α的关系是 p=1-α.

例 1-21 求标准正态分布的上 0.05 分位点.

解 在命令窗口中输入:

```
y=norminv(0.95,0,1)  % 注意 1-0.05=0.95,不可与 norminv(0.05,0,1)
混.
```

回车后显示:

```
y =
    1.6449
```

结果表明: $P\{X>z_\alpha\}=1-0.95=0.05$ 的标准正态分布上α分位点 $z_\alpha=1.6449$.

8. t 分布

(1) 计算 t 分布的概率密度函数值

设 X～N(0, 1), Y～$\chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则称随机变量$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 t～t(n).

t(n)分布的概率密度函数为

$$h(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty<t<+\infty$$

在 MATLAB 中，用函数 tpdf 计算 t 分布的概率密度函数值．其基本调用格式是:

• y=tpdf(x, n)　%输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参 数(参见例 1-20)，可以扩展成与另一个输入参数相同的常数向量或矩阵．

例 1-22 设随机变量 X 服从自由度是 6 的 t 分布，求 x=3 的概率密度值．

解 在命令窗口中输入:

```
y=tpdf(3,6)  % 比较命令 tpdf(3,[2,5,9]).
```

回车后显示:

```
y =
    0.0155
```

(2) 计算 t 分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

在 MATLAB 中，用函数 tcdf 计算 t 分布的分布函数值．其基本调用格式是:

• y=tcdf(x, n)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参数(参见例 1-20)，可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵．

例 1-23 设随机变量 X 服从自由度是 6 的 t 分布，求事件{X≤3}的概率．

解 在命令窗口中输入:

```
y=tcdf(3,6)  %  比较例 1-22 命令 tpdf(3,6).
```

回车后显示:

```
y =
    0.9880
```

结果表明：自由度 n=6 的 t 分布，在 x=3 处的分布函数值是 F(3)=P{X≤ 3}=0.9980.

(3) 计算 t 分布的上 α 分位点,或求解概率表达式中的待定参数

t 分布的上α分位点的定义是 P{X>t_α(n)}=α．在 MATLAB 中，我们也可以 通过逆累积分布函数来计算分位点. t 分布的逆累积分布函数是 tinv，其基本调 用格式是:

• y=tinv(p, n)　%输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参数，可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵．注意：输入参数 p 是 概率，其范围在[0,1]之间，它与 α 的关系是 p=1-α．

例 1-24 求自由度为 6 的 t 分布的上 0.05 分位点．

解 在命令窗口中输入:

```
y=tinv(0.95,6)  % 注意 1-0.05=0.95, 比较 tinv(0.05,6)是-1.9432.
```

回车后显示:

```
y =
    1.9432
```

结果表明：对于自由度 n=6 的 t 分布，P{X>t_α(n)}=1-0.95=0.05 的上 α 分位点 $t_{0.05}$(6)=1.9432.

9. χ^2分布

(1) 计算χ^2分布的概率密度函数值

设$X_1, X_2, ..., X_n$是来自标准正态总体 N(0,1)的样本，则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2$$

服从自由度为 n 的χ^2分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$．此处，自由度是指式$\chi^2=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2$中所包含的独立变量的个数．

$\chi^2\sim\chi^2(n)$分布的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

在 MATLAB 中，用函数 chi2pdf 计算χ^2分布的概率密度函数值．其基本调用格式是:

• y=chi2pdf(x, n)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参数，可以扩展成与另一个输入参数相同的常数向量或矩阵．见例 1-25.

例 1-25 设随机变量 X 服从自由度分别为 2, 5, 9 的卡方分布，求 x=3 的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=chi2pdf(3, [2, 5, 9])   % 比较命令 chi2pdf(3, 2).
```

回车后显示:

```
y =
    0.11157     0.15418     0.039646
```

(2) 计算χ^2分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

在 MATLAB 中，用函数 chi2cdf 计算卡方分布的分布函数值．其基本调用格式是:

• y=chi2cdf(x, n)　　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参数(参见例 1-25),可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-26 设随机变量 X 服从自由度为 6 的χ^2分布，求事件{X≤3}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=chi2cdf(3,6)  % 比较命令 chi2pdf(3,6)和 chi2cdf([1,3,8],6).
```

回车后显示:

```
y =
    0.1912
```

结果表明:自由度 n=6 的χ^2分布，当 x=3 时的分布函数值 F(3)=P{X≤3}=0.1912.

(3) 计算χ^2分布的上 α 分位点,或求解概率表达式中的待定参数

χ^2分布的上 α 分位点的定义是$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$. 在 MATLAB 中，我们也可以通过逆累积分布函数来计算χ^2分布的分位点．χ^2分布的逆累积分布函数是 chi2inv，其基本调用格式是:

• y=chi2inv(p, n)　　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵．一个常数输入参数，可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵．注意：输入参数 p 是概率，其范围在[0,1]之间，它与 α 的关系是 p=1-α.

例 1-27 求自由度为 6 的χ^2分布的上 0.05 分位点.

解 在命令窗口中输入:

```
y=chi2inv(0.95,6)  % 比较 chi2inv(0.05,6)是 1.6354.
```

回车后显示:

```
y =
    12.5916
```

结果表明：对于自由度 n=6 的χ^2分布，$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=0.05$的上 α 分位点是$\chi^2_{0.05}(6)\}=12.5916$

10. F 分布

(1) 计算 F 分布的概率密度函数值

设$U\sim\chi^2(n_1)$, $V\sim\chi^2(n_2)$, 且 U,V 相互独立，则称随机变量

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为(n_1,n_2)的 F 分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$.

$F\sim F(n_1,n_2)$分布的概率密度为

$$\psi(y)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})[1+(\frac{n_1\cdot y}{n_2})]^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y>0,\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

在 MATLAB 中，用函数 fpdf 计算 F 分布的概率密度函数值. 其基本调用格式是:

• y=fpdf(x, n1, n2)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例 1-30),可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-28 设随机变量 X 服从第一自由度是 2，第二自由度是 6 的 F 分布，求 x=3 的概率密度值.

解 在命令窗口中输入:

```
y=fpdf(3,2,6)
```

回车后显示:

```
y =
    0.0625
```

结果表明:自由度 n1=2,n2=6 的 F 分布，在 x=3 处的概率密度值是 0.0625.

(2) 计算 F 分布的分布函数值或概率 P{X≤x}

在 MATLAB 中，用函数 fcdf 计算 F 分布的分布函数值. 其基本调用格式 是:

•y=fcdf(x, n)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参 数(参见例 1-30),可以扩展成与另一输入参数相同的常数向量或矩阵.

例 1-29 设随机变量 X 服从第一自由度是 2，第二自由度是 6 的 F 分布，求 随机事件{X≤3}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=fcdf(3, 2, 6)  % 比较例 1-28 命令 fpdf(3, 2, 6).
```

回车后显示:

```
y =
    0.8750
```

结果表明: 自由度 n1=2, n2=6 的 F 分布，在 x=3 处的分布函数值 F(3)=P{X ≤3}=0.8750.

例 1-30 设随机变量 X 服从第一自由度是 4，第二自由度分别是 2,4,6 的 F 分布，求事件{X≤1}, {X≤3}{X≤8}的概率.

解 在命令窗口中输入:

```
y=fcdf([1, 3, 8], 4,[2, 4, 6])  % 注意命令中两个向量[1, 3, 8], [2,4,
6] 的含义.
```

回车后显示:

```
y =
    0.4444      0.8438     0.9861
```

(3) 计算 F 分布的上 α 分位点,或求解概率表达式中的待定参数

F 分布的上 α 分位点的定义是 $P\{X>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$. 在 MATLAB 中，我们可 以通过逆累积分布函数来计算 F 分布的分位点. F 分布的逆累积分布函数是 finv, 其基本调用格式是:

• y=finv(p, n1, n2)　% 输入参数可以是标量、向量、矩阵. 一个常数输入参数(参见例

1-30), 可以扩展成与其它输入参数相同的常数向量或矩阵. 注 意: 输入参数 p 是概率, 其范围在[0,1]之间, 它与 α 的关系是 p=1-α.

例 1-31 设随机变量 X 服从第一自由度是 4, 第二自由度是 6 的 F 分布, 求 上 0.05 分位点.

解 在命令窗口中输入:

```
y=finv(0.95, 4, 6)    % 比较 finv(0.05, 4, 6)是 0.1632.
```

回车后显示:

```
y =
    4.5337
```

结果表明: 对于自由度 n1=4, n2=6 的 F 分布, 满足$P\{X > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = 0.05$的上α分位点 $F_{0.05}(4,6)=4.5337$.

三、实践结论与总结

计算离散型随机变量中的概率密度函数时, x 取值应该是自然数, 如果取 其它值(非自然数!), 其概率密度函数的值为 0. 在计算逆累积分布函数时, 输入参数 p 是概率, 应该在[0,1]之间, 如果超出这个范围, 求出的值为 NaN, 这 是 MATLAB 中的一个符号, 表示不是一个数(Not-a-Number). 本实践全面综合了概率论的主要知识点, 要求读者应该熟练掌握和理解.

四、完成实践报告题目