

实践五 逆累积分布函数——求概率表达式  $\{X \leq C\}$  中待定参数

一、实践问题

1. 问题背景

已知随机变量的概率分布函数，或者说知道事件 $\{X \leq x\}$ 的概率  $F(x)$ ，反求其中的  $x$ ，是我们在学习和工作以及科研中经常遇到的一个问题。例如，取多少只灯泡才可能满足抽到的灯泡燃烧寿命超过 1200 小时的概率达到 98%？装多少袋水泥可以保证不超过卡车的载重量？配制多少门炮才可能一次击中敌机？这些问题可以通过求解随机变量概率分布的逆累积分布函数来解决。

2. 实践目的与要求

- (1) 掌握根据概率分布函数反求临界值  $x$ ，即求解随机变量的逆累积分布函数的方法；
- (2) 会求解概率表达式中的参数；
- (3) 会对图形指定区域完成填色；
- (4) 会对图形指定位置标注文字，标注数字式文字；
- (5) 该实践题目旨在训练学生求解逆累积积分分布函数和处理图形填色、文字标注的能力。

二、实践操作过程

MATLAB 中的逆累积分布函数是已知累积分布函数(即概率) $F(x)=P\{X \leq x\}$ ，求 $x$ 。逆累积分布函数值的计算有两种方法。

1. 通用函数计算逆累积分布函数值  $x$

调用格式

• `icdf('name', P, a1, a2, a3)` % 返回分布为 name，参数为 a1,a2,a3，累积概率值为 P 的临界值，这里 name 为分布函数名，其取值见表 5-1。

**注意：** 如果  $P=\text{cdf}('name', x, a1, a2, a3)$ ，则  $x=\text{icdf}('name', P, a1, a2, a3)$

表 5-1 常见分布函数表

name 的取值	函数说明
'beta' 或 'Beta'	Beta 分布
'bino' 或 'Binomial'	二项分布
'chi2' 或 'Chisquare'	$\chi^2$ 分布
'exp' 或 'Exponential'	指数分布
'f' 或 'F'	F 分布
'gam' 或 'Gamma'	$\Gamma$ 分布
'geo' 或 'Geometric'	几何分布
'hyge' 或 'Hypergeometric'	超几何分布
'logn' 或 'Lognormal'	对数正态分布
'nbin' 或 'Negative Binomial'	负二项式分布
'ncf' 或 'Noncentral F'	非中心 F 分布
'nct' 或 'Noncentral t'	非中心 t 分布
'ncx2' 或 'Noncentral Chi-square'	非中心卡方分布
'norm' 或 'Normal'	正态分布
'poiss' 或 'Poisson'	泊松分布
'rayl' 或 'Rayleigh'	瑞利分布
't' 或 'T'	t 分布

'unif' 或 'Uniform'	连续型均匀分布
'unid' 或 'Discrete Uniform'	离散型均匀分布
'weib' 或 'Weibull'	Weibull 分布

**例 5-1** 在标准正态分布中, 若已知 $\Phi(x)=0.975$ , 求 $x$ .

**解** 在命令窗口中输入:

```
x=icdf('norm', 0.975, 0, 1)
```

回车后显示:

```
x =  
1.9600
```

**例 5-2** 在 $\chi^2$ 分布中, 若自由度为 10,  $\alpha=0.025$ , 求上分位点  $\lambda$ .

**解** 因为给出的上分位点满足 $P\{\chi^2 > \lambda\} = \alpha$ , 而逆累积分布函数 icdf 求满足 $P\{\chi^2 < \lambda\} = P$  的 临 界 值  $\lambda$  . 所 以 , 逆 累 积 分 布 函 数 的 $P = P\{\chi^2 < \lambda\} = 1 - P\{\chi^2 \geq \lambda\} = 1 - P\{\chi^2 > \lambda\}=0.975$ , 即

```
lambda=icdf('chi2', 0.975, 10)
```

回车后显示:

```
lambda =  
20.4832
```

**例 5-3** 在假设检验中,  $\alpha=0.05$ , 查自由度为 10 的双边检验 t 分布上分位点.

**解** 题目要求  $P\{t > t_{0.025}(10)\} = 0.025$ , 参考例 5-2, 用命令 icdf('t', 0.975, 10).

在命令窗口中输入:

```
lambda=icdf('t', 0.975, 10) % 注意 0.975 的来由.
```

回车后显示:

```
lambda =  
2.2281
```

## 2. 专用函数-inv 计算逆累积分布函数

### 正态分布逆累积分布函数

#### 调用格式

•  $x = \text{norminv}(p, \mu, \sigma)$  %  $p$  为累积概率值,  $\mu$  为均值,  $\sigma$  为标准差,  $x$  为临界值, 满足:  $p = P\{X \leq x\}$ .

**例 5-4** 设 $X \sim N(3, 2^2)$ , 确定  $c$  使得 $P\{X \geq c\} = P\{X < c\}$ .

**解** 由 $P\{X \geq c\} = P\{X < c\} = 1 - P\{X \geq c\}$ , 得 $P\{X \geq c\} = P\{X < c\} = 0.5$ . 所以. 在命令窗口输入:

```
c=norminv(0.5, 3, 2)
```

回车后显示:

```
c =  
3
```

结果表明: $c=3$

关于常用临界值函数可查下表 5-2.

表 5-2 常用临界值函数表

函数名	调用形式	注 释
unifinv	$x = \text{unifinv}(p, a, b)$	连续型均匀分布逆累积分布函数( $P = P\{X \leq x\}$ , 求 $x$ )
unidinv	$x = \text{unidinv}(p, n)$	离散型均匀分布逆累积分布函数, $x$ 为临界值
expinv	$x = \text{expinv}(p, \lambda)$	指数分布逆累积分布函数

norminv	x=norminv(x,mu,sigma)	正态分布逆累积分布函数
chi2inv	x=chi2inv (x, n)	$\chi^2$ 分布逆累积分布函数
tinv	x=tinv (x, n)	t 分布累积分布函数
finv	x=finv (x, n1, n2)	F 分布逆累积分布函数
gaminv	x=gaminv (x, a, b)	$\Gamma$ 分布逆累积分布函数
betainv	x=betainv (x, a, b)	$\beta$ 分布逆累积分布函数
logninv	x=logninv (x, mu, sigma)	对数正态分布逆累积分布函数
nbinv	x=nbinv(x, r,p)	负二项式分布逆累积分布函数
ncfinv	x=ncfinv (x, n1, n2, delta)	非中心 F 分布逆累积分布函数
nctinv	x=nctinv (x, n, delta)	非中心 t 分布逆累积分布函数
ncx2inv	x=ncx2inv (x, n, delta)	非中心 $\chi^2$ 分布逆累积分布函数
raylinv	x=raylinv (x, b)	瑞利分布逆累积分布函数
weibinv	x=weibinv (x, a, b)	韦伯分布逆累积分布函数
binoinv	x=binoinv (x, n,p)	二项分布的逆累积分布函数
geoinv	x=geoinv (x,p)	几何分布的逆累积分布函数
hygeinv	x=hygeinv (x,m,k,n)	超几何分布的逆累积分布函数
poissinv	x=poissinv (x,lambda)	泊松分布的逆累积分布函数

**例 5-5**  $\chi^2$ 分布的逆累积分布函数的综合应用:

绘制 $\chi^2$ 分布的概率密度图形, 在指定区域对图形填色, 在指定位置标注文字、标注数字.

**解** 在命令窗口中输入:

```

n=5; a=0.9; % n 为自由度, a 为置信水平或累积概率.
xa=chi2inv(a,n) ; %求 $P\{\chi^2 \leq \chi^2(5)\} = 0.9$ 中的 $\chi^2(5)$ .
x=0:0.1:15; px=chi2pdf(x,n) ; %计算概率密度函数值,供绘图用.
plot(x,px,'b'); hold on %绘概率密度函数图形, 用蓝色线条.
xx=0:0.1:xa; pxx=chi2pdf(xx,n) ; %计算[0,xa]上的密度函数值, 供填色
用.
fill([xx,xa], [pxx,0], 'g') %在区域[xx,xa], [pxx,0]填绿色,
点(xa, 0)使得填色区域封闭. 注意, 不是区域[xx,xa], [0,pxx].
text(xa*1.01,0.01, num2str(xa)) %在起始点(xa*1.01,0.01) 标注临
界值点的具体数值. 命令 num2str(xa)是将 xa 的数值转换为字符串.
text(10,0.10, ['\fontsize{16}X~{\chi}^2(5)']) %在图中指定位置标
注文字, 字号是 fontsize{16}.
text(1.5,0.05, '\fontsize{22}alpha=0.9') %在图中指定位置标注文
字“alpha=0.9”.

```

结果显示如图 5-1.

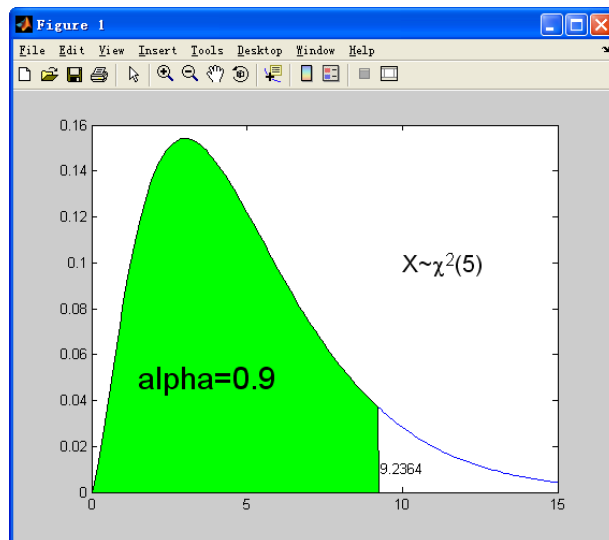


图 5-1 函数图形填色、标注文字等的综合应用

### 三、 实践结论与总结

已知事件 $\{X \leq x\}$ 的概率  $F(x)$ , 反求其中的临界值  $x$ , 方法有两种: 一种方法是利用通用函数计算逆累积分布函数值: `icdf('name',P, a1, a2, a3)`, 它返回分布为 `name`, 参数为 `a1,a2,a3`, 累积概率值为 `P` 的临界值, 这里 `name` 为分布函数名, 其取值见表 5-1. 另一种方法是利用专用函数 `-inv` 计算逆累积分布函数. 常用临界值函数见表 5-2.