

实践二 随机数的生成

一、 实践问题

1. 问题背景

多次重复地抛掷一枚匀质的硬币是一个古老而现实的实践问题,通过分析“正面向上”出现的频率,我们可以从中得出许多结论.但要做这个简单而重复的试验,很多人没有多余的时间或耐心来完成它,现在借助于计算机的帮助,人人都可以在很短的时间内完成它.因此,借助于计算机进行模拟随机试验,产生服从各类分布的随机数,通过数据处理和分析,我们可以从中发现许多有用的规律,或者来验证我们理论推导的结论是否正确.本实践的主要目的是产生服从某种分布的随机数.

2. 实践目的与要求

- (1) 熟悉常见分布的随机数产生的有关命令;
- (2) 掌握随机模拟的方法;
- (3) 提高读者观察实践现象或处理数据方面的能力.

二、 实践操作过程

随机数生成的基本原理

生成服从给定分布的随机数,需要首先生成服从均匀分布的随机数.常用的生成均匀分布随机数的方法是同余法,其递推公式为

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m$$

给定初值 x_0 , 可以迭代出均匀随机数 x_1, x_2, \dots, x_n , 将它们进行标准化(此时随机数界于 0 和 1 之间)或极差标准化(此时随机数界于 -1 和 1 之间), 可以得到均匀分布的随机数.

获得均匀分布的随机数以后, 可以用多种方法构造基于该随机数的随机变量, 常用的方法是反函数法, 即利用随机变量 x 的分布函数 $F(x)$ 的反函数 $F^{-1}(x)$ 来推求随机变量. 基本算法是:

- (1) 产生均匀分布随机数 r_i ;
- (2) 令 $x_i = F^{-1}(r_i)$, 然后返回.

下面结合正态分布随机变量的生成进行具体介绍:

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

式中 μ 为期望, σ^2 为方差. 由中心极限定理, 有

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i - \frac{n}{2} \right)$$

当 $n = 12$ 时, 可达到较好精度, 故

$$x = \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) \sigma + \mu$$

x 就是基于均匀分布随机数 r_i 的服从正态分布的随机数.

1. 二项分布的随机数的产生

基本数学原理: 设 X 服从参数为 n, p 的二项分布. 在 MATLAB 中用函数 `binornd` 产生参数为 n, p 的二项分布的随机数, 其基本的调用格式如下:

• `R = binornd(N, P)` % N, P 为二项分布的两个参数, 返回服从参数为 N, P 的二项分布的一个随机数;

• `R = binornd(N, P, m, n)` % m, n 分别表示随机数产生的行数和列数.

例 2-1 产生参数为 10, 概率为 0.5 的二项分布的随机数.

- (1) 产生 1 个随机数;
- (2) 产生 10 个随机数;
- (3) 产生 6(要求 2 行 3 列)个随机数.

解 只需在命令窗口中依次输入下列命令:

```
R1=binornd(10,0.5),           %产生一个随机数 5.
R2=binornd(10,0.5,1,10),      %产生 1 行 10 列共 10 个随机数.
R3=binornd(10,0.5,[2,3]).     %同命令 binornd(10,0.5,2,3).
```

2. 均匀分布的随机数的产生

基本数学原理: 设 X 在区间(a,b)上服从均匀分布, 具体概率密度见实践二.

在 MATLAB 中用函数 unifrnd 产生均匀分布的随机数, 其基本调用格式如下:

- $R = \text{unifrnd}(a, b)$ %返回参数为 a,b 的连续型均匀分布的随机数;
- $R = \text{unifrnd}(a, b, m)$ % m 指定产生 m 行 m 列个随机数;
- $R = \text{unifrnd}(a, b, m, n)$ % m, n 分别表示产生的随机数的行数和列数.

例 2-2 产生区间(0, 1)上的连续型均匀分布的随机数.

- (1) 产生 6×6 个随机数;
- (2) 产生 6(要求 2 行 3 列)个随机数.

解 只需在命令窗口中依次输入下列命令:

```
random1= unifrnd(0, 1, 6),      % 产生 6 行 6 列个随机数.
random2= unifrnd(0, 1, 2, 3).   % 产生 2 行 3 列个随机数.
```

注意 命令 unidrnd(N, 2, 3) 产生 2 行 3 列个离散型均匀分布的随机数.

3. 正态分布的随机数的产生

基本数学原理: 设 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布, 在 MATLAB 中用函数 normrnd 产生参数为 μ, σ 的正态分布的随机数, 其基本的调用格式如下:

- $R = \text{normrnd}(\text{MU}, \text{SIGMA})$ %返回均值为 MU, 标准差为 SIGMA 的正态分布的随机数, R 可以是向量或矩阵;
- $R = \text{normrnd}(\text{MU}, \text{SIGMA}, m)$ % m 指定随机数的行数与列数, 与 R 同维数, 产生 m 行 m 列个随机数;
- $R = \text{normrnd}(\text{MU}, \text{SIGMA}, m, n)$ %m, n 分别表示 R 的行数和列数.

例 2-3 生成满足下列情形的正态分布随机数:

- (1) 均值和标准差变化;
- (2) 随机数输出为矩阵;
- (3) 均值为矩阵.

解 (1) 在命令窗口中输入:

```
n1 = normrnd(1:6, 1./(1:6))    %1./(1:6) 运算结果是  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ 
```

回车后显示:

```
n1 =
    2.1650    2.3134    3.0250    4.0879    4.8607    6.2827
```

结果表示: 均值 μ 为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 标准差 σ 对应地为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ 的正态随机数. 注意,

大多数随机数在均值附近产生, 其它分布也有类似情形.

(2) 在命令窗口再输入:

`n2=normrnd(10, 0.5, [2, 3])` %与命令 `normrnd(10,0.5,2,3)` 效果相同.

回车后显示:

```
n2 =
    9.7837    10.0627    9.4268
    9.1672    10.1438    10.5955
```

结果表示: 均值 μ 为 10, 标准差 σ 为 0.5 的 2 行 3 列个正态随机数.

(3) 在命令窗口再输入:

`n3 = normrnd([1 2 3;4 5 6],0.1,2,3)`

回车后显示:

```
n3 =
    0.9299    1.9361    2.9640
    4.1246    5.0577    5.9864
```

结果表示: 均值 μ 为矩阵 123 456, 标准差 σ 为 0.1 的 2 行 3 列个正态随机数.

4. 常见分布的随机数的产生

常见分布的随机数产生的使用格式与上面相同, 见表 2-1.

表 2-1 常见分布的随机数产生函数表

函数名	调用形式	注 释
betarnd	betarnd(A, B,m,n)	参数为 A, B 的 β 分布随机数
binornd	binornd(N,P,m,n)	参数为 N, p 的二项分布随机数
chi2rnd	chi2rnd(N, m, n)	自由度为 N 的 χ^2 分布随机数
exprnd	exprnd(Lambda,m,n)	参数为 Lambda 的指数分布随机数
frnd	frnd(N1, N2, m,n)	第一自由度为 N1,第二自由度为 N2 的 F 分布随机数
gamrnd	gamrnd(A, B, m,n)	参数为 A, B 的 γ 分布随机数
geornd	geornd(P,m,n)	参数为 P 的几何分布随机数
hygernd	hygernd(M,K,N,m,n)	参数为 M, K, N 的超几何分布随机数
lognrnd	lognrnd(MU, SIGMA, m, n)	参数为 MU, SIGMA 的对数正态分布随机数
nbinrnd	nbinrnd(R, P,m,n)	参数为 R, P 的负二项式分布随机数
ncfrnd	ncfrnd(N1, N2, delta,m,n)	参数为 N1,N2, delta 的非中心 F 分布随机数
nctrnd	nctrnd(N, delta, m,n)	参数为 N, delta 的非中心 t 分布随机数
ncx2rnd	ncx2rnd(N, delta, m,n)	参数为 N, delta 的非中心卡方分布随机数
normrnd	normrnd(MU, SIGMA, m,n)	参数为 MU, SIGMA 的正态分布随机数
poissrnd	poissrnd(Lambda,m,n)	参数为 Lambda 的泊松分布随机数
raylrnd	raylrnd(B, m,n)	参数为 B 的瑞利分布随机数
trnd	trnd(N, m,n)	自由度为 N 的 t 分布随机数
unidrnd	unidrnd(N,m, n)	离散型均匀分布随机数
unifrnd	unifrnd (A,B,m,n)	(A,B)上连续型均匀分布随机数
weibrnd	weibrnd(A, B,m, n)	参数为 A, B 的威布尔分布随机数

5. 通用函数求各分布的随机数

在 MATLAB 中用函数 random 产生指定分布的随机数, 其基本的调用格式如下:

• `y = random('name',A1,A2,A3, m, n)` % name 为分布函数名, 其取值见表 2-2; A1,

A2,A3 为分布的参数; m,n 指定产生随机数的行数和列数.

表 2-2 常见分布函数名称表

name 的取值	函数说明
'beta' 或 'beta'	beta 分布
'bino' 或 'binomial'	二项分布
'chi2' 或 'chisquare'	χ^2 分布
'exp' 或 'exponential'	指数分布
'f' 或 'f'	F 分布
'gam' 或 'gamma'	γ 分布
'geo' 或 'geometric'	几何分布
'hyge' 或 'hypergeometric'	超几何分布
'logn' 或 'lognormal'	对数正态分布
'nbin' 或 'negative Binomial'	负二项式分布
'ncf' 或 'Noncentral F'	非中心 F 分布
'nct' 或 'Noncentral t'	非中心 t 分布
'ncx2' 或 'noncentralchi-square'	非中心 χ^2 分布
'norm' 或 'normal'	正态分布
'poiss' 或 'poisson'	泊松分布
'rayl' 或 'rayleigh'	瑞利分布
't' 或 't'	t 分布
'unif' 或 'uniform'	连续型均匀分布
'unid' 或 'discreteuniform'	离散型均匀分布
'weib' 或 'weibull'	Weibull 分布

例 2-4 用函数 “random” 产生 12(含 3 行 4 列)个均值为 2, 标准差为 0.3 的正态分布随机数.

解 在命令窗口输入:

```
y=random('norm', 2, 0.3, 3, 4)
```

回车后显示:

```
y =  
    2.3567    2.0524    1.8235    2.0342  
    1.9887    1.9440    2.6550    2.3200  
    2.0982    2.2177    1.9591    2.0178
```

6. 随机数生成工具箱

MATLAB 提供了随机数生成工具箱, 使用图形用户界面, 可以交互式地生成常用的各种随机数.

调用格式:

- randtool

说明: randtool 命令打开一个图形用户界面, 可以观察在服从一定概率分布的随机样本直方图上改变参数和样本大小带来的变化.

单击“Export...”(即“输出”按钮)按钮, 输出随机数的当前位置. 结果保存在变量“ans”中. 单击“Resample” (即“重复取样”按钮)按钮, 从同一分布的总体中进行重复取样.

在图形上方的函数“Distribution”(即“分布类型”按钮)弹出式菜单中进行选择, 可以

改变分布函数类型. 移动滚动条或在参数名右方的编辑框中输入数值, 可以改变参数的设置. 在滚动条的顶部或底部编辑框中输入数值, 可以改变参数的上下界设置.

在“Sample”(即“样本”按钮)编辑框中输入数值, 可以改变样本容量的大小. 完成上面的操作后, 单击右上方的“关闭”按钮, 关闭图形用户界面.

例 2-5 用随机数生成工具箱, 生成正态分布随机数和均匀分布随机数的直方图.

解 在命令窗口输入: `randtool` 命令, 打开随机数生成界面, 如图 2-1 所示. 在“Distribution”下拉式列表框中进行选择, 确定生成什么分布的随机数. 在“Samples”窗口中输入样本的大小. 在图形下方输入对应分布的参数及其上下界区间. 单击“Resample”按钮, 生成随机数并用直方图表示.

在“Distribution”下拉式列表框中选择“Uniform”选项, 将生成服从均匀分布的随机数. 如图 2-2 所示.

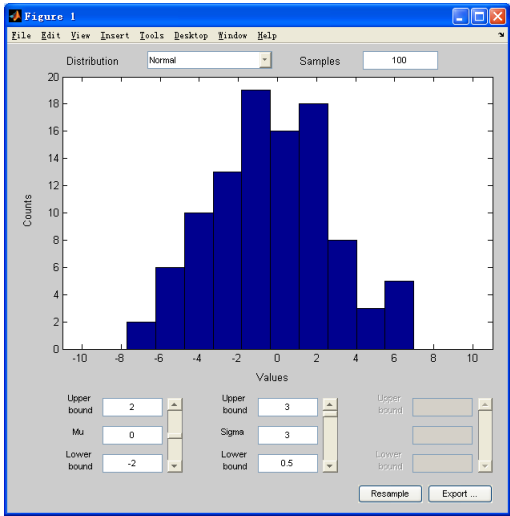
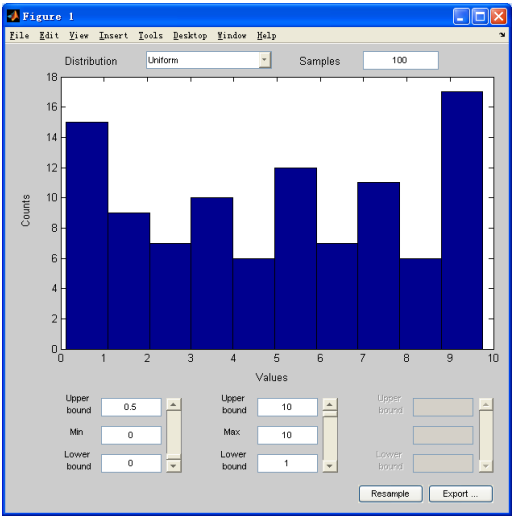


图 2-1 正态分布的随机数的直方图



2-2 均匀分布的随机数的直方图

三、 实践结论与总结

产生各种随机数, 是我们进行科学试验经常使用的一种试验手段和方法, 通过产生满足某些条件的随机数, 画出它们的散点图, 利用概率统计的方法, 可以分析随机数分布的规律, 进而找寻事物本身隐含的关系, 或者验证理论结果的正确性.

四、 实践习题

1. 产生区间(-1, 1)上的 12 个连续型的均匀分布随机数.
2. 产生 12(要求 3 行 4 列)个标准正态分布随机数.
3. 产生 20 个 $\lambda=1$ 的指数分布随机数.
4. 产生 32(要求 4 行 8 列)个参数 $\lambda=3$ 的泊松分布随机数.
5. 用函数“random”分别产生 20(要求 4 行 5 列)个均值为 10, 标准差为 6 的正态分布随机数和 20 个均匀分布随机数.
6. 利用随机数生成工具箱, 生成二项分布、泊松分布、指数分布和 F 分布的随机数的直方图.