导数双变量专题

一、独立变量

1.分离双变量

将两个变量进行完全分离，整理成相同的结构，然后构造新函数，利用导数研究单调性求解。

例题1

1 当$a>b>0$时，试证明：$(1+a)^{b}<(1+b)^{a}$ ．

练习1

2 当m，$n\in(-1,1)$时，总有$\sin m-\sin n<n^{3}-m^{3}$成立，则下列判断正确的是（　　）．

A. $m>n$　　B. $|m|<|n|$　　C. $m<n$　　D. $|m|>|n|$

活学活用

3 已知函数$f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>1)$，若对任意两个不同的$x_1$，$x_2$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|\ln x_1-\ln x_2|$成立，则实数$k$的取值范围是 ______ .

2.组合双变量

例题2

4 已知$a,b>0$且$a\neq b$，证明：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$（此式记为对数平均不等式）.

练习2

5 已知函数$f(x)=\ln x$.

(1) 求函数$g(x)=f(x+1)-x$的最大值 .

(2) 当$0<a<b$时，求证：$f(b)-f(a)>\dfrac{2a(b-a)}{a^2+b^2}$.

二、关联变量

1. 代换消元

基本类型

例题3

6 已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), x>0\\ \dfrac{1}{2}x+1, x\leqslant 0\end{cases}$，若$m<n$，且$f(m)=f(n)$，则$n-m$的取值范围是（　）.

A. $[3-2\ln 2, 2)$　　B. $[3-2\ln 2, 2]$　　C. $[e-1, 2]$　　D. $[e-1, 2)$

练习3

7 已知函数$f(x)=\begin{cases}1+\ln x, x\geqslant 1\\ \frac{x+1}{2}, x<1\end{cases}$，若存在$x_1\neq x_2$，使得$f(x_1)+f(x_2)=2$，则$x_1+x_2$的取值范围是______　.

韦达代换

韦达代换常见于双极值点问题，利用韦达定理进行消元，转化为单变量问题。

常见的处理方式分为以下两种：

1.代换消元，如已知$x_1x_2=1$,利用$x_1=\frac{1}{x_2}$消去x_2;

2.整体消元，如已知$x_1+x_2=a$，$x_1x_2=a$利用条件转化为关于a的表达式

例题4

8 已知函数$f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$．

若$f(x)$存在两个极值点x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$．

练习4

9 已知函数$f(x)=x^2+m\ln x\,(m\in\mathbf{R})$．

当$m=2$时，记函数$g(x)=f(x)-ax\,(a\geqslant 5)$的两个极值点为$x_1$，$x_2$，且$x_1<x_2$，求$g(x_2)-g(x_1)$的最大值．

2.整体消元

例题5

10 已知函数$f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax$（$a$为常数）有两个极值点．

(1) 求实数a的取值范围．

(2) 设$f(x)$的两个极值点分别为x_1，x_2，若不等式$f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$恒成立，求$\lambda$的最小值．

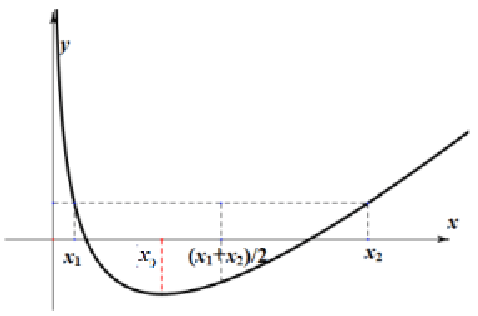
练习5

11 已知函数$f(x)=ax^2-2x+\ln x$有两个不同的极值点x_1，x_2，若不等式$\lambda>f(x_1)+f(x_2)$恒成立，则实数λ可以取（　）．

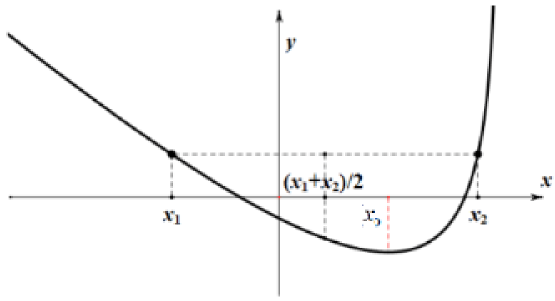
A. -4　　B. -3　　C. $-\mathrm{e}$　　D. e

三、补充：极值点偏移

极值点偏移问题：已知函数$y=f(x)$是连续函数，在区间(x_1,x_2)内有且只有一个极值点x_0，且$f(x_1)=f(x_2)$，若极值点左右的“增减速度”相同，常常有极值点$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，我们称这种状态为极值点不偏移；若极值点左右的“增减速度”不同，函数的图像不具有对称性，常常有极值点$x_0\neq\dfrac{x_1+x_2}{2}$的情况，我们称这种状态为“极值点偏移”（左移或右移）.



左快右慢（极值点左偏$\Leftrightarrow m<\dfrac{x_1+x_2}{2}$）



左慢右快（极值点右偏$\Leftrightarrow m>\dfrac{x_1+x_2}{2}$）

12 已知函数$f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$.

如果$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>2$.