Feladat

Olvassa be a *pontok200.txt* fájlt. Ebben 200 térbeli pont koordinátái adottak, minden sor egy pont x, y és z koordinátáját tartalmazza, ebben a sorrendben. Ábrázolja a pontokat!

Meg szeretnénk határozni a pontokat közelítő síkot, azaz azt a

$$p(w, x, y) = w_1 + w_2 x + w_3 y$$

függvényt, melyre

$$F(w) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (p(w, x_i, y_i) - z_i)^2$$

minimális, ahol M a pontok száma, (x_i, y_i, z_i), $i = 1, ..., M$ a pontok koordinátái.

Vegyük észre, hogy

$$F(w) = \frac{1}{M} \|Aw - Z\|_2^2 = \frac{1}{M} \left(w^T (A^T A) w - 2 w^T A^T Z + Z^T Z \right),$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_M & y_M \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_M \end{bmatrix}. \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a célfüggvény egy konvex kvadratikus függvény, a gradiense:

$$\nabla F(w) = \frac{1}{M} \left(2(A^T A) w - 2 A^T Z \right).$$

Ebben az esetben a minimumhely egy lineáris egyenletrendszer megoldásával egzakt módon is számítható:

$$(A^T A) w = A^T Z.$$

(Ez a Gauss-féle normálegyenlet, ld. később.)

Keressük meg a minimumhelyet gradiens módszerrel!

1. Használjunk visszaléptetéses gradiens módszert.
2. Az előző kódot módosísuk úgy, hogy az eredeti (x_i, y_i, z_i) adatok helyett azokat az $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, z_i)$ adatokat használjuk, melyeket úgy kaptunk, hogy az x és y értékeket standardizáltuk. Ábrázoljuk az eredeti pontokat és az illesztett síkot!
3. Visszaléptetéses módszer helyett használjuk az optimális lépéshosszt:

$$\alpha_k = \frac{M g_k^T g_k}{2 g_k^T (A^T A) g_k},$$

ahol $g_k = \nabla F(x_k)$. Itt is vizsgáljuk meg mi történik ha az eredeti, illetve ha a standardizált adatokat használjuk!

Minden esetben ugyanazt a leállási feltételt használjuk (pl. $\|\nabla F(x_k)\| < 10^{-3}$) és ellenőrizzük az elvégzett lépések (a kiszámolt közelítővektorok) számát!