Egyenlőtlenséges feladatok

Czylabson Asa

2018. január 14.

1. Jelölések

- 'Kira': Kirakat
- 'Fa': Feladatok
- 'Um': Útmutatók
- 'Mo': Megoldások

- Alap Alapvető, klasszikus dolgokat megfogalmazó feladatok
- Fol Folklór (nem tudom,ismeretlen,lemma stb.)
- Haj Hajós verseny
- Oktv Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
- Komal Kömal pontverseny
- Imo Nemzetközi Mat. Olimpia
- Egmo European Girls' Math Olympiad
- Krs Kürschák verseny
- Schev Schultz János: Elemi matematikai versenyfeladatok, könyv, IV fejezet, Egyenlőtlenségek

2. Kirakat

2.1. AlapAMGM

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq (a_1 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$$

– –

2.2. AlapAMQM

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

– –

2.3. AlapBin

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{1} x$$

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{2} x^2$$

– –

2.4. AlapBer

$$(1 + x_1) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_n$$

– –

2.5. AlapCBS

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

– –

2.6. AlapGMHM

$$(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

– –

2.7. AlapPowMean

$$p < g \implies \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{a_1^q + \ldots + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

2.8. AlapRearr

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\varphi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2.9. AlapSchur

$$a^r(a-b) + b^r(b-a) \geq 0$$

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

2.10. AlapWgtAMGM

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n$$

2.11. FolGoRa1

$$1 \leq \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} < 2.$$

2.12. FolSchurEx1

$$a, b, c \geq 0,\ a + b + c = 1 \implies a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$$

2.13. FoleDef1

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow \quad \text{és} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow$$

2.14. FolCik1

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

— —

2.15. FolMdt1

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

— —

2.16. FolLem1

$$(i)\ 0 < a \leq 1 \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + b \geq 1 + ab$$

$$(ii)\ 0 < a \leq m \leq b \ \Longrightarrow \ (1+a)(1+b) \geq (1+m)\left(1 + \frac{ab}{m}\right)$$

— —

2.17. Schev1

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

— —

2.18. Schev31

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

— —

2.19. Schev13

$$\left\lfloor (a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \right\rfloor \quad \text{szigorúan monoton.}$$

— —

2.20. Schev27

$$(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq \left(1 + (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \leq \left(1 - (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

2.21. Oktv2007IIIkI2

$$f(xy) \leq xf(y) \implies f(xy) = xf(y)$$

2.22. Oktv1974II1

$$a > b > c > 0 \implies \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} > 0.$$

2.23. Oktv1973I5

$$n > 1 \implies \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{3}{n}\right)\dots\left(2 - \frac{2n-1}{n}\right) > \frac{1}{n!}$$

---

3. Feladatok

3.1. Alap

3.1.1. AlapAMGM

Ha $n > 0$ egész és $a_1, ..., a_n$ nemnegatív valós számok akkor

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq (a_1 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Továbbá egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha a számok mind egyenlőek.

(Um:4.1.1)(Mo:5.1.1)

△ ▽ △

3.1.2. AlapAMQM

Ha $n > 0$ egész és $a_i \geq 0$ $i = 1 \dots n$ valós, akkor

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

vagy ami ugyanaz:

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

Továbbá egyenlőség pontosan abban az esetben áll fenn amikor a számok egyenlőek.

(Um:4.1.2)(Mo:5.1.2)

△ ▽ △

3.1.3. AlapBin

Legyen $x > 0$ valós és $n > 1$, akkor:

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{1}x$$
$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{2}x^2$$

(Um:4.1.3)(Mo:5.1.3)

△ ▽ △

3.1.4. AlapSchur

Legyenek $a, b, c \geq 0$ és $r > 0$ valós számok. Ekkor

$$a^r(a-b) + b^r(b-a) \geq 0$$
$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Egyenlőség az első esetben pont akkor van, ha $a = b$, a másodiknál pont akkor ha $a = b = c$ vagy valamelyik kettő egyenlő a harmadik pedig nulla.

(Um:4.1.4)(Mo:5.1.4)

△ ▽ △

3.1.5. AlapBer

Legyen $n > 0$ egész és $x_i > -1,\ i = 1, \ldots, n$ azonos előjelű valósak. Ekkor

$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_n$$

(Um:4.1.5)(Mo:5.1.5)

△ ▽ △

3.1.6. AlapCBS

Legyen $n > 0$ egész és a_i, b_i valós szám $i = 1, \ldots, n$. Ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Továbbá egyenlőség pont akkor teljesül, ha $a_i = \lambda b_i,\ i = 1, \ldots, n$ valamely λ valós számmal.

(Um:4.1.6)(Mo:5.1.6)

△ ▽ △

3.1.7. AlapGMHM

Ha $n > 0$ egész és $a_1, ..., a_n$ pozitív valós számok akkor

$$(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Továbbá egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, $a_1 = \ldots = a_n$.

(Um:4.1.7)(Mo:5.1.7)

△ ▽ △

3.1.8. AlapRearr

Legyen $n > 0$ egész, $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq \ldots \leq b_n$ valós számok. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\varphi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

bármely $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutációra.

(Um:4.1.8)(Mo:5.1.8)

△ ▽ △

3.1.9. AlapWgtAMGM

Legyen $n > 0$ egész, és $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós. Ekkor

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n$$

ahol $p_1, \ldots, p_n$ nemnegatív racionális számok, úgy hogy $\sum_i p_i = 1$.

(Um:**??**)(Mo:**??**)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.1.10. AlapPowMean

Legyen $n > 0$ egész, és $a_1, \ldots, a_n$ valós. Ekkor

$$\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{a_1^q + \ldots + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ahol $p < q$ egész.

(Um:**??**)(Mo:**??**)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.2. Folklór

3.2.1. FolGoRa1

Mutassuk meg, hogy

$$1 \leq \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} < 2.$$

(Um:4.2.1)(Mo:5.2.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.2.2. FolSchurEx1

Legyen $a, b, c \geq 0$ valós, $a + b + c = 1$. Ekkor:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(Um:4.2.2)(Mo:5.2.2)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.2.3. FoleDef1

Legyen:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ és } b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n.$$

Ekkor $a_n < b_n$, a_n monoton nő, b_n monoton csökken.

(Um:4.2.3)(Mo:5.2.3)

△ ▽ △

3.2.4. FolCik1

Legyen $n > 1$ egész és $a_1 \dots a_n$ nemnegatív valós. Ekkor

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_n a_1$$

(Um:4.2.4)(Mo:5.2.4)

△ ▽ △

3.2.5. FolMdt1

Legyen a, b, c, d pozitív valós, melyekre $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Ekkor

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

(Um:4.2.5)(Mo:5.2.5)

△ ▽ △

3.2.6. FolEng1

Legyen $n > 0$ egész, $a_i > 0, b_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ valós számok. Ekkor

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

Továbbá egyenlőség pontosan akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

(Um:4.2.6)(Mo:5.2.6)

△ ▽ △

3.2.7. FolKrs19612

Legyen $S = \{(a, b, c) : a, b, c$ pozitív valós és $a + b + c = 1\}$. Bizonyítandó, hogy:

$$\min_{(a,b,c)\in S} \max\{(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a\} \geq \frac{2}{9}.$$

* * *

A probléma motiválója a Krs19612, hiszen ott az állítás:

$$\max_{(a,b,c)\in S} \min\{(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a\} \leq \frac{1}{4},$$

kivéve, hogy ott S-ben nem szerepel az $a + b + c = 1$ feltétel. Jelen feladat enélkül semmitmondó lenne, min helyett inf, és $\frac{2}{9}$ helyett 0 határral.

(Um:4.2.7)(Mo:5.2.7)

△ ▽ △

3.2.8. FolRearrMulti

Legyenek $n > 0,\ t > 2$ egészek és $0 \leq a_{r,1} \leq \ldots \leq a_{r,n}$ $(r = 1, \ldots, t)$ valós számok. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}a_{2,\varphi_2(i)} \ldots a_{t,\varphi_t(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}a_{2,i} \ldots a_{t,i}$$

$\varphi_r : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ $(r = 2, \ldots, t)$ permutációk bármely rendszerére.

(Um:4.2.8)(Mo:5.2.8)

△ ▽ △

3.2.9. FolRearrCorr

Legyen $n > 0$ egész és $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós szám. Ekkor

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 a_{\varphi(1)} + \ldots + a_n a_{\varphi(n)}$$
$$\frac{a_1}{a_{\varphi(1)}} + \ldots + \frac{a_n}{a_{\varphi(n)}} \geq n$$

tetszőleges φ permutáció esetén.

(Um:4.2.9)(Mo:5.2.9)

△ ▽ △

3.2.10. FolProd1

Igazoljuk, ha $n \geq 2$, akkor

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^3}\right) > \frac{3}{4}.$$

A feladat a Schev1 variánsa.

(Um:4.2.10)(Mo:5.2.10)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.2.11. FolPowMean

Legyen $n > 0$ egész, $a_1, \ldots, a_n$ valós, továbbá $0 < p < q$ racionális számok. Ekkor

$$a_1^q + \ldots + a_n^q = n \implies a_1^p + \ldots + a_n^p \leq n.$$

(Um:4.2.11)(Mo:5.2.11)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.2.12. FolLem1

$$0 < a \leq 1 \leq b \implies a + b \geq 1 + ab(i)$$

$$(ii)\ 0 < a \leq m \leq b \implies (1+a)(1+b) \geq (1+m)\left(1+\frac{ab}{m}\right)$$

(Um:4.2.12)(Mo:5.2.12)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.3. Arany Dániel

3.3.1. ArDa1975IIh2

Igazoljuk, hogy nemnegatív a, b, c valós számok esetén

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^5b + b^5c + c^5a$$

(Um:4.3.1)(Mo:5.3.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.3.2. ArDa1974IIhm2

Bizonyítsuk be hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}}\right) \geq 2$$

(Um:4.3.2)(Mo:5.3.2)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4. Oktv

3.4.1. Oktv1967Ia1

Az a, b, c valós számokra fennáll az

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc.$$

Bizonyítsuk be hogy ekkor $a=b=c$.

(Um:4.4.1)(Mo:5.4.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4.2. Oktv1968Im1

Ha a, b nemnulla valós számok, akkor:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4 \geq 0$$

(Um:4.4.2)(Mo:5.4.2)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4.3. Oktv1970I1

Mekkora a^6+b^6 legkisebb és legnagyobb értéke, ha a és b olyan valós számok, melyekre $a^2+b^2=1$?

(Um:4.4.3)(Mo:5.4.3)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4.4. Oktv1973I5

Legye $n>1$ egész. Ekkor

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\dots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right)>\frac{1}{n!}$$

ahol $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$

(Um:4.4.4)(Mo:5.4.4)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4.5. Oktv1974II1

Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll $a>b>c>0$, akkor

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}>0.$$

(Um:4.4.5)(Mo:5.4.5)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.4.6. Oktv2007IIIkI2

Legyen f a pozitív valós számokon értelmezett valós értékű függvény, amelyre minden x, y esetén $f(xy)\le xf(y)$. Igazoljuk, hogy minden x, y-ra:

$$f(xy)=xf(y).$$

(Um:4.4.6)(Mo:5.4.6)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.5. Kömal

3.5.1. KomalB4736

Legyen $n > 0$ egész és $x_i,\ i = 1 \dots n$ valós szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i^3| = \sum_{i=1}^{n} \frac{2|x_i|^3}{x_i^2 + 1}.$$

(Um:4.5.1)(Mo:5.5.1)

△ ▽ △

3.5.2. KomalB4753

Ha $x > 0$ valós, akkor

$$\sqrt{2x\sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+2)\sqrt{(2x+3)}}}} < \frac{15x+6}{8}$$

(Um:4.5.2)(Mo:5.5.2)

△ ▽ △

3.5.3. KomalF2465

Ha $n > 0$ egész, akkor

$$n^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

(Um:4.5.3)(Mo:5.5.3)

△ ▽ △

3.5.4. KomalF2501

Igaz-e hogy egy $n > 1$ természetes szám pozitív osztóinak számtani átlaga nagyobb mint $\sqrt{n}$?

(Um:4.5.4)(Mo:5.5.4)

△ ▽ △

3.5.5. KomalGy2254

Ha $a, b \geq 0$ valós számok, akkor:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)}{4} \geq ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b$$

(Um:4.5.5)(Mo:5.5.5)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.6. Hajós

3.6.1. Hajos20043

Mutassuk meg, hogy ha n egy pozitív egész, akkor

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}} < \sqrt{n} + 1$$

(Um:4.6.1)(Mo:5.6.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.6.2. Hajos20103

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$1\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}$$

ahol n pozitív egész és x_i valós szám $i = 1 \ldots n$.

(Um:4.6.2)(Mo:5.6.2)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.7. Imo

3.7.1. Imo19952

Legyen a, b, c pozitív valós szám és legyen $abc = 1$. Ekkor

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Um:4.7.1)(Mo:5.7.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.7.2. Imo19642

Tegyük fel, hogy a, b, c valósak egy $\triangle$ oldalai. Bizonyítsuk, be hogy ekkor:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

(Um:4.7.2)(Mo:5.7.2)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.8. Egmo

3.8.1. Egmo2016dI1

Legyen n páratlan pozitív egész. Jelöljön $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív valós számokat. Mutassuk meg, hogy:

$$\min_{i=1,\ldots,n}\left(x_i^2+x_{i+1}^2\right) \leq \max_{j=1,\ldots,n}\left(2x_jx_{j+1}\right),$$

teljesül, ahol $x_{n+1}=x_1$.

(Um:4.8.1)(Mo:5.8.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.9. Krs

3.9.1. Krs19612

Bebizonyítandó, hogy az 1-nél kisebb pozitív, a, b, c számokból képezett

$$(1-a)b,\ (1-b)c,\ (1-c)a$$

szorzatok nem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$-nél nagyobbak.

(Um:4.9.1)(Mo:5.9.1)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

3.10. Schev

3.10.1. Schev1

Igazoljuk, ha $n \geq 2$, akkor

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

(Um:4.10.1)(Mo:5.10.1)

△ ▽ △

3.10.2. Schev31

Ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Um:4.10.2)(Mo:5.10.2)

△ ▽ △

3.10.3. Schev13

Legyen $\{a_n\}$ pozitív valós sorozat, és

$$b_n = (a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Ekkor $\left\lfloor \sqrt{b_n} \right\rfloor$ szigorúan monoton nő.

(Um:4.10.3)(Mo:5.10.3)

△ ▽ △

3.10.4. Schev27

$x_1, \ldots, x_n$ pozitív valós számok esetén:

$$(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq \left(1 + (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$x_1, \ldots, x_n$ pozitív, 1-től kisebb valós számok esetén:

$$(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \leq \left(1 - (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

(Um:**??**)(Mo:**??**)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

4. Útmutatók

4.1. Alap

4.1.1. AlapAMGM

Indukció.

(Fa:3.1.1)(Mo:5.1.1)

△ ▽ △

4.1.2. AlapAMQM

Használjuk a Cauchy-féle indukciót.

(Fa:3.1.2)(Mo:5.1.2)

△ ▽ △

4.1.3. AlapBin

Binomiális-tétel.

(Fa:3.1.3)(Mo:5.1.3)

△ ▽ △

4.1.4. AlapSchur

Egyszerű algebrai átalakítás.

(Fa:3.1.4)(Mo:5.1.4)

△ ▽ △

4.1.5. AlapBer

Teljes indukció.

(Fa:3.1.5)(Mo:5.1.5)

△ ▽ △

4.1.6. AlapCBS

másodfokú polinom

(Fa:3.1.6)(Mo:5.1.6)

△ ▽ △

4.1.7. AlapGMHM
Az AlapAMGM egyszerű következménye.

(Fa:3.1.7)(Mo:5.1.7)

△ ▽ △

4.1.8. AlapRearr
Egy elemet a helyére téve nem csökken az összeg.

(Fa:3.1.8)(Mo:5.1.8)

△ ▽ △

4.2. Folklór

4.2.1. FolGoRa1
Indukció.

(Fa:3.2.1)(Mo:5.2.1)

△ ▽ △

4.2.2. FolSchurEx1
homogenizáció+AlapSchur

(Fa:3.2.2)(Mo:5.2.2)

△ ▽ △

4.2.3. FoleDef1
Próbáljuk meg AlapAMGM-et használni.

(Fa:3.2.3)(Mo:5.2.3)

△ ▽ △

4.2.4. FolCik1
AlapAMGM

(Fa:3.2.4)(Mo:5.2.4)

△ ▽ △

4.2.5. FolMdt1
Egyszerű.

(Fa:3.2.5)(Mo:5.2.5)

△ ▽ △

4.2.6. FolEng1
AlapCBS következmény.

(Fa:3.2.6)(Mo:5.2.6)

△ ▽ △

4.2.7. FolKrs19612
asd

(Fa:3.2.7)(Mo:5.2.7)

△ ▽ △

4.2.8. FolRearrMulti
Valahogy visszavezethető az AlapRearr-ra.

(Fa:3.2.8)(Mo:5.2.8)

△ ▽ △

4.2.9. FolRearrCorr
A AlapRearr speciális esetei.

(Fa:3.2.9)(Mo:5.2.9)

△ ▽ △

4.2.10. FolProd1
AlapBer+parciális törtekre bontás.

(Fa:3.2.10)(Mo:5.2.10)

△ ▽ △

4.2.11. FolPowMean
AlapAMGM segít.

(Fa:3.2.11)(Mo:5.2.11)

△ ▽ △

4.2.12. FolLem1
egyszerű.

(Fa:3.2.12)(Mo:5.2.12)

△ ▽ △

4.3. Arany Dániel

4.3.1. ArDa1975IIh2
Nem szimetrikus de ciklikus.

(Fa:3.3.1)(Mo:5.3.1)

△ ▽ △

4.3.2. ArDa1974IIhm2
Egyszerű AlapAMGM

(Fa:3.3.2)(Mo:5.3.2)

△ ▽ △

4.4. Oktv

4.4.1. Oktv1967Ia1

Egyszerű.

(Fa:3.4.1)(Mo:5.4.1)

△ ▽ △

4.4.2. Oktv1968Im1

Egyszerű AlapAMGM + parabola.

(Fa:3.4.2)(Mo:5.4.2)

△ ▽ △

4.4.3. Oktv1970I1

Csak bátorság kérdése.

(Fa:3.4.3)(Mo:5.4.3)

△ ▽ △

4.4.4. Oktv1973I5

AlapBer vagy indukció(?)

(Fa:3.4.4)(Mo:5.4.4)

△ ▽ △

4.4.5. Oktv1974II1

Alkalmas helyettesítéssel egyszerű.

(Fa:3.4.5)(Mo:5.4.5)

△ ▽ △

4.4.6. Oktv2007IIIkI2

Egyszerű.

(Fa:3.4.6)(Mo:5.4.6)

△ ▽ △

4.5. Kömal

4.5.1. KomalB4736

AlapAMGM használható.

(Fa:3.5.1)(Mo:5.5.1)

△ ▽ △

4.5.2. KomalB4753

AlapAMGM-ben gondolkodhatunk.

(Fa:3.5.2)(Mo:5.5.2)

△ ▽ △

4.5.3. KomalF2465

Használjuk a AlapBin-et.

(Fa:3.5.3)(Mo:5.5.3)

△ ▽ △

4.5.4. KomalF2501

Csoportosítsuk az osztókat, majd AlapAMGM

(Fa:3.5.4)(Mo:5.5.4)

△ ▽ △

4.5.5. KomalGy2254

Egyszerű.

(Fa:3.5.5)(Mo:5.5.5)

△ ▽ △

4.6. Hajós

4.6.1. Hajos20043

Teljes indukció.

(Fa:3.6.1)(Mo:5.6.1)

△ ▽ △

4.6.2. Hajos20103

Alkalmazzuk AlapAMGM-et

(Fa:3.6.2)(Mo:5.6.2)

△ ▽ △

4.7. Imo

4.7.1. Imo19952

Alkalmas helyettesítéssel visszevezathető FolEng1-re.

(Fa:3.7.1)(Mo:5.7.1)

△ ▽ △

4.7.2. Imo19642

AlapSchur ”környéke”.

(Fa:3.7.2)(Mo:5.7.2)

△ ▽ △

4.8. Egmo

4.8.1. Egmo2016dI1

A páratlan kitétel a legfontosabb. (Ne engedj az AlapAMGM csábításának.)

(Fa:3.8.1)(Mo:5.8.1)

△ ▽ △

4.9. Krs

4.9.1. Krs19612

A könyvbeli elegáns megoldás AlapAMGM alapú. Van kevésbé elegáns de még elemibb út is.

(Fa:3.9.1)(Mo:5.9.1)

△ ▽ △

4.10. Schev

4.10.1. Schev1

Egyszerű.

(Fa:3.10.1)(Mo:5.10.1)

△ ▽ △

4.10.2. Schev31

asd

(Fa:3.10.2)(Mo:5.10.2)

△ ▽ △

4.10.3. Schev13

AlapAMGM

(Fa:3.10.3)(Mo:5.10.3)

△ ▽ △

5. Megoldások

5.1. Alap

5.1.1. AlapAMGM

Cauchy nevéhez fűződő indukciót használjuk: először belátjuk a természetes számok egy részsorozatára az állítást, majd igazoljuk hogy ha $k+1$-re igaz, akkor k-ra is teljesül az összefüggés. $n=2$:

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{a_1+a_2}{2} \geq (a_1a_2)^{\frac{1}{2}}$$

$n=2k$-ra, felhasználva az $n=k$-ra és $n=2$-re igazolt állítást:

$$\frac{a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{2k} = \frac{\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2} \geq$$

$$\frac{(a_1\ldots a_k)^{\frac{1}{k}}+(a_{k+1}\ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}}}{2} \geq (a_1\ldots a_k a_{k+1}\ldots a_{2k})^{\frac{1}{2k}}$$

Tehát $n=2^k$-ra megvagyunk.

Most igazoljuk, hogy egy lépést visszafele is meg lehet tenni:

$$\frac{a_1+\ldots+a_k+(a_1\ldots a_k)^{\frac{1}{k}}}{k+1} \geq \left((a_1\ldots a_k)^{1+\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

Ebből átrendezéssel megkapjuk az $n=k$-esetet.

Egyenlőség $n=2$ esetben pontosan akkor van, ha $a_1=a_2$. Ha egyenlőek a számok akkor a két oldal megegyezik. Tegyük fel most hogy valamilyen $n=k>2$-ra a két oldal megegyezik, de van két szám ami különböző, pl.: $a_1 \neq a_2$:

$$(a_1\ldots a_k)^{\frac{1}{k}} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} =$$

$$= \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_k}{k} \geq \left(\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3\ldots a_k\right)^{\frac{1}{k}}$$

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$a_1a_2 \geq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

ami csak $a_1=a_2$ esetén lehetséges. Tehát ha a két oldal megegyezik, akkor a számok csak egyenlőek lehetnek.

(Fa:3.1.1)(Um:4.1.1)

△ ▽ △

5.1.2. AlapAMQM

$n = 1$ azonosság. Az $n = 2$ eset $0 \le \frac{(a_1-a_2)^2}{4}$-val ekvivalens, melynél az egyenlőség pontosan akkor teljesül ha $a_1 = a_2$. Tegyük fel most, hogy $n = k$-ra megvagyunk és vizsgáljuk az $n = 2k$-t:

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{2k}}{2k}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_1+\ldots+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{\left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}\right)^2}{2} \le \frac{\frac{a_1^2+\ldots+a_k^2}{k} + \frac{a_{k+1}^2+\ldots+a_{2k}^2}{k}}{2}$$

Itt az első $\le$-nél az $n = 2$-es, a másodiknál az $n = k$-s esetet használtuk ki. Tehát $n = 2k$ rendben van. Most a visszalépéssel foglalkozunk. Tegyük fel hogy valamely $n = k + 1$, $(k > 1)$-re megvagyunk:

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_k}{k}\right)^2 = \left(\frac{a_1 + \ldots + a_k + \frac{a_1+\ldots+a_k}{k}}{k+1}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{a_1^2 + \ldots + a_k^2 + \left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)^2}{k+1} \le \frac{a_1^2 + \ldots + a_k^2 + \frac{a_1^2+\ldots+a_k^2}{k}}{k+1} = \frac{a_1^2 + \ldots + a_k^2}{k}$$

Vagyis $k + 1$-ről vissza tudunk lépni k-ra.

Ha $a_i = a_j$ minden i, j-re akkor látjuk hogy egyenlőség van. Tegyük fel most, hogy egyenlőség van valamilyen $k > 2$-re, de van két különböző számink: pl. $a_1 \ne a_2$. Ekkor, ha kicseréljuk őket $\frac{a_1+a_2}{2}$-re, az átlag nem változik:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}{k} \le \frac{2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \ldots a_3^2 + a_k^2}{k} \Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

Ez csak $a_1 = a_2$ esetén lehet. Tehát az AM és QM egyenlősége implikálja a számok egyenlőségét.

(Fa:3.1.2)(Um:4.1.2)

△ ▽ △

5.1.3. AlapBin

A teljes binomiális kifejtésből elhagyunk ($n > 1$ miatt) legalább egy ($x > 0$ miatt) pozitív tagot.

(Fa:3.1.3)(Um:4.1.3)

△ ▽ △

5.1.4. AlapSchur

Az első egyenlőtlenség világos. Második: Vegyük észre, hogy szimmetrikus a kifejezés, azaz ha 3 változós $f(a,b,c)$ függvényként tekintünk rá, akkor értéke nem változik ha ugyanazokat számokat helyettesítjük bele más sorrendben. Ezért feltehetjuk, hogy $a \geq b \geq c$. Ekkor, csak az első két tagot figyelve (a harmadik ≥ 0):

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) =$$
$$= a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-a+a-c) =$$
$$= a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(a-c) + b^r(b-a)^2 =$$
$$= (a-c)(a^r - b^r)(a-b) + b^r(b-a)^2 \geq 0$$

Jegyezzük meg a gyakran használt alakját $r = 1$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$$

(Fa:3.1.4)(Um:4.1.4)

△ ▽ △

5.1.5. AlapBer

$n = 1$-re ok. Legyen $k > 0$, ekkor

$$(1+x_1)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+x_1+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) =$$
$$1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}$$

Ahol az első $\geq$-nél kihasználtuk hogy $1 + x_{k+1} > 0$, a másodiknál pedig a számok azonos előjelűségét.

(Fa:3.1.5)(Um:4.1.5)

△ ▽ △

5.1.6. AlapCBS

Ha a_i vagy b_i csupa nulla számokból áll, akkor rendben vagyunk, ezért feltesszük az ellenkezőjét. Tekintsük az

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i x)^2 \tag{def:p}$$

másodfokú polinomot. Ha elvégezzük a négyzetreemelést, akkor

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 - 2b_i a_i x + b_i^2 x^2\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = Ax^2 - Bx + C$$

megfelelő $A > 0, B, C > 0$ valós számokkal. Mivel $p \geq 0$ és felírható

$$A\left(\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right)$$

alakban, ezért $4AC - B^2$ nem lehet negatív (ekkor $x = -\frac{B}{2A}$-nál negatív lenne p). A $4AC - B^2 \geq 0$ éppen a nevezetes egyenlőtlenség.

Ha $a_i = \lambda b_i$ akkor behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla hogy egyenlőség áll fenn. Tegyük fel most, hogy egyenlőségünk van. Ekkor $p(x) = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$, azaz $p(-\frac{B}{2A}) = 0$, viszont p csak úgy lehet nulla ha (def:p)-ben minden tag nulla, vagyis $\lambda = -\frac{B}{2A}$ választással teljesül az állítás egyenlőséges része is. (egyértelműség?)

(Fa:3.1.6)(Um:4.1.6)

△ ▽ △

5.1.7. AlapGMHM

Alkalmazzuk az $\frac{1}{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$ számokra az AlapAMGM-t:

$$\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1}}{n}\right)^n \geq \frac{1}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}.$$

Ezt átrendezve megkapjuk a bizonyítandót.

(Fa:3.1.7)(Um:4.1.7)

△ ▽ △

5.1.8. AlapRearr

Foglalkozzunk a jobboldali egyenlőtelenséggel:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\varphi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Most $n-1$ lépésben átalakítjuk a φ permutációt az identikusra. Jelentse (a_i, b_j) azt hogy az aktuális sorrendben a_i és b_j *párok* a összegben. Legyen $k \geq 1$, és tegyük fel, hogy már megtettünk $k-1$ lépést, azaz (a_i, b_i) teljesül $k = 1, \ldots, k-1$ (ez az első lépés előtt teljesül (üres halmaz)). (a_k, b_i)-ben ha $k = i$ akkor továbbmegyünk a következő lépésre. Egyébként $b_i \geq b_k$ és $i > k$ a feltevések miatt, és (a_j, b_k) valamely $j > i$-re. Cseréljük fel b_i-t és b_k-t, ekkor az összeg változása:

$$-a_k b_i + a_k b_k - a_j b_k + a_j b_i = (a_k - a_j)(b_k - b_i) \geq 0,$$

tehát az aktuális összeget nem csökkentjük, amikor a leírt módon egy új elemet a helyére viszünk.

A bal oldali egyenlőtlenséghez eljuthatunk a fenti módon, vagy alkalmazzuk a jobboldali egyenlőtlenséget a $c_i = -b_i$ sorozatra.

(Fa:3.1.8)(Um:4.1.8)

△ ▽ △

5.2. Folklór

5.2.1. FolGoRa1

Vegyük észre, hogy itt a következő a_n sorozatról van szó: $a_1 = \sqrt{1}$ és $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ ha $n > 0$. Az alsó becslés $n = 1$-re világos, $n = k+1$-re az $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k} \geq \sqrt{1+1}$-bol adódik. A felső becslés $n = 1, 2$-re szintén ok, $n = k+1$-re az $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k} < \sqrt{1+2} < 2$ mutatja.

(Fa:3.2.1)(Um:4.2.1)

△ ▽ △

5.2.2. FolSchurEx1

Először homogenizálunk, azaz megpróbáljuk eltüntetni a fokszámkülönbségeket:

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 24abc \geq 1 = (a+b+c)^3 =$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc$$

Rendezve:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq$$
$$a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$$

AlapSchur $r = 1$ miatt valóban fennáll az egyenlőtlenség. Mivel egyenlőségnél fennáll a

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$$

ezért szükséges, hogy $abc = 0$ legyen, ehhez elég ha az egyik nulla, amit összevetve a AlapSchur egyenlőség feltételével: valamelyik nulla, a másik kettő megegyezik-et kapunk, ami elég is.

(Fa:3.2.2)(Um:4.2.2)

△ ▽ △

5.2.3. FoleDef1

Az $a_n < b_n$ világos.

$a_n \nearrow$: szorozzuk meg a_n-et 1-el és alkalmazzuk AlapAMGM-et:

$$a_n = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

$b_n \searrow$: $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ felírjuk és alkalmazzuk AlapAMGM-et:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} < 1$$

(Fa:3.2.3)(Um:4.2.3)

△ ▽ △

5.2.4. FolCik1

Ha a jobboldal tagjait AlapAMGM-mel becsüljük a baloldal minden tagja kettő $\frac{x^2+y^2}{2}$-ben szerepel a ciklikusság miatt.

(Fa:3.2.4)(Um:4.2.4)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.2.5. FolMdt1

Az

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d}\frac{a}{b} + \frac{d}{b+d}\frac{c}{d}$$

átalakítás mutatja hogy a mediáns valóban a két eredeti tört közé esik. (konvex kombináció)

(Fa:3.2.5)(Um:4.2.5)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.2.6. FolEng1

1. megoldás Alkalmazzuk AlapCBS-t az

$$\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} \text{ és a } \sqrt{b_i}$$

sorozatokra.

(Fa:3.2.6)(Um:4.2.6)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.2.7. FolKrs19612

dsa

(Fa:3.2.7)(Um:4.2.7)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.2.8. FolRearrMulti

Legyen először $t = 3$, az egyszerűség miatt jelöljük a sorozatokat a, b, c-vel. A nemnegatívitás fontos: $a = (-1, 1)$, $b = (-3, 2)$, $c = (-5, 10)$-nél az identikus permutációkhoz tartozó összeg 5, de van 20 nagyságú összeg is. Hasonlóan gondolkodhatunk, mint a AlapRearr-nál. A $d_i = b_{\varphi(i)}c_{\pi(i)}$ jelöléssel az eredeti sorozatra alkalmazzuk a $t = 2$ esetet:

$$\sum a_i b_{\varphi(i)} c_{\pi(i)} \leq a_i d_i$$

(Fa:3.2.8)(Um:4.2.8)

△ ▽ △

5.2.9. FolRearrCorr

Alkalmazzuk a AlapRearr-t az $a_i,\ b_i = a_i\ (1, \ldots, n)$ és a $a_i,\ b_i = \frac{1}{a_i}\ (1, \ldots, n)$ sorozatokra.

(Fa:3.2.9)(Um:4.2.9)

△ ▽ △

5.2.10. FolProd1

A AlapBer alapján:

$$LHS \geq 1 - \left(\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}\right),$$

ezért $S = \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$ felső becslésével póbálkozunk. Legyen $n \geq 3$. Mivel:

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)},$$

ezért

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{k} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(Fa:3.2.10)(Um:4.2.10)

△ ▽ △

5.2.11. FolPowMean

Legyen először $0 < p < q$ egész. Ekkor $a_i^q = 1 + b_i$ valamilyen $b_i > -1,\ \sum_i b_i = 0$ számokkal. Ekkor becsülhetjük az egyedi hatványokat a **??**-el:

$$a_i^p = (1+b_i)^{\frac{p}{q}} = \left((1+b_i)^p 1^{q-p}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

(Fa:3.2.11)(Um:4.2.11)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.2.12. FolLem1

Vizsgáljuk $(1-a)(b-1) \geq 0$-t.

(Fa:3.2.12)(Um:4.2.12)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.3. Arany Dániel

5.3.1. ArDa1975IIh2

A továbbiakban legyen $k, l > 0$ egész, és vezessük be a következő jelölést:

$$(k, l) = a^k b^l + b^k c^l + c^k a^l$$

Ekkor a bizonyítandó állítás: $(6, 0) \geq (5, 1)$. A következő tulajdonság hasznosnak bizonyul:

$$(k, l) \leq \frac{(k-1, l+1)}{2} + \frac{(k+1, l-1)}{2}$$

amit egyszerűen mutat az

$$a^k b^l = aba^{k-1}b^{l-1} \leq \frac{a^2+b^2}{2} a^{k-1}b^{l-1} = \frac{a^{k+1}b^{l-1}}{2} + \frac{a^{k-1}b^{l+1}}{2}$$

átalakítás ahol az AlapAMGM-t használtuk. Becsüljük most ennek segítségével a jobboldalt, először $(5, 1)$-et majd $(4, 2)$-t

$$(5, 1) \leq \frac{(4, 2)}{2} + \frac{(6, 0)}{2} \leq \frac{(3, 3)}{4} + \frac{(5, 1)}{4} + \frac{(6, 0)}{2}$$

Ezt rendezve

$$3(5, 1) \leq (3, 3) + 2(6, 0)$$

adódik. Viszont a FolCik1 azt mondja hogy $(2, 0) \geq (1, 1)$, amit a harmadik hatványokra alkalmazva $(6, 0) \geq (3, 3)$, így készen vagyunk.

(Fa:3.3.1)(Um:4.3.1)

△ ▽ △

5.3.2. ArDa1974IIhm2

Mivel $\sqrt{n-k}\sqrt{k+1} \leq \frac{n+1}{2}$, ezért $LHS \geq \frac{n+1}{n} n \frac{2}{n+1} = 2$.

(Fa:3.3.2)(Um:4.3.2)

△ ▽ △

5.4. Oktv

5.4.1. Oktv1967Ia1

$$\begin{aligned} ab + ac + bc = a^2 + b^2 + c^2 = \\ = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} \geq \\ \geq |ab| + |ac| + |bc| \geq |ab + ac + bc| \end{aligned}$$

Látjuk, hogy mindenütt egyenlőség kell hogy legyen, ezért AlapAMGM miatt $|a| = |b|, |a| = |c|, |b| = |c|$. Ha valamelyik nulla akkor mindegyik az, így feltehetjük hogy egyik sem az. Ha valamelyik kettő előjele különbözik, pl $a = -b$ akkor $ab = -b^2 < |ab| = b^2$, holott

$$ab + ac + bc = |ab| + |ac| + |bc|$$

Tehát a számok egyforma előjelűek is.

(Fa:3.4.1)(Um:4.4.1)

△ ▽ △

5.4.2. Oktv1968Im1

Mivel

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2,$$

ezért a $z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ helyettesítéssel, az állítás az

$$p(z) = z^2 - 2 - 3z + 4 = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) \geq 0$$

alakot ölti. AlapAMGM miatt $|z| \geq 2$, s így $p(z) \geq 0$, hiszen z sosem esik a gyökök közé. Egyenlőség csak $z = 2$-nél lehet, mely csak $a = b$ esetben lehet.

(Fa:3.4.2)(Um:4.4.2)

△ ▽ △

5.4.3. Oktv1970I1

$$1^3 = (a^2+b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2+b^2) = a^6 + b^6 + 3a^2b^2$$

Viszont AlapAMGM azt mondja:

$$3a^2b^2 \leq 3\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

vagyis a minimum $\frac{1}{4}$. (a helyek $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ Azt is láthatjuk hogy a maximum 1 (a helyek $(\pm 1, 0)$ és $(0, \pm 1)$).

(Fa:3.4.3)(Um:4.4.3)

△ ▽ △

5.4.4. Oktv1973I5

Alkalmazzuk AlapBer-t. Mivel

$$2 - \frac{2k-1}{n} = 1 + 1 - \frac{2k-1}{n} \geq 1 + 1 - \frac{2n-1}{n} = 1 + \frac{1}{n} - 1$$

ezért a feltétel rendben van. Így

$$LHS \geq 1 + n - \frac{1}{n}(1 + 3 + \ldots + 2n - 1) = 1 + n - \frac{1}{n}n^2 = 1 > RHS$$

(Fa:3.4.4)(Um:4.4.4)

△ ▽ △

5.4.5. Oktv1974II1

Legyen $x = a - b,\ y = b - c,\ z = c - a$. Ekkor egyrészt $x + y = -z$, másrészt az állítást

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} > 0$$

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} > \frac{-z}{x-y} = \frac{x+y}{y-z+z-y}$$

alakra hoztuk, melyről FolMdt1 miatt látjuk hogy igaz.

(Fa:3.4.5)(Um:4.4.5)

△ ▽ △

5.4.6. Oktv2007IIIkI2

$y = 1 \implies f(x) = f(x1) \leq xf(1)$ és $f(1) = f(\frac{x}{x}) = \frac{1}{x}f(x) \implies xf(1) \leq f(x)$, ezért $f(x) = xf(1)$, amivel rendben is vagyunk.

(Fa:3.4.6)(Um:4.4.6)

△ ▽ △

5.5. Kömal

5.5.1. KomalB4736

$y_i = |x_i|$ helyettesítéssel írjuk fel az eredeti rendszert:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2y_i^3}{y_i^2+1}.$$

alakban. Ekkor:

$$2\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i(y_i^2+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4y_i^3}{y_i^2+1} = \sum_{i=1}^{n} 4y_i\left(\frac{y_i^2}{y_i^2+1}\right)$$

Amiből:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i(y_i^2+1) - \sum_{i=1}^{n} 4y_i\left(\frac{y_i^2}{y_i^2+1}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i\left((y_i^2+1) - 4\left(1-\frac{1}{y_i^2+1}\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i\left((y_i^2+1) + \frac{4}{y_i^2+1} - 4\right)$$

AlapAMGM azt mondja, hogy

$$(y_i^2+1) + \frac{4}{y_i^2+1} \geq 4$$

és egyenlőség csak $y_i = 1$ esetben lehet ($y_i \geq 0!$). Összefoglalva nemnegatív tagokból álló

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\left((y_i^2+1) + \frac{4}{y_i^2+1} - 4\right)$$

összeg nulla, ami csak úgy lehet ha minden tagja nulla ekkor: $y_i = 0 \implies x_i = 0$ vagy $y_i = 1 \implies x_i = +1, -1$ esetben lehet. Látható hogy minden ilyen x_i rendszer tényleg megoldás. (összesen 3^n ilyen rendszer van.)

(Fa:3.5.1)(Um:4.5.1)

△ ▽ △

5.5.2. KomalB4753

Emeljük 16-ik hatványra a bal oldalt és alkalmazzuk AlapAMGM-et:

$$LHS^{16} = 1(2x)^8(2x+1)^4(2x+2)^2(2x+3) < \left(\frac{30x+12}{16}\right)^{16}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

(Fa:3.5.2)(Um:4.5.2)

△ ▽ △

5.5.3. KomalF2465

$n = 1$: $a_1 < \sqrt{\frac{2}{1}}$ - rendben. Legyen $n > 1$ és vizsgáljuk az $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$ alakot. Ekkor megállapíthatjuk, hogy $a_n > 0$, majd felhasználva AlapBin-t kapjuk:

$$n = (1+a_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \implies a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

(Fa:3.5.3)(Um:4.5.3)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.5.4. KomalF2501

1.megoldás: Ha n nem négyzetszám, akkor $2k$ osztója melyek párba állíthatóak: $(d_i, \frac{n}{d_i})$ $i = 1 \dots k$. Ekkor az osztók számtani átlagára:

$$\frac{d_1 + \frac{n}{d_1} + \dots + d_k + \frac{n}{d_k}}{2k} > n^{k\,\frac{1}{2k}} = \sqrt{n}$$

adódik az AlapAMGM alapján, kihasználva hogy a szereplő osztók különbözőek.

Ha n négyzetszám, akkor $2k+1$ osztója van. Egy kakukktojás $d = \sqrt{n}$, nincsen párja. A többieket állítsuk párba mint az előbb. Az átlag ekkor:

$$\frac{d + d_1 + \frac{n}{d_1} + \dots + d_k + \frac{n}{d_k}}{2k+1} > (dn^k)^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt{n}$$

Tehát igaz a kérdéses állítás.

2.megoldás: Észrevehetjük, hogy felesleges az esetszétválasztás az előbbi megoldásban. Legyenek az osztók: $d_1, \dots, d_k$. Állítsuk párba d_i-t $\frac{n}{d_i}$-vel $i = 1 \dots n$. Képezzük a kapott $2k$ szám átlagát. Ekkor

$$\frac{d_1 + \dots + d_k}{k} = \frac{d_1 + \frac{n}{d_1} + \dots + d_k + \frac{n}{d_k}}{2k} > (n^k)^{\frac{1}{2k}} = \sqrt{n}$$

Itt az első egyenlőség azért áll fenn, mert minden osztót pontosan kétszer vettünk figyelembe, a szigorú egyenlőtlenség pedig azért van mert $n > 1$-nak legalább 2 különböző osztója van.

(Fa:3.5.4)(Um:4.5.4)

$\triangle \bigtriangledown \triangle$

5.5.5. KomalGy2254

(Az AlapAMGM-et többször alkalmazzuk.) A cél tehát:

$$\frac{a+b}{2}(a+b+\frac{1}{2}) \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

igazolása. Ehhez elég lenne belátni, hogy

$$a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$(a+b)^2 + (a+b) + \frac{1}{4} \geq (a+b) + 2\sqrt{ab}$$

Ha

$$(a+b)^2 + (a+b) + \frac{1}{4} \geq 2(a+b)$$

lenne akkor készen lennénk. Viszont

$$(a+b)^2 - (a+b) + \frac{1}{4} \geq 0$$

mindig teljesül. Hiszen $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$.

(Fa:3.5.5)(Um:4.5.5)

△ ▽ △

5.6. Hajós

5.6.1. Hajos20043

Érdemes mindig az "elejét" megnézni, hogy rendben van-e: $n = 1$-re az állítás: $\sqrt{1} < \sqrt{1} + 1$. $n = 2$-re az állítás: $\sqrt{2 + \sqrt{1}} < \sqrt{2} + 1$. $n = k + 1$-et vizsgáljuk, ahol $k > 0$,

$$\sqrt{k + 1 + \sqrt{k + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < \sqrt{k + 1 + \sqrt{k} + 1}$$

Itt a becslésnél az indukciós feltevést és a négyzetgyök függvény monotonitását használtuk. Végül a keresett

$$\sqrt{k + 1 + \sqrt{k} + 1} < \sqrt{k+1} + 1$$

fennállását pl. négyzetre-emeléssel igazoljuk.

(Fa:3.6.1)(Um:4.6.1)

△ ▽ △

5.6.2. Hajos20103

Alkalmazzuk AlapAMGM-et a bal oldal minden tagjára:

$$LHS \leq \frac{1^2 + x_1 - 1^2}{2} + \frac{2^2 + x_2 - 2^2}{2} + \ldots + \frac{n^2 + x_n - n^2}{2} = RHS$$

ahol LHS és RHS a bal és jobb oldalakat jelöli. A feltételek miatt:

$$i = \sqrt{x_i - i^2} \implies i^2 = x_i - i^2 \implies 2i^2 = x_i \quad i = 1 \ldots n$$

lehet csak, melyről könnyen meggyőződhetünk hogy valóban megoldás.

(Fa:3.6.2)(Um:4.6.2)

△ ▽ △

5.7. Imo

5.7.1. Imo19952

Legyen $x = \frac{1}{a},\ y = \frac{1}{b},\ z = \frac{1}{c}$. Ekkor a bizonyítandó az:

$$\frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = (*)$$

alakot ölti. Tovább becsülhetjük $(*)$-ot a FolEng1-val:

$$(*) \geq \frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)} = \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{1}{2}3(xyz)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

ahol használtuk még AlapAMGM-et és $xyz = 1$-et.

(Fa:3.7.1)(Um:4.7.1)

△ ▽ △

5.7.2. Imo19642

Semmi más mint a AlapSchur-ban az $r = 1$ eset.

(Fa:3.7.2)(Um:4.7.2)

△ ▽ △

5.8. Egmo

5.8.1. Egmo2016dI1

Osszuk el mindkét oldalt 2-vel, hogy középértékeket lássunk. Az $n = 1$ eset nem igényel magyarázatot.

Képzeljük el a számok négyzeteit egy kör mentén felírva (pl. pozitív körüljárás szerint). Vegyük észre hogy nincsen jelentősége hogy melyik számtól indulunk el körben, csak az a fontos hogy minden szomszédos pár középértékét vegyük figyelembe. Ha van két egyforma szomszédos szám, akkor az aktuális középértékek egybeesnek, az LHS csak kisebb lehet, az RHS csak nagyobb így kész vagyunk. Ha van 3 szomszédos szám melyekre $a < b < c$ akkor $\frac{a+b}{2} < \sqrt{bc}$ miatt $LHS < RHS$, így újra teljesül az állítás. Hasonlóan gondolhatunk az

$a > b > c$ szomszédos számok esetére. Most feltehetjük, hogy nincs 2 szomszédos egyforma és nincs 3 hosszú lánc a kör mentén. Induljunk el a legkisebb a_1 számtól valamelyik irányban, ekkor az eddigiek miatt a következőt látjuk:

$$a_1 < a_2 > a_3 < \ldots < a_1,$$

ahol az utolsó $<$ a páratlanság miatt van, de ez lehetetlen. Egy legkisebbhez nem érkezhetünk alulról.

Vegyük észre, hogy a feladatban egy K középérték $\min(a,b) \le K \le \max(a,b)$ tulajdonságán kívül semmit sem használtunk ki, így az a kicsit meglepő állítás is érvényes, hogy:

$$\min_{i=1,\ldots,n} K_i(x_i, x_{i+1}) \le \max_{j=1,\ldots,n} K_{n+j}(x_i, x_{i+1})$$

ahol $K_1, \ldots, K_{2n}$ középértékek tetszőleges sorozata.

(Fa:3.8.1)(Um:4.8.1)

△ ▽ △

5.9. Krs

5.9.1. Krs19612

A számok felírhatók

$$a = \frac{1}{2} + \delta_a, \; b = \frac{1}{2} + \delta_b, \; c = \frac{1}{2} + \delta_c,$$

alakban, alkalmas $-\frac{1}{2} < \delta_a, \delta_b, \delta_c < \frac{1}{2}$ valós számokkal. Tegyük fel hogy mindannyian nagyobbak mint $\frac{1}{4}$. Ekkor:

$$(1-a)b = \left(\frac{1}{2} - \delta_a\right)\left(\frac{1}{2} + \delta_b\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\delta_b - \delta_a}{2} - \delta_a\delta_b > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \delta_b > \delta_a + 2\delta_a\delta_b$$

hasonlóan az $(1-b)c$ és $(1-c)a$ kifejezésekre:

$$\delta_b > \delta_a + 2\delta_a\delta_b$$

$$\delta_c > \delta_b + 2\delta_b\delta_c \qquad \text{(orig)}$$

$$\delta_a > \delta_c + 2\delta_a\delta_c.$$

Ezeket átrendezve, felhasználva $1 - 2\delta_x > 0,\ x = a, b, c$-re, kapjuk hogy:

$$\delta_b > \frac{\delta_a}{1-2\delta_a}$$
$$\delta_c > \frac{\delta_b}{1-2\delta_b}$$
$$\delta_a > \frac{\delta_c}{1-2\delta_c}.$$

Innen könnyen látható, hogy a δ_x-ek egyforma előjelűek. Ekkor (orig)-ot szemrevételezve: $\delta_b > \delta_a > \delta_c > \delta_b$ ellentmondásra jutunk.

(Fa:3.9.1)(Um:4.9.1)

△ ▽ △

5.10. Schev

5.10.1. Schev1

Mivel

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

ezért:

$$LHS = \frac{(n-1)!\frac{(n+1)!}{2}}{n!^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

(Fa:3.10.1)(Um:4.10.1)

△ ▽ △

5.10.2. Schev31

Alkalmazzuk kétszer az AlapAMGM-et:

$$LHS + 3 = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{((b+c)(c+a)(a+b))^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= \frac{\frac{9}{2}(2a+2b+2c)}{((b+c)(c+a)(a+b))^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{9}{2}.$$

(Fa:3.10.2)(Um:4.10.2)

△ ▽ △

5.10.3. Schev13

Legyen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ és $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$. Ekkor

$$b_{n+1} - b_n = (S_n + a_{n+1})\left(T_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) - S_n T_n = a_{n+1} T_n + \frac{S_n}{a_{n+1}} + 1 \geq 2\sqrt{b_n} + 1, \implies$$

$$\sqrt{b_{n+1}}^2 \geq \left(\sqrt{b_n} + 1\right)^2 \implies \sqrt{b_{n+1}} \geq \left(\sqrt{b_n} + 1\right),$$

amivel készen is vagyunk, hiszen ekkor az egészrészek különbsége is legalább 1.

(Fa:3.10.3)(Um:4.10.3)

△ ▽ △