

Nevezetes egyenlőtlenségek

Rendezetlen

Rendezetlen

Fa Binomiális

Fa Bernoulli

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Nevezetes egyenlőtlenségek

Fa Binomiális

Legyen $x > 0$ valós és $n > 1$, akkor:

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{1}x$$

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{2}x^2$$

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{k}x^k \quad 1 \leq k \leq n$$

Mo Binomiális

Rendezetlen

Mo Binomiális

A teljes binomiális kifejtésből elhagyunk ($n > 1$ miatt) legalább egy ($x > 0$ miatt) pozitív tagot.

Fa Binomiális

Rendezetlen

Fa Bernoulli

Legyen $n > 0$ egész és $x_i > -1$, $i = 1, \dots, n$ azonos előjelű valósak.
Ekkor

$$(1 + x_1) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$$

Mo Bernoulli

Rendezetlen

Mo Bernoulli

Teljes indukció.

$n = 1$ -re ok. Legyen $k > 0$:

$$(1 + x_1) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}$$

Ahol az első \geq -nél kihasználtuk hogy $1 + x_{k+1} > 0$, a másodiknál pedig a számok azonos előjelűségét.

Fa Bernoulli

Rendezetlen

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

$$\sigma \leq \frac{R}{2}$$

ha X egy valségi változó $m \leq X \leq M$, $R = M - m$, $\sigma = D(X)$.

Mo Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Rendezetlen

Mo Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Legyen $Y = \frac{X-m}{M-m}$. Ekkor $0 \leq Y \leq 1$ és:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \leq \\ \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 &= \mathbb{E}[Y](1 - \mathbb{E}[Y]) \leq \frac{1}{4},\end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\mathbb{D}^2[X - m]}{(M - m)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{A}[X^2]^2$$

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Rendezetlen

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

$$\sigma^2 \leq (M - \mu)(\mu - m)$$

ha X egy valségi változó $m \leq X \leq M$, $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma = \mathbb{D}[X]$.

Mo Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Rendezetlen

Mo Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Legyen $Y = \frac{X-m}{M-m}$. Ekkor $0 \leq Y \leq 1$ és:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \leq \\ \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 &= \mathbb{E}[Y](1 - \mathbb{E}[Y]) = \\ &\left(\frac{\mu - m}{M - m}\right) \left(\frac{M - \mu}{M - m}\right)\end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\mathbb{D}^2[X - m]}{(M - m)^2} = \frac{\mathbb{D}^2[X]}{(M - m)^2} \leq \left(\frac{\mu - m}{M - m}\right) \left(\frac{M - \mu}{M - m}\right)$$

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Rendezetlen