Nevezetes egyenlőtlenségek

Rendezetlen

Rendezetlen

Fa Binomiális

Fa Bernoulli

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Nevezetes egyenlőtlenségek

Fa Binomiális

Legyen $x > 0$ valós és $n > 1$, akkor:

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{1} x$$

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{2} x^2$$

$$(1+x)^n > 1 + \binom{n}{k} x^k \qquad 1 \leq k \leq n$$

Mo Binomiális Rendezetlen

Mo Binomiális

A teljes binomiális kifejtésből elhagyunk ($n > 1$ miatt) legalább egy ($x > 0$ miatt) pozitív tagot.

Fa Binomiális Rendezetlen

Fa Bernoulli

Legyen $n > 0$ egész és $x_i > -1,\ i = 1, \ldots, n$ azonos előjelű valósak.
Ekkor

$$(1 + x_1) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_n$$

Mo Bernoulli Rendezetlen

Mo Bernoulli

Teljes indukció.

$n = 1$-re ok. Legyen $k > 0$:

$$(1+x_1)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+x_1+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) =$$
$$1+x_1+\dots+x_k+x_{k+1}+(x_1+\dots+x_k)x_{k+1} \geq 1+x_1+\dots+x_k+x_{k+1}$$

Ahol az első $\geq$-nél kihasználtuk hogy $1+x_{k+1} > 0$, a másodiknál pedig a számok azonos előjelűségét.

Fa Bernoulli Rendezetlen

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

$$\sigma \leq \frac{R}{2}$$

ha X egy valségi változó $m \leq X \leq M,\ R = M - m,\ \sigma = D(X)$.

Mo Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$ Rendezetlen

Mo Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$

Legyen $Y = \frac{X-m}{M-m}$. Ekkor $0 \leq Y \leq 1$ és:

$$\mathbb{D}^2[Y] = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 \leq$$
$$\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y](1 - \mathbb{E}[Y]) \leq \frac{1}{4},$$

azaz

$$\frac{\mathbb{D}^2[X-m]}{(M-m)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Fa Popoviciu: $\sigma \leq \frac{R}{2}$ Rendezetlen

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

$$\sigma^2 \leq (M - \mu)(\mu - m)$$

ha X egy valségi változó $m \leq X \leq M,\ \mu = \mathbb{E}[X],\ \sigma = \mathbb{D}[X]$.

Mo Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$ Rendezetlen

Mo Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$

Legyen $Y = \frac{X-m}{M-m}$. Ekkor $0 \leq Y \leq 1$ és:

$$\mathbb{D}^2[Y] = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 \leq$$
$$\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y](1 - \mathbb{E}[Y]) =$$
$$\left(\frac{\mu - m}{M - m}\right)\left(\frac{M - \mu}{M - m}\right)$$

azaz

$$\frac{\mathbb{D}^2[X - m]}{(M - m)^2} = \frac{\mathbb{D}^2[X]}{(M - m)^2} \leq \left(\frac{\mu - m}{M - m}\right)\left(\frac{M - \mu}{M - m}\right)$$

Fa Bhatia-Davis: $\sigma^2 \leq (\mu - m)(M - \mu)$ Rendezetlen