Nevezetes határértékek

az e-szám

alap-Fa

Nevezetes határértékek

alap-Fa

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

alap-Mo az e-szám

alap-Mo

A számtani-mértani közép miatt:

$$1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(\frac{1+1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton nő.

A mértani-harmonikus közép miatt:

$$1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{1+1-\frac{1}{n+1}+\cdots+1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

az $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ szigorúan monoton csökken. Könnyen látható, hogy:

$$a_n < b_m \qquad \forall m, n$$
$$b_n - a_n = \frac{a_n}{n}$$

Mindezek miatt a sorozatok konvergensek és a határértékeik egybeesnek. Ezt a számot e-vel szokták jelölni.

alap-Fa az e-szám

n-edik gyök

Mi is ez?-Fa

konstans-Fa

n-Fa

polinom-Fa

$n!$-Fa

Nevezetes határértékek

Mi is ez?-Fa

$$a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\forall\ a > 0, n > 1\ :\ \exists!\ b > 0\ :\ b^n = a$$

jele: $b = a^{\frac{1}{n}}$

Tulajdonság:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Mi is ez?-Mo n-edik gyök

Mi is ez?-Mo

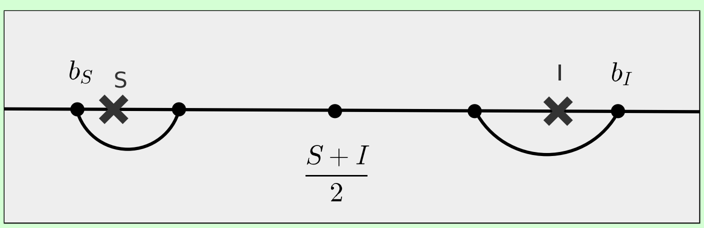
Legyen $a > 1$ és

$$a_- = \{b \ : \ b^n < a\}$$
$$a_+ = \{b \ : \ b^n > a\}$$

Megfigyelések:

- a_- és a_+ nemüresek
- bármely $b \in a_+$ felső korlátja a_-
- bármely $b \in a_-$ alsó korlátja a_+

A valós számok felső/alsó-határ tulajdonsága miatt egyértelműen létezik $S = \sup a_-$ és $I = \inf a_+$ és $S \leq I$. Ha $S < I$ akkor az ábra segít megtalálni az ellentmondást:



Tehát $S = I$. Ezért: $I^n = S^n \leq a$ és $I^n \geq a$, vagyis az $S = I$ szám valóban $a^{\frac{1}{n}}$-ként viselkedik.

Mi is ez?-Fa n-edik gyök

konstans-Fa

$$a^{\frac{1}{n}} \to 1 \qquad a \in \mathbb{R}$$

konstans-Mo n-edik gyök

konstans-Mo

Legyen $a > 1$, ekkor valamely $a_n > 0$ sorozattal $a^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$. A következő megállapításokat tehetjük:

$$a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \qquad \text{(Bernoulli)}$$
$$\frac{a-1}{n} \geq a_n$$
$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a-1}{n} \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

$a < 1$ esetén alkalmazzuk $\frac{1}{a}$-ra a fentieket.

konstans-Fa n-edik gyök

n-Fa

$$n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

n-Mo n-edik gyök

n-Mo

A következő megállapításokat tehetjük:

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \qquad \text{(Binomiális)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq a_n$$

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

n-Fa n-edik gyök

polinom-Fa

$$a_0, \ldots, a_m > 0$$

$$P(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$

$$P(n)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

polinom-Mo n-edik gyök

polinom-Mo

Legyen $a = \max\{a_0, \ldots, a_m\}$:

$$a_m n^m \leq P(n) \leq (m+1) a n^m \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

polinom-Fa n-edik gyök

$n!$-Fa

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \to \infty$$

$n!$-Mo n-edik gyök

$n!$-Mo

A számtani-négyzetes közép és egyszerű átalakítás mutatja:

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{k}}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum \frac{1}{k^2}}{n} \leq \frac{\sum \frac{2}{k(k+1)}}{n} = 2\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} \leq \frac{2}{n}$$

A mértani-harmonikus középből:

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{k}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$n!$-Fa n-edik gyök