Nevezetes határértékek

az e-szám

n-edik gyök

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

az e-szám

Fa	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
Fa	$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
Desc	súlyozott AMGM
Fa	$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

Nevezetes határértékek

Fa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \nearrow \tag{ebase}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \searrow$$

$$a_n < b_m \qquad \forall n, m$$

Azaz:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Mo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ az e-szám

Mo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

A számtani-mértani közép miatt:

$$1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1+1+\frac{1}{n}+\dots+1+\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton nő.

A mértani-harmonikus közép miatt:

$$1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{1+1-\frac{1}{n+1}+\dots+1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \\ = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

az $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ szigorúan monoton csökken. Könnyen látható, hogy:

$$a_n < b_m \qquad \forall m, n$$
$$b_n - a_n = \frac{a_n}{n}$$

Mindezek miatt a sorozatok konvergensek és a határértékeik egybeesnek. Ezt a számot e-vel szokták jelölni.

Fa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ az e-szám

Fa $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \nearrow \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \searrow \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Mo $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ az e-szám

Mo $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$$1 = 1^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\ = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

ebase miatt:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \nearrow \frac{1}{e}$$

Hasonlóan:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \searrow \frac{1}{e}$$

Fa $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ az e-szám

Desc **súlyozott AMGM**

Súlyozott számtani-mértani közép-re vonatkozó egyenlőtlenség:

$$0 \le a, b \in \mathbb{R} \qquad \alpha \in [0,1] \tag{wamgm}$$
$$a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha) b$$

az e-szám

Fa $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \mathrm{e}$$

ha $|a_n| \to +\infty$

Mo $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ az e-szám

Mo $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

wamgm-ből egyszerűen megkapjuk, hogy:

$$0 \leq A \leq B \implies \left(1+\frac{1}{A}\right)^{A} \leq \left(1+\frac{1}{B}\right)^{B}$$

Legyen $0 \leq a_n \to +\infty$ és $b_n = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ és $K \in \mathbb{N}$. A feltevések miatt van olyan n_K, hogy ha $n \geq n_K$:

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K} \leq b_n \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{1+\lfloor a_n \rfloor}$$

ezért:

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K} \leq b_n \leq \mathrm{e}$$

Ha $0 \geq a_n \to -\infty$, akkor az

$$1 = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{-a_n}\left(1+\frac{1}{-a_n+1}\right)^{-a_n}$$

átalakításból világos, hogy $b_n \to \mathrm{e}$.

TODO: $|a_n| \to \infty$

Fa $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ az e-szám

n-edik gyök

Desc Létezés..

Fa konstans

Fa n

Fa polinom

Fa $n!$

Nevezetes határértékek

Létezés...

$$a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\forall\ a > 0, n > 1\ :\ \exists!\ b > 0\ :\ b^n = a$$

jele: $b = a^{\frac{1}{n}}$

Továbbá:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}},$$

így lehet beszélni egyszerűen $a^{\frac{m}{n}}$-ről.

Indoklás. Legyen $a > 1$ és

$$a_- = \{b\ :\ b^n < a\}$$

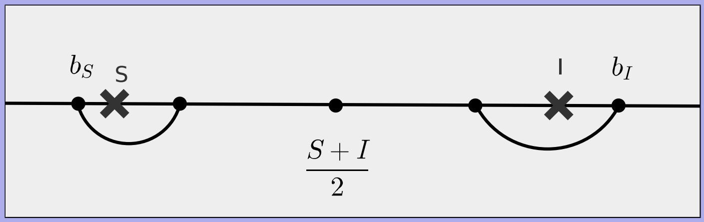
$$a_+ = \{b\ :\ b^n > a\}$$

Megfigyelések:

- a_- és a_+ nemüresek
- bármely $b \in a_+$ felső korlátja a_-
- bármely $b \in a_-$ alsó korlátja a_+

A valós számok felső/alsó-határ tulajdonsága miatt egyértelműen létezik $S = \sup a_-$ és $I = \inf a_+$ és $S \leq I$.

Ha $S < I$ akkor az ábra segít megtalálni az ellentmondást:



Tehát $S = I$. Ezért: $I^n = S^n \leq a$ és $I^n \geq a$, vagyis az $S = I$ szám valóban $a^{\frac{1}{n}}$-ként viselkedik.
Ha $y = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ és $z = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, akkor

$$y^n = a^m$$
$$z^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mn} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = a^m,$$

ezért mindkettő az a^m szám n-ik gyöke, ami egyértelmű $\implies y = z$.

n-edik gyök

Fa konstans

$$a^{\frac{1}{n}} \to 1 \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mo konstans n-edik gyök

Mo konstans

Legyen $a > 1$, ekkor valamely $a_n > 0$ sorozattal $a^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$. A következő megállapításokat tehetjük:

$$a = (1+a_n)^n \geq 1 + na_n \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$\frac{a-1}{n} \geq a_n$$

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a-1}{n} \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

$a < 1$ esetén alkalmazzuk $\frac{1}{a}$-ra a fentieket.

Fa konstans n-edik gyök

Fa n

$$n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Mo n n-edik gyök

Mo n

A következő megállapításokat tehetjük:

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \qquad \text{(Binomiális)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq a_n$$

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

Fa n n-edik gyök

Fa polinom

$$a_0, \ldots, a_m > 0$$
$$P(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$
$$P(n)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Mo polinom n-edik gyök

Mo polinom

Legyen $a = \max\{a_0, \ldots, a_m\}$:

$$a_m n^m \leq P(n) \leq (m+1)an^m \qquad \text{(rendőr-elv)}$$

Fa polinom n-edik gyök

Fa $n!$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \to \infty$$

Mo $n!$ n-edik gyök

Mo $n!$

A számtani-négyzetes közép és egyszerű átalakítás mutatja:

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{k}}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum \frac{1}{k^2}}{n} \leq \frac{\sum \frac{2}{k(k+1)}}{n} = 2\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} \leq \frac{2}{n}$$

A mértani-harmonikus középből:

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{k}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Fa $n!$ n-edik gyök

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Desc $\sin - \tan$ lemma

Fa $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$

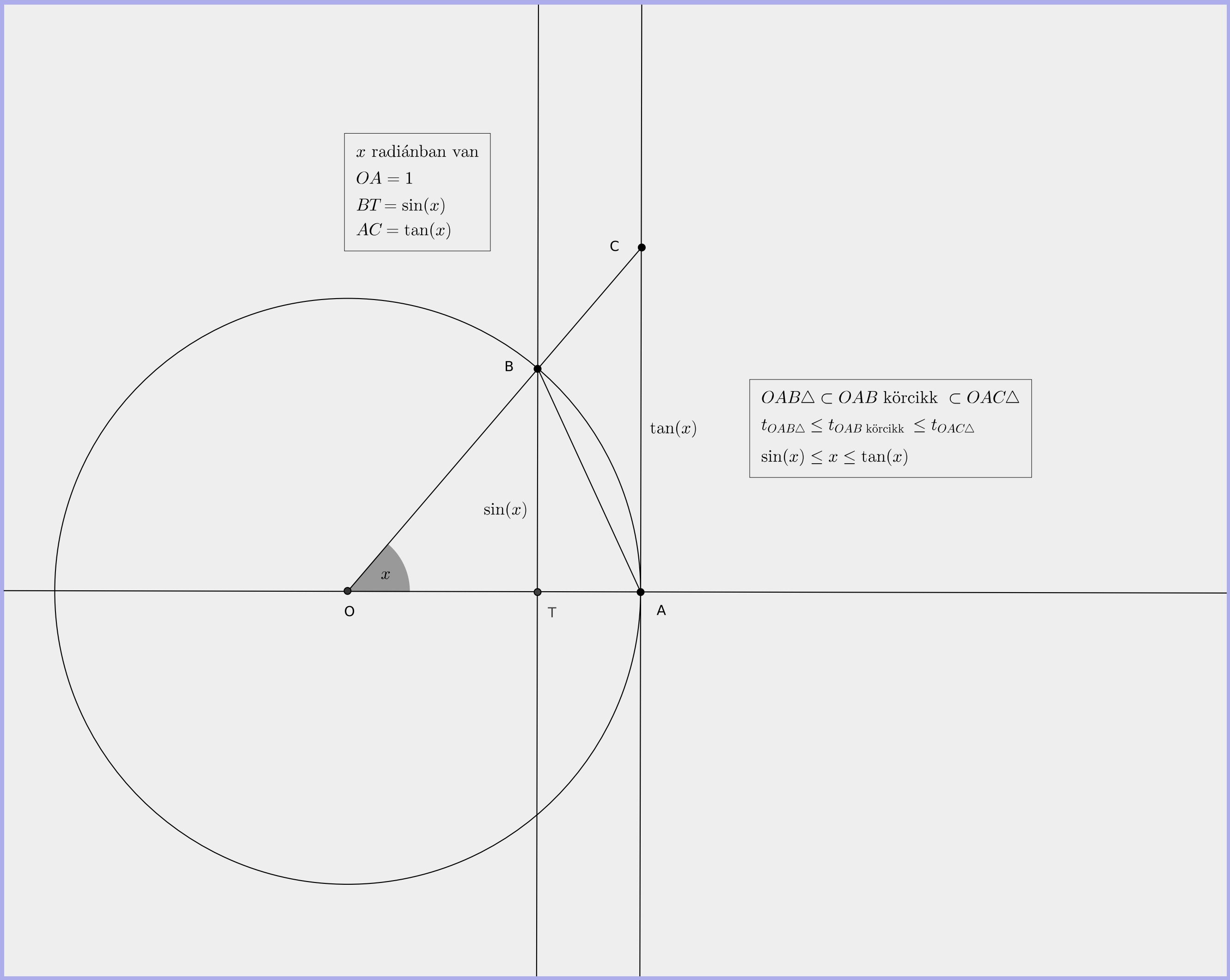
Fa $\frac{1-\cos(x)}{x} \to 0$

Fa $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \to 0$

Nevezetes határértékek

Desc $\sin - \tan$ **lemma**

$$\sin(x) < x < \tan(x) \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(sin-tan)}$$



$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mo $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ $\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$

A sin-tan lemma miatt:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Fa $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ $\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\frac{1-\cos(x)}{x} \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

Mo $\frac{1-\cos(x)}{x} \to 0$ $\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\frac{1-\cos(x)}{x} \to 0$

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x}{2}$$

Fa $\frac{1-\cos(x)}{x} \to 0$ $\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2} = 0$$

Mo $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \to 0$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \to 0$

$$\frac{\tan(x)-x}{x^2} =$$
$$\frac{\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}-1}{x} =$$
$$\frac{\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}-\frac{\sin(x)}{x}+\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} =$$

Fa $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \to 0$ $\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke