

Nevezetes határértékek

az e-szám

n-edik gyök

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

az e-szám

Fa alap

Nevezetes határértékek

Fa alap

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mo alap

az e-szám

Mo alap

A számtani-mértani közép miatt:

$$1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1 + 1 + \frac{1}{n} + \dots + 1 + \frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton nő.

A mértani-harmonikus közép miatt:

$$\begin{aligned} 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{1 + 1 - \frac{1}{n+1} + \dots + 1 - \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

az $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ szigorúan monoton csökken. Könnyen látható, hogy:

$$\begin{aligned} a_n &< b_m \quad \forall m, n \\ b_n - a_n &= \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

Mindezek miatt a sorozatok konvergensek és a határértékeik egybeesnek. Ezt a számot e -vel szokták jelölni.

Fa alap

az e -szám

n-edik gyök

Fa Létezés..

Fa konstans

Fa n

Fa polinom

Fa $n!$

Nevezetes határértékek

Fa Létezés...

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\forall a > 0, n > 1 : \exists! b > 0 : b^n = a$$

$$\text{jele: } b = a^{\frac{1}{n}}$$

Tulajdonság:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Mo Létezés..

n-edik gyök

Mo Létezés...

Legyen $a > 1$ és

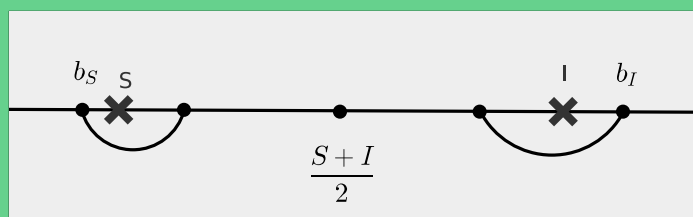
$$a_- = \{b : b^n < a\}$$

$$a_+ = \{b : b^n > a\}$$

Megfigyelések:

- a_- és a_+ nemüresek
- bármely $b \in a_+$ felső korlátja a_-
- bármely $b \in a_-$ alsó korlátja a_+

A valós számok felső/alsó-határ tulajdonsága miatt egyértelműen létezik $S = \sup a_-$ és $I = \inf a_+$ és $S \leq I$. Ha $S < I$ akkor az ábra segít megtalálni az ellentmondást:



Tehát $S = I$. Ezért: $I^n = S^n \leq a$ és $I^n \geq a$, vagyis az $S = I$ szám valóban $a^{\frac{1}{n}}$ -ként viselkedik.

Fa Létezés..

n-edik gyök

Fa konstans

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

Mo konstans

n-edik gyök

Mo konstans

Legyen $a > 1$, ekkor valamely $a_n > 0$ sorozattal $a^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$. A következő megállapításokat tehetjük:

$$a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \quad (\text{Bernoulli})$$

$$\frac{a - 1}{n} \geq a_n$$

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a - 1}{n} \quad (\text{rendőr-elv})$$

$a < 1$ esetén alkalmazzuk $\frac{1}{a}$ -ra a fentieket.

Fa konstans

n-edik gyök

Fa n

$$n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Mo n

n -edik gyök

Mo n

A következő megállapításokat tehetjük:

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \quad (\text{Binomiális})$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq a_n$$

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (\text{rendőrlv})$$

Fa n

n -edik gyök

Fa polinom

$$a_0, \dots, a_m > 0$$

$$P(n) = \sum_{k=0}^m a_k n^k$$

$$P(n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Mo polinom

n-edik gyök

Mo polinom

Legyen $a = \max\{a_0, \dots, a_m\}$:

$$a_m n^m \leq P(n) \leq (m+1)an^m \quad (\text{rendőrlv})$$

Fa polinom

n-edik gyök

Fa $n!$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$$

Mo $n!$

n -edik gyök

Mo $n!$

A számtani-négyzetes közép és egyszerű átalakítás mutatja:

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{k}}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum \frac{1}{k^2}}{n} \leq \frac{\sum \frac{2}{k(k+1)}}{n} = 2 \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} \leq \frac{2}{n}$$

A mértani-harmonikus középből:

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{k}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Fa $n!$

n -edik gyök

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Desc $\sin - \tan$ lemma

$$\text{Fa } \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

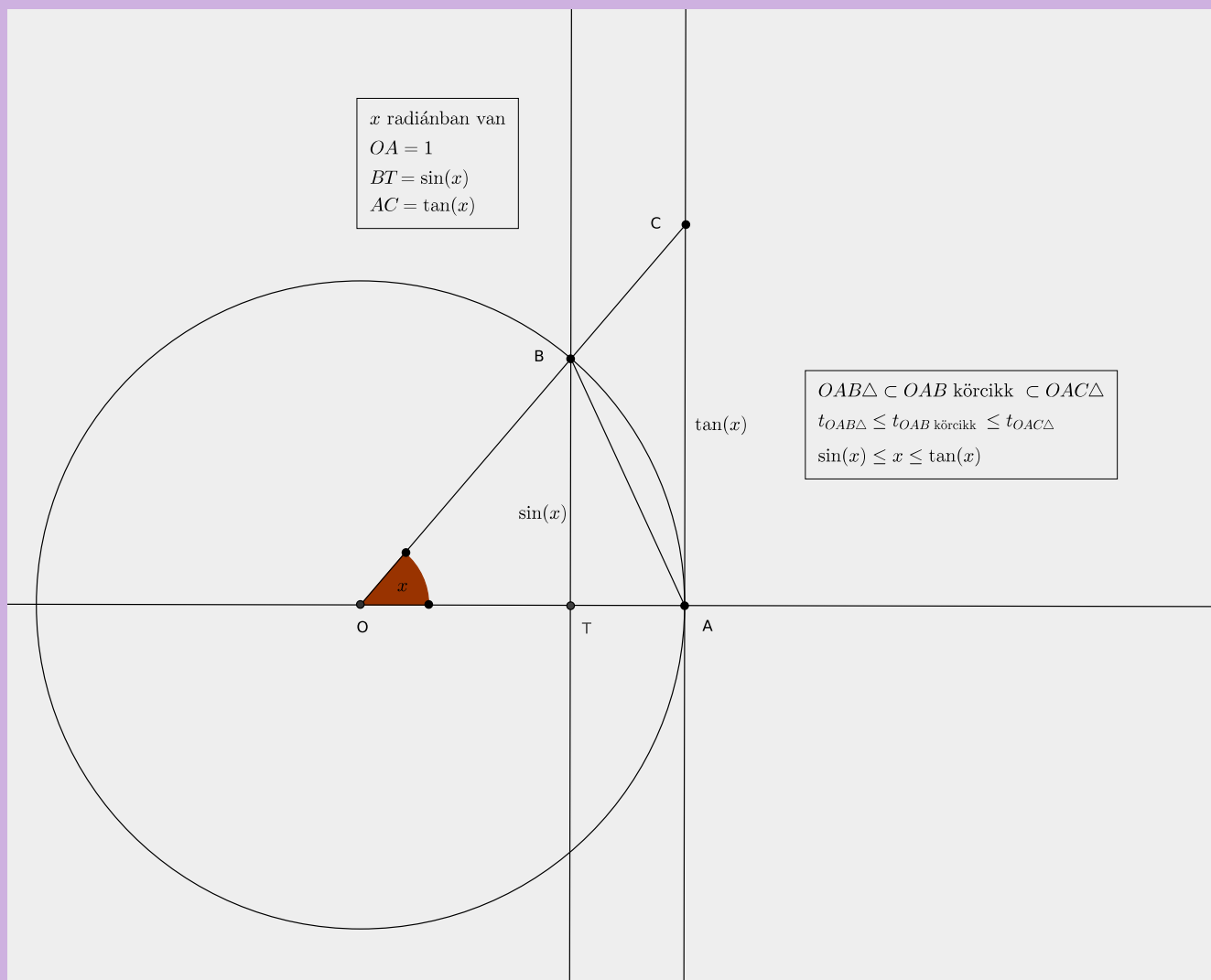
$$\text{Fa } \frac{1 - \cos(x)}{x} \rightarrow 0$$

$$\text{Fa } \frac{\tan(x) - x}{x^2} \rightarrow 0$$

Nevezetes határértékek

Desc sin – tan lemma

$$\sin(x) < x < \tan(x) \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{sin-tan})$$



$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mo $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

A **sin-tan** lemma miatt:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Fa $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\frac{1-\cos(x)}{x} \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Mo $\frac{1-\cos(x)}{x} \rightarrow 0$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\frac{1-\cos(x)}{x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ 1 - \cos(x) &= 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x}{2}\end{aligned}$$

Fa $\frac{1-\cos(x)}{x} \rightarrow 0$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Fa $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2} = 0$$

Mo $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \rightarrow 0$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke

Mo $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x) - x}{x^2} &= \\ \frac{\frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} - 1}{x} &= \\ \frac{\frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} &= \end{aligned}$$

Fa $\frac{\tan(x)-x}{x^2} \rightarrow 0$

$\frac{\sin(x)}{x}$ és környéke