

# Nevezetes határértékek

## Tartalom

az  $e$ -szám

$n$ -edik gyök

az e-szám

Tartalom-e

alap

Tartalom

alap

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

alap-Mo

Tartalom-e

# alap-Mo

A számtani-mértani közép miatt:

$$1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1 + 1 + \frac{1}{n} + \dots + 1 + \frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

az  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  szigorúan monoton nő.

A mértani-harmonikus közép miatt:

$$\begin{aligned} 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{1 + 1 - \frac{1}{n+1} + \dots + 1 - \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

az  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  szigorúan monoton csökken. Könnyen látható, hogy:

$$\begin{aligned} a_n &< b_m \quad \forall m, n \\ b_n - a_n &= \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

Mindezek miatt a sorozatok konvergensek és a határértékeik egybeesnek. Ezt a számot  $e$ -vel szokták jelölni.

alap

n-edik gyök

Tartalom-nthroot

Summa

konstans

$n$

polinom

$n!$

Tartalom

# Summa

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\forall a > 0, n > 1 : \exists! b > 0 : b^n = a$$

$$\text{jele: } b = a^{\frac{1}{n}}$$

Tulajdonság:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Summa-Mo

Tartalom-nthroot

# Summa-Mo

Legyen  $a > 1$  és

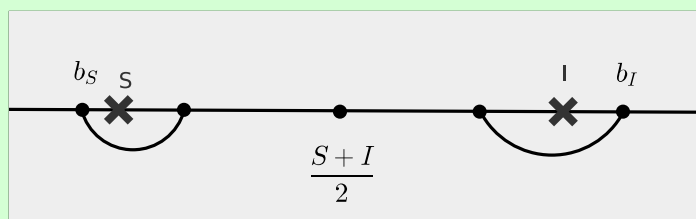
$$a_- = \{b : b^n < a\}$$

$$a_+ = \{b : b^n > a\}$$

Megfigyelések:

- $a_-$  és  $a_+$  nemüresek
- bármely  $b \in a_+$  felső korlátja  $a_-$
- bármely  $b \in a_-$  alsó korlátja  $a_+$

A valós számok felső/alsó-határ tulajdonsága miatt egyértelműen létezik  $S = \sup a_-$  és  $I = \inf a_+$  és  $S \leq I$ . Ha  $S < I$  akkor az ábra segít megtalálni az ellentmondást:



Tehát  $S = I$ . Ezért:  $I^n = S^n \leq a$  és  $I^n \geq a$ , vagyis az  $S = I$  szám valóban  $a^{\frac{1}{n}}$ -ként viselkedik.

Summa

# konstans

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

konstans-Mo

Tartalom-nthroot



# konstans-Mo

Legyen  $a > 1$ , ekkor valamely  $a_n > 0$  sorozattal  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$ . A következő megállapításokat tehetjük:

$$a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \quad (\text{Bernoulli})$$

$$\frac{a - 1}{n} \geq a_n$$

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a - 1}{n} \quad (\text{rendőr-elv})$$

$a < 1$  esetén alkalmazzuk  $\frac{1}{a}$ -ra a fentieket.

konstans

$n$

$$n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

$n$ -MoTartalom-nthroot

## $n$ -Mo

A következő megállapításokat tehetjük:

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \quad (\text{Binomiális})$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq a_n$$

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (\text{rendőr-elv})$$

$n$

# polinom

$$\begin{aligned}a_0, \dots, a_m &> 0 \\ P(n) &= \sum_{k=0}^m a_k n^k \\ P(n)^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 1\end{aligned}$$

polinom-Mo

Tartalom-nthroot

# polinom-Mo

Legyen  $a = \max\{a_0, \dots, a_m\}$ :

$$a_m n^m \leq P(n) \leq (m+1)an^m \quad (\text{rendőrlv})$$

polinom

$n!$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$$

$n!$ -MoTartalom-nthroot

## $n!$ -Mo

A számtani-négyzetes közép és egyszerű átalakítás mutatja:

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{k}}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum \frac{1}{k^2}}{n} \leq \frac{\sum \frac{2}{k(k+1)}}{n} = 2 \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} \leq \frac{2}{n}$$

A mértani-harmonikus középből:

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{k}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$n!$