$$a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$
$$\forall\ a > 0, n > 1\ :\ \exists!\ b > 0\ :\ b^n = a$$
$$\text{jele: } b = a^{\frac{1}{n}}$$

Tulajdonság:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

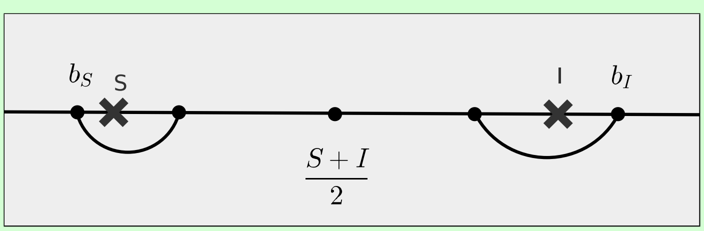
Legyen $a > 1$ és

$$a_- = \{b\ :\ b^n < a\}$$
$$a_+ = \{b\ :\ b^n > a\}$$

Megfigyelések:

- a_- és a_+ nemüresek
- bármely $b \in a_+$ felső korlátja a_-
- bármely $b \in a_-$ alsó korlátja a_+

A valós számok felső/alsó-határ tulajdonsága miatt egyértelműen létezik $S = \sup a_-$ és $I = \inf a_+$ és $S \leq I$. Ha $S < I$ akkor az ábra segít megtalálni az ellentmondást:



Tehát $S = I$. Ezért: $I^n = S^n \leq a$ és $I^n \geq a$, vagyis az $S = I$ szám valóban $a^{\frac{1}{n}}$-ként viselkedik.