

Matematika mérnököknek 2

[Ismétlés](#)

[Numerikus differenciálás](#)

[Diffegyenletek](#)

[Fourier](#)

[Matlab](#)

[Projekt](#)

[Desc](#) [Linkek](#)

Ismétlés

Diff-számítás

Határozatlan integrál

Matematika mérnököknek 2

Diff-számítás

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

[Ismétlés](#)

Desc Summa

A pillanatnyi változási gyorsaság, az érintő x tengellyel bezárt szögének tangense, meredekség.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Deriválás és műveletek (legyen $C \in \mathbb{R}$):

$$(Cf)' = cf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad g \neq 0$$

$$f(g)' = f'(g)g'$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Elemi függvények:

$$C' = 0$$

$$(x^C)' = Cx^{C-1}$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

$$(C^x)' = \log(C)C^x \quad C > 0$$

$$\log(|x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

Diff-számítás

Fa 1

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$e^{xe^{\sin(x)}}$$

Mo 1

Diff-számítás

Mo 1

$$e^{xe^{\sin(x)}}(e^{\sin(x)} + xe^{\sin(x)} \cos(x))$$

Fa 1

Diff-számítás

Fa 2

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$\frac{\log(x \log(x))}{x^2}$$

Mo 2

Diff-számítás

Mo 2

$$\frac{\log(x) + 1}{x^3 \log(x)} - \frac{2 \log(x \log(x))}{x^3}$$

Fa 2

Diff-számítás

Határozatlan integrál

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

Fa [3](#)

Fa [e^{ax} sin\(x\)](#)

Fa [e^{ax} cos\(x\)](#)

[Ismétlés](#)

Desc Summa

Határozatlan integrál, anti-derivált.

$$\left(\int f\right)' = f$$

Tulajdonságok $C, D \in \mathbb{R}$:

$$\int (Cf + g) = C \int f + \int g$$

$$\int C dx = Cx + D$$

$$\int x^C dx = \frac{x^{C+1}}{C+1} + D \quad C \neq -1$$

$$\int \sin = -\cos + C$$

$$\int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C \quad x \neq 0$$

$$\int C^x dx = \frac{C^x}{\log C} + D \quad C > 0, C \neq 1$$

$$\int (f'g + fg') = fg + C$$

$$\int f(g)g' = \left(\int f\right)(g) + C$$

Határozatlan integrál

Fa 1

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int x e^{x^2} dx$$

Mo 1

Határozatlan integrál

Mo 1

Mivel $\frac{de^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2}$, ezért a megoldás:

$$\frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Fa 1

Határozatlan integrál

Fa 2

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \sin(x)e^x dx$$

Mo 2

Határozatlan integrál

Parciális:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x dx &= -\cos(x)e^x - \int -\cos(x)e^x dx = \\ &= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$$

Összeadva:

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C$$

Fa 3

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \cos^3(x) dx$$

Mo 3

Határozatlan integrál

Helyettesítés: $u = \sin(x)$

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x) dx &= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx = \\ \int 1 - u^2 du &= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C\end{aligned}$$

Fa $e^{ax} \sin(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au} \sin(u) du = ?$$

Mo $e^{ax} \sin(x)$

Határozatlan integrál

Mo $e^{ax} \sin(x)$

parciális integrálás:

$f = e^{au}$, $g' = \sin(u)$:

$$\begin{aligned}\int e^{au} \sin(u) du &= -e^{au} \cos(u) - \int a e^{au} (-\cos(u)) du = \\ &= -e^{au} \cos(u) + a \int e^{au} \cos(u) du\end{aligned}$$

$f' = e^{au}$, $g = \sin(u)$:

$$\begin{aligned}\int e^{au} \sin(u) du &= \frac{e^{au}}{a} \sin(u) - \int \frac{e^{au}}{a} \cos(u) du = \\ &= \frac{e^{au}}{a} \sin(u) - \frac{1}{a} \int e^{au} \cos(u) du =\end{aligned}$$

szorozzuk meg a^2 -el a másodikat és adjuk össze az elsővel:

$$\begin{aligned}(1 + a^2) \int e^{au} \sin(u) du &= a e^{au} \sin(u) - e^{au} \cos(u) \implies \\ \int e^{au} \sin(u) du &= \frac{e^{au}(a \sin(u) - \cos(u))}{1 + a^2}\end{aligned}$$

Fa $e^{ax} \sin(x)$

Határozatlan integrál

Fa $e^{ax} \cos(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au} \cos(u) du = ?$$

Mo $e^{ax} \cos(x)$

Határozatlan integrál

Mo $e^{ax} \cos(x)$

Az előző feladatban összedás helyett vonjunk ki.

$$\int e^{au} \cos(u) du = \frac{e^{au}(\sin(u) + a \cos(u))}{1 + a^2}$$

Fa $e^{ax} \cos(x)$

Határozatlan integrál

Numerikus differenciálás

$$f_a = \sin\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$f_a = \sin\left(\frac{a}{x}\right), \text{ szimder}$$

Matematika mérnököknek 2

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a $\frac{\sin(3x)}{x}$ fv-nél látottakhoz képest.

Mo $\sin(\frac{a}{x})$

Numerikus differenciálás

Mo $\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiff(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=diff(y)./diff(x);
    figure; plot(x(1:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(1:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',delta))
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Numerikus differenciálás

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Tegyük fel ismét, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt, ám most a derivált közelítését az alábbi formulával számoljuk:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Numerikus differenciálás

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiffSym(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=(y(3:end)-y(1:end-2))/(2*h);
    figure; plot(x(2:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(2:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n', delta));
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Numerikus differenciálás

Diffegyenletek

Osztályozás

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bernoulli

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Matematika mérnököknek 2

Osztályozás

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Diffegyenletek

Desc Summa

Egy differenciálegyenlet

- *közönséges*: ha csak egyetlen változóra vonatkozó deriváltakat tartalmaz. Egyébként *parciális*.
- *rendje*: a benne szereplő ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja.
- *lineáris*: ha benne szereplő ismeretlen függvény illetve deriváltjai csak első hatványon szerepelnek, azaz ha

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = Q(x)$$

alakú (vagy ilyenre hozható), ahol $P_k(x)$ csak x -től függ. Egyébként *nemlineáris*-nak nevezzük.

Közönséges, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$y'^2 = \sin(x\sqrt{y}) + 123 + y$$

egy közönséges, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet.

$$y'' + \sin(x) = 123 + y$$

Parciális, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = xy$$

Parciális, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet:

$$f''_{xx} - f''_{xy} = xy$$

Osztályozás

Fa 1

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{dy}{dx} = x + 4$$

Mo 1

Osztályozás

Mo 1

közönséges, elsőrendű, lineáris.

Fa 1

Osztályozás

Fa 2

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \quad a \in \mathbb{R}$$

Mo 2

Osztályozás

Mo 2

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 2

Osztályozás

Fa 3

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$y'' = y' \sin(x) - \cos(x)$$

Mo 3

Osztályozás

Mo 3

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 3

Osztályozás

Fa 4

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$2y'' + 3y' + 4\sqrt{y} = 0$$

Mo 4

Osztályozás

Mo 4

közönséges, másodrendű, nemlineáris.

Fa 4

Osztályozás

Szétválasztható

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Fa 5.feladat

Fa 6.feladat

Diffegyenletek

Desc Summa

Egy differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezünk, ha

$$g(y)y' = f(x)$$

alakú, vagy ilyenre hozható. Vagyis az x és y változók elkülöníthetőek (szétválasztható, szeparálható)

A fenti alak 'megoldása':

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

A következő speciális esetekkel gyakran találkozunk:

$$y' = f(x) \quad y = \int f(x)dx$$

$$y' = g(y) \quad x = \int \frac{1}{g(y)}dy$$

$$y' = f(x)g(y) \quad \int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}dy$$

Szétválasztható

Fa 1.feladat

Oldja meg a

$$\frac{du}{dy} = u(y)y$$

differenciálegyenletet!

Mo 1.feladat

Szétválasztható

Mo 1.feladat

$$\frac{u'}{u} = y$$

$$\log(|u|)' = y$$

$$\log(|u|) = \frac{y^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|u| = e^C e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$u = C e^{\frac{y^2}{2}} \quad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1.feladat

Szétválasztható

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$z^3 + \frac{du}{dz}(u+1)^2 = 0$$

Mo 2.feladat

Szétválasztható

Mo 2.feladat

$$u'(u+1)^2 = -z^3$$

$$\int (u+1)^2 du = \int -z^3 dz$$

$$\frac{(u+1)^3}{3} = \frac{-z^4}{4} + C \quad u\text{-t kifejezve:}$$

$$u = \left(\frac{-3z^4}{4} + C \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Fa 2.feladat

Szétválasztható

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = 2 \cos(x) + 3 \sin(x)$$

Mo 3.feladat

Szétválasztható

Mo 3.feladat

$$y = 2 \sin(x) - 3 \cos(x)$$

Fa 3.feladat

Szétválasztható

Fa 4.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = y^2$$

Mo 4.feladat

Szétválasztható

Mo 4.feladat

$$x = \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$x = -\frac{1}{y} + C$$

$$y = -\frac{1}{x - C}$$

Fa 4.feladat

Szétválasztható

Fa 5.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = ay \quad a \in \mathbb{R}$$

Mo 5.feladat

Szétválasztható

Mo 5.feladat

$$\begin{aligned}t &= \int \frac{1}{ay} dy \\t &= \frac{\log(|y|)}{a} + C \\e^{at} &= e^C |y| \\y &= Ce^{at} \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Fa 5.feladat

Szétválasztható

Fa 6.feladat.

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1 + x)yy' = 1$$

Mo 6.feladat

Szétválasztható

Mo 6.feladat.

szétválasztható

$$yy' = \frac{1}{1+x}$$

$$\int y dy = \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \log(|1+x|) + C$$

$$y = \pm \sqrt{2 \log(|1+x|) + C}$$

Fa 6.feladat

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

[Diffegyenletek](#)

Desc Summa

$$y' + A(t)y = 0$$

megoldása (lásd: ??):

$$y = Ce^{-\int A(t)dt} \quad C \in \mathbb{R}$$

Speciálisan, ha $A(t) = A$ konstans:

$$y = Ce^{-At} \quad C \in \mathbb{R}$$

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 1

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' + 10y = 0$$

Mo 1

Elsőrendű, homogén lineáris

Mo 1

$$y = Ce^{-10t} \quad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 2

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = \log(t)y$$

Mo 2

Elsőrendű, homogén lineáris

$$\begin{aligned}\int \log(t) dt &= \log(t)t - \int 1 dt = \\ &= \log(t)t - t + C \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \log(|y|) \quad C \in \mathbb{R}$$

vagyis:

$$y = Ce^{t(\log(t)-1)} \quad C \in \mathbb{R} \quad (rv)$$

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 1. feladat

Fa 2. feladat

Diffegyenletek

Fa 1. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = y + x + 2$$

Mo 1. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 1. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$y = Ce^x$ a homogén megoldása

$C = C(x)$ változó variálása

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x + 2$$

$C'(x) = (x + 2)e^{-x}$ parciálisan integráljuk

$$C(x) = -(x + 2)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x + 3)e^{-x} + K$$

$$y = (-(x + 3)e^{-x} + K)e^x$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást! [kód](#)

Fa 1. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 2. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy' - 2y = 2x^4$$

Mo 2. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 2. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

$y = Cx^2$ a homogén megoldása

$C = C(x)$ változó variálása

$$C'(x)x^2 + \underline{C(x)2x} = \underline{\frac{2}{x}C(x)x^2} + 2x^3$$

$$C'(x) = 2x \implies C(x) = x^2 + K$$

$$y = (x^2 + K)x^2 \quad K \in \mathbb{R} \quad (mod)$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást!

Fa 2. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Fa keverés

Fa görbe

Fa levegő

Fa 4

Fa rádium

Fa hűlés

Diffegyenletek

Fa keverés

Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe *literenként* 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

Mo keverés

Szöveges feladatok

Mo keverés

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t -edik időpillanatban. Nézzük mi történik a $[t, t + \Delta t]$ intervallumban:

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t \cdot 2 \cdot 0.3 - \Delta t \cdot 2 \frac{s(t)}{10}$$

A $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet véve kapjuk:

$$s' = 0.6 - 0.2s$$

$$s(t) = Ce^{-0.2t} \quad \text{homogén}$$

$$C'(t)e^{-0.2t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} = 0.6 - 0.2C(t)e^{-0.2t} \quad \text{variálás}$$

$$C'(t) = 0.6e^{0.2t} \implies C(t) = 3e^{0.2t} + K$$

$$s(t) = (3e^{0.2t} + K)e^{-0.2t} = 3 + Ke^{-0.2t}$$

$$s(0) = 0 = 3 + K, \quad K = -3 \implies s(5) = 3 - \frac{3}{e} \approx 1.8964$$

Fa keverés

Szöveges feladatok

Fa görbe

Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az x -tengellyel vett metszéspontjának x -koordinátája fele akkora, mint az érintési ponté.

Mo görbe

Szöveges feladatok

Mo görbe

$y(x)$ a keresett függvény

x_0 egy tetszőleges pont

$$y_0 = y(x_0), \quad y'_0 = y'(x_0)$$

$y_0 + y'_0(x - x_0)$ az érintő egyenlete

$x_m = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$ a metszéspont

$\frac{x_0}{2} = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$ a feltétel miatt

$\frac{x}{2} = x - \frac{y}{y'}$ a diffegyenlet

$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$ szétválasztható

$$\log(|y|) = 2 \log(|x|) + C$$

$y = Dx^2$ adódik $D \neq 0$

Fa görbe

Szöveges feladatok

Fa levegő

Egy 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventilátor percenként 20 m^3 0.04% CO_2 tartalmú levegőt fúj a helyiségbe. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyiség a harmadára?

Mo levegő

Szöveges feladatok

Mo levegő

Legyen $y(t)$ a CO_2 mennyisége (m^3) a t -edik időpillanatban. Mi történik a $[t, t + \Delta t]$ -ben?

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot 20 \cdot 0.04 - \Delta t \cdot 20 \cdot \frac{y(t)}{200}$$

$$y' = 0.8 - 0.1y$$

$$y = Ce^{-0.1t} \text{ homogén, variálás}$$

$$C'(t)e^{-0.1t} - 0.1C(t)e^{-0.1t} = 0.8 - 0.1C(t)e^{-0.1t}$$

$$C(t) = 0.8e^{0.1t} \implies C(t) = 8e^{0.1t} + K$$

$$y(t) = 8 + Ke^{-0.1t}$$

$$y(0) = 30 = 8 + K, \quad K = 22$$

$$y(t) = 10 \implies t = 23.979$$

Fa levegő

Szöveges feladatok

Fa 4

Egy 100 liter vizet tartalmazó edényben 0.5 kg só van oldott állapotban. Az edénybe $5 \frac{\text{liter}}{\text{perc}}$ sebességgel tiszta víz folyik be, és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón távozik. Mennyi lesz az oldatban levő só mennyisége 1 óra múlva?

Mo 4

Szöveges feladatok

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t -edik időpillanatban. Legyen Δt egy "elegendően" kicsiny időtartam. Ekkor

$$s(t + \Delta t) = s(t) - \frac{s(t)5\Delta t}{100}$$

A $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet véve kapjuk a

$$s' = -\frac{5}{100}s$$

differenciálegyenletet, melynek általános megoldása

$$s(t) = Ce^{-\frac{5}{100}t}$$

melyből,

$$s(0) = 0.5 = Ce^0 = C$$

adódik, ahonnan

$$s(60) = \frac{0.5}{e^3} \approx 0.025\text{kg}.$$

Fa rádium

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádium mennyiséggel. Tudjuk, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége 1000 év alatt felére csökken. Hány százaléka bomlik el az anyagnak 100 év alatt?

Mo rádium

Szöveges feladatok

Mo rádium

Jelölje $m(t)$ a rádium atomok számát t időpillanatban. Ha Δt egy pozitív szám, akkor a

$$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

menyiség az (átlagos) bomlási sebesség a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon. $\Delta t \rightarrow 0$ -t véve, megkapjuk a pillanatnyi bomlási sebességet, ami a feltevés szerint arányos a pillanatnyi anyagmennyiséggel:

$$m' = \beta m$$

$$m(t) = Ce^{\beta t} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$m(0) = C$$

$$m(1000) = Ce^{\beta 1000} = 0.5C$$

$$\beta = \frac{\log(0.5)}{1000}$$

$$\frac{m(100)}{m(0)} = e^{\frac{\log(0.5)}{10}} \approx 0.933$$

Azaz kb. 6.67%-a bomlik el 100 év alatt a rádiumnak.

Fa rádium

Szöveges feladatok

Fa hűlés

Egy test 10 perc alatt 100 C fokról 60 C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans 20 C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test 25 C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével? (bővebben: [Newton law of cooling](#))

Mo hűlés

Szöveges feladatok

Mo hűlés

Legyen a test hőmérséklete $h(t)$ a t -edik időpillanatban:

$$h'(t) = K(h(t) - 20) \quad \text{a feltételek és hűlés-törvény miatt}$$

$$(h(t) - 20)' = K(h(t) - 20) \quad \text{homogén, megoldása:}$$

$$h(t) = Ce^{Kt} + 20$$

$$h(0) = 100 \implies C = 80$$

$$h(10) = 60, \quad 80e^{K10} + 20 = 60, \quad K = \frac{\log(0.5)}{10}$$

$$h(T) = 80e^{T \frac{\log(0.5)}{10}} + 20 = 80 \cdot 2^{-\frac{T}{10}} + 20 = 25$$

$$2^{-\frac{T}{10}} = 2^{-4}, \quad T = 40$$

Fa hűlés

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Fa 5

Diffegyenletek

Fa 1

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} = 2x - t, \quad x(0) = 1$$

Mo 1

Kezdetiérték feladatok

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. \rightarrow általános mo. \rightarrow konstans meghatározása)

$$\dot{x} = 2x \quad \text{homogén:}$$

$$x = Ce^{2t} \quad \text{variálás:}$$

$$C'e^{2t} + C2e^{2t} = 2Ce^{2t} - t$$

$$C'(t) = -te^{-2t} \quad \text{parciális int:}$$

$$\begin{aligned} & \int -te^{-2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int t(-2e^{-2t}) dt = \frac{1}{2} te^{-2t} - \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} + K$$

$$x = \left(\frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} + K \right) e^{2t}$$

$$x(0) = 1 = (0 + 0.25 + K) \cdot 1 \implies K = \frac{3}{4}$$

Fa 2

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = xy \quad y(0) = 1$$

Mo 2

Kezdetiérték feladatok

A homogén elsőrendű lineárisak szétválaszthatóak, ezért a megoldás:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

ezért

$$y(0) = C \cdot 1 = C = 1$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Fa 3

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t), \quad y(0) = 0$$

Mo 3

Kezdetiérték feladatok

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. \rightarrow általános mo. \rightarrow konstans meghatározása)

$y(t) = Ce^{-t}$ a homogén megoldása, változó variálása:

$$C'(t)e^{-t} + C(t)(-1)e^{-t} = -C(t)e^{-t} + \cos(t)$$

$C'(t) = e^t \cos(t)$ parciális int, kétféleképpen:

$$\int e^t \cos(t) dt = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) dt$$

$$\int e^t \cos(t) dt = e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t) dt$$

$$\int e^t \cos(t) dt = \frac{e^t(\sin(t) + \cos(t))}{2} + K$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t)}{2} + Ke^t$$

$$y(0) = 0 = \frac{0 + 1}{2} + K \cdot 1 \implies K = -0.5$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t) - e^t}{2}$$

Fa 4

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} + t^2 x = t^2, \quad x(0) = 2$$

Mo 4

Kezdetiérték feladatok

$\dot{x} = -t^2 x$ a homogén rész, melynek megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{variálás:}$$

$$C'(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + C(t)(-t^2)e^{-\frac{t^3}{3}} = -t^2 C(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2$$

$$C'(t) = t^2 e^{\frac{t^3}{3}} = \left(e^{\frac{t^3}{3}} \right)' \implies$$

$$C(t) = e^{\frac{t^3}{3}} + K$$

$$y(t) = 1 + Ke^{-\frac{t^3}{3}}$$

$$y(0) = 2 = 1 + K \cdot 1 \implies K = 1$$

Adjuk meg a

$$e^{y-x} + y'e^{x-y} = 0$$

egyenlettel megadott görbesereg origón átmenő példányát.

1.megoldás: szokásos módon szeparábilis-ként oldjuk meg

2.megoldás: látjuk, hogy az $y(x) = x$ egy megoldás, és az egyenletet $y' = f(x, y)$ alakban felírva felfedezhetjük, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf feltételei (f'_y folytonos), így megvan az egyetlen megoldás.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Desc [Summa](#)

Fa [1.feladat](#)

Fa [2.feladat](#)

Diffegyenletek

Desc Summa

$f(tx, ty) = f(x, y)$ változóiban homogén

$$\iff f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mert:}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(x \frac{x_0}{x}, y \frac{x_0}{x}\right) = \\ &= f\left(x_0, x_0 \frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Az ilyenek szeparábilisra vezetnek:

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítés}$$

$$u'x + u = h(u) \quad \text{szeparábilis...}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Mo 1.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mo 1.feladat

$$u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \frac{1}{u}$$

$$uu' = \frac{1}{x}$$

$$\int u \, du = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\frac{u^2}{2} = \log(|x|) + C$$

$$y = \pm x \left(\log(x^2) + C \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fa 1.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy' + y \log(x) = y \log(y)$$

Mo 2.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mo 2.feladat

$$e^u = \frac{y}{x}$$

$$y' = e^u u' x + e^u = e^u u$$

$$u'x + 1 = u \quad \text{szétválasztható:}$$

$$\frac{u'}{u-1} = \frac{1}{x} \quad \text{integrálva:}$$

$$\log(|u-1|) = \log(|x|) + C$$

$$|u-1| = D|x| \quad D > 0$$

$$u = Dx + 1 \quad D \in \mathbb{R}$$

$$y = xe^{Dx+1}$$

Fa 2.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bernoulli

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Diffegyenletek

Desc Summa

$$y' = f_1 y + f_a y^a \quad \text{alakú, } a \neq 0, 1$$

Keressük a megoldást u^b alakban:

$$b u^{b-1} u' = f_1 u^b + f_a u^{ab}$$

$$b - 1 = ab \quad \implies \quad b = \frac{1}{1 - a}$$

$$b u' = f_1 u + f_a$$

$$u' = (1 - a) f_1 u + (1 - a) f_a$$

Összefoglalva:

$$u' = (1 - a) f_1 u + (1 - a) f_a \quad (\text{ber})$$

$$y = u^{\frac{1}{1-a}}$$

Bernoulli

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

Mo 1.feladat

Bernoulli

Mo 1.feladat

Bernoulli, $a = -2$ -vel

$$y' = xy^{-2} + \frac{1}{x}y$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u + 3x$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u \quad \text{homogén:}$$

$$u = Cx^3 \quad \text{változó variálás:}$$

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = 3x + 3C(x)x^2$$

$$C'(x) = 3x^{-2}, \quad C(x) = -3x^{-1} + K$$

$$u = x^2(Kx - 3)$$

$$y = \left(x^2(Kx - 3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

Fa 1.feladat

Bernoulli

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$tu' + 4u = t^4 u^2 \quad t > 0$$

Mo 2.feladat

Bernoulli

Mo 2.feladat

Az eredeti egy Bernoulli $a = 2$ -vel:

$$u' = -\frac{4}{t}u + t^3u^2$$

tehát $y^{\frac{1}{1-a}} = y^{-1} = u$ -val, a következőt kell megoldani:

$$y' = \frac{4}{t}y - t^3$$

$$y' = \frac{4}{t}y \implies y = Kt^4 \quad \text{változó variálás:}$$

$$K't^4 + K4t^3 = \frac{4}{t}Kt^4 - t^3$$

$$K' = -\frac{1}{t} \implies K(t) = -\log(|t|) + C$$

$$K(t) = C - \log(t) \quad t \text{ pozitív}$$

$$y = t^4(C - \log(t))$$

$$u = \frac{1}{t^4(C - \log(t))}$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$u' = u^4 \cos(x) + u \tan(x)$$

Mo 3.feladat

Bernoulli

Mo 3.feladat

Bernoulli $a = 4$ -el:

$$y' = -3 \tan(x)y - 3 \cos(x)$$

$$y' = -3 \tan(x)y \quad \text{homogén:}$$

$$y = Ce^{-3 \int \tan(x) dx}$$

$$\int \tan(x) dx = -\log(|\cos(x)|)$$

$$y = C |\cos(x)|^3$$

$$y = C \cos^3(x) \quad \text{konstans variálás:}$$

$$C'(x) \cos^3(x) - \underbrace{C(x) 3 \cos^2(x) \sin(x)} =$$

$$= \underbrace{-3 \tan(x) C(x) \cos^3(x)} - 3 \cos(x)$$

$$C'(x) \cos^3(x) = -3 \cos(x)$$

$$C'(x) = -3 \frac{1}{\cos^2(x)} C(x) = -3 \tan(x) + K$$

$$y(x) = (-3 \tan(x) + K) \cos^3(x)$$

$$u(x) = ((-3 \tan(x) + K) \cos^3(x))^{-\frac{1}{3}}$$

Fa 4.feladat

Oldja meg következő differenciálegyenletet:

$$3x' + x = (1 - 2t)x^4$$

Mo 4.feladat

Bernoulli

Mo 4.feladat

$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1-2t}{3}x^4 \quad \text{Bernoulli, } a = 4$$

$$y' = y + (2t - 1) \quad y^{-\frac{1}{3}} = x$$

$$y = C(t)e^t \quad \text{:hom.mo.; C-variálás:}$$

$$C'(t) = e^{-t}(2t - 1) \quad \text{parciális int.:}$$

$$\int e^{-t}(2t - 1)dt = -e^{-t}(2t - 1) - \int -e^{-t}2dt =$$

$$= -e^{-t}(2t - 1) - 2e^{-t} =$$

$$= K - e^{-t}(2t + 1) \quad \text{inhom-ba vissza:}$$

$$y = (K - e^{-t}(2t + 1))e^t$$

$$x = y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{((K - e^{-t}(2t + 1))e^t)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{(Ke^t - (2t + 1))^{\frac{1}{3}}} =$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Desc [Képlet](#)

Diffegyenletek

Desc Képlet

másodrendű, lineáris, homogén, konstans együtthatós:

$$y'' = a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\lambda^2 = a_1 \lambda + a_0 = 0 \text{ karakterisztikus egyenlet}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ valósak:}$$

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ valós:}$$

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ komplexek:}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi$$

$$C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 t e^{at} \sin(bt) \text{ az ált. mo.}$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Fourier

Sorok

Transzform

Matematika mérnököknek 2

Sorok

Desc Egyben

Fourier

Desc Egyben

pdf

Sorok

Transzform

Desc Egyben

Fourier

Desc Egyben

pdf

Transzform

Matlab

Desc [diff](#)

Fa [másik diff](#)

Desc [függvények megadása](#)

Matematika mérnököknek 2

Desc diff

`diff`

input: $v = [v_1, \dots, v_n]$

output: $dv = [v_2 - v_1, \dots, v_n - v_{n-1}]$

példa:

```
v=[1:7].^2
v =
     1     4     9    16    25    36    49
dv=diff(v)
dv =
     3     5     7     9    11    13
diff(diff(v))
ans =
     2     2     2     2     2
diff(v,2)
ans =
     2     2     2     2     2
```

Azaz megfelelő paraméterezéssel több `diff` hívást összevonhatunk.

Matlab

Fa másik diff

Hogyan valósítaná meg a `diff` függvényt? (elegendő ha vektorok esetén működik, de ciklust ne tartalmazzon!)

Mo másik diff

Matlab

Mo másik diff

Egy lehetséges megoldás:

```
function dv=mdiff(v)
    dv=v(2, end)-v(1, end-1);
end
```

Próbáljuk ki!

Fa másik diff

Matlab

Desc függvények megadása

Rövid függvények megadásának legegyszerűbb módja:

```
fun = @(x) x.^2  
fun =  
@(x) x .^ 2  
fun(1:7)  
ans =  
     1     4     9    16    25    36    49
```

További lehetőségek: [create functions](#).

Matlab

Projekt

Desc [Nappali](#)

Desc [Levelező](#)

[Első projekt](#)

[Második projekt](#)

[Harmadik projekt](#)

Matematika mérnököknek 2

Desc Nappali

xy	1P1		
Koczka,Boiko,Makár,Polgár	1P2		
Polyák,Balyi,Pákozdi,Szilágyi	1P3		
Radáz	1P4		
Kátai	1P5		
xy	1P6		
Zolnai, Patkós,Kádár,Süvöltős	1P7		
Csatári,Jécsák,Varga	1P8		
xy	1P9		
xy	1P10		
xy	1P11		
xy	1P12		

Projekt

Desc Levelező

1	2	
3	4	
5	6	
7	8	
9	10	

Projekt

Első projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Vezesse le a

$$y' - y = x + \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 3] \times [-2, 5]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = 1.5, \quad y(-3) = 2.5, \quad y(-3) = 3.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 2

Vezesse le a

$$y' + y = x^2 + x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-2, 6]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -1, \quad y(-3) = 1, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 3

Vezesse le a

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[0.5, 4] \times [-4, 6]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(0.5) = -4, \quad y(0.5) = 0, \quad y(0.5) = 4$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Vezesse le a

$$y' - y = x \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-5, 7]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.5, \quad y(-1) = -0.3, \quad y(-1) = -0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 5

Vezesse le a

$$y' = y - x \cos(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-7, 4]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.1, \quad y(-1) = -0.3, \quad y(-1) = -0.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 6

Vezesse le a

$$y' = y + xe^{-x}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = 0.8, \quad y(-1) = 0.5, \quad y(-1) = 0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 7

Vezesse le a

$$y' = xy + x^2 \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -4, \quad y(-1) = -2, \quad y(-1) = -1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Vezesse le a

$$y' = \frac{(x^2 - 1)y}{x} + \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, -0.3] \times [-8, 0]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = -4, \quad y(-2) = -6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 9

Vezesse le a

$$y' = \left(x - \frac{2}{x}\right)y + 1 - \frac{1}{x^2}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, -0.5] \times [-15, 0]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = -4, \quad y(-2) = -6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 10

Vezesse le a

$$y' - xy = x^3$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, 0] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -1, \quad y(-2) = 0, \quad y(-2) = 1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 11

Vezesse le a

$$y' + y = e^x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = 0, \quad y(-2) = 2$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 12

Vezesse le a

$$y' - y = xe^x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -3, \quad y(-3) = 0.5, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Második projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(0.5y) + \frac{e^{-2y}}{t^2 + 1} - \cos(t)$$
$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 2

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y \sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - y' - 3y = 1 - 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 3

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + y = 2 - 2t$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$
$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 4

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y \sin(y) - \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t^2)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + 2y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 5

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y^2) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 3y' + 3y = 2t - 3$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 6

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = 2 \sin(y^2) - \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = -2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(e^y) - \sin(y)^2 + t$$

$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + 3y' + 3y = 3t - 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(-y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t + 10)$$

$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t + 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' - 3y = 2t - 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Desc 10

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) - \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t - 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 11

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = -\sin(y + 3) + \frac{e^{-y}}{t^4 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 3t + 1$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 12

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{t^2 + 3} + \cos(t)$$
$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 12t + 11$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Harmadik projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 2

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -10 & x \in [-1, 0) \\ -20 & x = 0 \\ -30 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 3

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4, 6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 4

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 5

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 6

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3, 5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 7

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4, 5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4, 6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 9

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 10

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [4, 5) \\ 3 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 11

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3, 5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 12

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4, 5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc Linkek

[jelenléti](#)

[előadás](#)

[gyakorlat](#)

[Khan Academy](#)

[ez a githubon](#)

Matematika mérnököknek 2