Matematika mérnököknek 2

Ismétlés

Diff-számítás

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Ismétlés

Summa

A pillanatnyi változási gyorsaság, az érintő x tengellyel bezárt szögének tangense, meredekség.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Deriválás és műveletek (legyen $C \in \mathbb{R}$):

$$(Cf)' = cf'$$

$$(f + g) = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad g \neq 0$$

$$f(g)' = f'(g)g'$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Elemi függvények:

$$C' = 0$$

$$(x^C)' = Cx^{C-1}$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

$$(C^x)' = \log(C)C^x \qquad C > 0$$

$$\log(|x|)' = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

Fa 1

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$e^{xe^{\sin(x)}}$$

Mo 1 Diff-számítás

Mo **1**

$$e^{xe^{\sin(x)}}(e^{\sin(x)} + xe^{\sin(x)}\cos(x))$$

Fa 1 Diff-számítás

Fa 2

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$\frac{\log(x\log(x))}{x^2}$$

Mo 2 Diff-számítás

Mo **2**

$$\frac{\log(x)+1}{x^3\log(x)} - \frac{2\log(x\log(x))}{x^3}$$

Fa 2 Diff-számítás

Határozatlan integrál

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa $e^{ax}\sin(x)$

Fa $e^{ax}\cos(x)$

Ismétlés

Summa

Határozatlan integrál, anti-derivált.

$$\left(\int f\right)' = f$$

Tulajdonságok $C, D \in \mathbb{R}$:

$$\int (Cf + g) = C\int f + \int g$$

$$\int C\mathrm{d}x = Cx + D$$

$$\int x^C \mathrm{d}x = \frac{x^{C+1}}{C+1} + D \qquad C \neq -1$$

$$\int \sin = -\cos + C$$

$$\int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int C^x \mathrm{d}x = \frac{C^x}{\log C} + D \qquad C > 0, C \neq 1$$

$$\int (f'g + fg') = fg + C$$

$$\int f(g)g' = \left(\int f\right)(g) + C$$

Határozatlan integrál

Fa 1

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int xe^{x^2} \mathrm{d}x$$

Mo 1 Határozatlan integrál

Mo 1

Mivel $\frac{\mathrm{d}e^{x^2}}{\mathrm{d}x} = 2xe^{x^2}$, ezért a megoldás:

$$\frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Fa 1 Határozatlan integrál

Fa 2

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x$$

Mo 2 Határozatlan integrál

Mo **2**

Parciális:

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = -\cos(x)e^x - \int -\cos(x)e^x \mathrm{d}x =$$
$$-\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x \mathrm{d}x$$

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x \mathrm{d}x$$

Összeadva:

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C$$

Fa 2 Határozatlan integrál

Fa 3

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$$

Mo 3 Határozatlan integrál

Mo **3**

Helyettesítés: $u = sin(x)$

$$\int \cos^3(x)\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2(x))\cos(x)\mathrm{d}x =$$
$$\int 1-u^2\mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

Fa 3 Határozatlan integrál

Fa $e^{ax}\sin(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = ?$$

Mo $e^{ax}\sin(x)$ Határozatlan integrál

Mo $e^{ax}\sin(x)$

parciális integrálás:

$f = e^{au}, \quad g' = \sin(u)$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = -e^{au}\cos(u) - \int ae^{au}(-\cos(u))\mathrm{d}u =$$
$$= -e^{au}\cos(u) + a\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u$$

$f' = e^{au}, \quad g = \sin(u)$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}}{a}\sin(u) - \int \frac{e^{au}}{a}\cos(u)\mathrm{d}u =$$
$$\frac{e^{au}}{a}\sin(u) - \frac{1}{a}\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u =$$

szorozzuk meg a^2-el a másodikat és adjuk össze az elsővel:

$$(1+a^2)\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = ae^{au}\sin(u) - e^{au}\cos(u) \quad \Longrightarrow$$
$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}(a\sin(u) - \cos(u))}{1+a^2}$$

Fa $e^{ax}\sin(x)$ Határozatlan integrál

Fa $e^{ax}\cos(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u = ?$$

Mo $e^{ax}\cos(x)$ Határozatlan integrál

Mo $e^{ax}\cos(x)$

Az előző feladatban összadás helyett vonjunk ki.

$$\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}(\sin(u) + a\cos(u))}{1 + a^2}$$

Fa $e^{ax}\cos(x)$ Határozatlan integrál

Numerikus differenciálás

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Matematika mérnököknek 2

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a $\frac{\sin(3x)}{x}$ fv-nél látottakhoz képest.

Mo $\sin(\frac{a}{x})$ Numerikus differenciálás

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiff(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=diff(y)./diff(x);
    figure; plot(x(1:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(1:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',
      delta))
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Tegyük fel ismét, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt, ám most a derivált közelítését az alábbi formulával számoljuk:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder — Numerikus differenciálás

$\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiffSym(f, df, a, b, h)
  x=a:h:b;
  y=f(x);
  d1=(y(3:end)-y(1:end-2))/(2*h);
  figure; plot(x(2:end-1),d1)
  fd1=df(x);
  delta=sum(abs(fd1(2:end-1)-d1));
  title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',
    delta));
  hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Diffegyenletek

Osztályozás

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

$y' = f(\frac{y}{x})$

Bernoulli

$y'' = a_1 y' + a_0 y$

Osztályozás

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Diffegyenletek

Summa

Egy differenciálegyenlet

- *közönséges*: ha csak egyetlen változóra vonatkozó deriváltakat tartalmaz. Egyébként *parciális*.
- *rendje*: a benne szereplő ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja.
- *lineáris*: ha benne szereplő ismeretlen függvény illetve deriváltjai csak első hatványon szerepelnek, azaz ha

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} = Q(x)$$

alakú (vagy ilyenre hozható), ahol $P_k(x)$ csak x-től függ. Egyébként *nemlineáris*-nak nevezzük.

Közönséges, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$y'^2 = sin(x\sqrt{y}) + 123 + y$$

egy közönséges, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet.

$$y'' + sin(x) = 123 + y$$

Parciális, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = xy$$

Parciális, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet:

$$f''_{xx} - f''_{xy} = xy$$

Osztályozás

Fa 1

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{dy}{dx} = x + 4$$

Mo 1 Osztályozás

Mo 1

közönséges, elsőrendű, lineáris.

Fa 1 Osztályozás

Fa 2

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mo 2 Osztályozás

Mo 2

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 2 Osztályozás

Fa 3

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$y'' = y' \sin(x) - \cos(x)$$

Mo 3 Osztályozás

Mo **3**

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 3 Osztályozás

Fa 4

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$2y'' + 3y' + 4\sqrt{y} = 0$$

Mo 4 Osztályozás

Mo 4

közönséges, másodrendű, nemlineáris.

Fa 4 Osztályozás

Szétválasztható

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Fa 5.feladat

Fa 6.feladat

Diffegyenletek

Egy differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezünk, ha

$$g(y)y' = f(x)$$

alakú, vagy ilyenre hozható. Vagyis az x és y változók elkülöníthetőek (szétválasztható, szeparálható)

A fenti alak 'megoldása':

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

A következő speciális esetekkel gyakran találkozunk:

$$y' = f(x) \qquad y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$y' = g(y) \qquad x = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$$

$$y' = f(x)g(y) \qquad \int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$$

Szétválasztható

Fa 1.feladat

Oldja meg a

$$\frac{du}{dy} = u(y)y$$

differenciálegyenletet!

Mo 1.feladat Szétválasztható

Mo 1.feladat

$$\frac{u'}{u} = y$$

$$\log(|u|)' = y$$

$$\log(|u|) = \frac{y^2}{2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$|u| = e^C e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$u = Ce^{\frac{y^2}{2}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1.feladat Szétválasztható

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$z^3 + \frac{du}{dz}(u+1)^2 = 0$$

Mo 2.feladat Szétválasztható

$$u'(u+1)^2 = -z^3$$

$$\int (u+1)^2 \mathrm{d}u = \int -z^3 \mathrm{d}z$$

$$\frac{(u+1)^3}{3} = \frac{-z^4}{4} + C \qquad u\text{-t kifejezve:}$$

$$u = \left(\frac{-3z^4}{4} + C\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = 2\cos(x) + 3\sin(x)$$

Mo 3.feladat Szétválasztható

Mo 3.feladat

$$y = 2\sin(x) - 3\cos(x)$$

Fa 3.feladat Szétválasztható

Fa 4.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = y^2$$

Mo 4.feladat Szétválasztható

Mo 4.feladat

$$x = \int \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y$$
$$x = -\frac{1}{y} + C$$
$$y = -\frac{1}{x - C}$$

Fa 4.feladat Szétválasztható

Fa 5.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = ay \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mo 5.feladat Szétválasztható

Mo 5.feladat

$$t = \int \frac{1}{ay} \mathrm{d}y$$
$$t = \frac{\log(|y|)}{a} + C$$
$$e^{at} = e^{C}|y|$$
$$y = Ce^{at} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 5.feladat Szétválasztható

Fa 6.feladat.

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1+x)yy' = 1$$

Mo 6.feladat Szétválasztható

Mo 6.feladat.

szétválasztható

$$yy' = \frac{1}{1+x}$$

$$\int y\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = \log(|1+x|) + C$$

$$y = \pm\sqrt{2\log(|1+x|) + C}$$

Fa 6.feladat Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Diffegyenletek

Summa

$$y' + A(t)y = 0$$

megoldása (lásd: **??**):

$$y = Ce^{-\int A(t)\mathrm{d}t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Speciálisan, ha $A(t) = A$ konstans:

$$y = Ce^{-At} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 1

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' + 10y = 0$$

Mo 1 Elsőrendű, homogén lineáris

Mo 1

$$y = Ce^{-10t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1 Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 2

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = \log(t)y$$

Mo 2 Elsőrendű, homogén lineáris

Mo **2**

$$\int \log(t)\mathrm{d}t = \log(t)t - \int 1\mathrm{d}t =$$
$$= \log(t)t - t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \log(|y|) \qquad C \in \mathbb{R}$$

vagyis:

$$y = Ce^{t(\log(t)-1)} \qquad C \in \mathbb{R} \quad (rv)$$

Fa 2 Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 1. feladat

Fa 2. feladat

Diffegyenletek

Fa 1. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = y + x + 2$$

Mo 1. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 1. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y = Ce^x \quad \text{a homogén megoldása}$$

$$C = C(x) \quad \text{változó variálása}$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x + 2$$

$$C'(x) = (x+2)e^{-x} \quad \text{parciálisan integráljuk}$$

$$C(x) = -(x+2)e^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -(x+3)e^{-x} + K$$

$$y = \big(-(x+3)e^{-x} + K\big)e^x$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást! kód

Fa 1. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 2. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy' - 2y = 2x^4$$

Mo 2. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 2. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

$$y = Cx^2 \quad \text{a homogén megoldása}$$

$$C = C(x) \quad \text{változó variálása}$$

$$C'(x)x^2 + \underline{C(x)2x} = \underline{\frac{2}{x}C(x)x^2} + 2x^3$$

$$C'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad C(x) = x^2 + K$$

$$y = \left(x^2 + K\right)x^2 \qquad K \in \mathbb{R} \qquad (mod)$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást!

Fa 2. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Fa keverés

Fa görbe

Fa levegő

Fa 4

Fa rádium

Fa hűlés

Diffegyenletek

Fa keverés

Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe *literenként* 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

Mo keverés Szöveges feladatok

Mo keverés

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t-edik időpillanatban. Nézzük mi történik a $[t, t+\Delta t]$ intervallumban:

$$s(t+\Delta t) = s(t) + \Delta t \cdot 2 \cdot 0.3 - \Delta t \cdot 2\frac{s(t)}{10}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve kapjuk:

$$s' = 0.6 - 0.2s$$

$$s(t) = Ce^{-0.2t} \quad \text{homogén}$$

$$C'(t)e^{-0.2t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} = 0.6 - 0.2C(t)e^{-0.2t} \quad \text{variálás}$$

$$C'(t) = 0.6e^{0.2t} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = 3e^{0.2t} + K$$

$$s(t) = \left(3e^{0.2t} + K\right)e^{-0.2t} = 3 + Ke^{-0.2t}$$

$$s(0) = 0 = 3 + K,\ \ K = -3 \quad \Longrightarrow \quad s(5) = 3 - \frac{3}{e} \approx 1.8964$$

Fa keverés Szöveges feladatok

Fa görbe

Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az x-tengellyel vett metszéspontjának x-koordinátája fele akkora, mint az érintési ponté.

Mo görbe Szöveges feladatok

$$y(x) \qquad \text{a keresett függvény}$$

$$x_0 \qquad \text{egy tetszőleges pont}$$

$$y_0 = y(x_0), \qquad y_0' = y'(x_0)$$

$$y_0 + y_0'(x - x_0) \qquad \text{az érintő egyenlete}$$

$$x_m = x_0 - \frac{y_0}{y_0'} \qquad \text{a metszéspont}$$

$$\frac{x_0}{2} = x_0 - \frac{y_0}{y_0'} \qquad \text{a feltétel miatt}$$

$$\frac{x}{2} = x - \frac{y}{y'} \qquad \text{a diffegyenlet}$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{szétválasztható}$$

$$\log(|y|) = 2\log(|x|) + C$$

$$y = Dx^2 \qquad \text{adódik} \qquad D \neq 0$$

Fa levegő

Egy 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventillátor percenként 20 m^3 0.04% CO_2 tartalmú levegőt fúj a helyiségbe. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyiség a harmadára?

Mo levegő Szöveges feladatok

levegő

Legyen $y(t)$ a CO_2 mennyisége (m^3) a t-edik időpillanatban. Mi történik a $[t, t+\Delta t]$-ben?

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\ 20\ 0.04 - \Delta t\ 20\ \frac{y(t)}{200}$$

$$y' = 0.8 - 0.1y$$

$$y = Ce^{-0.1t} \quad \text{homogén, variálás}$$

$$C'(t)e^{-0.1t} - 0.1C(t)e^{-0.1t} = 0.8 - 0.1C(t)e^{-0.1t}$$

$$C(t) = 0.8e^{0.1t} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = 8e^{0.1t} + K$$

$$y(t) = 8 + Ke^{-0.1t}$$

$$y(0) = 30 = 8 + K,\ \ K = 22$$

$$y(t) = 10 \quad \Longrightarrow \quad t = 23.979$$

Fa 4

Egy 100 liter vizet tartalmazó edényben 0.5 kg só van oldott állapotban. Az edénybe 5 $\frac{liter}{perc}$ sebességgel tiszta víz folyik be, és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón távozik. Mennyi lesz az oldatban levő só mennyisége 1 óra múlva?

Mo 4 | Szöveges feladatok

Mo 4

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t-edik időpillanatban. Legyen Δt egy "elegendően" kicsiny időtartam. Ekkor

$$s(t+\Delta t) = s(t) - \frac{s(t)5\Delta t}{100}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve kapjuk a

$$s' = -\frac{5}{100}s$$

differenciálegyenletet, melynek általános megoldása

$$s(t) = Ce^{-\frac{5}{100}t}$$

melyből,

$$s(0) = 0.5 = Ce^0 = C$$

adódik, ahonnan

$$s(60) = \frac{0.5}{e^3} \approx \ 0.025\text{kg}.$$

Fa 4 Szöveges feladatok

Fa rádium

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádium mennyiséggel. Tudjuk, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége 1000 év alatt felére csökken. Hány százaléka bomlik el az anyagnak 100 év alatt?

Mo rádium Szöveges feladatok

Mo rádium

Jelölje $m(t)$ a rádium atomok számát t időpillanatban. Ha Δt egy pozitív szám, akkor a

$$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

mennyiség az (átlagos) bomlási sebesség a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon. $\Delta t \to 0$-t véve, megkapjuk a pillanatnyi bomlási sebességet, ami a feltevés szerint arányos a pillanatnyi anyagmennyiséggel:

$$m' = \beta m$$

$$m(t) = Ce^{\beta t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$m(0) = C$$

$$m(1000) = Ce^{\beta 1000} = 0.5C$$

$$\beta = \frac{\log(0.5)}{1000}$$

$$\frac{m(100)}{m(0)} = e^{\frac{\log(0.5)}{10}} \approx 0.933$$

Azaz kb. 6.67%-a bomlik el 100 év alatt a rádiumnak.

Fa rádium Szöveges feladatok

Fa hűlés

Egy test `10` perc alatt `100` C fokról `60` C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans `20` C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test `25` C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével? (bővebben: Newton law of cooling)

Mo hűlés Szöveges feladatok

hűlés

Legyen a test hőmérséklete $h(t)$ a t-edik időpillanatban:

$$h'(t) = K(h(t) - 20) \quad \text{a feltételek és hűlés-törvény miatt}$$

$$(h(t) - 20)' = K(h(t) - 20) \ \text{ homogén, megoldása:}$$

$$h(t) = Ce^{Kt} + 20$$

$$h(0) = 100 \implies C = 80$$

$$h(10) = 60, \quad 80e^{K10} + 20 = 60, \quad K = \frac{\log(0.5)}{10}$$

$$h(T) = 80e^{T\frac{\log(0.5)}{10}} + 20 = 80 \cdot 2^{-\frac{T}{10}} + 20 = 25$$

$$2^{-\frac{T}{10}} = 2^{-4}, \quad T = 40$$

Kezdetiérték feladatok

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Fa 5

Diffegyenletek

Fa 1

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} = 2x - t, \qquad x(0) = 1$$

Mo 1 Kezdetiérték feladatok

Mo 1

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. -> általános mo. -> konstans meghatározása)

$$\dot{x} = 2x \quad \text{homogén:}$$

$$x = Ce^{2t} \quad \text{variálás:}$$

$$C'e^{2t} + C2e^{2t} = 2Ce^{2t} - t$$

$$C'(t) = -te^{-2t} \quad \text{parciális int:}$$

$$\int -te^{-2t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int t(-2e^{-2t})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{2}\int e^{-2t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + K$$

$$x = \left(\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + K\right)e^{2t}$$

$$x(0) = 1 = (0 + 0.25 + K) \cdot 1 \implies K = \frac{3}{4}$$

Fa 1 Kezdetiérték feladatok

Fa 2

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = xy \qquad y(0) = 1$$

Mo 2 Kezdetiérték feladatok

Mo **2**

A homogén elsőrendű lineárisak szétválaszthatóak, ezért a megoldás:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

ezért

$$y(0) = C \cdot 1 = C = 1$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Fa 2 Kezdetiérték feladatok

Fa 3

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t), \qquad y(0) = 0$$

Mo 3 Kezdetiérték feladatok

Mo 3

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. -> általános mo. -> konstans meghatározása)

$$y(t) = Ce^{-t} \quad \text{a homogén megoldása, változó variálása:}$$

$$C'(t)e^{-t} + C(t)(-1)e^{-t} = -C(t)e^{-t} + \cos(t)$$

$$C'(t) = e^t \cos(t) \ \ \text{parciális int, kétféleképpen:}$$

$$\int e^t \cos(t) \mathrm{d}t = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) \mathrm{d}t$$

$$\int e^t \cos(t) \mathrm{d}t = e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t) \mathrm{d}t$$

$$\int e^t \cos(t) \mathrm{d}t = \frac{e^t(\sin(t) + \cos(t))}{2} + K$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t)}{2} + Ke^t$$

$$y(0) = 0 = \frac{0+1}{2} + K \cdot 1 \implies K = -0.5$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t) - e^t}{2}$$

Fa 3 Kezdetiérték feladatok

Fa 4

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} + t^2 x = t^2, \qquad x(0) = 2$$

Mo 4 Kezdetiérték feladatok

Mo 4

$$\dot{x} = -t^2 x \qquad \text{a homogén rész, melynek megoldása:}$$

$$x(t) = Ce^{-\frac{t^3}{3}} \qquad \text{variálás:}$$

$$C'(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + C(t)(-t^2)e^{-\frac{t^3}{3}} = -t^2 C(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2$$

$$C'(t) = t^2 e^{\frac{t^3}{3}} = \left(e^{\frac{t^3}{3}}\right)' \Longrightarrow$$

$$C(t) = e^{\frac{t^3}{3}} + K$$

$$y(t) = 1 + Ke^{-\frac{t^3}{3}}$$

$$y(0) = 2 = 1 + K \cdot 1 \Longrightarrow \quad K = 1$$

Fa 4 Kezdetiérték feladatok

Fa 5

Adjuk meg a

$$e^{y-x} + y'e^{x-y} = 0$$

egyenlettel megadott görbesereg origón átmenő példányát.

Mo 5 Kezdetiérték feladatok

Mo 5

1.megoldás: szokásos módon szeparábilis-ként oldjuk meg

2.megoldás: látjuk, hogy az $y(x) = x$ egy megoldás, és az egyenletet $y' = f(x, y)$ alakban felírva felfedezhetjük, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf feltételei (f'_y folytonos), így megvan az egyetlen megoldás.

Fa 5 Kezdetiérték feladatok

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Diffegyenletek

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad \text{változóiban homogén}$$

$$\iff \quad f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mert:}$$

$$f(x, y) = f\left(x\frac{x_0}{x}, y\frac{x_0}{x}\right) =$$

$$= f\left(x_0, x_0\frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Az ilyenek szeparábilisra vezetnek:

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítés}$$

$$u'x + u = h(u) \quad \text{szeparábilis...}$$

$y' = f(\frac{y}{x})$

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Mo 1.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Mo 1.feladat

$$u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \frac{1}{u}$$

$$uu' = \frac{1}{x}$$

$$\int u \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\frac{u^2}{2} = \log(|x|) + C$$

$$y = \pm x \big(\log(x^2) + C\big)^{\frac{1}{2}}$$

Fa 1.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy' + y\log(x) = y\log(y)$$

Mo 2.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Mo 2.feladat

$$e^u = \frac{y}{x}$$

$$y' = e^u u' x + e^u = e^u u$$

$$u'x + 1 = u \qquad \text{szétválasztható:}$$

$$\frac{u'}{u-1} = \frac{1}{x} \qquad \text{integrálva:}$$

$$\log(|u-1|) = \log(|x|) + C$$

$$|u-1| = D|x| \quad D > 0$$

$$u = Dx + 1 \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$y = xe^{Dx+1}$$

Fa 2.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Bernoulli

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Diffegyenletek

$$y' = f_1 y + f_a y^a \quad \text{alakú}, \quad a \neq 0, 1$$

Keressük a megoldást u^b alakban:

$$bu^{b-1}u' = f_1 u^b + f_a u^{ab}$$

$$b - 1 = ab \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{1-a}$$

$$bu' = f_1 u + f_a$$

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a$$

Összefoglalva:

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a \tag{ber}$$

$$y = u^{\frac{1}{1-a}}$$

Bernoulli

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

Mo 1.feladat Bernoulli

Mo 1.feladat

Bernoulli, $a = -2$-vel

$$y' = xy^{-2} + \frac{1}{x}y$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u + 3x$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u \quad \text{homogén:}$$

$$u = Cx^3 \ \ \text{változó variálás:}$$

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = 3x + 3C(x)x^2$$

$$C'(x) = 3x^{-2},\ C(x) = -3x^{-1} + K$$

$$u = x^2(Kx-3)$$

$$y = \left(x^2(Kx-3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

Fa 1.feladat Bernoulli

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$tu' + 4u = t^4u^2 \qquad t > 0$$

Mo 2.feladat Bernoulli

2.feladat

Az eredeti egy Bernoulli $a = 2$-vel:

$$u' = -\frac{4}{t}u + t^3u^2$$

tehát $y^{\frac{1}{1-a}} = y^{-1} = u$ -val, a következőt kell megoldani:

$$y' = \frac{4}{t}y - t^3$$

$$y' = \frac{4}{t}y \implies y = Kt^4 \quad \text{változó variálás:}$$

$$K't^4 + K4t^3 = \frac{4}{t}Kt^4 - t^3$$

$$K' = -\frac{1}{t} \implies K(t) = -\log(|t|) + C$$

$$K(t) = C - \log(t) \quad t \ \text{pozitív}$$

$$y = t^4(C - \log(t))$$

$$u = \frac{1}{t^4(C - \log(t))}$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$u' = u^4 \cos(x) + u \tan(x)$$

Mo 3.feladat Bernoulli

Mo 3.feladat

Bernoulli $a = 4$-el:

$$y' = -3\tan(x)y - 3\cos(x)$$

$$y' = -3\tan(x)y \qquad \text{homogén:}$$

$$y = Ce^{-3\int \tan(x)\mathrm{d}x}$$

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\log(|\cos(x)|)$$

$$y = C|\cos(x)|^3$$

$$y = C\cos^3(x) \qquad \text{konstans variálás:}$$

$$C'(x)\cos^3(x) - \underbrace{C(x)3\cos^2(x)\sin(x)} =$$

$$= \underbrace{-3\tan(x)C(x)\cos^3(x)} - 3\cos(x)$$

$$C'(x)\cos^3(x) = -3\cos(x)$$

$$C'(x) = -3\frac{1}{\cos^2(x)} C(x) = -3\tan(x) + K$$

$$y(x) = (-3\tan(x) + K)\cos^3(x)$$

$$u(x) = \left((-3\tan(x) + K)\cos^3(x)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Fa 3.feladat Bernoulli

Fa 4.feladat

Oldja meg következő differenciálegyenletet:

$$3x' + x = (1 - 2t)x^4$$

Mo 4.feladat Bernoulli

Mo 4.feladat

$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1-2t}{3}x^4 \qquad \text{Bernoulli, } a = 4$$

$$y' = y + (2t-1) \qquad y^{-\frac{1}{3}} = x$$

$$y = C(t)e^t \qquad \text{:hom.mo.; C-variálás:}$$

$$C'(t) = e^{-t}(2t-1) \qquad \text{parciális int.:}$$

$$\int e^{-t}(2t-1)\mathrm{d}t = -e^{-t}(2t-1) - \int -e^{-t}2\mathrm{d}t =$$

$$= -e^{-t}(2t-1) - 2e^{-t} =$$

$$= K - e^{-t}(2t+1) \;\; \text{inhom-ba vissza:}$$

$$y = \big(K - e^{-t}(2t+1)\big)e^t$$

$$x = y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{((K - e^{-t}(2t+1))e^t)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{(Ke^t - (2t+1))^{\frac{1}{3}}} =$$

Fa 4.feladat Bernoulli

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Desc Képlet

Diffegyenletek

Desc **Képlet**

másodrendű, lineáris, homogén, konstans együtthatós:

$$y'' = a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\lambda^2 = a_1 \lambda + a_0 = 0 \ \text{ karakterisztikus egyenlet}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \text{ valósak:}$$

$$C_1 e^{\lambda 1 t} + C_2 e^{\lambda 2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ \text{ valós:}$$

$$C_1 e^{\lambda 1 t} + C_2 t e^{\lambda 2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \text{ komplexek:}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi$$

$$C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 t e^{at} \sin(bt) \text{ az ált. mo.}$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Fourier

Sorok

Transzform

Matematika mérnököknek 2

Sorok

Desc Egyben

Fourier

Desc **Egyben**

pdf

Sorok

Transzform

Desc Egyben

Fourier

Desc **Egyben**

pdf

Transzform

Matlab

Desc diff

Fa másik diff

Desc függvények megadása

Matematika mérnököknek 2

diff

`diff`

`input:` $v = [v_1, \ldots, v_n]$

`output:` $dv = [v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_{n-1}]$

`példa:`

```
v=[1:7].^2
v =
     1     4     9    16    25    36    49
dv=diff(v)
dv =
     3     5     7     9    11    13
diff(diff(v))
ans =
     2     2     2     2     2
diff(v,2)
ans =
     2     2     2     2     2
```

Azaz megfelelő paraméterezéssel több `diff` hívást összevonhatunk.

Matlab

Fa másik diff

Hogyan valósitaná meg a `diff` függvényt? (elegendő ha vektorok esetén működik, de ciklust ne tartalmazzon!)

Mo másik diff Matlab

Mo másik diff

Egy lehetséges megoldás:

```
function dv=mdiff(v)
    dv=v(2, end)-v(1, end-1);
end
```

Próbáljuk ki!

Fa másik diff Matlab

Desc függvények megadása

Rövid függvények megadásának legegyszerűbb módja:

```
fun = @(x) x.^2
fun =
@(x) x .^ 2
fun(1:7)
ans =
     1     4     9    16    25    36    49
```

További lehetőségek: create functions.

Matlab

Projekt

Desc Nappali

Desc Levelező

Első projekt

Második projekt

Harmadik projekt

Matematika mérnököknek 2

Desc **Nappali**

Virág,Sike,Hornyák,Paládi	1P1		
Koczka,Boiko,Makár,Polgár	1P2		
Polyák,Balyi,Pákozdi,Szilágyi D.	1P3		
Radáz	1P4		
Kátai	1P5		
Ignéczi,Kovács M.,Szilágyi J.,Szabó P.	1P6		
Zolnai,Patkós,Kádár,Süvöltős	1P7		
Csatári,Jécsák,Varga	1P8		
Paksi,Molnár,Sári,Gyimesi	1P9		
Szabó S.,Kovács B.,Szanyi	1P10		
xy	1P11		
xy	1P12		

Projekt

Desc Levelező

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

Projekt

Első projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Vezesse le a

$$y' - y = x + \sin(x)$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 3] \times [-2, 5]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = 1.5, \quad y(-3) = 2.5, \quad y(-3) = 3.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 2

Vezesse le a

$$y' + y = x^2 + x$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-2, 6]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -1, \quad y(-3) = 1, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 3

Vezesse le a

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[0.5, 4] \times [-4, 6]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(0.5) = -4, \quad y(0.5) = 0, \quad y(0.5) = 4$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 4

Vezesse le a

$$y' - y = x \sin(x)$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-5, 7]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.5, \quad y(-1) = -0.3, \quad y(-1) = -0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 5

Vezesse le a

$$y' = y - x\cos(x)$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-7, 4]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.1, \qquad y(-1) = -0.3, \qquad y(-1) = -0.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 6

Vezesse le a

$$y' = y + xe^{-x}$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = 0.8, \quad y(-1) = 0.5, \quad y(-1) = 0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 7

Vezesse le a

$$y' = xy + x^2 \sin(x)$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -4, \quad y(-1) = -2, \quad y(-1) = -1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 8

Vezesse le a

$$y' = \frac{(x^2-1)y}{x} + \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x}$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2,-0.3] \times [-8,0]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = -4, \quad y(-2) = -6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 9

Vezesse le a

$$y' = \left(x - \frac{2}{x}\right)y + 1 - \frac{1}{x^2}$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2,-0.5] \times [-15,0]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \qquad y(-2) = -4, \qquad y(-2) = -6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 10

Vezesse le a

$$y' - xy = x^3$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, 0] \times [-3, 3]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -1, \qquad y(-2) = 0, \qquad y(-2) = 1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 11

Vezesse le a

$$y' + y = e^x$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = 0, \quad y(-2) = 2$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 12

Vezesse le a

$$y' - y = xe^x$$

differenciálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$-en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -3, \quad y(-3) = 0.5, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Második projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(0.5y) + \frac{e^{-2y}}{t^2+1} - \cos(t)$$

$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y\sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2+1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - y' - 3y = 1 - 2t$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$
$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 3

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2+1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + y = 2 - 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 4

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y\sin(y) - \frac{e^{-y}}{t^2+1} + \cos(t^2)$$

$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + 2y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) =?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 5

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y^2) + \frac{e^{-y^2}}{t^2+1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 3y' + 3y = 2t - 3$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 6

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = 2\sin(y^2) - \frac{e^{-y^2}}{t^2+1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = -2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 7

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(e^y) - sin(y)^2 + t$$

$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + 3y' + 3y = 3t - 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 8

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(-y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2+1} + \cos(t+10)$$

$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t + 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 9

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2+1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' - 3y = 2t - 1$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$
$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 10

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) - \frac{e^{-y}}{t^2+1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t - 1$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$
$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 11

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = -\sin(y+3) + \frac{e^{-y}}{t^4+1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 3t + 1$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 12

`Első rész` : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y+1) + \frac{e^{-2y}}{t^2+3} + \cos(t)$$

$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3}-nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$-re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

`Második rész` :Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 12t + 11$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Harmadik projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0,1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1,2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 2

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -10 & x \in [-1, 0) \\ -20 & x = 0 \\ -30 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 3

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4,6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5,7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 4

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 5

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 6

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3,5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5,7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 7

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4, 5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 8

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4,6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5,7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 9

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 10

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [4,5) \\ 3 & x = 5 \\ 4 & x \in (5,6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 11

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3,5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5,7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 12

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4,5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5,6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és $5, 10, 15$ tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Linkek

jelenléti

előadás

gyakorlat

Khan Academy

ez a githubon