Numerikus matematika GI

Lebegőpontos számok

Bevezető

Adott $a > 1,\quad k_- < 0 < k_+,\quad t > 1$ egész számok esetén az

$$x = \pm a^k \; 0.x_1 \dots x_t$$

$$k_- \leq k \leq k_+$$

$$x_1 > 0 \quad \text{normalizált}$$

$$0 \quad k = 0 \text{ és } x_i = 0 \forall i$$

alakú számok összeségét vizsgáljuk.

Fa számuk

Adott lebegőpontos rendszerben hány pozitív szám van?

Mo számuk Lebegőpontos számok

Mo számuk

$$(k_+ - k_- + 1)\left(a^t - a^{t-1}\right) =$$

$$= (k_+ - k_- + 1)(a - 1)a^{t-1}$$

(csak a normalizáltakat számoljuk)

Fa M_∞

Adott lebegőpontos rendszerben mi a legnagyobb pozitív szám ?

Mo M_∞ Lebegőpontos számok

Mo M_∞

$$M_\infty =$$

$$= a^{k_+}\ 0.(a-1)\ldots(a-1)$$

$$= a^{k_+}\ (1 - a^{-t})$$

(mindent maximálisra állítunk)

Fa ε_0

Adott lebegőpontos rendszerben mi a legkisebb pozitív szám ?

Mo ε_0 Lebegőpontos számok

Mo ε_0

$$\varepsilon_0 =$$

$$= a^{k_-} \, 0.10\ldots0$$

$$= a^{k_- -1}$$

(mindent minimálisra állítunk)

Fa az 1 társai

Adott lebegőpontos rendszerben mi az 1 bal és jobboldali szomszédja?

Mo az 1 társai Lebegőpontos számok

az 1 társai

$$1_+ = a^1\ (0.1 + a^{-t}) = 1 + a^{1-t}$$

(a lehető legkevesebbel `növeljük` a törtrészt)

$$1 = a^0\ 1.0\quad \text{denormalizált-alak}$$

$$1_- = a^0\ (1.0 - a^{-t}) = 1 - a^{-t}$$

(a lehető legkevesebbel `csökkentjük` a törtrészt) Látható hogy a egész hatványai körül aszimmetrikusan vannak a legközelebbi társak. A `0` -hoz közeledve egyre közelebb.

Vektor, mátrix normák

Desc Bevezető

Numerikus matematika GI

Bevezető

A norma egy vektortér elemeihez rendelt mennyiség, mely:

$$||0|| = 0, \texttt{ egyébként: } \quad ||x|| > 0$$

$$||cx|| = |c|||x||$$

$$\texttt{teljesül a } \triangle\texttt{-egyenlőtlenség}$$

Legismertebb vektor-normák:

$$||x||_p = (|x_1|^p + \ldots |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$$||x||_\infty = \max_k(|x_k|)$$

Ez $p = 2$ esetén a szokásos euklidészi-norma, $p = 1$-re az ún. Manhattan-norma. A harmadik neve max-norma.

Mátrixokra a legelterjedtebb az indukált-norma használata. Kiindulva egy $||.||_v$ vektornormából, a

$$||A||_v = \sup_{||x||=1} ||Ax||_v = \max_{||x||=1} ||Ax||_v$$

mennyiségről belátható, hogy norma az $n \times n$-es mátrixok vektorterén. (n rögzített)

Matlab alapok

Desc Bevezető

Desc Számológép

Fa Torony

Fa Összeg 1

Fa Összeg 2

Desc az `ans` változó

Fa Hatványok

Desc Vektorok létrehozása

Desc Vektorok összeadása-kivonása

Desc Műveletek: vektor és skalár

Desc Elemenkénti szorzás-osztás: `./` és `.*`

Desc Vektorok létrehozása: `:` (rang)

Desc Változók

Desc Függvények I

Fa Összeg 2 újra

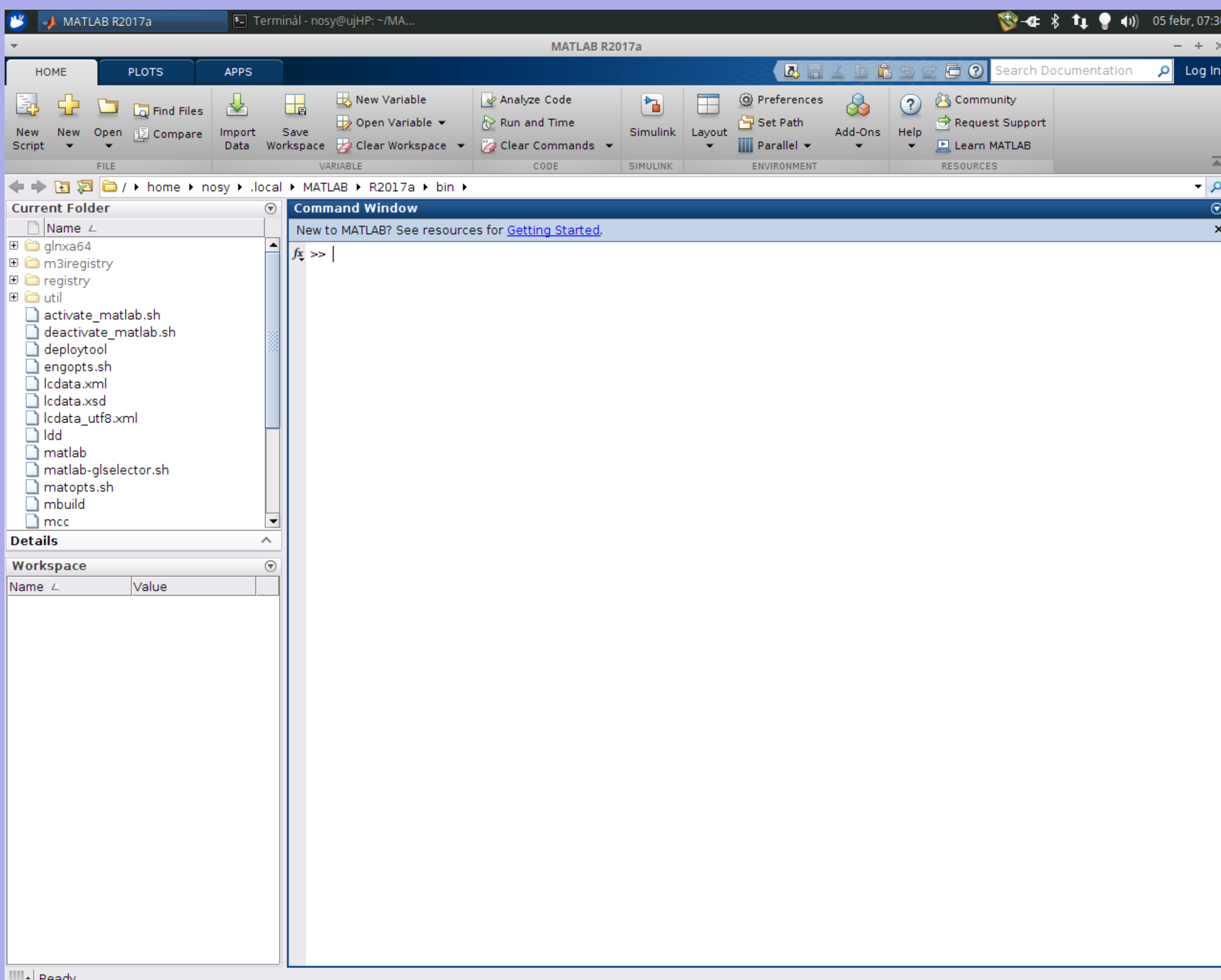
Fa Hatvány sorozat

Fa $(-1)^n$ sorozat

Desc Függvények II

Bevezető

A MATLAB egy program, melyet 1970 körül kezdtek el fejleszteni mátrixszámítások megkönnyítésére. Elnevezése a MATrix LABoratory rövidítéséből ered. Mérnöki, oktatási körökben elterjedt. A MathWorks cég fejleszti, évenkénti kiadásokkal, Windows, MacOS és Linux operációs rendszerekre. Nem ingyenes szoftver.



Fontos, hogy van szabad és ingyenes alternatíva, mely egy bizonyos szintig egyenértékű: az Octave.

Matlab alapok

Számológép

Ismerkedésként próbáljuk meg számológépként használni a rendszert:

```
>> 197/12

ans =

   16.4167

>> 3^2+4^2

ans =

    25

>> 3**2

 3**2

   ^

Error: Unexpected MATLAB operator.

>> (1+2+3+4+5+6)/7

ans =

     3

>> pi + 1

ans =

    4.1416

>> sin(pi/2)^2 + cos(pi/2)^2

ans =

     1
```

`pi` a szokásos konstans.

Fa Torony

Számoljuk ki a következő kifejezés értékét:

$$2^{\left(2^{2^2}\right)}$$

Mo Torony Matlab alapok

Mo Torony

Használjuk a hatványozás operátort (`^`) és zárójeleket (ezzel a kiértékelés sorrendjét tudjuk szabályozni). Az eredmény `65536` .

Fa Torony Matlab alapok

Fa Összeg 1

Számoljuk ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}$$

Mo Összeg 1 Matlab alapok

Mo Összeg 1

Egyszerűen írjuk a parancs-ablakba a kifejezést:

```
>> 1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2

ans =

    1.5118
```

Fa Összeg 2

Számoljuk ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{98^2}+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}$$

Mo Összeg 2 Matlab alapok

Mo Összeg 2

Ezt később tudjuk majd hatékonyan (sok gépelés nélkül) megoldani.

Fa Összeg 2 Matlab alapok

Desc az `ans` változó

A kiértékelések eredményei egy `ans` nevű változóba kerülnek, ez felhasználható további számolásokra:

```
>> 120/10
ans =
    12
>> ans+ans
ans =
    24
```

Matlab alapok

Fa Hatványok

Számoljuk ki az `ans` segítségével az első néhányat a kettőhatványok sorozatából.

Mo Hatványok Matlab alapok

Mo Hatványok

A már egyszer beírt kifejezések/parancsok előhívhatóak a ↑ billentyűvel:

```
>> 2
ans =
     2
>> ans*2
ans =
     4
>> ans*2
ans =
     8
>> ans*2
ans =
    16
>> ans*2
ans =
    32
```

Desc Vektorok létrehozása

A matematikai számításoknál alapvető a vektorok használata. Vektorokat létrehozhatunk az elemeik felsorolásával (üres hellyel vagy vesszővel elválasztva), speciális határolóelemekkel - [és] - körbezárva:

```
>> [ 1 2 3 ]
ans =
     1     2     3
>> [ sin(1), sin(2), sin(3) ]
ans =
    0.8415    0.9093    0.1411
```

Tehát azonos típusú vektorok között a $+$ és $-$ műveletek az ismert - elemenkénti - módon hajtódnak végre.

Vektorok összeadása-kivonása

Azonos típusú vektorok között az `+` és `−` az elvárt - elemenkénti módon hajtódik végre:

```
>> [ 1 2 3 ] + [ 3 2 1 ]
ans =
     4     4     4
>> [1 2 3 ] − [ 1 2 3 ]
ans =
     0     0     0
>> [ 3 2 1 ] − [ 3 2 ]
Matrix dimensions must agree.
```

Műveletek: vektor és skalár

Vektor és skalárok viszonya:

```
>> [ 1 2 3 ] + 1

ans =

     2     3     4

>> [ 1 2 3 ] * 2

ans =

     2     4     6


>> 1 / [ 1 2 3 ]

Error using  /

Matrix dimensions must agree.

>> [ 1 2 3 ] / 10

ans =

    0.1000    0.2000    0.3000

>> [ 10 20 30 ] -10

ans =

     0    10    20
```

Desc Elemenkénti szorzás-osztás: `./` és `.*`

Vektor elemenkénti osztása/szorzása a megfelelő műveleti jel elé írt `.` módosítóval lehetséges. (tehát `./` és *nem* `. /`)

```
>> [ 1 1 1 ] ./ [ 1 2 3 ]

ans =

    1.0000    0.5000    0.3333

>> [ 1 2 3 ] .* [ 1 2 3 ]

ans =

     1     4     9

>> [ 1 2 3 ] .^ 2

ans =

     1     4     9

>> 1 ./ [ 1 2 3 ]

ans =

    1.0000    0.5000    0.3333
```

Desc Vektorok létrehozása: `:` (rang)

Nagyobb vektorok létrehozására a `:` -szerkezet használható:

```
>> 1:7

ans =

     1     2     3     4     5     6     7

>> 1:3:20

ans =

     1     4     7    10    13    16    19

>> 3:-1/2:1

ans =

    3.0000    2.5000    2.0000    1.5000    1.0000
```

Matlab alapok

Változók

A kifejezések értékét szabadon választott nevű változókban tárolhatjuk, ezekre a tárolóhelyekre a nevükkel hivatkozunk, felhasználjuk őket bonyolultabb kifejezésekben:

```
>> a=[1 2 3]

a =

     1     2     3

>> b=[ 10 , 20 , 30 ]

b =

    10    20    30

>> c = a + b

c =

    11    22    33

>> d=c ./ b

d =

    1.1000    1.1000    1.1000
```

Függvények I

Nagyon fontos a `help` függvény , mellyel a keresett függvényről kapunk leírást:

```
>> help tan
 tan    Tangent of argument in radians.
    tan(X) is the tangent of the elements of X.
...
```

Matematikai függvények sin, cos, exp, log, ... vektor argumentumot is elfogadnak melynek minden elemére végrehajtódik az adott függvény:

```
>> a=(1:3)*pi
a =
    3.1416    6.2832    9.4248
>> cos(a)
ans =
    -1     1    -1
>> log( a .* a )
ans =
    2.2895    3.6758    4.4867
```

A legfontosabb vektorokkal kapcsolatos függvények :

`sum, prod, mean, linspace`

```
>> a=1:100;
>> sum(a)
ans =
        5050
>> mean(a)
ans =
   50.5000
>> prod(−5:2:5)
ans =
  −225
>> linspace(1,5,5)
ans =
     1     2     3     4     5
>> linspace(1,5,6)
ans =
    1.0    1.8    2.6    3.4    4.2    5.0
```

A kifejezés végén a `;` -miatt csendben hajtódik végre a kiértékelés.

Fa Összeg 2 újra

Számoljuk ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{98^2}+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}$$

Mo Összeg 2 újra Matlab alapok

Mo Összeg 2 újra

Az eddig tanultak segítségével:

```
>> sum(1./(1:100).^2)

ans =

    1.6350
```

Fa Összeg 2 újra Matlab alapok

Fa Hatvány sorozat

Adott $q > 1$ valós, és $n > 0$ egész szám esetén hozzunk létre egy olyan vektort mely az

$$1, q, q^2, ..., q^{n-1}$$

számokat tartalmazza ilyen sorrendben.

Mo Hatvány sorozat Matlab alapok

Mo Hatvány sorozat

```
>> exp(log(q)*(0:n-1))

ans =

    1.0    2.0    4.0    8.0   16.0   32.0
```

Fa $(-1)^n$ sorozat

Adott $n > 0$ egész szám esetén hozzunk létre egy n-elemű vektort mely

az

$$-1, 1, -1, ..., (-1)^n$$

számokat tartalmazza (felváltva -1-ek és 1-ek).

Mo $(-1)^n$ sorozat Matlab alapok

$(-1)^n$ sorozat

hatványozással:

```
>> n=5;
>> (-1).^(1:n)
ans =
    -1     1    -1     1    -1
```

`repmat, floor, mod, x=[x,y], if` :

```
>> n=5;
>> valasz=repmat([ 1, -1 ], 1, floor(n/2));
>> if mod(n, 2)>0, valasz=[valasz, 1]; end
>> valasz
valasz =

     1    -1     1    -1     1
```

Függvények II

Nézzünk még néhány hasznos függvényt. `floor, ceil,round` - kerekítés:

```
>> [floor(1.49), ceil(1.49), round(1.49)]
ans =
     1     2     1
>> [floor(1.5), ceil(1.5), round(1.5)]
ans =
     1     2     2
```

`ones, zeros` -speciális vektorok:

```
>> ones(1,5)
ans =
     1     1     1     1     1
>> zeros(1,5)
ans =
     0     0     0     0     0
```

Linkek

Baran tanárnő honlapja

Numerikus matematika GI