Obliczenia Naukowe

Sprawozdanie 4

Jakub Czyszczonik

1 Zadanie 1

1.1 Opis Problemu

Zaimplementować w języku Julia funkcję obliczającą ilorazy różnicowe na podstawie podanych więzów i interpolowanych wartości w tych więzach, bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Opis algorytmu

Ogólny wzór na iloraz róznicowy: $f[x_0, x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$
Algorytm opiera się o rozwiązywanie uproszczonego równania zadanego wzorem: $f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$
Dzięki sprytnemu operowaniu pętlami cały algorytm da się wykonać w jednowymiarowej tablicy.

```
for i = 2 to length(x)
    for j = length(x) downto i
        f[j] = (f[j] - f[j-1])/(x[j] - x[j-i+1])
```

Z każdym kolejnym przejściem uzyskujemy kolejne wartości w tablicy f. I iteracyjnie źwijamy wartość w taki sam sposób w jaki byśmy to osiągnęli za pomocą rekurencyjnego wzoru.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Problemu

Zaimplemetować w Języku Julia funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera działającej w czasie liniowym ($O(n)$).

2.2 Rozwiązanie

Ogólny wzór wielomianu interpolacyjnego Newtowna zadany jest wzorem:

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Dla k-tego x wzór prezentuje się następująco: $N_k(x) := N_{k+1}(x - x_k) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ Z rozwinięcia tego wynika, że obliczanie kolejnych współczynników nie narusza uprzednio obliczonych.

Algorytm wynikający z rozwiniętego wzoru interpolacyjnego wygląda:

```
nt = fx[length(fx)]
for index = length(fx)-1 downto 1
     nt = fx[index] + (t - x[index])*nt
```

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Zaimplemetować w języku Julia funkcję obliczającą współczynniki $a_0, \ldots, a_n$ postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego dla zadanych współczynników $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], \ldots c_n = f[x_0, \ldots, x_n]$ tego wielomianu w postaci Newtona oraz węzłów $x_0, \ldots, x_n$.

3.2 Opis algorytmu

Obliczenie współczynników naturalnych wielomianu interpolacyjnego jest bardzo proste, ponieważ wykonując algorytm hornera, możemy zauważyć, że współczynnik a_n jest równy $c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ położonemu przy najwyższej potęgi x.

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Obliczanie postaci można zapisać za pomocą pseudokodu (fx - wektor ilorazów różnicowych, x - wektor węzłów) :

```
vectorLength = length(fx)
normal[vectorLength] = fx[vectorLength]
for j = vectorLength-1 downto 1
    normal[j] = fx[j]-normal[j+1]*x[j]
    for i = j+1 to vectorLength-1
        normal[i] = normal[i]-normal[i+1]*x[j]
```

Po wykonaniu wszystkich kroków otrzymujemy wektor normal w którym są zapisane wartości kolejnych współczynników w postaci normalnej. Algorytmu jest o złożoności $O(n^2)$.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Napisać funkcję, która zinterpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję.

4.2 Rozwiązanie

Algorytm zaimplementowany w funkcji rozwiązującej zadany problem:

1. Wyznaczyć węzły interpolacji należące do przedziału $[a, b]$ równo oddalone od siebie o $\frac{a+b}{n}$
2. Wyznaczyć wartości funkcji w wyznaczonych węzłach
3. Obliczyć ilorazy różnicowe dla powyższych węzłów i wartości.
4. Następnie ilość wyników zostaje zwiększona w celu zwiększenia czytelności i dokładności wykresów.

5. Wyznaczenie wartości wielomianu interpolacyjnego i wartości funkcji.

6. Narysowanie wykresu z przygotowanych wcześniej danych

5 Zadanie 5

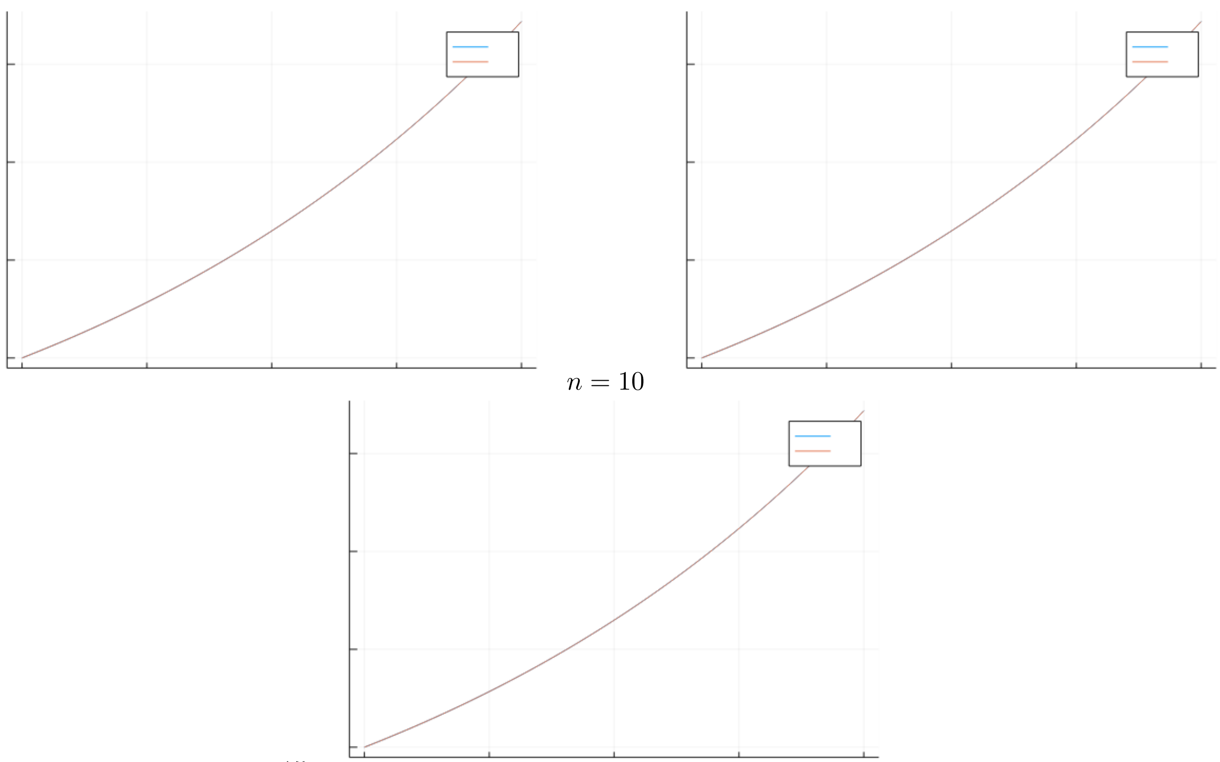
5.1 Opis problemu

Przetestowanie funkcji `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

1. $f(x) = e^x$, $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$

2. $f(x) = x^2 \sin x$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$

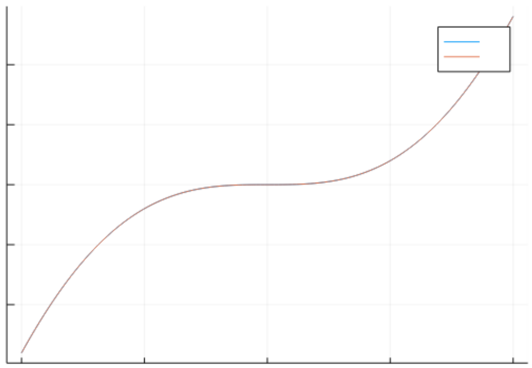
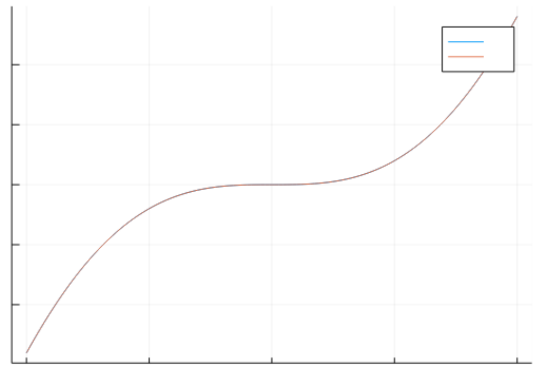
5.2 Wyniki

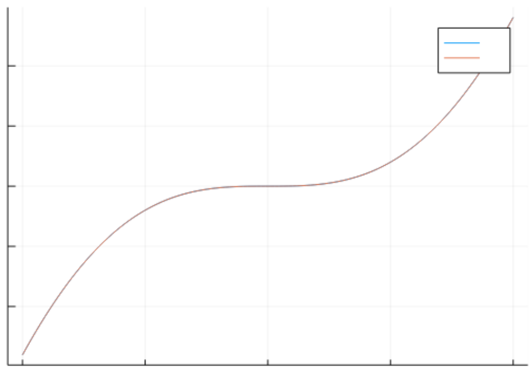


$n = 5$ $n = 10$

$n = 15$

Rysunek 1: Wykres funkcji e^x i wielomianu interpolacyjnego dla zadanego n

$n = 5$  $n = 10$ 

$n = 15$ 

Rysunek 2: Wykres funkcji e^x i wielomianu interpolacyjnego dla zadanego n

5.3 Wnioski

Na wykresach powyżej nie można zaobserwować żadnej rozbieżności, z tego wynika, że wartości dla równoodległych węzłów zostały bardzo dobrze zinteroplowane dla zadanych funkcji.

6 Zadanie 6

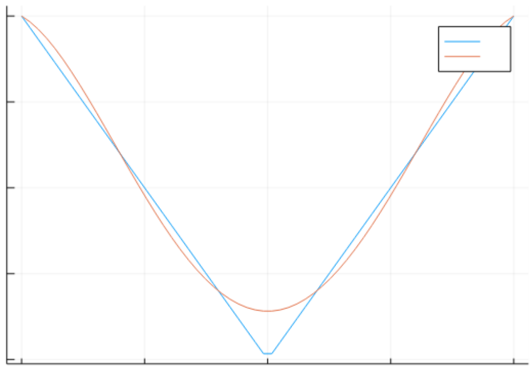
6.1 Opis problemu

Przetestowanie funkcji `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

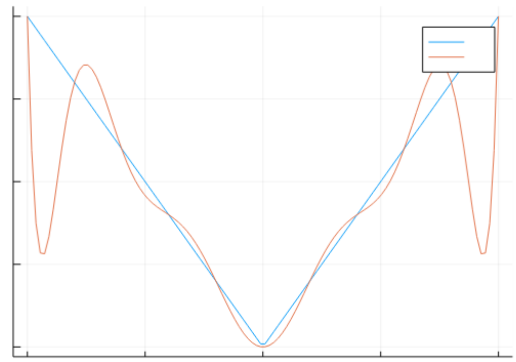
1. $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$,
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[-5, 5]$, $n = 5, 10, 15$,

6.2 Wyniki dla $|x|$

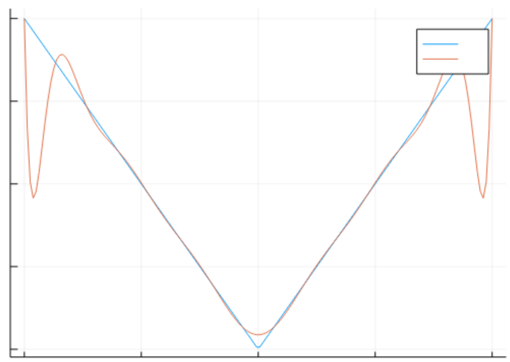
Niebieski wykres jest to funkcja interpolowana, natomiast pomarańczowy to wielomian interpolujący daną funkcję.



$n = 5$



$n = 10$



$n = 15$

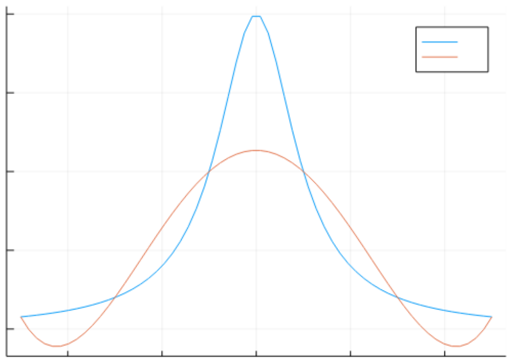
Rysunek 3: Wykres funkcji $|x|$ i wielomianu interpolacyjnego dla zadanego n

6.3 Wnioski dla $|x|$

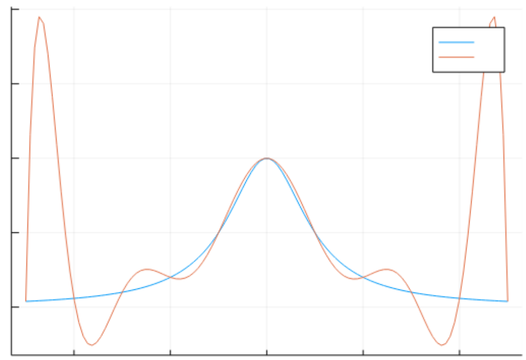
Możemy zauważyć rozbieżność, w największym stopniu są one widoczne na końcu przedziału, funkcja ta nie jest różniczkowalna co powoduje odchylenie.

6.4 Wyniki dla $\frac{1}{1+x^2}$

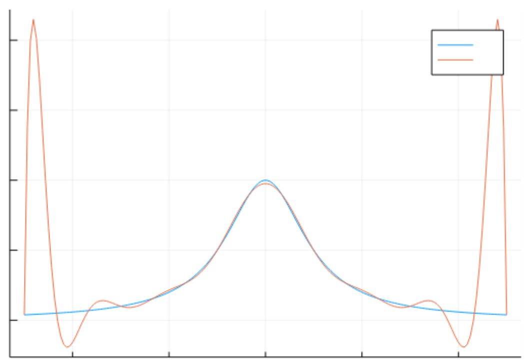
Niebieski wykres jest to funkcja interpolowana, natomiast pomarańczowy to wielomian interpolujący daną funkcję.



$n = 5$



$n = 10$



$n = 15$

Rysunek 4: Wykres funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ i wielomianu interpolacyjnego dla zadanego n

6.5 Wnioski dla $\frac{1}{1+x^2}$

Możemy zauważyć rozbieżność, w największym stopniu są one widoczne na końcu przedziału. Zaobserwować możemy również zjawisko Rungego jest to pogorszenie się dokładności interpolacji wielomianowej pomimo zwiększenia liczby węzłów.

6.6 Wnioski ogólne

Bardziej skomplikowane funkcje potrzebują wielomianów wyższych rzędów do interpolacji, co odbija się dokładnością na końcu przedziału, jest to również problem równoodległych węzłów. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie węzłów Czebyszewa.