Obliczenia Naukowe

Sprawozdanie 3

Jakub Czyszczonik

1 Zadanie 1

1.1 Opis Problemu

Zaimplemetować w Języku Julia funkcję rozwiązującą równania typu $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2 Opis algorytmu

Funkcja na wejściu przyjmuje argumenty f (funkcja), a (początek przedziału), b (koniec przedziału),delta, epsilon (dokładności obliczeń). Założeniami początkowymi dla algorytmu bisekcji są:

- Różne znaki na końcach przedziału tzn.$f(a) * f(b) < 0$.
- Ciągłość funkcji na całym poszukiwanym przedziale.

Przebieg algorytmu: Obliczamy $root = \frac{a+b}{2}$ oraz $value = f(root)$
Dopóki nie spełnimy warunku końca powtarzamy kroki:

1. $root = \frac{a+b}{2}$ oraz $value = f(root)$
2. if($f(a) * f(value) > 0$ przypisz wartość root do A w przeciwnym wypadku wartość root do B.
3. Wróc do sprawdzenia warunku spełnienia dokładności

Warunek końca: $|b_n - a_n| \leqslant \delta,\ f(root) \leqslant \epsilon$

Gdy algorym się zakończy zostanie zwócony kolejno: root, $f(root)$, liczba iteracji, wartość błędu.
Kody Błędu: 0 - Brak błędu, 1 - Dane wejściowe nie spełniają warunku różnych znaków.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Problemu

Zaimplemetować w Języku Julia funkcję rozwiązującą równania typu $f(x) = 0$ metodą Newtona zwaną także metodą stycznych.

2.2 Opis algorytmu

Funkcja na wejściu przyjmuje argumenty f (funkcja) df (pochodna funkcji), x0 (przybliżenie początkowe), delta, epsilon (dokładności obliczeń), maxint (maksymalna liczba iteracji). Założenia początkowe algorytmu:

- Różne znaki na końcach przedziału tzn.$f(a) * f(b) < 0$.
- Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.

Wybieramy punkt startowy(pierwiastek startowy) x0. A następne przybliżenia pierwiastka wyznaczamy za pomocą rekurencyjnego wzoru $x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_{k+1})}$.

Warunek końca: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \delta$, $f(x_{n+1}) \leqslant \epsilon$

Rekurencje kończymy gdy spełnimy warunek końca lub przekroczymy ustaloną maksymalną ilośc iteracji. Gdy algorym się zakończy zostanie zwócony kolejno: root, $f(root)$, liczba iteracji, wartość błędu.
Kody Błędu: 0 - Brak błędu, 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności z powodu przekroczeniu maksymalnej liczby iteracji, 2 - pochodna dąży do zera.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Zaimplemetować w Języku Julia funkcję rozwiązującą równania typu $f(x) = 0$ metodą Eulera zwaną także metodą siecznych.

3.2 Opis algorytmu

Funkcja na wejściu przyjmuje argumenty f (funkcja), x0 x1 (przybliżenia początkowe), delta, epsilon (dokładności obliczeń), maxint (maksymalna liczba iteracji). Założenie początkowe algorytmu:

- $f'(root) \neq 0$ (root jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Wybieramy punkty startowe x0 i x1, a następnie wyznaczamy kolejne przybliżenia pierwiastka za pomocą rekurencyjnego wzoru : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1}))} * f(x_n)$.

Warunek końca: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \delta$, $f(x_{n+1}) \leqslant \epsilon$
Rekurencje kończymy gdy spełnimy warunek końca lub przekroczymy ustaloną maksymalną ilośc iteracji. Gdy algorym się zakończy zostanie zwócony kolejno: root, $f(root)$, liczba iteracji, wartość błędu.
Kody Błędu: 0 - Brak błędu, 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności z powodu przekroczeniu maksymalnej liczby iteracji.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Obliczyć pierwiastki równania $sin(x) - sin(\frac{1}{2}x) = 0$. Z pomocą wcześniej zaimplementowanej metody:

1. Bisekcji z przedziałem początkowym [1,5;2] i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
2. Stycznych z $x_0 = 1,5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
3. Siecznych z $x_0 = 1$, z $x_1 = 2$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

4.2 Rozwiązanie

Algorytm	Pierwiastek	Wartość	Liczba Iteracji
Bisekcja	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Stycznych	1.9337534779656544	3.765631462204766e-7	15
Siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Metoda bisekcji wykonuje najwięcej iteracji w celu obliczenia pierwiastka równania, natomiast metoda sieczynych najmniej.

4.3 Wnioski

Najbardziej Efektywna pod względem wykonanych iteracji jest metodą aproxymacji jest metoda siecznych, natomiast inne są równie dokładne i mogą być używane zastępczo w zależności od posiadanych danych.

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Metodą bisekcji znaleźć wartość zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Przyjąć dokładność $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2 Rozwiazanie

Aby znaleźć punkty przecięcia funkcji, po przekształceniu matematycznym musimy rozwiązać równanie $3x - e^x = 0$

Przedział	Miejsce przecięcia (x)	Błąd
[0;2]	Brak	1
[0;1]	0.619140625	0
[1;2]	1.5120849609375	0

5.3 Wnioski

Metoda Bisekcji działa tylko wtedy gdy w przedziale jest jeden pierwisatek, jeśli musimy wyszukać więcje pierwiastków, powinniśmy dzielić przedział na mniejsze przedziały i na tych częściach szukać pierwisatków, mówiąc inaczej powinniśmy stosować ją w sposób hybrydowy.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Metoda	Przedział/Punkty początkowe	Root	Wartość
Bisekcja	[0;3]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6
Bisekcja	[-1000;3000]	1.0000020265579224	-2.026555868894775e-6
Newton	x0=0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6
Newton	x0=4	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10
Euler	x0=0, x1=2	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6
Euler	x0=0, x1=3	0.999999739048799	2.6095123506486573e-7

Wyniki dla funkcji: $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ i jej pochodnej $f_1'(x) = -e^{1-x}$

Metoda	Przedział/Punkty początkowe	Root	Wartość
Bisekcja	[-2;3]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6
Bisekcja	[0;30]	15.0	4.588534807527386e-6
Newton	x0 = 1.1	14.272123938290509	9.040322779745447e-6
Newton	x0 = -10	-3.784424932490619e-7	-3.784426364678097e-7
Euler	x0 = -1, x1 = 1	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8
Euler	x0 = -1, x1 = 2	14.310428368676307	8.72393778926339e-6
Newton	x0 = 1	Error	Error

Wyniki dla funkcji: $f_2(x) = x + e^{-x}$ i jej pochodnej $f_2'(x) = -e^{-x} * (x - 1)$

6.2 Wnioski

Metoda Bisekcji zwraca poprawne wyniki bez względu na dobiar przedziału, ponieważ działa ona globalnie. Dla metod Newtona i Eulera dobór parametrów ma znaczenie, ponieważ dobór danych startowych musi być taki by trafiał w dostateczne otoczenie miejsca zerowego, ponieważ te metody są zbierzne lokalnie. Dla Parametru x0=1 w metodzie Newtona dostajemy błąd, ponieważ pochodna w tym miejscu wynosi 0 co oznacza, że styczna jest równoległa do osi OX co uniemożliwia obliczenie wartości (punktu przecięcia z osią OX).