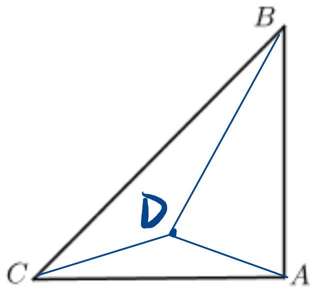
学霸闯关

1．问题：已知△ABC中，$\angle BAC=2\angle ACB$，点D是△ABC内的一点，且$AD=CD$，$BD=BA$．探究$\angle DBC$与$\angle ABC$度数的比值．请你完成下列探究过程：先将图形特殊化，得出猜想，再对一般情况进行分析并加以证明．



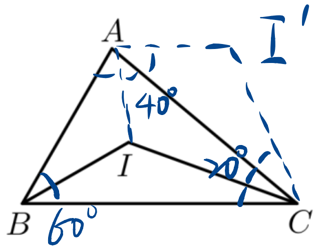
（1）当$\angle BAC=90°$时，依问题中的条件补全右图．

观察图形，AB与AC的数量关系为 AB=AC 当推出$\angle DAC=15°$时，可进一步推出$\angle DBC$的度数为 15° ；可得到$\angle DBC$与$\angle ABC$度数的比值为 $\frac{1}{3}$ ．

（2）当$\angle BAC\neq 90°$时，请你画出图形，研究$\angle DBC$与$\angle ABC$度数的比值是否与（1）中的结论相同，写出你的猜想并加以证明．

$\angle DBC:\angle ABC=\frac{1}{3}$

2．$\triangle ABC$中，$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=40°$，I是内心，求证:$AB=IC$．



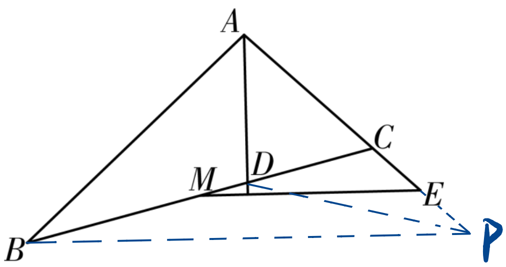
证明：作$\triangle ACI$关于AC对称的$\triangle ACI'$，

易证$\angle BAI'=120°$，$\angle ABC=\angle BCI'=60°$

$\therefore$四边形$ABCI'$为等腰梯形

$\therefore AB=I'C=IC$．

3．如图所示，在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，点M是BC的中点，$ME\perp AD$且交AC的延长线于点E，$CE=\frac{1}{2}CD$，求证：$\angle ACB=2\angle B$．



证明：延长CE到点P，使$EP=CE$，连接DP，BP．

$\because CD=2CE$

$\therefore CD=CP$

$\therefore \angle CDP=\angle CPD$

$\therefore \angle ACB=\angle CDP+\angle CPD=2\angle CPD$

$\because M$为BC中点，

$\therefore ME\parallel BP$

$\because AD\perp ME$

$\therefore AD\perp BP$

$\because AD$平分$\angle BAP$

$\therefore AB=AP$，$\angle BAD=\angle PAD$

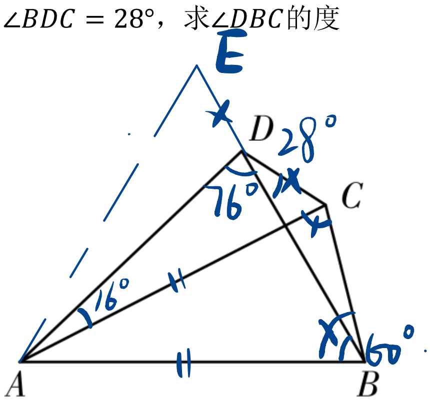
$\because AD=AD$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle APD\ (SAS)$

$\therefore \angle ABD=\angle APD$

$\therefore \angle ACB=2\angle ABD$

4．如图，在四边形$ABCD$中，已知$AB=AC$，$\angle ABD=60°$，$\angle ADB=76°$，$\angle BDC=28°$，求$\angle DBC$的度数．



解：延长BD到点E，使DE=DC，连接AE，如图所示

易证$\angle ADE=\angle ADC=104°$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC$ (SAS)

$\therefore AE=AC$，$\angle E=\angle ACD$，$\angle EAD=\angle CAD$.

$\because AB=AC$，$\angle ABD=60°$.

$\therefore \triangle ABE$为等边三角形.

$\therefore \angle E=\angle EAB=\angle ACD=60°$

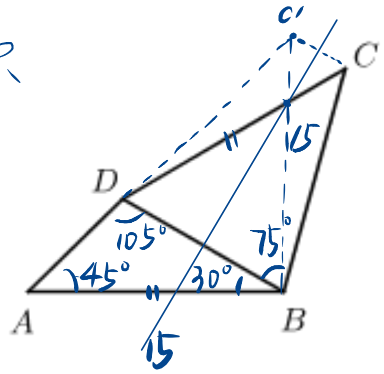
$\therefore \angle CAD=16°$.

$\therefore \angle CAB=28°$

$\therefore \angle ABC=76°$

$\therefore \angle DBC=16°$.

5．如下图，在凸四边形$ABCD$中，$\angle ADB=\angle ABC=105°$，$\angle CBD=75°$，$AB=CD=15$，求四边形$ABCD$的面积．



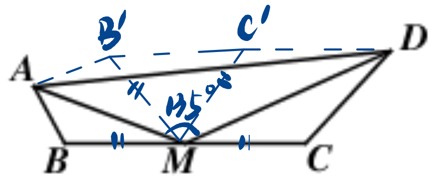
解：作$\triangle BCD$关于BD的垂直平分线对称

得$\triangle DBC'$.

易证$\triangle ABC'$为等腰直角三角形.

$\therefore S_{四ABCD}=S_{Rt\triangle ABC'}=\frac{1}{2}\times 15\times 15=112.5$

6．设M是凸四边形$ABCD$的边BC的中点，$\angle AMD=135°$．求证：$AB+\frac{\sqrt{2}}{2}BC+CD\geqslant AD$．



证明：分别作点B,C关于AM，DM的对称点B′,C′.

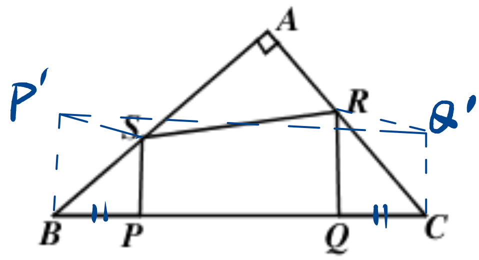
连接AB′，MB′，C′D，MC′，B′C′.

易证 $AB'=AB$，$CD=C'D$，$B'C'=\sqrt{2}MB'=\sqrt{2}BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$.

$\because AB'+B'C'+C'D\geqslant AD$

$\therefore AB+\frac{\sqrt{2}}{2}BC+CD\geqslant AD$.

7．在Rt△ABC的斜边上取点P、Q，使得$BP=CQ$，AC上取点R，AB上取点S，求证：$QR+RS+SP\geqslant BC$．



证明：$QR+RS+SP=Q'R+RS+SP'\geqslant P'Q'$

$\because \angle P'BP+\angle Q'CQ=180°$,

$\therefore BP'\parallel CQ'$

$\because BP'=CQ'$

$\therefore$四边形$BP'Q'C$为平行四边形

$\therefore BC=P'Q'$.

$\therefore QR+RS+SP\geqslant BC$.