06

几何变换之对称一

- 模块一　轴对称的概念及性质
- 模块二　将军饮马问题

06 几何变换之对称一

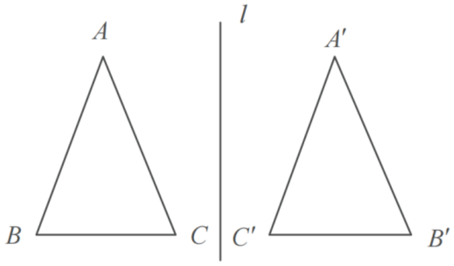
模块一 轴对称的概念及性质

知识导航

轴对称的基本概念

两个图形(成轴)对称：把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形完全重合，那么就是说这两个图形关于这条直线(成轴)对称，这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做对称点．

如图，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，l叫做对称轴．A和A'，B和B'，C和C'是对称点．



轴对称的性质

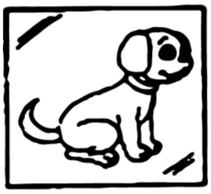
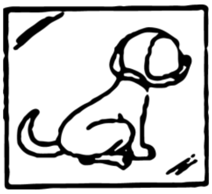
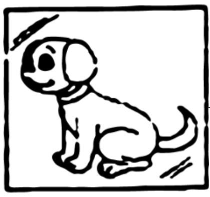
（1）关于一条直线成轴对称的图形全等；

（2）对称点连成的线段被对称轴垂直平分．

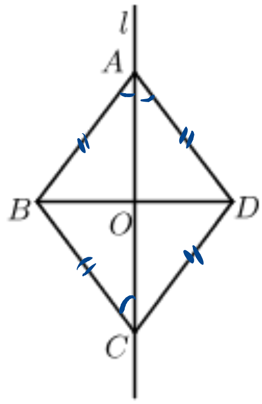
例 1

1．小明照镜子的时候，发现T恤上的英文单词在镜子中呈现“”的样子，请你写出这个英文单词是<u>APPLE</u>

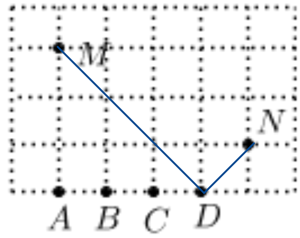
2．小狗皮皮看到镜子里的自己，觉得很奇怪，此时他所看到的全身像是（A）．

A.  B.  C.  D. 

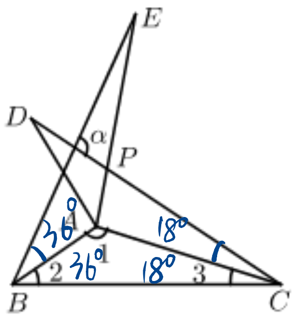
3．如图，直线l是四边形$ABCD$的对称轴，若$AD//BC$，则下列结论：（1）$AB//CD$；（2）$AB=AD$；（3）$BO=CO$；（4）$AC\perp BD$．其中正确的有<u>(1)(2)(4)</u>（填序号）．



4．如图，桌面上有M、N两球，若要将M球射向桌面的任意一边，使一次反弹后击中N球，则4个点中，可以瞄准的是__D__点．



5．如图，$\triangle ABE$、$\triangle ADC$和$\triangle ABC$分别是关于AB，AC边所在直线的轴对称图形，若$\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 7 : 2 : 1$，则$\angle\alpha$的度数为（C）．



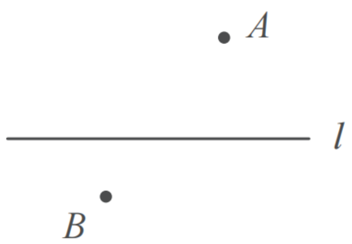
$\alpha = 72° + 36° = 108°$

A．126°　　B．110°　　C．108°　　D．90°

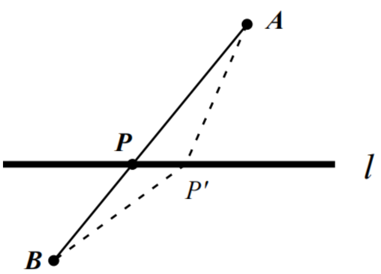
模块二 将军饮马问题

知识导航

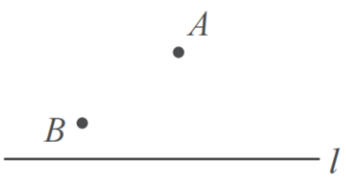
知识点回忆：回忆 1:如图，在l上找一点 P，使 $PA+PB$ 最小.



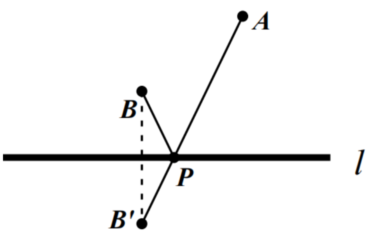
【解析】直线 AB 与l的交点即为所求点 P，$PA+PB$ 最小值为 AB



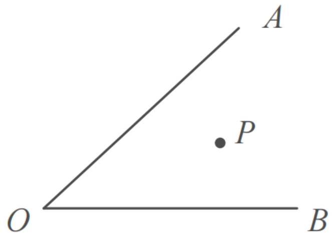
回忆 2:如图，在l上找一点 P，使 $PA+PB$ 最小.



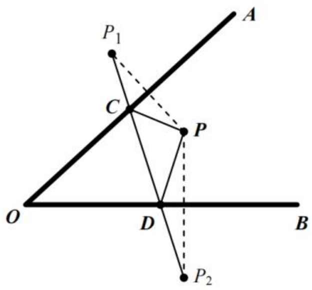
【解析】作点 B 关于直线 AB 的对称点 B'，直线 AB'与l的交点即为所求点 P，$PA+PB$ 最小值为 AB'.



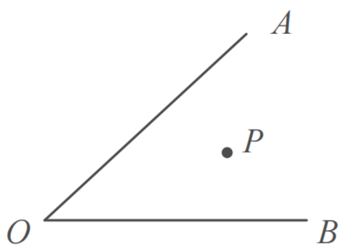
回忆 3:如图，点 P 在锐角∠AOB 的内部，在 OB 边上求作一点 D，在 OA 边上求作一点 C，使△ PCD的周长最小.



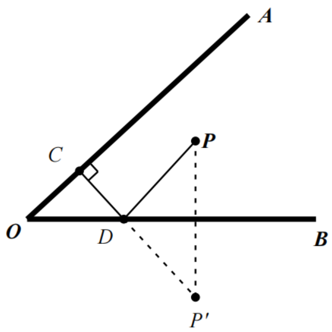
【解析】作点 P 关于直线 OA、OB 的对称点P_1、P_2，P_1P_2与直线 OA、OB 的交点为所求点 C、D．△ PCD 的周长最小值为P_1P_2长度.



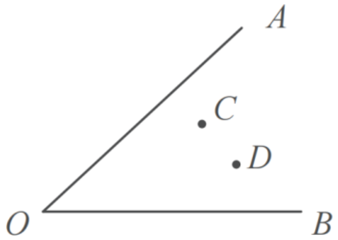
回忆 4:如图，点 P 在锐角∠AOB 的内部，在 OB 边上求作一点 D，在 OA 边上求作一点 C，使 $PD+CD$ 最小.



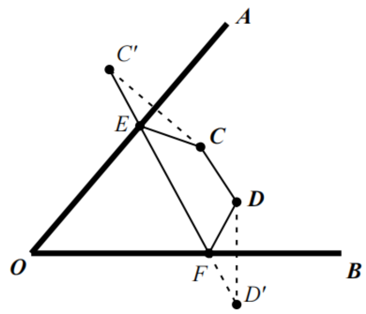
【解析】作点 P 关于直线 OB 的对称点P'、过P'向直线 OA 作垂线、与 OB 的交点为所求点 D，垂足即为点 C．$PD+CD$ 的最小值为$P'C$长度.



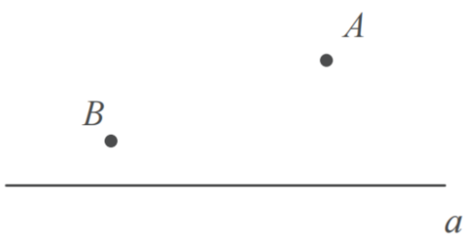
回忆 5:如图，点 C、D 在锐角$\angle AOB$的内部，在 OB 边上求作一点 F 在 OA 边上求作一点 E，使四边形 $CEFD$ 周长最小.



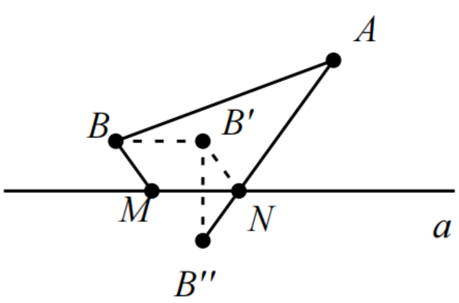
【解析】如图所示，作 C、D 两点分别关于直线 OA、OB 的对称点C'、D'，连接C'、D'分别交 OA、OB 于 EF，实线所示即为所求.



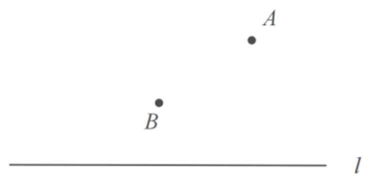
回忆 6:A、B 与直线 a 的位置关系如图，在直线 a 上找到 M、N 两点，且$MN=10$，M 在 N 的左边，使四边形 $ABMN$ 的周长最短.



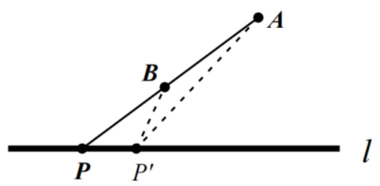
【解析】作法：（1）过点 B 向右作$BB'//a$，且$BB'=10$；（2）找点B'关于l的对称点B''；（3）连结AB''与直线 a 交于点 N；（4）在直线 a 上选取 N 左侧一点 M 满足$MN=10$，则 M、N 两点即为所求．其中步骤（1）与（2）可以互换，即先作对称，再作平移.



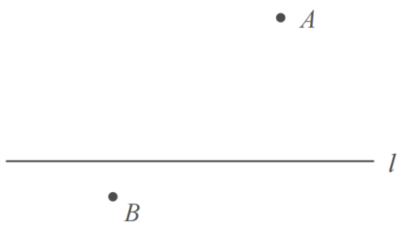
回忆 7:如图，在l上找一点 P，使$|PA-PB|$最大.



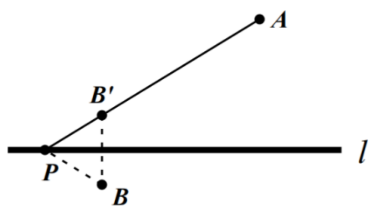
【解析】直线 AB 与l的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$最大值为 AB.



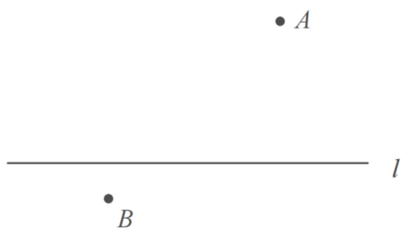
回忆 8:如图，在l上找一点 P，使$|PA-PB|$最大.



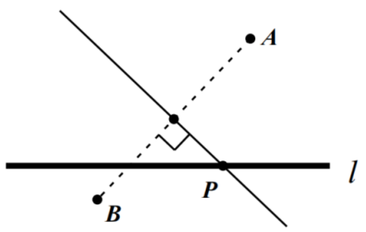
【解析】作点 B 关于直线l的对称点B'，直线AB'与l的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$最大值为 AB.



回忆 9:如图，在l上找一点 P，使$|PA-PB|$最小.

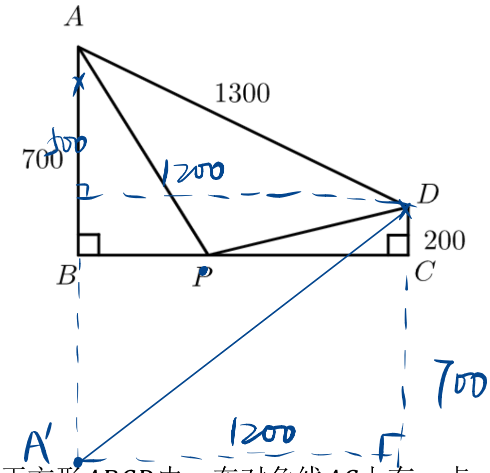


【解析】直线 AB 的中垂线与l的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$最小值为 0.

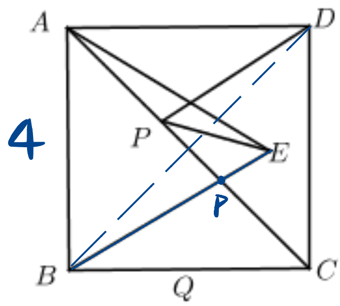


例 2

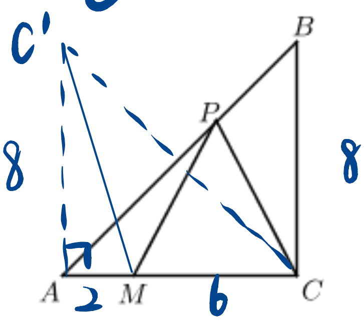
1．如下图，直角梯形$ABCD$，$AB=700$，$CD=200$，$AD=1300$，线段BC上有一点P，使得$PA+PD$最小，这个最小值为<u>1500</u>．



2．如图，正方形$ABCD$的面积为16，$\triangle ABE$是等边三角形，点E在正方形$ABCD$内，在对角线AC上有一点P，使$PD+PE$最小，则这个最小值为<u>4</u>．



3．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点M在AC边上，且$AM=2$，$MC=6$，动点P在AB边上，连接PC，PM，则$PC+PM$的最小值是（C）．



$C'M=\sqrt{8^2+2^2}$

$=\sqrt{68}$

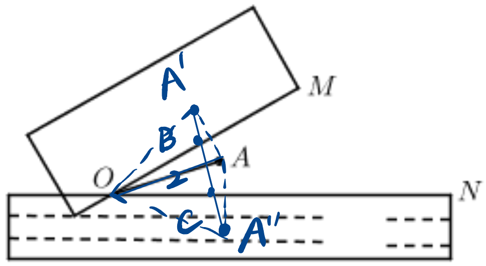
$=2\sqrt{17}$

A．$2\sqrt{10}$　　B．8　　C．$2\sqrt{17}$　　D．10

例 3

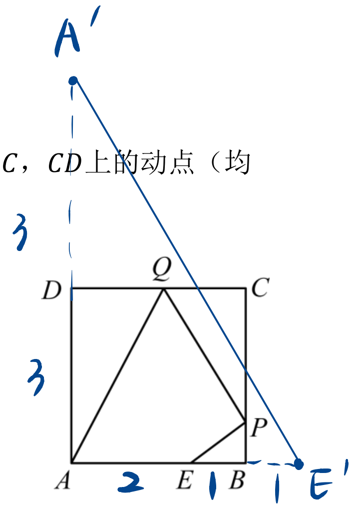
1．如图，草地边缘OM与小河河岸ON在点O处形成30°的夹角，牧马人从A地出发，先让马到草地吃草，然后去河边饮水，最后回到A地．已知 OA=2km，请在图中设计一条路线，使所走的路径最短，并求出整个过程所行的路程．

解：分别作点A关于直线OM，ON的对称点A′，A″，连接A′A″分别交OM，ON于点B，C．从A点出发，到B点吃草，再到C点饮水，最后回到A地，即最短路径，路程为2km．

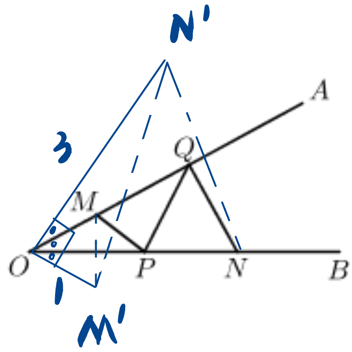


2．如图，已知正方形$ABCD$边长为3，点E在AB边上，且$BE = 1$，点P，Q分别是边BC，CD上的动点（均不与顶点重合），则四边形$AEPQ$的周长的最小值是$2\sqrt{13}+2$．

$A'E' = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}$



3．如图，$\angle AOB = 30°$，点M、N分别在边OA、OB上，且$OM = 1$，$ON = 3$，点P、Q分别在边OB、OA上，则$MP + PQ + QN$的最小值是$\sqrt{10}$．



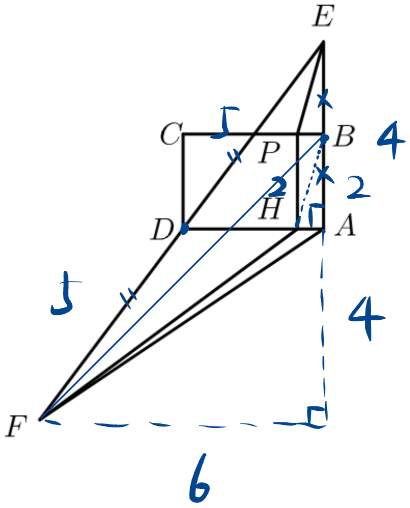
例 4

1．如图：AD为$\triangle AEF$的中线且$AD\perp AE$，$AD=3$，$AE=4$，点B为AE的中点．以AB和AD为两邻边作矩形$ABCD$，动点P从B出发，沿线段BC向终点C运动，过点P作$PH\perp AD$，垂足为H，连接PE、HF．问$EP+PH+HF$是否有最小值？如果有，求出最小值，如果没有，说明理由．

解：有.

$(EP+HF)_{min}=BF=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$\therefore (EP+PH+HF)_{min}=6\sqrt{2}+2$.



2．如图，正方形$ABCD$的边长为8，点E在边BC上且$CE=2$，长为$\sqrt{2}$的线段MN在AC上运动，则四边形$BMNE$的周长最小值为$\underline{\sqrt{58}+\sqrt{2}+6}$.

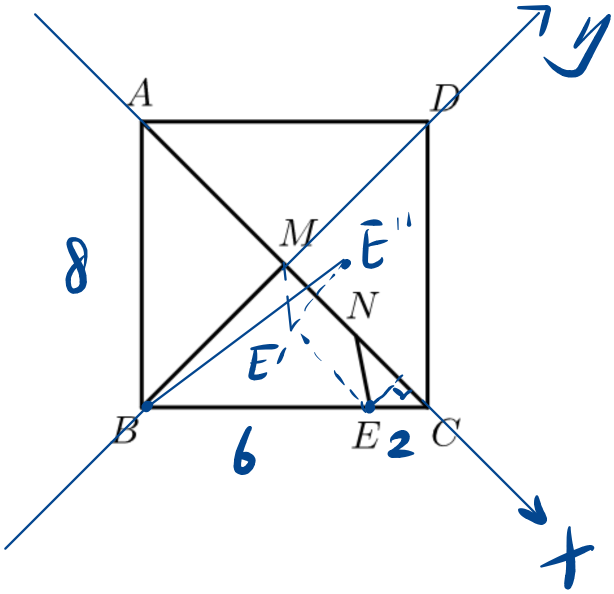
$E(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$E'(2\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$E''(2\sqrt{2},\sqrt{2})$　　$B(0,-4\sqrt{2})$.

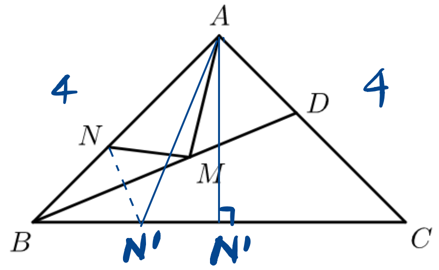
$\therefore BE''=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{58}$.

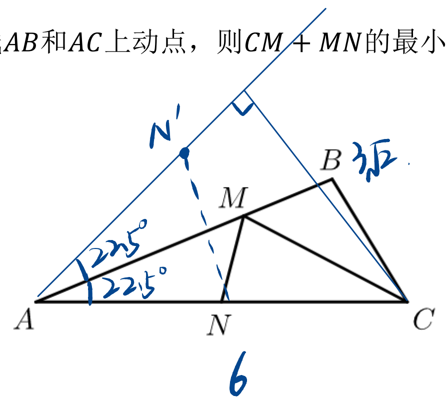


例 5

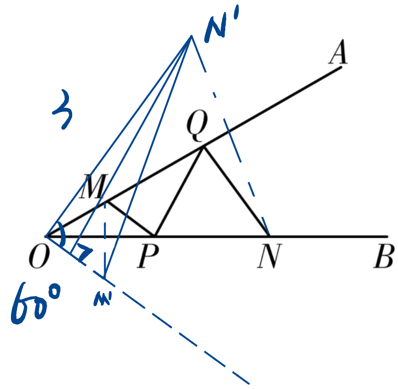
1．等腰直角三角形ABC，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=4$，在$\angle ABC$的角平分线BD上存在动点M，在AB边上存在一动点N，连接AM和MN，则$(AM+MN)$的最小值为$2\sqrt{2}$.



2．如图：$\triangle ABC$中，$AC=6$，$\angle BAC=22.5°$，点M、N分别是射线AB和AC上动点，则$CM+MN$的最小值是$3\sqrt{2}$.

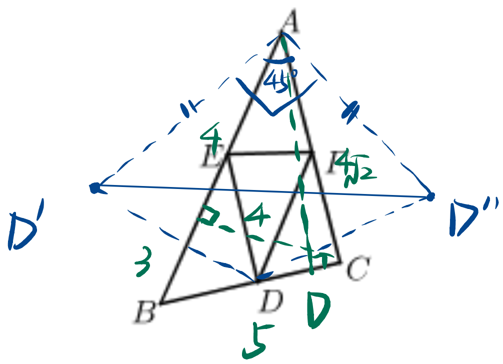


3．如图，$\angle AOB=20°$，点M，N分别在边OA，OB上，且$ON=3$，点P在边OB上，点M，Q在OA，则$MP+PQ+QN$的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



例 6

1．在△ABC中，$\angle A=45°$，$AB=7$，$AC=4\sqrt{2}$，点D、E、F分别为BC、AB、AC上的动点，求△DEF的最小周长 $\frac{28\sqrt{2}}{5}$.



解：$C_{\triangle DEF\,min}=D'D''$

$=\sqrt{2}AD$

$\frac{1}{2}\times 5\cdot AD_{min}=\frac{1}{2}\times 7\times 4$

$AD_{min}=\frac{28}{5}$

$\because AD_{min}=\frac{28}{5}$

$\therefore C_{\triangle DEF\,min}=\frac{28\sqrt{2}}{5}$