ООО «Планомедиа»
Ю.Б. Мельников

Оптимизация работы персонала торговой сети «Кировский»

(описание математической модели)

Екатеринбург, 2017

Оглавление

1. Сведение задачи к прогнозу времени **4**

1.1. Сканы, чеки: понедельники с 2.01.2016 7

1.2. Сканы, чеки: вторники с 2.01.2016 8

1.3. Сканы, чеки: среды с 2.01.2016 9

1.4. Сканы, чеки: четверги с 2.01.2016 10

1.5. Сканы, чеки: пятницы с 2.01.2016 11

1.6. Сканы, чеки: субботы с 2.01.2016 12

1.7. Сканы, чеки: воскресенья с 2.01.2016 13

1.8. Расчет суточного расписания кассиров 14

1.9. Расчет месячного расписания кассиров 18

2. Построение прогноза числа кассиров **20**

2.1. Варианты прогноза числа кассиров 21

2.2. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: обозначения 24
2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт 27

3. Распределение смен **33**

1. Сведение задачи к прогнозу времени

Представленная статистика показала, что для произвольного фиксированного фиксированного часа рабочего (не праздничного) дня недели (понедельник-пятница) разница между среднеквадратическое отклонение числа обслуженных покупателей составляет 8-20%. То же справедливо и для выходных и праздничных дней.

Кроме того, отношение числа сканирований к числу отбитых чеков составляет 4-7, причем для каждого часа среднеквадратическое отклонение невелико. К концу дня имеется тенденция к небольшому увеличению этого отношения. Поэтому в расчетах, учитывая неустранимый разброс, можно считать это отношение равным 6, но мы этим не воспользовались.

1. Сведение задачи к прогнозу времени

Представленная статистика показала, что для произвольного фиксированного фиксированного часа рабочего (не праздничного) дня недели (понедельник-пятница) разница между среднеквадратическое отклонение числа обслуженных покупателей составляет 8-20%. То же справедливо и для выходных и праздничных дней.

Мы ориентировались на представленные нам продолжительности действий:

1 скан занимает $T_s = 2$ секунды;

2 речевой модуль и прием оплаты составляет $T_m = 25$ секунд.

Нам эти показатели показались заниженными, поэтому мы параметры T_s и T_m в программе рассматриваем как параметры.

1. Сведение задачи к прогнозу времени

Представленная статистика показала, что для произвольного фиксированного фиксированного часа рабочего (не праздничного) дня недели (понедельник-пятница) разница между среднеквадратическое отклонение числа обслуженных покупателей составляет 8-20%. То же справедливо и для выходных и праздничных дней.

Мы ориентировались на представленные нам продолжительности действий:

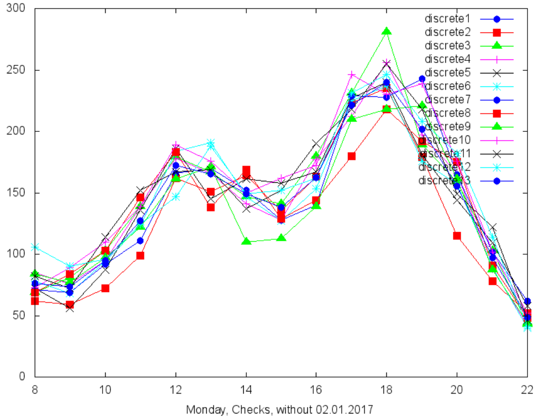
1 скан занимает $T_s = 2$ секунды;

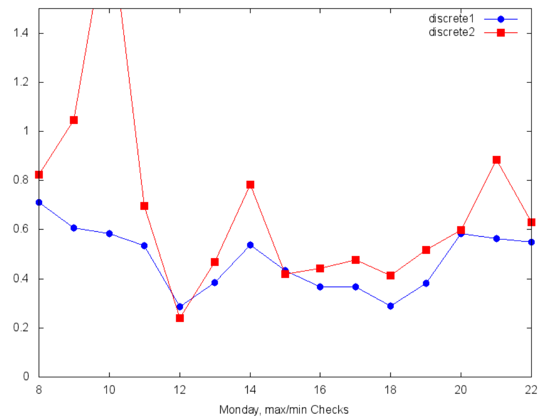
2 речевой модуль и прием оплаты составляет $T_m = 25$ секунд.

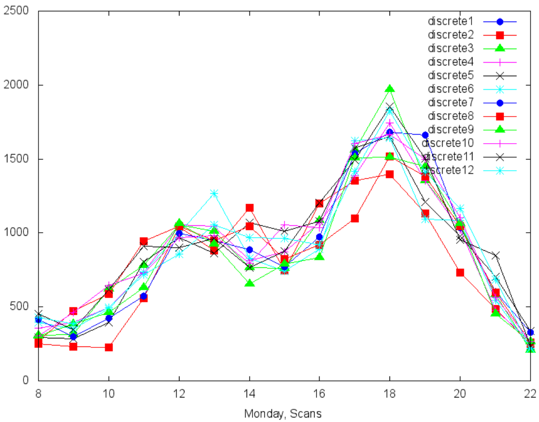
Нам было сказано, что все работники устроены на полную ставку, доли ставки при оптимизации из рассмотрения исключаются.

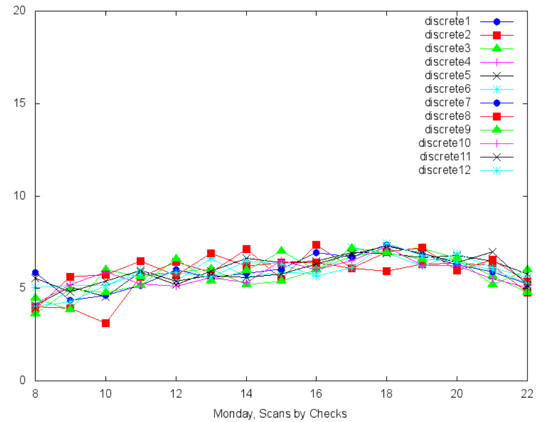
В итоге получили, что для оптимизации числа кассиров рассматриваются только число чеков и число сканов за час.

1.1. Сканы, чеки: понедельники с 2.01.2016

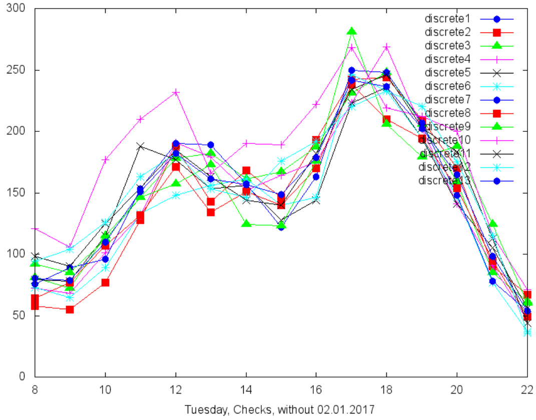


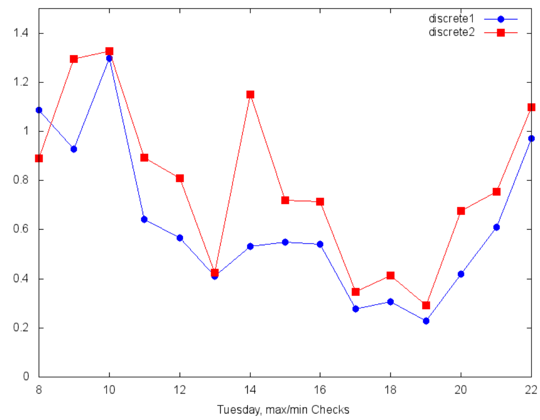


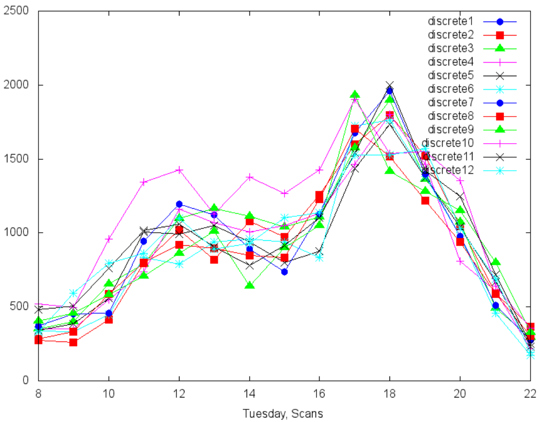


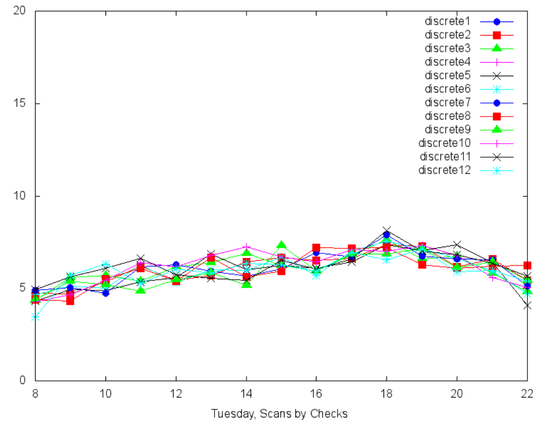


1.2. Сканы, чеки: вторники с 2.01.2016

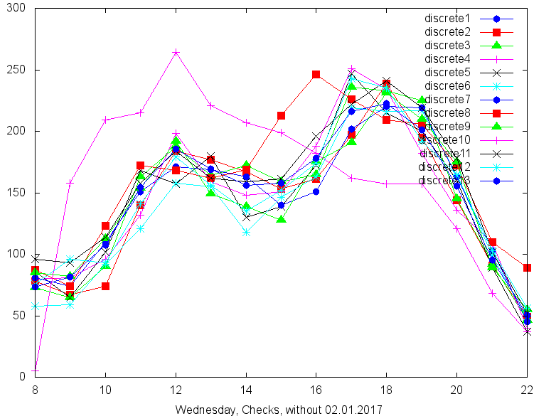


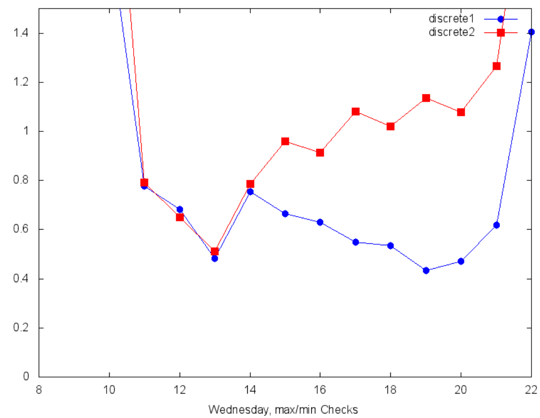


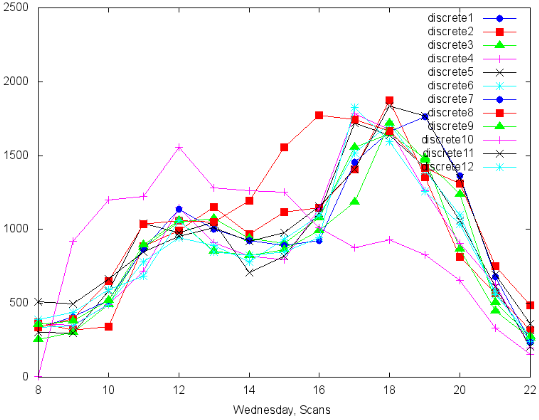


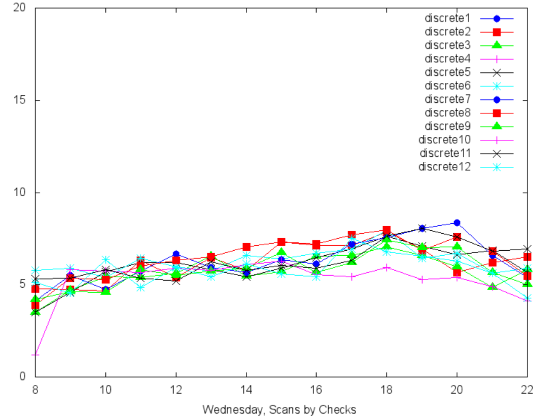


1.3. Сканы, чеки: среды с 2.01.2016

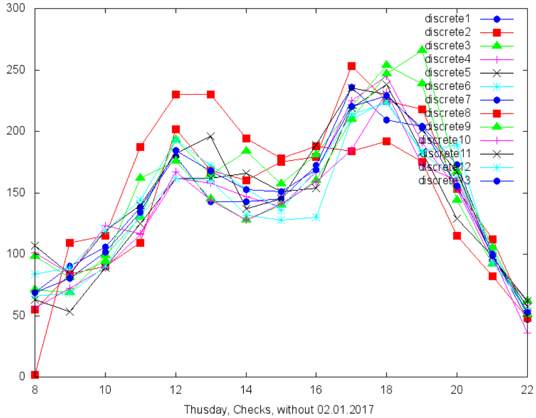


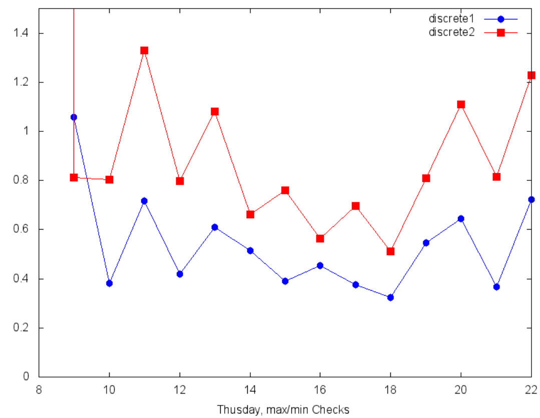


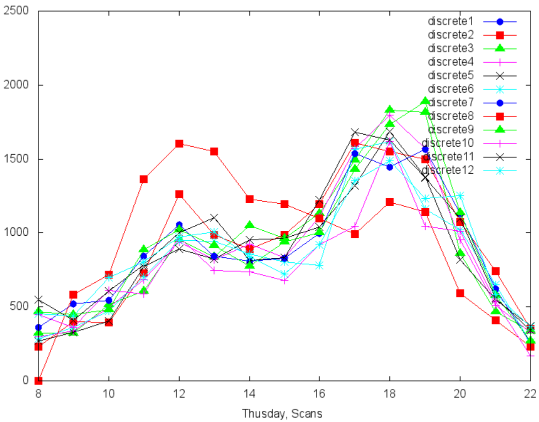


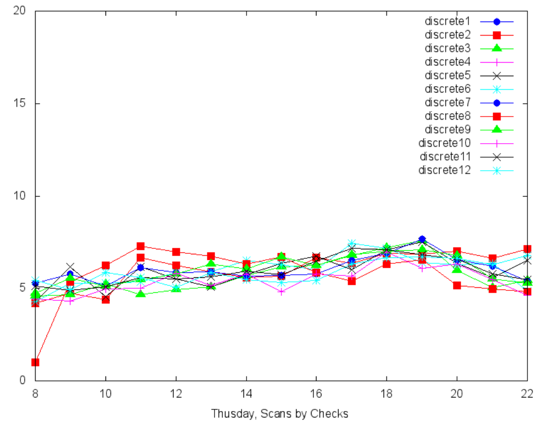


1.4. Сканы, чеки: четверги с 2.01.2016

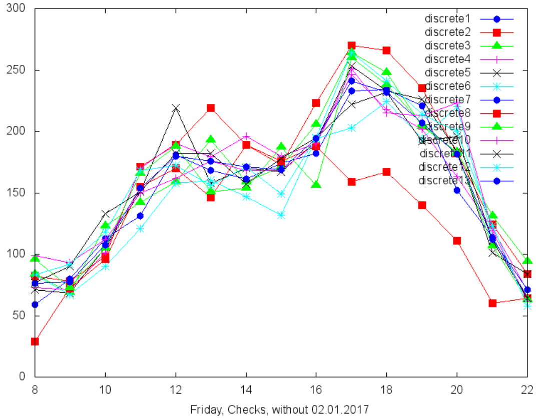


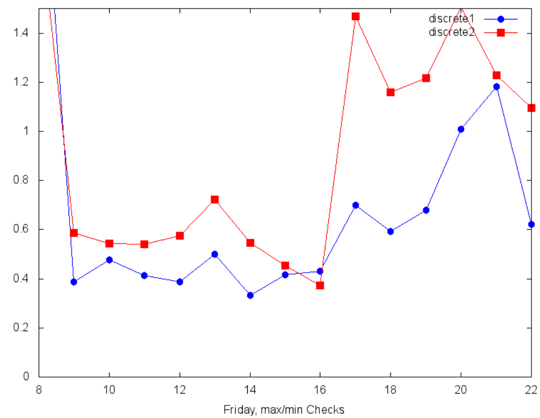


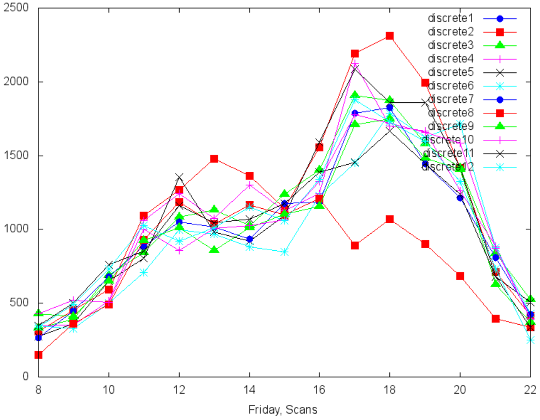


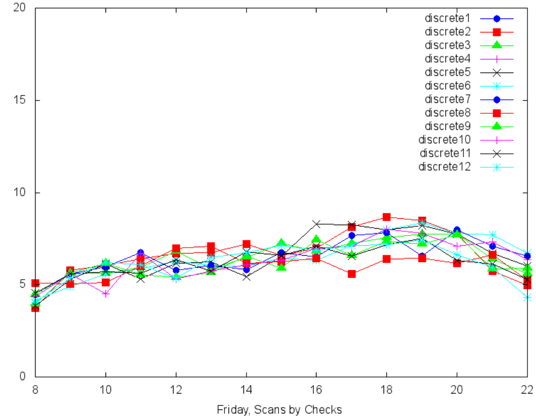


1.5. Сканы, чеки: пятницы с 2.01.2016

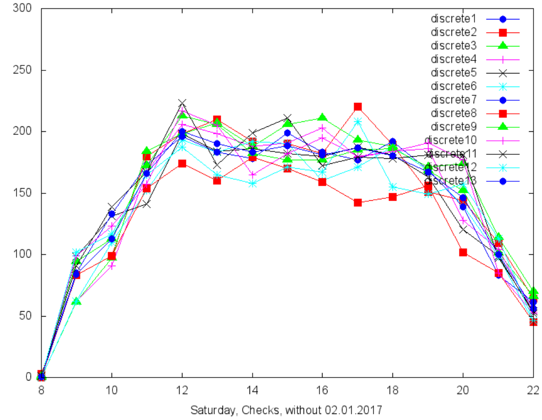


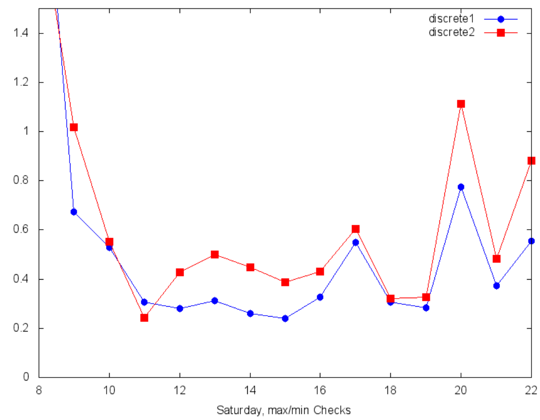


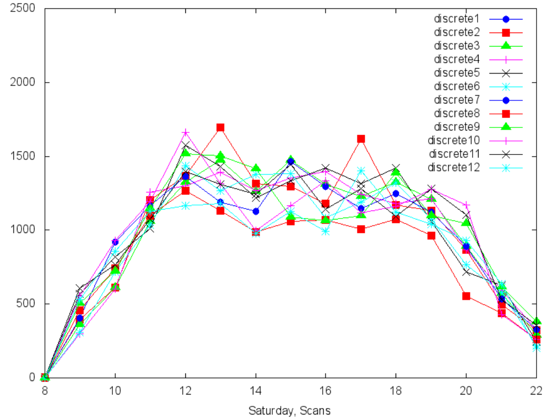


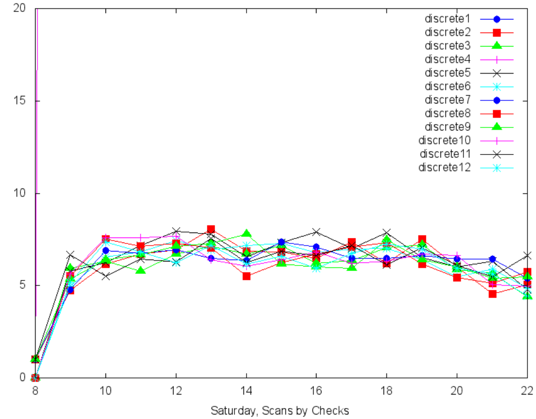


1.6. Сканы, чеки: субботы с 2.01.2016

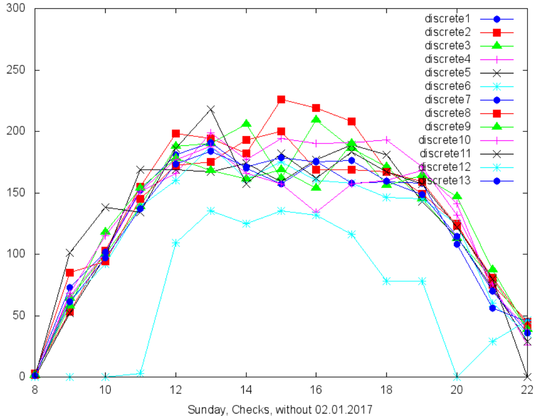


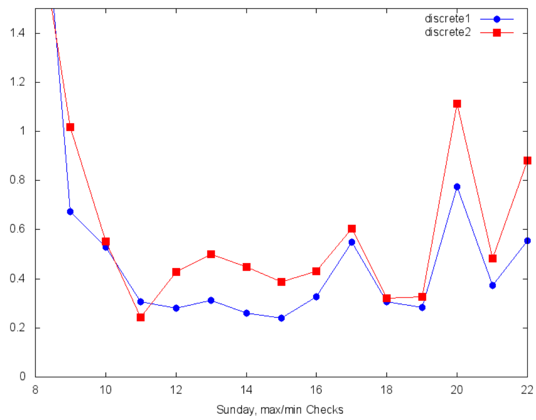


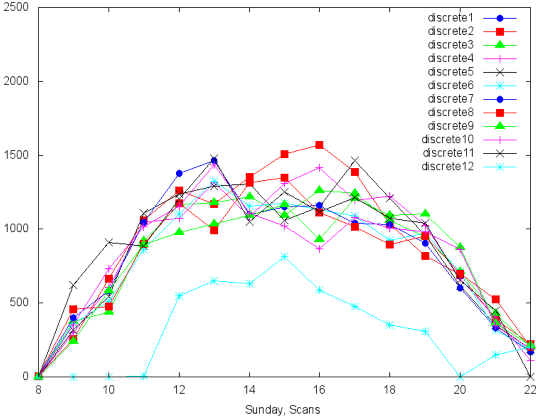


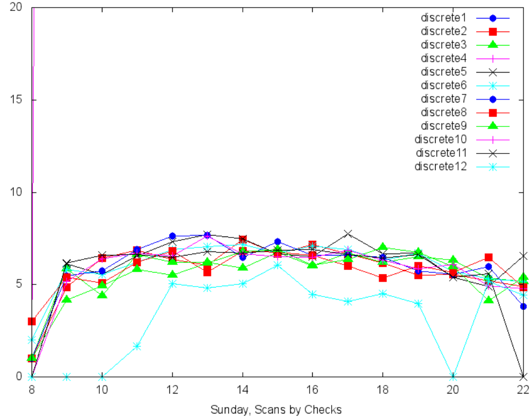


1.7. Сканы, чеки: воскресенья с 2.01.2016









1.8. Расчет суточного расписания кассиров

Обозначим через t_i суммарное время в секундах, которое должны затратить кассиры на обслуживание покупателей в промежутке между i-м часом и $(i+1)$-м часом.

1.8. Расчет суточного расписания кассиров

Час	8	9	10	...	23
Сканов	s_8	s_9	s_{10}	...	s_{23}
Чеков	m_8	m_9	m_{10}	...	m_{23}
Время	t_8	t_9	t_{10}	...	t_{23}

Формулы расчета t_i (сек.):
$t_i = T_m m_i + T_s S_i$, где
$T_m = 25$ и $T_s = 2$ (значения могут корректироваться).

Обозначим через t_i суммарное время в секундах, которое должны затратить кассиры на обслуживание покупателей в промежутке между i-м часом и $(i+1)$-м часом.

1.8. Расчет суточного расписания кассиров

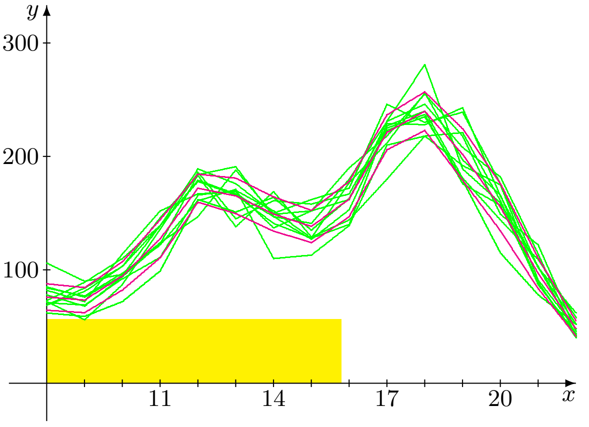
Час	8	9	10	…	23
Сканов	s_8	s_9	s_{10}	…	s_{23}
Чеков	m_8	m_9	m_{10}	…	m_{23}
Время	t_8	t_9	t_{10}	…	t_{23}

Формулы расчета t_i (сек.):
$t_i = T_m m_i + T_s S_i$, где
$T_m = 25$ и $T_s = 2$ (значения могут корректироваться).

Изображен полигон числа чеков по понедельникам.

Считаем, что за час один кассир обслуживает до 60 покупателей (число, видимо, заниженное).

Кассир, вышедший с 8:00 до 16:00 «закрывает» часть нагрузки, отмеченную горизонтальной полосой.



1.8. Расчет суточного расписания кассиров

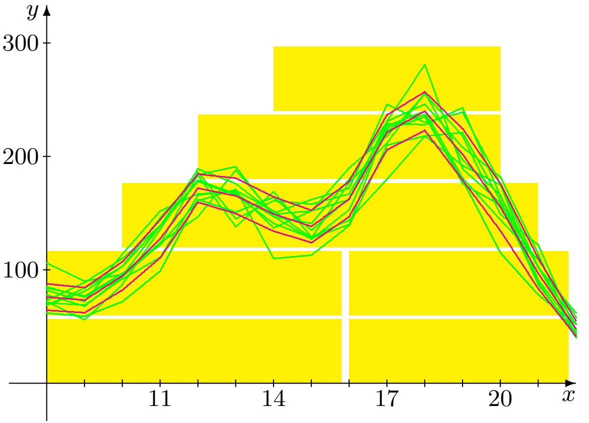
Час	8	9	10	...	23
Сканов	s_8	s_9	s_{10}	...	s_{23}
Чеков	m_8	m_9	m_{10}	...	m_{23}
Время	t_8	t_9	t_{10}	...	t_{23}

Формулы расчета t_i (сек.):
$t_i = T_m m_i + T_s S_i$, где
$T_m = 25$ и $T_s = 2$ (значения могут корректироваться).

Представлен оптимизированный график работы кассиров:

1	2	3	4	5	6	7
8-16	16-23	8-16	16-23	10-22	12-20	14-20

График кассира 7 можно сдвигать для обеспечения нелинейных операций. Нелинейные операции можно обеспечить за счет удлинения смен.



1.9. Расчет месячного расписания кассиров

Допустим построен прогноз суточного расписания кассиров на каждый день месяца. Формирование расписания каждого кассира на месяц проводится по следующему алгоритму.

1.9. Расчет месячного расписания кассиров

Допустим построен прогноз суточного расписания кассиров на каждый день месяца. Формирование расписания каждого кассира на месяц проводится по следующему алгоритму.

Сначала по каждому дню суммируются продолжительности самых продолжительных смен, пока эта сумма не станет больше 175.

1-2 длинных смены «подравниваются» так, чтобы в сумме получить ровно 175 часов.

«Занятые» смены удаляются из дальнейших расчетов.

Для последних стадий расчета в случае, если для оставшихся смен не удается обеспечить 175 часов месячной занятости, приходится удлинять некоторые из суточных смен.

2. Построение прогноза числа кассиров

В настоящий момент реализован только один из вариантов, но можно попробовать применить и другие.

2.1. Варианты прогноза числа кассиров

Час	8	9	10	...	23
Время	t'_8	t'_9	t'_{10}	...	t'_{23}

Учет наблюдений прошлого года и прошлых недель без фундаментальных факторов.

Здесь

$t_i^{\text{неделя}}$ — суммарное время (в секундах) обслуживания покупателей всеми кассирами в течение часа $(i, i+1]$ в определенную неделю;

$t_i'^{\text{неделя}}$ — прогноз этого времени $(i, i+1]$ в данную неделю.

2.1. Варианты прогноза числа кассиров

Час	8	9	10	...	23
Время	t'_8	t'_9	t'_{10}	...	t'_{23}

Учет наблюдений прошлого года и прошлых недель без фундаментальных факторов.

1) $t'_i = \alpha t_i^{\text{прошлый год}} + \beta_1 t_i^{\text{неделя}-1} + \beta_2 t_i^{\text{неделя}-2} + \ldots + \beta_k t_i^{\text{неделя}-k}$, где $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_k = 1$ (средневзвешенное);

2) $t'_i = \max\left\{t_i^{\text{прошлый год}};\ t_i^{\text{неделя}-1}\ t_i^{\text{неделя}-2};\ \ldots;\ t_i^{\text{неделя}-k}\right\}$ (с возможной выбраковкой выбросов);

3) $t'_i = \sqrt{\alpha\left(t_i^{\text{прошл.год}}\right)^p + \beta_1\left(t_i^{\text{нед.}-1}\right)^p + \beta_2\left(t_i^{\text{нед.}-2}\right)^p + \ldots + \left(\beta_k t_i^{\text{нед.}-k}\right)^p}$, где $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_k = 1$ (средневзвешенное);

4) $t'_i = \sqrt[p]{\max\left\{\left(t_i^{\text{прошлый год}}\right)^p;\ \left(t_i^{\text{неделя}-1}\right)^p\ \left(t_i^{\text{неделя}-2}\right)^p;\ \ldots;\ \left(t_i^{\text{неделя}-k}\right)^p\right\}}$.

В 3)-4) при $p < 1$ различия сглаживаются, при $p > 1$ — подчеркиваются.

Например, $0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4 = 3.0$; $\left\{\begin{array}{l}\left(0.5 \cdot \sqrt{2} + 0.5 \cdot \sqrt{4}\right)^2 = 2.9142 < 3; \\ \sqrt{0.5 \cdot 2^2 + 0.5 \cdot 4^2} = 3.162278 > 3.\end{array}\right.$

2.1. Варианты прогноза числа кассиров

Час	8	9	10	…	23
Время	t'_8	t'_9	t'_{10}	…	t'_{23}

Учет наблюдений прошлого года и прошлых недель без фундаментальных факторов.

1) $t'_i = \alpha t_i^{\text{прошлый год}} + \beta_1 t_i^{\text{неделя}-1} + \beta_2 t_i^{\text{неделя}-2} + \ldots + \beta_k t_i^{\text{неделя}-k}$, где $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_k = 1$ (средневзвешенное);

2) $t'_i = \max\left\{t_i^{\text{прошлый год}};\; t_i^{\text{неделя}-1}\; t_i^{\text{неделя}-2};\; \ldots;\; t_i^{\text{неделя}-k}\right\}$ (с возможной выбраковкой выбросов);

3) $t'_i = \sqrt{\alpha\left(t_i^{\text{прошл.год}}\right)^p + \beta_1\left(t_i^{\text{нед.}-1}\right)^p + \beta_2\left(t_i^{\text{нед.}-2}\right)^p + \ldots + \left(\beta_k t_i^{\text{нед.}-k}\right)^p}$, где $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_k = 1$ (средневзвешенное);

4) $t'_i = \sqrt[p]{\max\left\{\left(t_i^{\text{прошлый год}}\right)^p;\; \left(t_i^{\text{неделя}-1}\right)^p\; \left(t_i^{\text{неделя}-2}\right)^p;\; \ldots;\; \left(t_i^{\text{неделя}-k}\right)^p\right\}}$.

Для будней можно учесть результаты предшествующих будних дней недели.

Для этого надо в этих формулах вставить соответствующие слагаемые.

2.2. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: обозначения

Контроль адекватности с помощью технического анализа.

2.2. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: обозначения

Контроль адекватности с помощью технического анализа.

Идея: постоянное сравнение прогноза с реальным результатом, изменение коэффициентов в системе весов для других дней недели, учтенных в прогнозе.

2.2. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: обозначения

Пусть n — номер дня недели, для которого производится расчёт;
$n_1, n_2, \ldots, n_k$ номера прошлых недель, учитываемых в прогнозе;
s — начало прогнозируемого часа $(s;\ s+1)$ рабочего времени;
t_i^n — суммарное время, которое кассиры должны потратить на обслуживание покупателей в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
t'^n_i — прогноз времени, которое кассиры должны потратить на обслуживание покупателей в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
$Ch(s,n)$ — число чеков в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
$Ch'(s,n)$ — прогноз числа чеков в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
$Sc(s,n)$ — число сканирований в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
$Sc'(s,n)$ — прогноз числа скан-й в течение $(s;\ s+1)$ в неделю n;
$t_i^n = T_m \cdot Ch(i,n) + T_s \cdot Sc(i,n), \quad t'^n_i = T_m \cdot Ch'(i,n) + T_s \cdot Sc'(i,n),$
$T_m = 25$ с, $\quad T_s = 2$ с.

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i Ch(s,i) + p(k,n), \quad Sc'(k,n) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i Sc(s,i) + q(k,n).$$

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n),\qquad Sc'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i Sc(s,i)+q(k,n).$$

$$\rho(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=\sum_{s=8}^{22}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n)-Ch(k,n)\right)^2.$$

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i Ch(s,i) + p(k,n), \quad Sc'(k,n) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i Sc(s,i) + q(k,n).$$

$$\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{s=8}^{22} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i Ch(s,i) + p(k,n) - Ch(k,n) \right)^2 .$$

В точке минимума этой невязки имеем

$$0 = \frac{\partial \rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}{\partial \alpha_j}$$

т.е. ...

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n),\qquad Sc'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i Sc(s,i)+q(k,n).$$

$$\rho(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=\sum_{s=8}^{22}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n)-Ch(k,n)\right)^2.$$

$$\sum_{s=8}^{22}2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n)-Ch(k,n)\right)Ch(s,j)=0.$$

В точке минимума этой невязки имеем

$$0=\frac{\partial\rho(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\partial\alpha_j}$$

т.е. ...

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n), \quad Sc'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i Sc(s,i)+q(k,n).$$

Надо решить систему лин.алгебр.ур-ний, где $j\in\{1;2;...;k-1\}$,

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{s=8}^{22}Ch(s,i)Ch(s,j)\right)\alpha_i=(Ch(k,n)-p(k,n))\sum_{s=8}^{22}Ch(s,j).$$

$$\rho(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=\sum_{s=8}^{22}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n)-Ch(k,n)\right)^2.$$

$$\sum_{s=8}^{22}2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n)-Ch(k,n)\right)Ch(s,j)=0.$$

В точке минимума этой невязки имеем

$$0=\frac{\partial\rho(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\partial\alpha_j}$$

т.е. …

2.3. Автоматизированная корректировка параметров прогноза: расчёт

Прогноз (где p, q — добавки, опционально):

$$Ch'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i Ch(s,i)+p(k,n), \quad Sc'(k,n)=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i Sc(s,i)+q(k,n).$$

Надо решить систему лин.алгебр.ур-ний, где $j \in \{1;2;...;k-1\}$,

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{s=8}^{22} Ch(s,i)Ch(s,j)\right)\alpha_i=(Ch(k,n)-p(k,n))\sum_{s=8}^{22} Ch(s,j).$$

Аналогично для сканов:

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{s=8}^{22} Sh(s,i)Sh(s,j)\right)\beta_i=(Sh(k,n)-q(k,n))\sum_{s=8}^{22} Sh(s,j).$$

Сейчас мы рассматривали только ситуацию $p(k,n)\equiv q(k,n)\equiv 0$.

3. Распределение смен

Пусть в n-й день месяца m:

$a_{m,1}$ человек в 1-й день месяца m начинает работать по схеме $2/2$;
$a_{m,2}$ человек в 2-й день месяца m начинает работать по схеме $2/2$;
$a_{m,3}$ человек в 3-й день месяца m начинает работать по схеме $2/2$;
$b_{m,1}$ человек в 1-й день месяца m начинает работать по схеме $3/3$;
$\ldots$
$e_{m,6}$ человек в 6-й день месяца m начинает работать по схеме $6/1$.

Количество этих переменных равно $3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16$.

Пусть построен прогноз ежедневных смен, описываемых как

(начало смены; конец смены).

При построении плана формирования смен $2/2$, $3/3$, $4/3$, $5/2$, $6/1$ пренебрегаем временем начала смены и конца смены, нас интересует только число смен $\omega_{m,n}$ в день n месяца m.

3. Распределение смен

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.
Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.
Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.
Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.

Например, для смены $4/3$ начало рабочего цикла может быть в 1,2,3 день месяца, поскольку четырем рабочим сменам должно предшествовать не более 3 выходных.

3. Распределение смен

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \quad (2/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \quad (3/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \quad (4/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \quad (5/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \quad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.
Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.
Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.
Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.

Переменная q — частное от деления на длину цикла (целое число, может быть отрицательным).

Например, при $5/2$ длина цикла — это $5 + 2 = 7$.

3. Распределение смен

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.
Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.
Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.
Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.

Переменная q — частное от деления на длину цикла.

Допустим, в цикле $4/3$ рабочая смена начинается во второй день месяца, т.е. Здесь $p_0 = 2$. Оформим процесс вычисления функции γ_n в виде таблицы:

3. Распределение смен

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.

Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.

Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.

Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.

Переменная q — частное от деления на длину цикла.

Допустим, в цикле 4/3 рабочая смена начинается во второй день месяца, т.е. Здесь $p_0 = 2$.

n — день месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
работа+ отдых−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	...
p	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	...
q	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	...
$\gamma_n(2)$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	...

$1 = n = 2 + 7(-1) + 6.$

3. Распределение смен

$$\alpha_n(p_0)_{1 \leqslant p_0 \leqslant 3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\beta_n(p_0)_{1 \leqslant p_0 \leqslant 4} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\gamma_n(p_0)_{1 \leqslant p_0 \leqslant 4} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\delta_n(p_0)_{1 \leqslant p_0 \leqslant 3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\varepsilon_n(p_0)_{1 \leqslant p_0 \leqslant 2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$. Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен. Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца. Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.

Переменная q — частное от деления на длину цикла.

Допустим, в цикле 4/3 рабочая смена начинается во второй день месяца, т.е. Здесь $p_0 = 2$.

n — день месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
работа+ отдых−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	…
p	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	…
q	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	…
$\gamma_n(2)$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	…

$2 = n = 2 + 7 \cdot 0 + 0.$

3. Распределение смен

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.
Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.
Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.
Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

Переменная p_0 означает, в какой день месяца начинается рабочий цикл.
Переменная q — частное от деления на длину цикла.
Допустим, в цикле $4/3$ рабочая смена начинается во второй день месяца, т.е. Здесь $p_0 = 2$.

n — день месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
работа+ отдых−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	...
p	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	...
q	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	...
$\gamma_n(2)$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	...

$3 = n = 2 + 7 \cdot 0 + 1 \ldots$

3. Распределение смен

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1 \leqslant p_0 \leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$. Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен. Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца. Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

$$\omega_n = \sum_{p_0=1}^{3} a_{m,p_0}\alpha_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} b_{m,p_0}\beta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} c_{m,p_0}\gamma_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{3} d_{m,p_0}\delta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{2} e_{m,p_0}\varepsilon_n(p_0).$$

3. Распределение смен

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$. Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен. Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца. Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

$$\omega_n = \sum_{p_0=1}^{3} a_{m,p_0}\alpha_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} b_{m,p_0}\beta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} c_{m,p_0}\gamma_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{3} d_{m,p_0}\delta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{2} e_{m,p_0}\varepsilon_n(p_0).$$

Если система несовместна, уменьшаем ранг расширенной матрицы
$$\begin{pmatrix} \alpha_1(1) & \alpha_1(2) & \alpha_1(3) & \beta_1(1) & \dots & \varepsilon_1(2) & \omega_1 \\ \dots \\ \alpha_k(1) & \alpha_k(2) & \alpha_k(3) & \beta_k(1) & \dots & \varepsilon_k(2) & \omega_k \end{pmatrix},$$
сначала пытаясь увеличить на 1 ω_n сначала для самого маленького значения n такого, что $\omega_n = \min\limits_m \{\omega_m\}$.

3. Распределение смен

$$\alpha_n(p_0)_{1\leqslant p_0\leqslant 3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\beta_n(p_0)_{1\leqslant p_0\leqslant 4} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\gamma_n(p_0)_{1\leqslant p_0\leqslant 4} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\delta_n(p_0)_{1\leqslant p_0\leqslant 3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\varepsilon_n(p_0)_{1\leqslant p_0\leqslant 2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$. Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен. Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца. Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

$$\omega_n = \sum_{p_0=1}^{3} a_{m,p_0}\alpha_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} b_{m,p_0}\beta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} c_{m,p_0}\gamma_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{3} d_{m,p_0}\delta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{2} e_{m,p_0}\varepsilon_n(p_0).$$

Если система несовместна, уменьшаем ранг расширенной матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_1(1) & \alpha_1(2) & \alpha_1(3) & \beta_1(1) & \dots & \varepsilon_1(2) & \omega_1 \\ \dots \\ \alpha_k(1) & \alpha_k(2) & \alpha_k(3) & \beta_k(1) & \dots & \varepsilon_k(2) & \omega_k \end{pmatrix}$, сначала пытаясь увеличить на 1 ω_n сначала для самого маленького значения n такого, что $\omega_n = \min\limits_m \{\omega_m\}$.

Если не помогло, то для следующего по величине такого значения n и т.д. Если удалось уменьшить ранг расширенной матрицы, но он пока больше ранга матрицы коэффициентов, продолжаем этот процесс для следующего такого значения n.

3. Распределение смен

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\alpha_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 4q + p, \quad 2 \leqslant p \leqslant 3, \end{cases} \qquad (2/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\beta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 6q + p, \quad 3 \leqslant p \leqslant 5, \end{cases} \qquad (3/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 4}{\gamma_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 3, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 4 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (4/3)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 3}{\delta_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 4, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 5 \leqslant p \leqslant 6, \end{cases} \qquad (5/2)$$

$$\underset{1\leqslant p_0\leqslant 2}{\varepsilon_n(p_0)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 5, \\ 0, & \text{если} \quad n = p_0 + 7q + p, \quad p = 6. \end{cases} \qquad (6/1)$$

Пусть в месяце k дней, $k \in \{28, 29, 30, 31\}$.

Пусть в n-й день месяца должно быть ω_n смен.

Для начальных дней месяца ω_n уменьшается на количество смен, отработанных по расписанию прошлого месяца.

Имеем систему из k линейных алгебраических уравнений:

$$\omega_n = \sum_{p_0=1}^{3} a_{m,p_0}\alpha_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} b_{m,p_0}\beta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{4} c_{m,p_0}\gamma_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{3} d_{m,p_0}\delta_n(p_0) + \sum_{p_0=1}^{2} e_{m,p_0}\varepsilon_n(p_0).$$

Если система несовместна, уменьшаем ранг расширенной матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_1(1) & \alpha_1(2) & \alpha_1(3) & \beta_1(1) & \dots & \varepsilon_1(2) & \omega_1 \\ \dots \\ \alpha_k(1) & \alpha_k(2) & \alpha_k(3) & \beta_k(1) & \dots & \varepsilon_k(2) & \omega_k \end{pmatrix}$, сначала пытаясь увеличить на 1 ω_n сначала для самого маленького значения n такого, что $\omega_n = \min\limits_m \{\omega_m\}$.

Если не помогло, то для следующего по величине такого значения n и т.д. Если удалось уменьшить ранг расширенной матрицы, но он пока больше ранга матрицы коэффициентов, продолжаем этот процесс для следующего такого значения n.

Если после этого ранг расширенной матрицы все же больше ранга матрицы коэффициентов, выбираем следующее по малости значение ω_n и продолжаем до победы.

ООО «Планомедиа»

Ю.Б. Мельников

Спасибо за внимание!

Екатеринбург, 2017