Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Τεχνητή Νοημοσύνη

2η Σειρά Ασκήσεων

Προτασιακή Λογική & Λογική Πρώτης Τάξης

Δήμος Δημήτρης (031 17 165)
7ο Εξάμηνο - Ροή Λ

Αθήνα
Δεκέμβριος, 2020

1 Άσκηση 1

1. $p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \vee (s \Rightarrow (t_1 \wedge t_2)))))$

Βήμα 1:

$\neg p \vee (\neg(\neg q \vee (r \vee (\neg s \vee (t_1 \wedge t_2)))))$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}
&\neg p \vee (q \wedge \neg(r \vee (\neg s \vee (t_1 \wedge t_2)))) && \equiv \\
&\neg p \vee (q \wedge (\neg r \wedge \neg(\neg s \vee (t_1 \wedge t_2)))) && \equiv \\
&\neg p \vee (q \wedge (\neg r \wedge (s \wedge \neg(t_1 \wedge t_2)))) && \equiv \\
&\neg p \vee (q \wedge (\neg r \wedge (s \wedge (\neg t_1 \vee \neg t_2)))) && \equiv \\
&\neg p \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge (\neg t_1 \vee \neg t_2))
\end{aligned}$$

Βήμα 3:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg t_1 \vee \neg t_2)$$

Βήμα 4:

Δεν υφίσταται περαιτέρω απλοποίηση.

Άρα, η CNF είναι η: $\{[\neg p, q], [\neg p, \neg r], [\neg p, s], [\neg p, \neg t_1, \neg t_2]\}$

2. $\exists x.\forall y.\forall z.(A(x,y,z) \wedge \neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w.(C(x,w,z) \vee \neg K(w))))$

Βήμα 1:

$$\exists x.\forall y.\forall z.(\neg(A(x,y,z) \wedge \neg B(z)) \vee \neg(\forall w.(C(x,w,z) \vee \neg K(w)))) \quad \equiv$$

Βήμα 2:

$$\exists x.\forall y.\forall z.((\neg A(x,y,z) \vee B(z)) \vee (\exists w.\neg(C(x,w,z) \vee \neg K(w)))) \quad \equiv$$
$$\exists x.\forall y.\forall z.((\neg A(x,y,z) \vee B(z)) \vee (\exists w.(\neg C(x,w,z) \wedge K(w))))$$

Βήμα 3:

Οι μεταβλητές έχουν ήδη μοναδικά ονόματα.

Βήμα 4:

$$\forall y.\forall z.((\neg A(c,y,z) \vee B(z)) \vee (\neg C(c,f(y,z),z) \wedge K(f(y,z))))$$

Βήμα 5:

$$((\neg A(c,y,z) \vee B(z)) \vee (\neg C(c,f(y,z),z) \wedge K(f(y,z))))$$

Βήμα 6:

$$(\neg A(c,y,z) \vee B(z) \vee \neg C(c,f(y,z),z)) \wedge (\neg A(c,y,z) \vee B(z) \vee K(f(y,z)))$$

Βήμα 7:

Δεν υφίσταται περαιτέρω απλοποίηση.

Άρα, η CNF είναι η:
$\{[\neg A(c,y,z), B(z), \neg C(c,f(y,z),z))], [\neg A(c,y,z), B(z), K(f(y,z))]\}$

2 Άσκηση 2

- Ερμηνεία $J_1 = \langle \Delta^{I_1}, I_1 \rangle$:
  - $\Delta^{I_1} = (a, b, c)$
  - $R^{I_1} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$

  Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί, εμφανώς, τις $\textcircled{1}$ και $\textcircled{2}$, αφού κάθε στοιχείο του Δ^{I_1} σχετίζεται με τον εαυτό του και για κάθε σχέση που υφίσταται, ισχύει και η συμμετρική της.

  Όμως, για την τριάδα (x,y,z) = (a,b,c) η υπόθεση της $\textcircled{3}$ ($R(x, y) \wedge R(y, z) \equiv R(a, b) \wedge R(b, c)$) ικανοποιείται, αλλά όχι το συμπέρασμά της, αφού το $(a, c) \notin R^{I_1}$.

  Άρα, $J_1 \models \textcircled{1}, \textcircled{2}$ και $J_1 \not\models \textcircled{3}$.

- Ερμηνεία $J_2 = \langle \Delta^{I_2}, I_2 \rangle$:
  - $\Delta^{I_2} = (a, b, c)$
  - $R^{I_2} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

  Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί, εμφανώς, τις $\textcircled{1}$ και $\textcircled{3}$.

  Όμως, για την τριάδα (x,y,z) = (a,b,c) η υπόθεση της $\textcircled{2}$ ($R(x, y) \equiv R(a, b)$) ικανοποιείται, αλλά όχι το συμπέρασμά της, αφού το $(b, a) \notin R^{I_2}$.

  Άρα, $J_2 \models \textcircled{1}, \textcircled{3}$ και $J_2 \not\models \textcircled{2}$.

- Ερμηνεία $J_3 = \langle \Delta^{I_3}, I_3 \rangle$:
  - $\Delta^{I_3} = (a, b, c)$
  - $R^{I_3} = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$

  Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί, εμφανώς, τις $\textcircled{2}$ και $\textcircled{3}$.

  Όμως, το στοιχείο $c \in \Delta^{I_3}$ δεν σχετίζεται με τον εαυτό του.

  Άρα, $J_3 \models \textcircled{2}, \textcircled{3}$ και $J_3 \not\models \textcircled{1}$.

Έστω βάση γνώσης K και δύο προτάσεις p, q εντός της K. Ισχύει ότι η p συνεπάγεται λογικά την q αν και μόνο αν όλες οι ερμηνείες της K που είναι μοντέλα της p είναι και μοντέλα της q.

Για κάθε ζεύγος από τις δοθείσες προτάσεις, βρήκαμε μια ερμηνεία που είναι μοντέλο για τις προτάσεις του ζεύγους, αλλά όχι για την πρόταση εκτός αυτού. Άρα, καμία πρόταση εκ των 1, 2, 3 δεν αποτελεί λογικό συμπέρασμα των άλλων δύο.

3 Άσκηση 3

Γράφουμε τις δοθείσες προτάσεις σε CNF:

1. $\neg R(x,x) \vee R(x,y)$
2. $\neg R(x,y) \vee R(y,x)$
3. $\neg R(f(x),x)$
4. $\neg R(x,x)$

- Για την απόδειξη 1, 2, 3 $\models$ 4:

  Θεωρούμε τη βάση γνώσης K που περιέχει τα παρακάτω αξιώματα:
  $A_1.\{[\neg R(x,x), R(x,y)]\}$
  $A_2.\{[\neg R(x,y), R(y,x)]\}$
  $A_3.\{[\neg R(f(x),x)]\}$

  - Εισάγουμε τη γνώση την φόρμουλα: $A_4.\{[R(x,x)]\}$
  - Στη συνέχεια, εκτελείται ο αλγόριθμος της αναλυτικής παραγωγής κι επιλέγεται η $\{[R(x,y)]\}$, ως αναλυθέν των A_1 και A_4.
  - Το αναλυθέν $\{[R(x,y)]\}$ δεν είναι αντίφαση, οπότε προστίθεται στην K ως A_5.
  - Επιλέγεται η $\{[R(y,x)]\}$ ως αναλυθέν των A_2 και A_5 και εισάγεται στην K ως A_6.
  - Για τον ενοποιητή y/f(x) η A_6 έρχεται σε αντίφαση με την A_3.
  - Άρα, αποδείξαμε ότι 1, 2, 3 $\models$ 4.

- Για την απόδειξη ①, ③, ④ $\models$ ②:

  Θεωρούμε τη βάση γνώσης K που περιέχει τα παρακάτω αξιώματα:
  $A_1.\{[\neg R(x,x), R(x,y)]\}$
  $A_3.\{[\neg R(f(x),x)]\}$
  $A_4.\{[\neg R(x,x)]\}$

  - Εισάγουμε στη γνώση την φόρμουλα: $\{[R(x,y)], [\neg R(y,x)]\}$, δηλαδή τις επιμέρους φόρμουλες $A_5.\{[R(x,y)]\}$ και $A_6.\{[\neg R(y,x)]\}$.
  - Για τον ενοποιητή y/x η A_5 έρχεται σε αντίφαση με την A_4.
  - Άρα, αποδείξαμε ότι ①, ③, ④ $\models$ ②.

4 Άσκηση 4

1. Καμία χώρα δε συνορεύει με τον εαυτό της:

$$\neg\exists x.(\text{Χώρα}(x) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x,x))$$

2. Όλες οι χώρες συνορεύουν με τουλάχιστον μία άλλη χώρα:

$$\forall x.\text{Χώρα}(x) \Rightarrow \exists y.(\text{Χώρα}(y) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x,y) \wedge x \neq y)$$

3. Μερικές χώρες συνορεύουν με περισσότερες από τρεις άλλες χώρες:

$$\begin{aligned}\exists x.\exists y_1.\exists y_2.\exists y_3.\exists y_4.\quad & (\text{Χώρα}(x) \wedge \text{Χώρα}(y_1) \wedge \text{Χώρα}(y_2) \wedge \text{Χώρα}(y_3) \wedge \text{Χώρα}(y_4) \wedge \\ & x \neq y_1 \ \wedge\ x \neq y_2 \ \wedge\ x \neq y_3 \ \wedge\ x \neq y_4 \wedge \\ & y_1 \neq y_2 \ \wedge\ y_1 \neq y_3 \ \wedge\ y_1 \neq y_4 \wedge \\ & y_2 \neq y_3 \ \wedge\ y_2 \neq y_4 \wedge \\ & y_3 \neq y_4) \wedge \\ & \text{συνορεύειΜε}(x,y_1) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x,y_2) \wedge \\ & \text{συνορεύειΜε}(x,y_3) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x,y_4))\end{aligned}$$

4. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο χώρες που συνορεύουν μόνο μεταξύ τους:

$$\begin{aligned}\exists x.\exists y.\quad & (\text{Χώρα}(x) \wedge \text{Χώρα}(y) \ \wedge\ x \neq y \wedge \\ & \text{συνορεύειΜε}(x,y) \wedge \text{συνορεύειΜε}(y,x) \wedge \\ & (\forall w.\text{Χώρα}(w) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x,w) \Rightarrow w = y) \wedge \\ & (\forall v.\text{Χώρα}(v) \wedge \text{συνορεύειΜε}(y,v) \Rightarrow v = x))\end{aligned}$$

5. Μερικές χώρες συνορεύουν μόνο με χώρες που έχουν όλες μεγαλύτερη έκταση από αυτές:

$$\begin{aligned}\exists x.\text{Χώρα}(x) \wedge \quad & (\forall y.\text{Χώρα}(y) \wedge \text{συνορεύειΜε}(x, y) \ \wedge \ x \neq y \Rightarrow \\ & \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{έκταση}(y),\ \text{έκταση}(x)))\end{aligned}$$