Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και
Μηχανικών Υπολογιστών

Σχεδίαση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Εργαστηριακή Άσκηση *MATLAB/Simulink*

Δημήτρης Δήμος

031 17 165

dimitris.dimos647@gmail.com

6ο Εξάμηνο – Ροή Σ

Μάιος 2020

Το αρχείο zip περιλαμβάνει τα εξής αρχεία:

- InvertedPendulum.m

- questA_initial_model.slx
- questA_feedback_model.slx
- questB_LQR_model.slx
- questC_custom_model.slx
- questD_Luenberger_model.slx

Ερώτημα Α

Για όλα τα ερωτήματα οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με συναρτήσεις που αναφέρονται στις αιτιολογήσεις και τα δεδομένα – παράμετροι έχουν καταχωρηθεί στο αρχείο InvertedPendulum.m .

Στο αρχείο questA_initial_model.slx έχει μοντελοποιηθεί το σύστημα στην μορφή που δόθηκε από την εκφώνηση (φορτώνοντας τον κώδικα του αρχείου InvertedPendulum.m).

Η γραμμική περιγραφή του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς είναι:

$$\dot{x}_{ολ} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{B} u$$

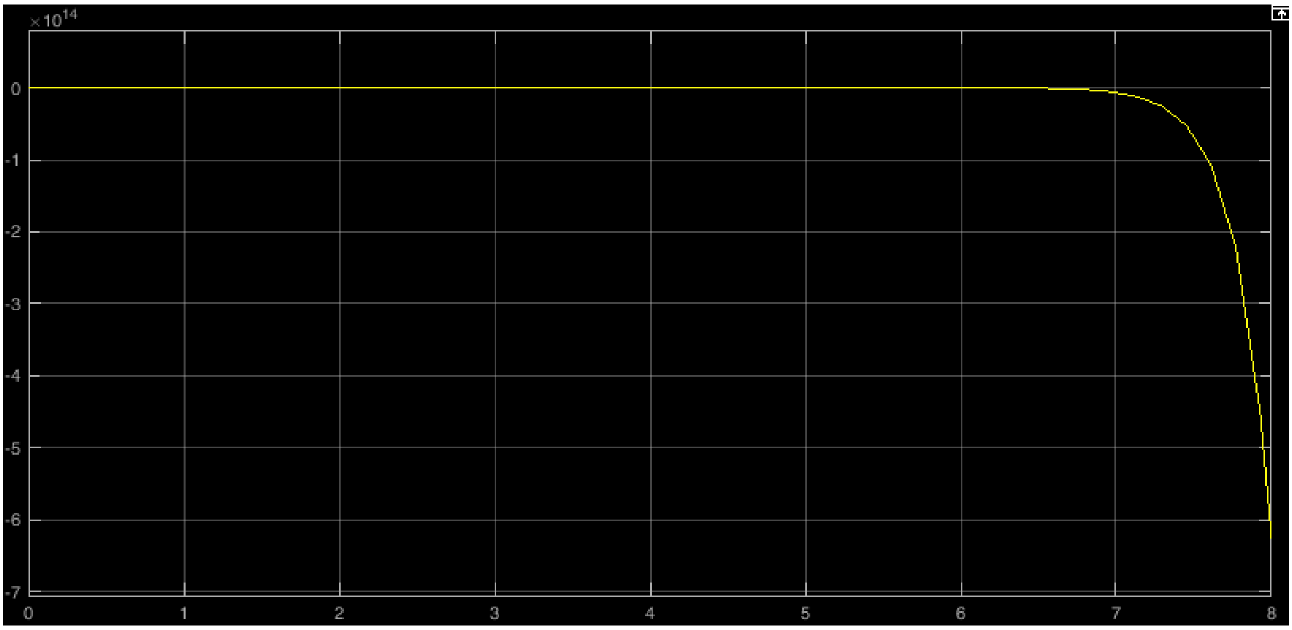
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{x}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα Α, δηλαδή οι πόλοι του κλειστού συστήματος, προκύπτουν με χρήση της συνάρτησης pole() ίσες με:

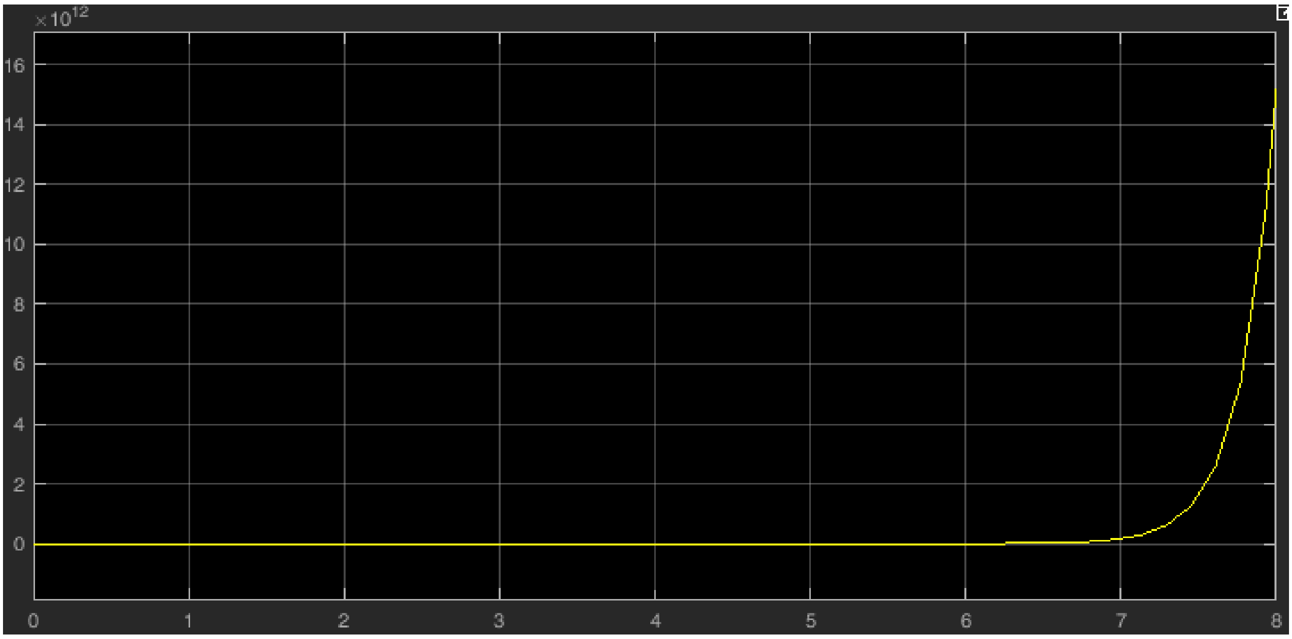
- $s_1 = 0$
- $s_2 = 0$
- $s_3 = 4.5387$
- $s_4 = -4.5387$

Το σύστημα είναι 4^{ης} τάξης με 4 πόλους εκ των οποίων ο ένας βρίσκεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, γι’ αυτό και το σύστημα χαρακτηρίζεται ασταθές.

Με αρχικές συνθήκες: $x_{ολ}[0] = [-0.2\ -0.06\ \ 0.01\ \ 0.3]^T$ η προσομοίωση του συστήματος, για τα πρώτα 8 sec, μέσω SIMULINK παράγει τις αποκρίσεις $y_1 = \theta(t)$ και $y_2 = x(t)$ όπως φαίνονται στα παρακάτω γραφήματα.



Αρχική απόκριση $y_1 = \theta(t)$



Αρχική απόκριση $y_2 = x(t)$

Παρατηρούμε ότι οι αποκρίσεις, μετά το πέρασμα μερικού χρόνου, λαμβάνουν μεγάλες τιμές και πάρα πολύ γρήγορα, καθιστώντας εμφανή την αστάθεια του συστήματος.

Επιθυμούμε, λοιπόν, να σχεδιάσουμε μια γραμμική ανάδραση $u = -\mathbf{K}x$, τέτοια που να τοποθετεί δύο πόλους του συστήματος κοντά στον φανταστικό άξονα (πρωτεύοντες πόλοι) και τους άλλους δύο αρκετά μακρυά του, ώστε να μην επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση. Θα πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο, ώστε να πετυχαίνεται ευστάθεια.

Επιπλέον, επιθυμούμε να ικανοποιούνται οι παρακάτω προδιαγραφές σχεδίασης:

DS1) Χρόνος αποκατάστασης (σύμφωνα με το κριτήριο του 2%): $T_s \leq 2$ sec
DS2) Εντός 2 sec, η απόκλιση των μεταβλητών κατάστασης από το 0 να είναι πλέον μικρότερη από 0.015 κατ' απόλυτη τιμή.
DS3) Ο συντελεστής απόσβεσης για τους δύο πρωτεύοντες πόλους να είναι $\zeta = 0.5$

Πριν προχωρήσουμε στον σχεδιασμό, θα πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο. Εξετάζουμε την ελεγξιμότητα του συστήματος. Η συνάρτηση ctrb() παράγει τον πίνακα ελεγξιμότητας C:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.6 \\ -1 & 0 & -20.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση rank() με όρισμα τον πίνακα C δίνει αποτέλεσμα 4, άρα ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι πλήρους τάξης και το σύστημα είναι ελέγξιμο. Αφού, ακόμη, οι μεταβλητές κατάστασης είναι διαθέσιμες για ανάδραση, το εγχείρημα να σχεδιάζουμε τον επιθυμητό νόμο ανάδρασης είναι υλοποιήσιμο.

Το σήμα ελέγχου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{o\lambda}}(t)$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα K_1, K_2, K_3 και K_4, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές συμπεριφοράς. Χρησιμοποιώντας την σχεδιαστική προσέγγιση: $T_s = \dfrac{4}{\zeta\,\omega_n} < 2\,\text{sec}$ συνεπάγεται ότι η φυσική συχνότητα πρέπει να κυμαίνεται στην περιοχή τιμών:

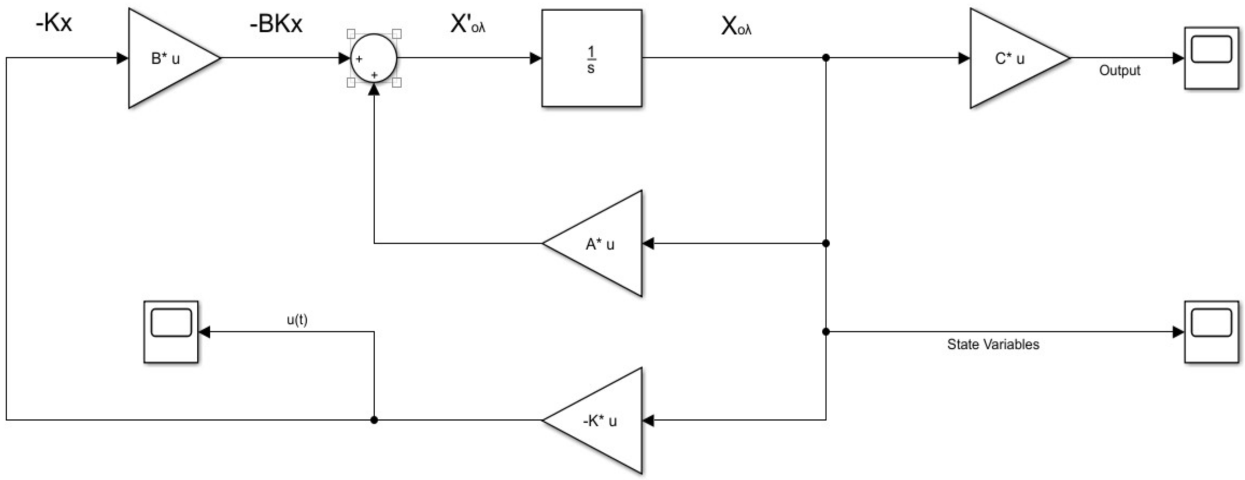
$\omega_n > 4\ \text{rad/sec}$. Η σχέση αυτή και η (DS1) ορίζουν την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου εντός της οποίας πρέπει να βρίσκονται οι πρωτεύοντες πόλοι για να ικανοποιούνται οι σχεδιαστικές προδιαγραφές. Επιλέγουμε, λοιπόν, $T_s = 1.8$ sec.

Θέλουμε δύο πόλους αρκετά μακρυά από τον άξονα των μιγαδικών (στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο), οπότε αυθαίρετα επιλέγουμε να τους τοποθετήσουμε στις θέσεις -25 και -26. Τους άλλους δύο πόλους, που είναι οι συζυγείς επικρατούντες, τοποθετούμε στις θέσεις: $-\zeta\omega_n + j\omega_d = -2.222 + j\cdot 3.849$ και $-\zeta\omega_n - j\omega_d = -2.222 - j\cdot 3.849$.

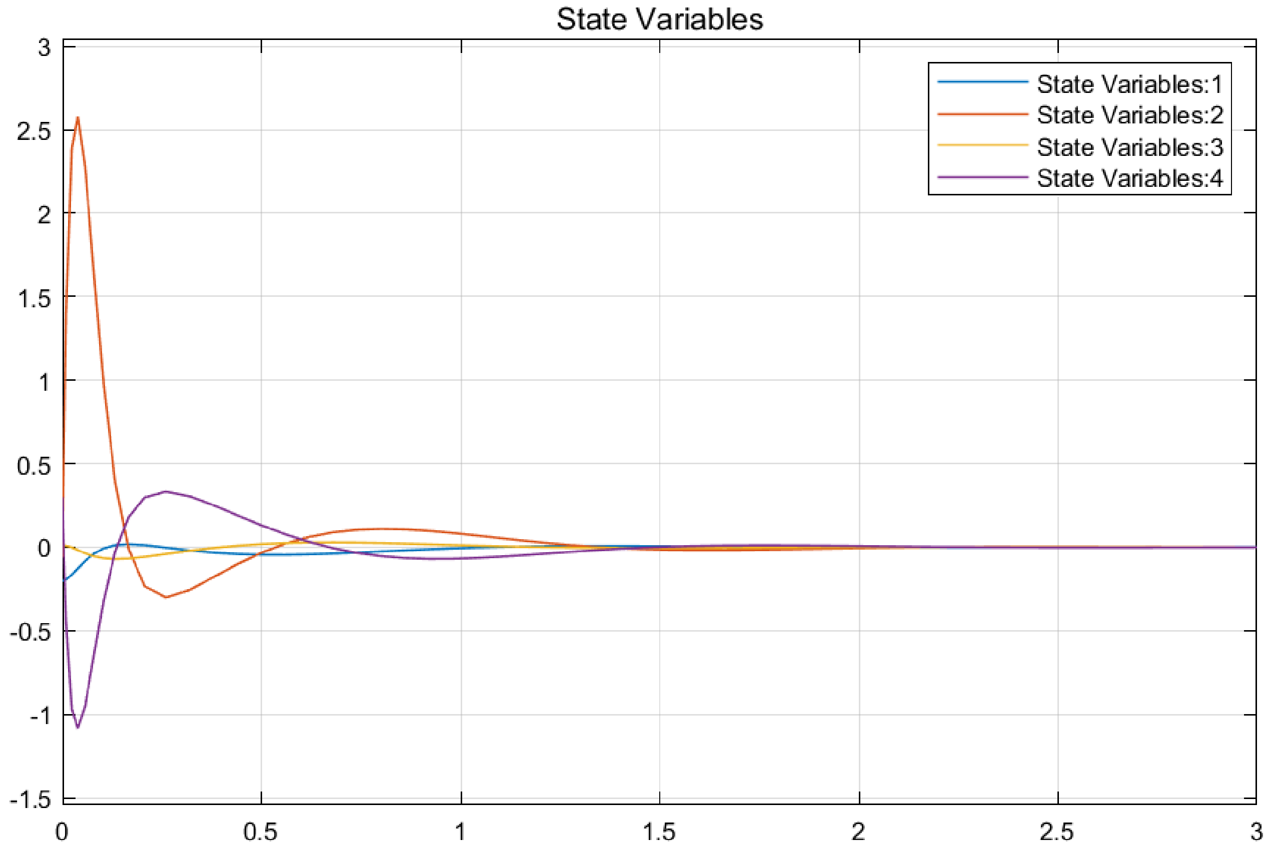
Η εντολή place() για τις ζητούμενες θέσεις πόλων επιστρέφει ένα διάνυσμα K κατάλληλο για αυτή την τοποθέτηση. Το προκύπτον K είναι:

$$K = [-1572.1 \quad -254.2 \quad -1310.2 \quad -397.6]$$

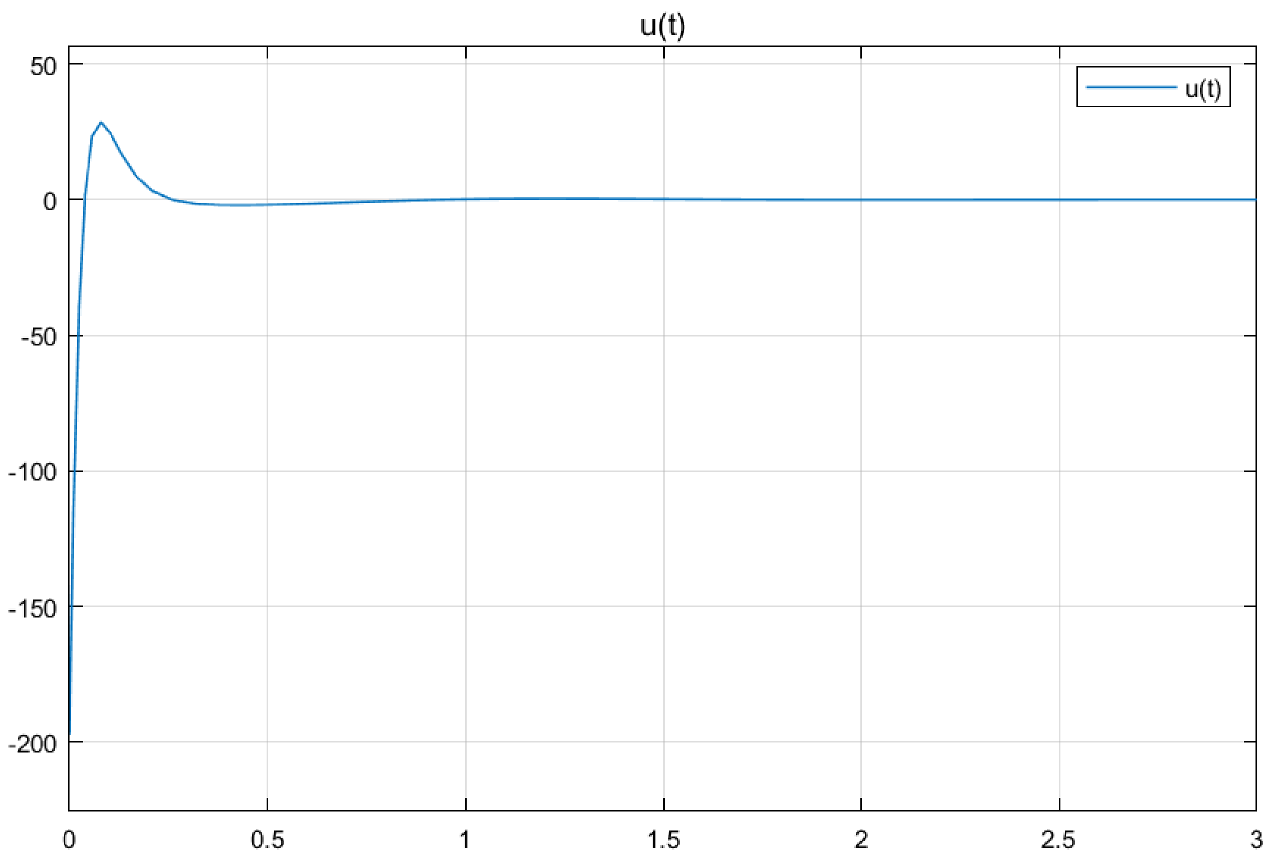
Έτσι πληρούνται οι προδιαγραφές DS1, DS2 και DS3 και το σύστημα καθίσταται ευσταθές. Στο αρχείο questA_feedback_model.slx έχει μοντελοποιηθεί το σύστημα με ανατροφοδότηση κατάστασης.



Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των μεταβλητών κατάστασης και του σήματος ελέγχου $u = -\mathbf{K}x$ ύστερα από την προσομοίωση του συστήματος με ανατροφοδότηση κατάστασης για τα πρώτα 3 sec και με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες. Διαπιστώνουμε ότι μετά την χρονική στιγμή 2 sec, το πλάτος των μεταβλητών κατάστασης είναι και παραμένει, πράγματι, μικρότερο του 0.015 κατ' απόλυτη τιμή.
(Στην ίδια διαπίστωση οδηγεί με ακρίβεια η ανάλυση δεδομένων από **to workspace blocks**.)



Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης



Απόκριση u(t)

Ερώτημα Β

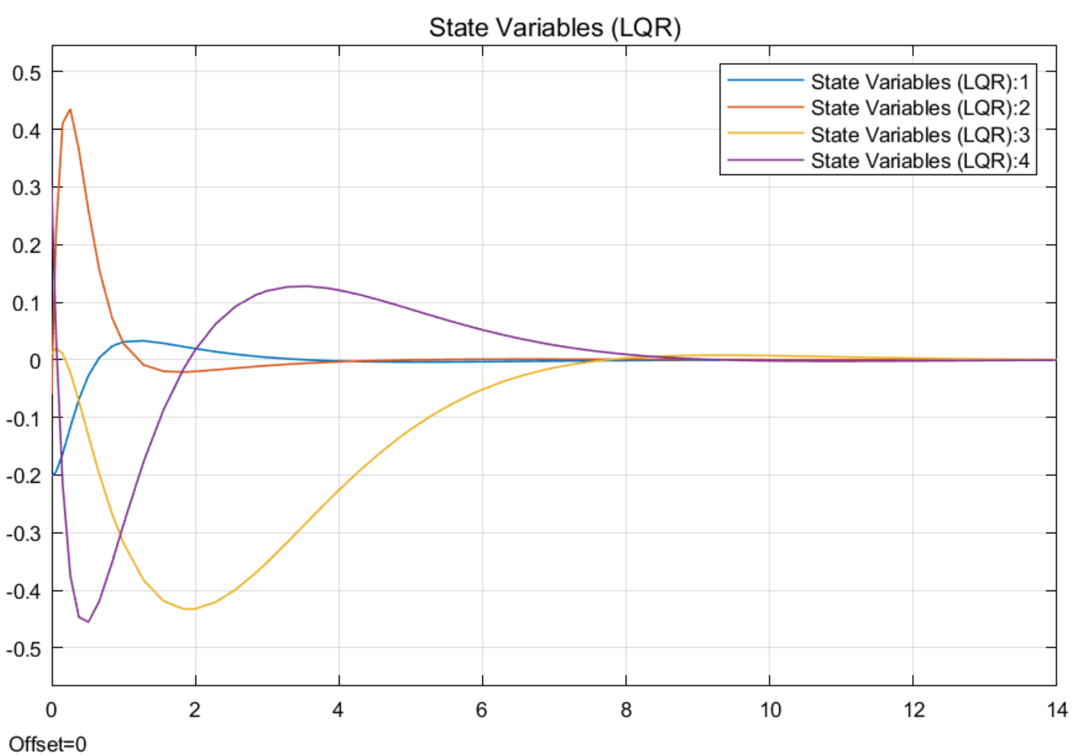
Στο αρχείο questB_LQR_model.slx έχει μοντελοποιηθεί το σύστημα με βέλτιστη επιλογή εισόδου, ώστε να ελαχιστοποιείται το τετραγωνικό κριτήριο κόστους **J** που αναφέρει η εκφώνηση (φορτώνοντας τον κώδικα του αρχείου InvertedPendulum.m).

Στο ερώτημα αυτό, καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν νόμο ανατροφοδότησης (δεδομένης της διαθεσιμότητας των μεταβλητών κατάστασης) της μορφής **u = - Ku**, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το τετραγωνικό κριτήριο κόστους:

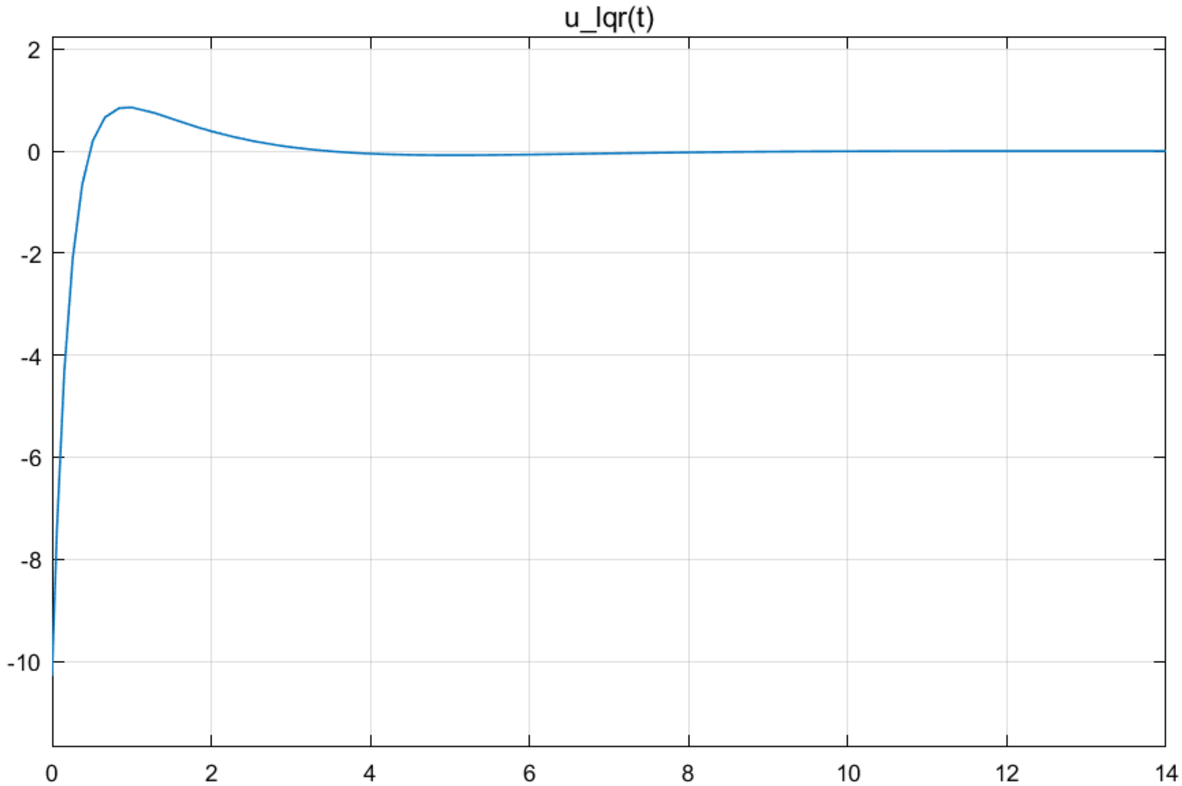
$$J=\int_0^{\infty}\left(x_{ο\lambda}^T(t)x_{ο\lambda}(t)+u^2(t)\right)dt$$

Η ζητούμενη βελτιστοποίηση οδηγεί στην επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης Riccati [1], προκειμένου να βρεθεί η μήτρα P και το βέλτιστο κέρδος K_{lqr}. Αυτός ο βέλτιστος έλεγχος ονομάζεται γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής (LQR).

Με χρήση της συνάρτησης **lqr()** βρίσκουμε: $K_{lqr}=\begin{bmatrix}-52.1157 & -11.5847 & -1.000 & -2.7261\end{bmatrix}$
Για αυτό το ερώτημα, το σύστημα είναι όπως του Α ερωτήματος μορφολογικά. Η μόνη αλλαγή είναι ότι θέτουμε την K_{lqr} τιμή στον νόμο ανάδρασης και παίρνουμε τις νέες αποκρίσεις για τα πρώτα 14 sec:



Απόκριση Διανύσματος Κατάστασης (LQR)



Απόκριση u(t) (LQR)

Ερώτημα Γ

Στο αρχείο questC_custom_model.slx έχει μοντελοποιηθεί το σύστημα του ερωτήματος Α με κατάλληλη επιλογή εισόδου, ώστε το βαγόνι που φέρει το εκκρεμές να μετακινηθεί σε μια θέση της επιλογής μας (φορτώνοντας τον κώδικα του αρχείου InvertedPendulum.m).

Το σύστημα που σχεδιάστηκε στο ερώτημα Α είναι ευσταθές κι ελέγξιμο, ενώ οι μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες. Επομένως, το εγχείρημά μας είναι εφικτό. Επιλέγουμε, αυθαίρετα την νέα θέση του βαγονιού να είναι η x = 1m.

Εφόσον, θέλουμε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του ερωτήματος Α, θα πρέπει σε χρόνο t_f = 2 sec οι μεταβλητές κατάστασης να αποκλίνουν από την τελική τους τιμή το πολύ 0.015 κατ' απόλυτη τιμή. Το γράφημα της απόκρισης x(t) και τα δεδομένα των **to workspace blocks** θα φανερώσουν αν αυτός ο στόχος έχει επιτευχθεί.

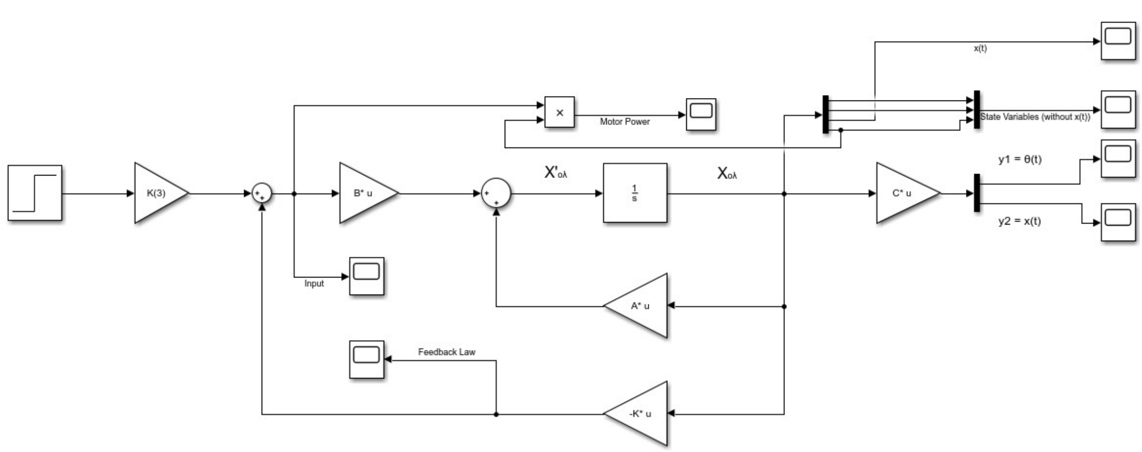
Για να μετακινηθεί το βαγόνι στην επιθυμητή θέση και να ισορροπήσει σε αυτή, θα πρέπει όταν φτάσει εκεί, η επιτάχυνση, η ταχύτητα, η γωνιακή επιτάχυνση και η γωνιακή του ταχύτητα να είναι μηδέν. Επομένως, η επιθυμητή είσοδος που θα οδηγήσει σε αυτή την κατάσταση μπορεί να βρεθεί λύνοντας το παρακάτω σύστημα ως προς u:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ολ} = \left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\ \mathrm{K}\right)\mathbf{x} + \mathrm{B}\ \mathbf{u} \Rightarrow$$

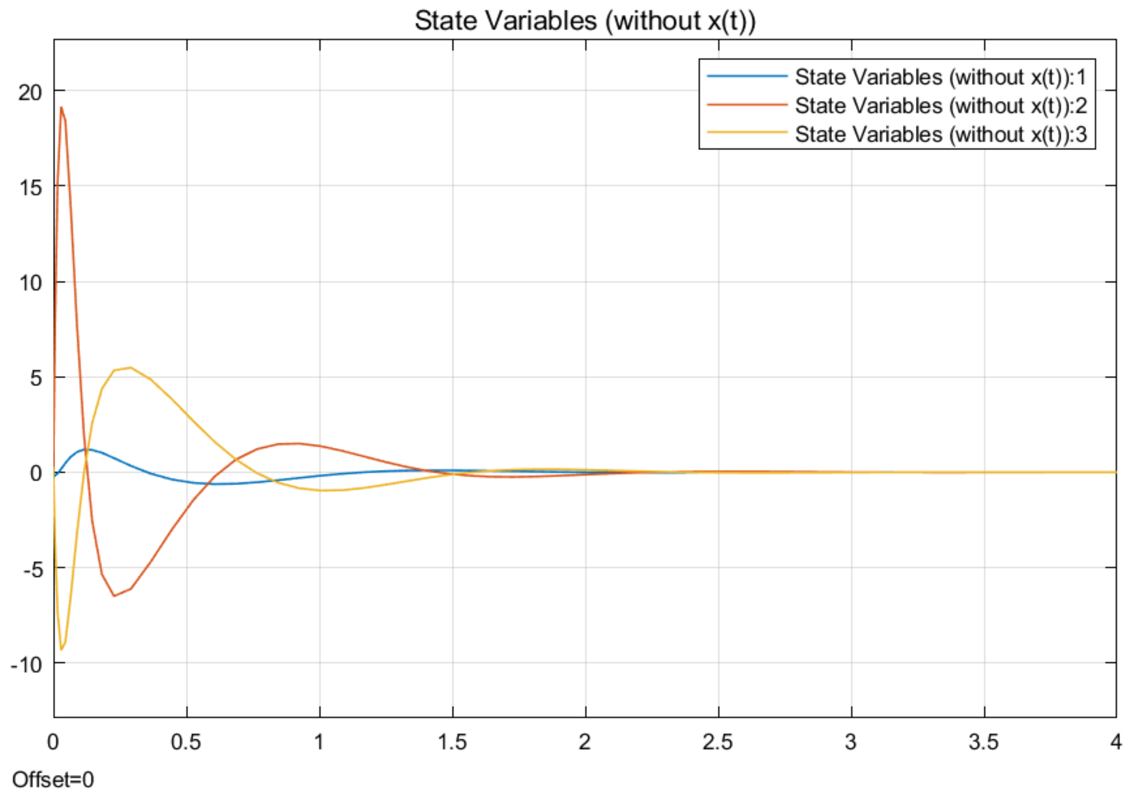
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 20.6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & K_3 & K_4\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0.5\end{bmatrix}\cdot u$$

Σύμφωνα με τους υπολογισμούς που γίνονται στο αρχείο InvertedPendulum.m, η λύση του συστήματος είναι:

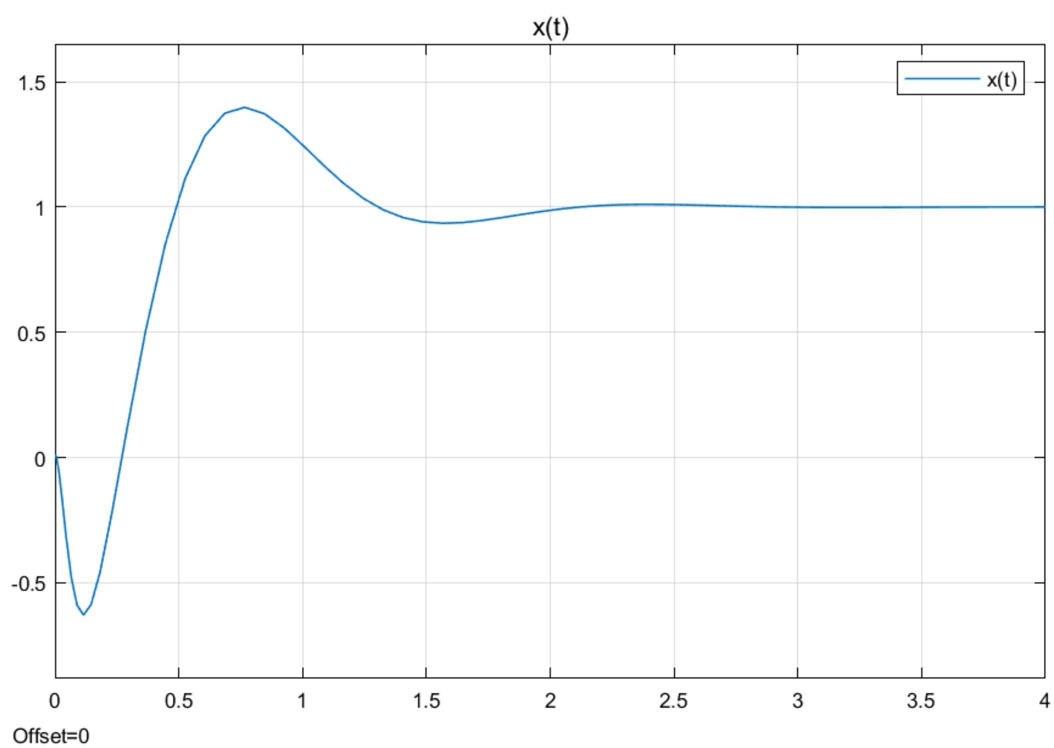
$$u(t) = K_3 \cdot \text{unit\_step}(t) = -1310.2\ \text{N}$$



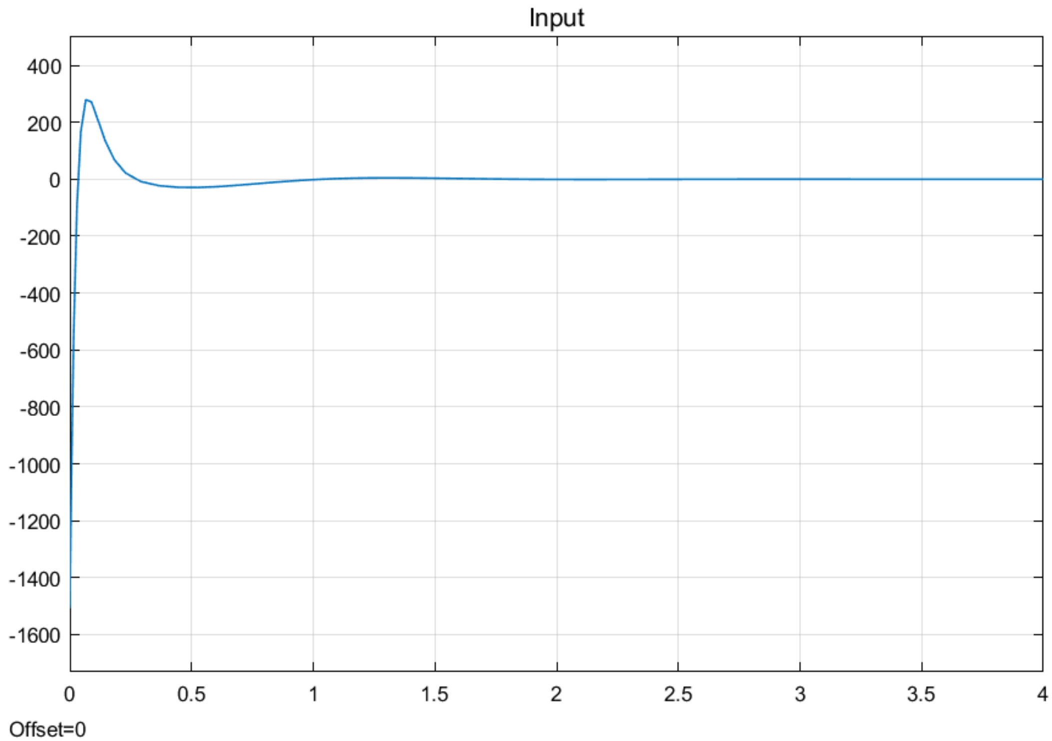
Θέτουμε την συγκεκριμένη είσοδο στο σύστημά μας και, πράγματι, παρατηρούμε ότι η νέα σταθερή θέση του βαγονιού είναι η x = 1 m. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των μεταβλητών κατάστασης και της κατάλληλης εισόδου που επιλέξαμε για τα πρώτα 4 sec.



Αποκρίσεις Συστήματος (πλην της μετατόπισης)

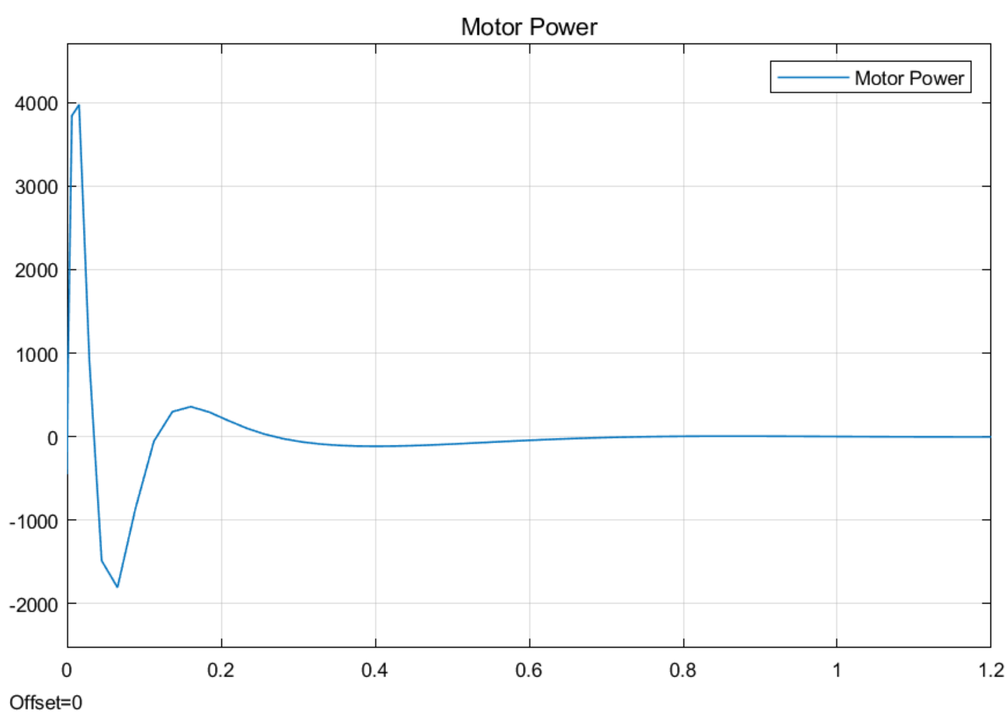


Απόκριση x(t)



Απόκριση u(t)

Για την ισχύ κινητήρα έχουμε: $P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}}(t)$. Προκύπτει, λοιπόν, πολλαπλασιάζοντας την ταχύτητα του βαγονιού με την είσοδο του συστήματος (δηλαδή την δύναμη που ασκείται στο σύστημα). Παρατίθεται και η ισχύς κινητήρα για τα πρώτα 1.2 sec.



Ισχύς Κινητήρα

Ερώτημα Δ

Στο αρχείο questD_Luenberger_model.slx και έχουν μοντελοποιηθεί τα συστήματα του ερωτήματος Δ που αντιστοιχούν στα ερωτήματα Α και Β, θεωρώντας πλέον ότι δεν είναι μετρήσιμο το $x_{ολ}$. Είναι, όμως, μετρήσιμες οι δύο έξοδοι. Θα χρειαστούμε, λοιπόν, να σχεδιάσουμε σε αυτό το σημείο έναν παρατηρητή Luenberger.
(κώδικας στο αρχείο InvertedPendulum.m).

Θα σχεδιάσουμε έναν παρατηρητή, για κάθε μία εκ των δύο περιπτώσεων, που θα μετατοπίσει τους πόλους του συστήματος στις επιθυμητές θέσεις.

Εξετάζουμε, αρχικά, την παρατηρησιμότητα του συστήματος. Η συνάρτηση obsv() παράγει τον πίνακα παρατηρησιμότητας **O** και με την συνάρτηση rank() διαπιστώνουμε ότι ο βαθμός του είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης. Επομένως, το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20.6 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{O}) = 4$$

Επιθυμία να πληρούνται οι προδιαγραφές του ερωτήματος Α:

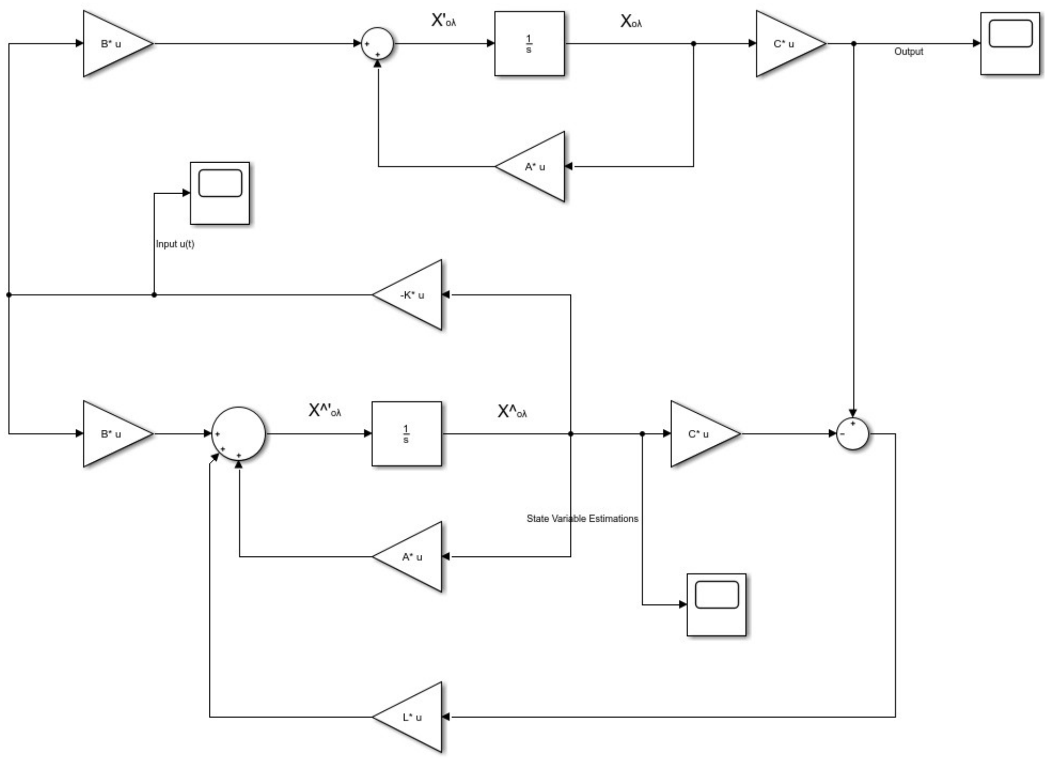
Σύμφωνα με την Αρχή του Διαχωρισμού ο νόμος ελέγχου πλήρους ανάδρασης καταστάσεων και ο παρατηρητής μπορούν να σχεδιαστούν ανεξάρτητα [2].

Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε έναν νόμο ελέγχου πλήρους ανάδρασης καταστάσεων της μορφής $u = -\mathbf{K}\hat{x}$ και θα τον συνδέσουμε στον παρατηρητή μας. Ο πίνακας **K** καταρτίζεται με χρήση των μεθόδων του ερωτήματος Α και, γι' αυτό ταυτίζεται με το **K** εκείνου του ερωτήματος:
K = [-1572.1 -254.2 -1310.2 -397.6].

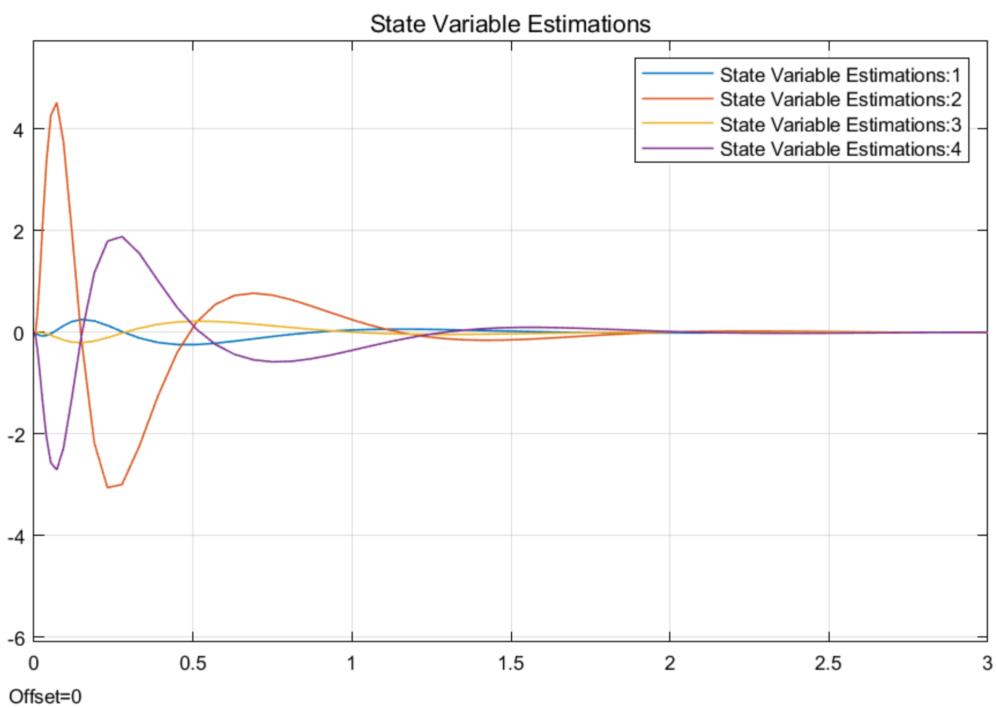
Ο παρατηρητής στον χώρο κατάστασης περιγράφεται από το δυναμικό σύστημα:

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$, το οποίο για έξοδο $\hat{y} = C\hat{x}$ γίνεται $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$.
Επιθυμώντας, λοιπόν, να τοποθετήσουμε τους πόλους του παρατηρητή στις ευσταθείς θέσεις: -10,-11,-12,-13, δηλαδή τις ρίζες του πίνακα (A – LC) με χρήση της συνάρτησης place() βρίσκουμε το κατάλληλο **L** ίσο με:

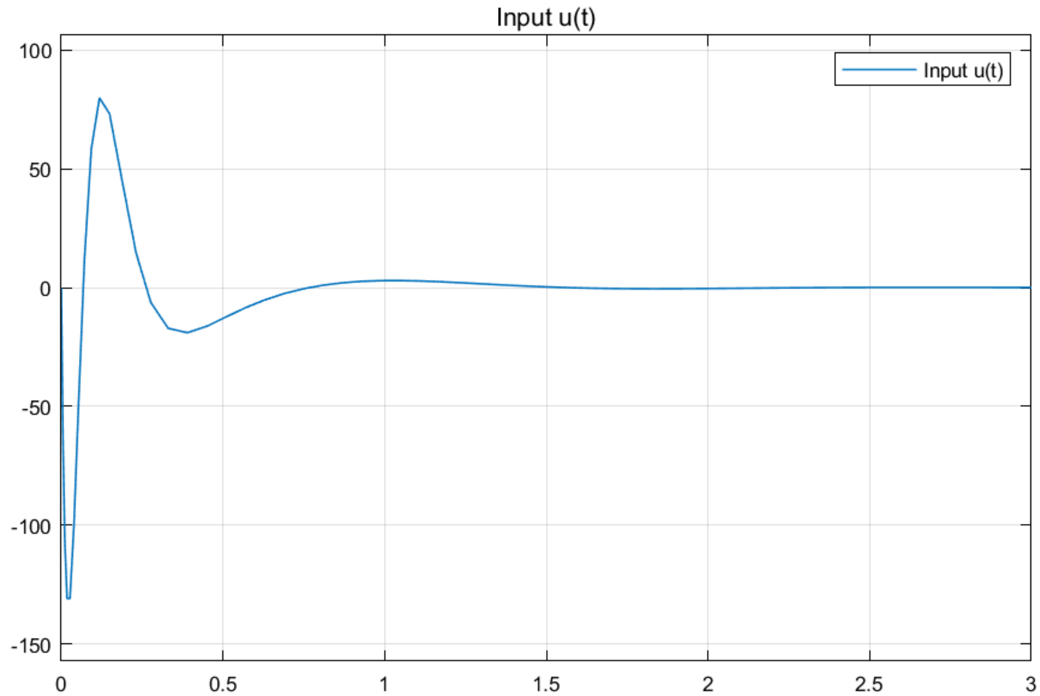
$$L = \begin{bmatrix} 22.9338 & 1.0388 \\ 151.3798 & 11.9770 \\ 0.9570 & 23.0662 \\ 10.4830 & 132.2187 \end{bmatrix}$$



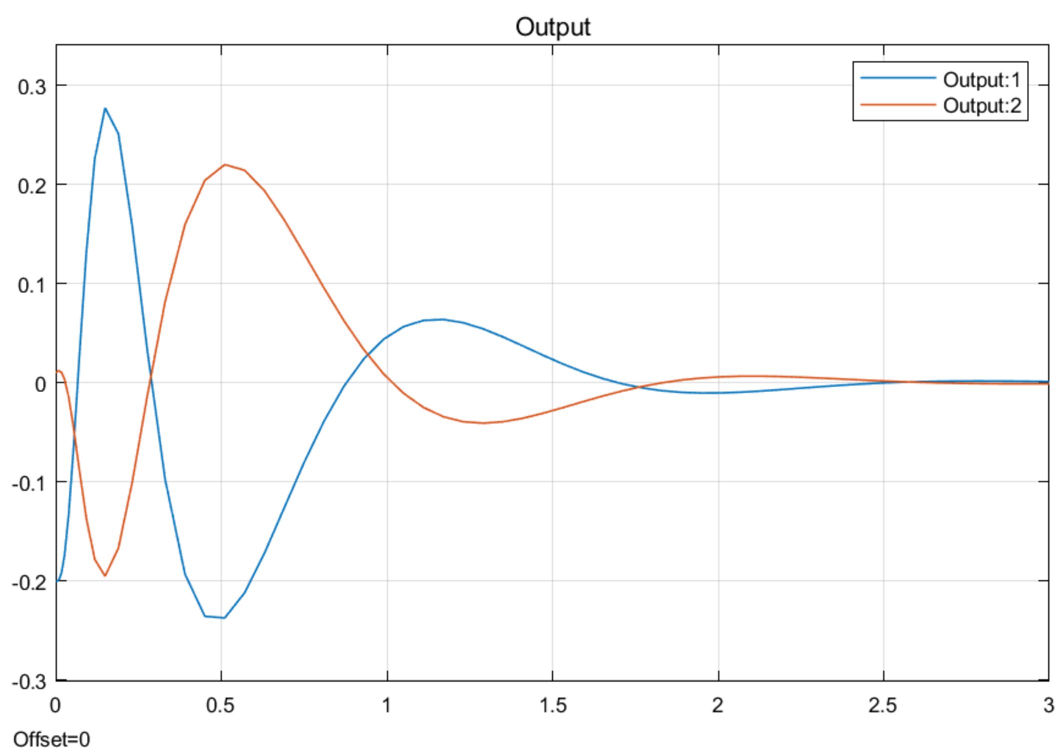
Παράγονται, λοιπόν, τα επόμενα γραφήματα αποκρίσεων για τα πρώτα 3 sec:



Εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης



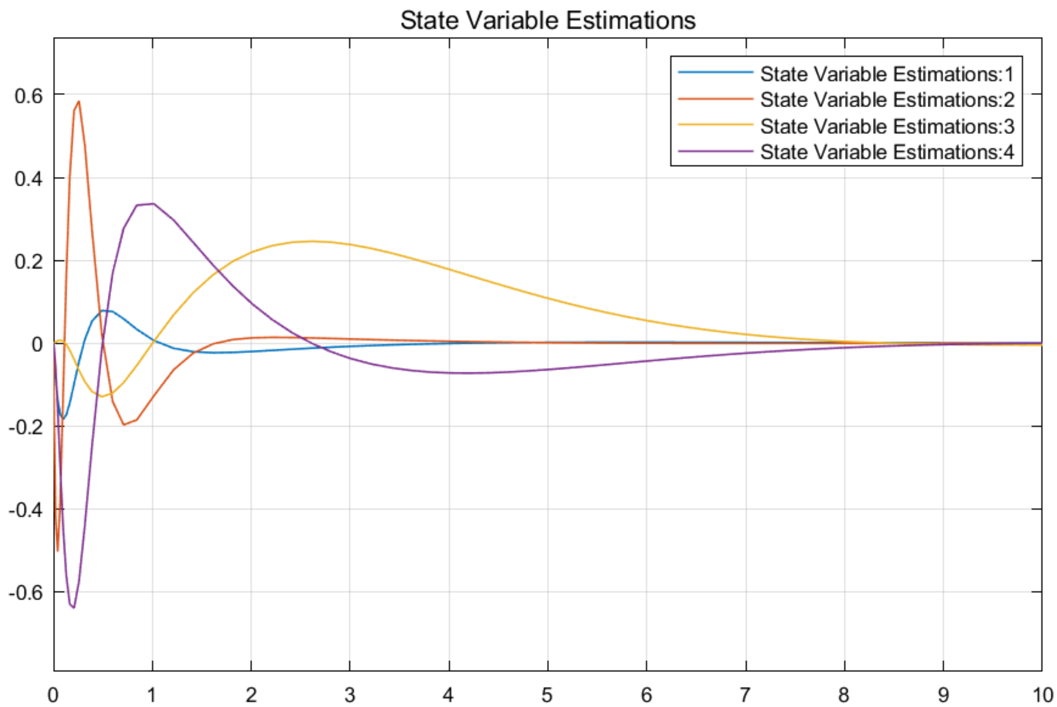
Απόκριση Εισόδου u(t)



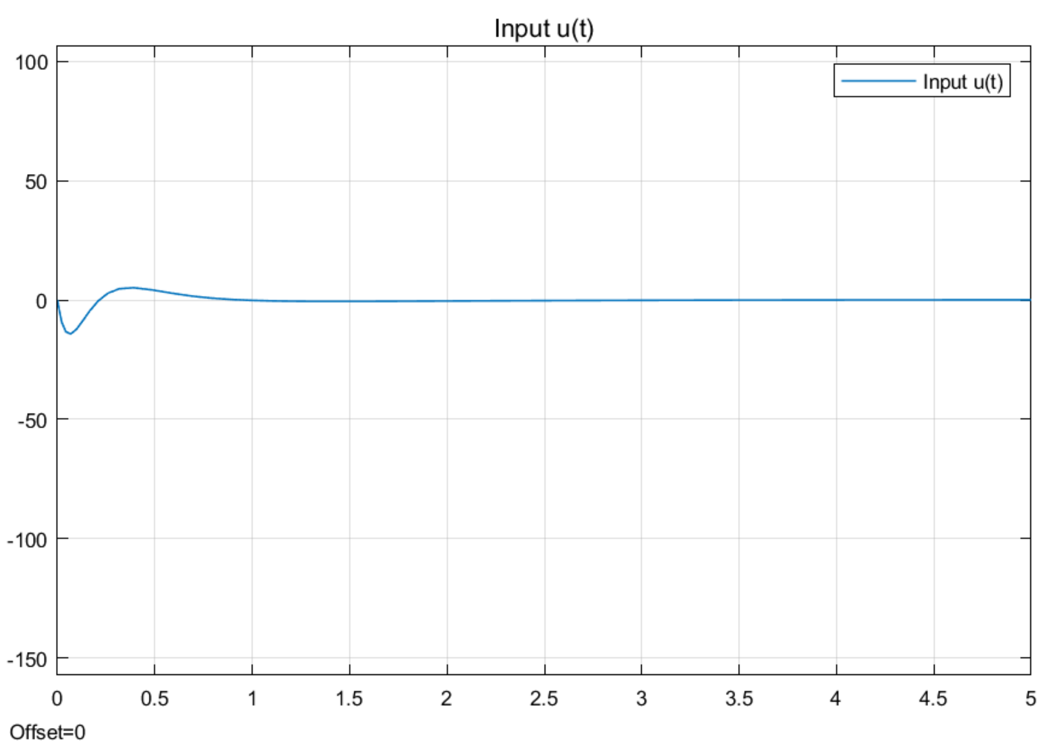
Μετρήσιμη Έξοδος

Επιθυμία να πληρούνται οι προδιαγραφές του ερωτήματος Β:

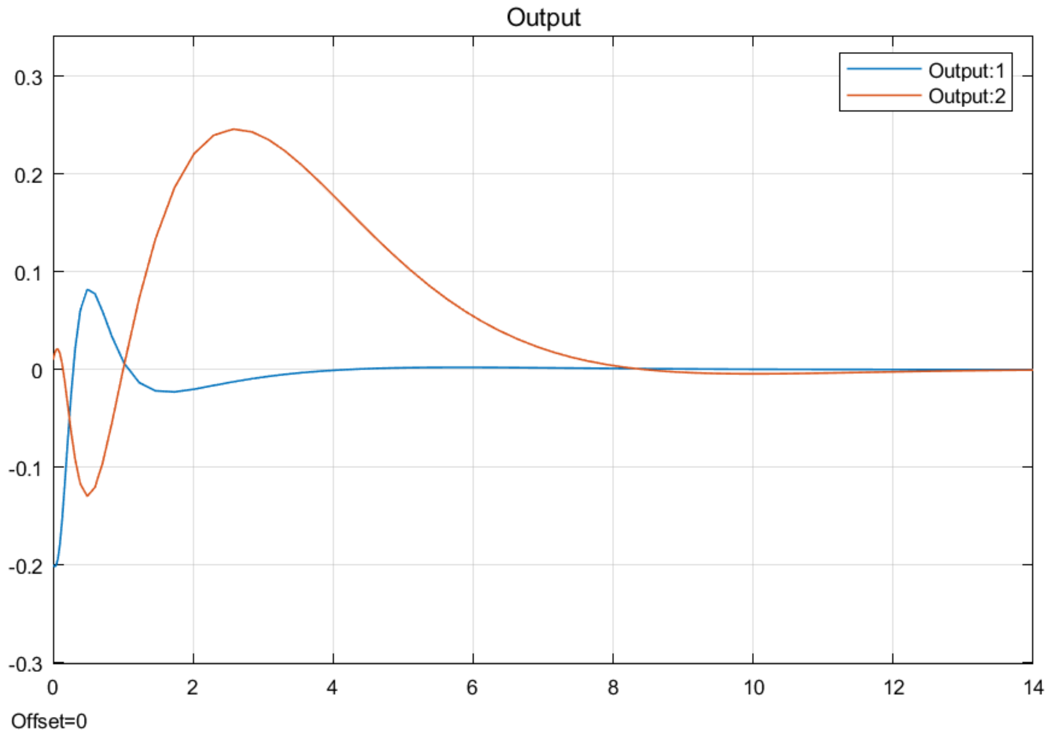
Η μορφολογία του συστήματος και τα βήματα για την υλοποίηση των ζητουμένων είναι τα ίδια με πριν, με την μόνη διαφορά ότι τώρα το μητρώο **K** είναι το **K**$_{lqr}$. Οι εκτιμήσεις κατάστασης για τα πρώτα 10 sec, η είσοδος για τα πρώτα 5 sec και η μετρήσιμη έξοδος για τα πρώτα 14 sec φαίνονται στη συνέχεια:



Εκτίμηση Μεταβλητών Κατάστασης



Απόκριση u(t)



Μετρήσιμη Έξοδος

Ερώτημα Ε

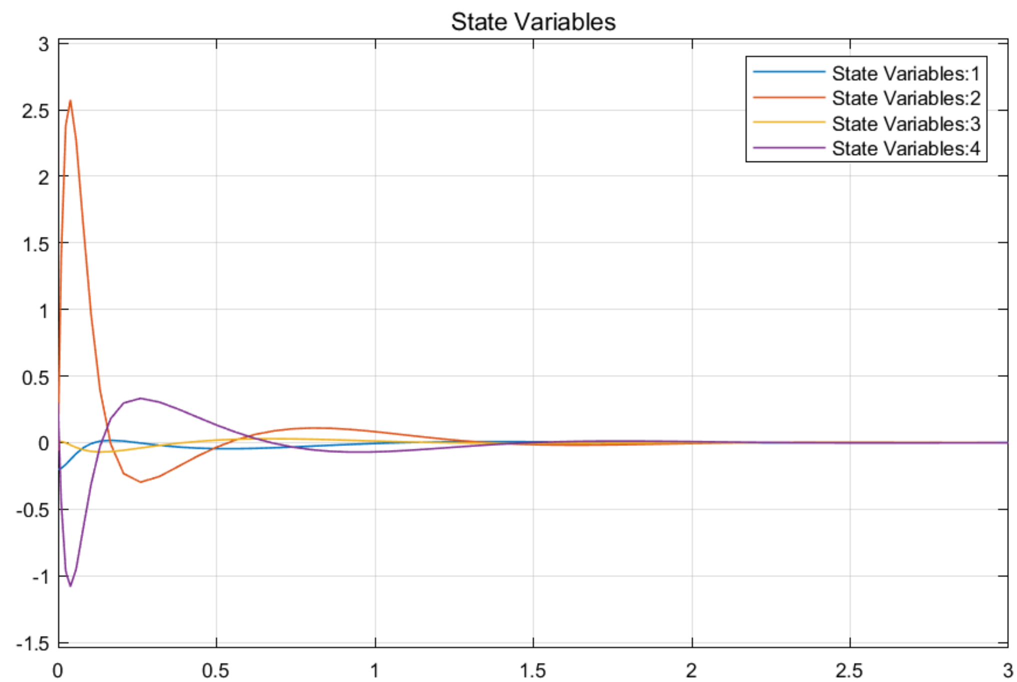
Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε ότι ο πίνακας A παρουσιάζει απόκλιση από τον αρχικό. Για τον νέο A, λοιπόν, επιθυμούμε να δούμε πώς θα συμπεριφερθούν οι ελεγκτές και οι παρατηρητές των προηγούμενων ερωτημάτων, αν το σύστημα θα παραμείνει ευσταθές και το πώς θα επηρεαστεί η μεταβατική απόκριση.

Για να πραγματοποιήσουμε αυτή την αξιολόγηση, ορίζουμε στο αρχείο κώδικα έναν νέο πίνακα A_last με τις νέες τιμές. Ύστερα, ξανατρέχουμε όλες τις προσομοιώσεις των αρχείων .slx που έχουμε από τα προηγούμενα ερωτήματα, αντικαθιστώντας απλώς τον πίνακα A από τον A_last.

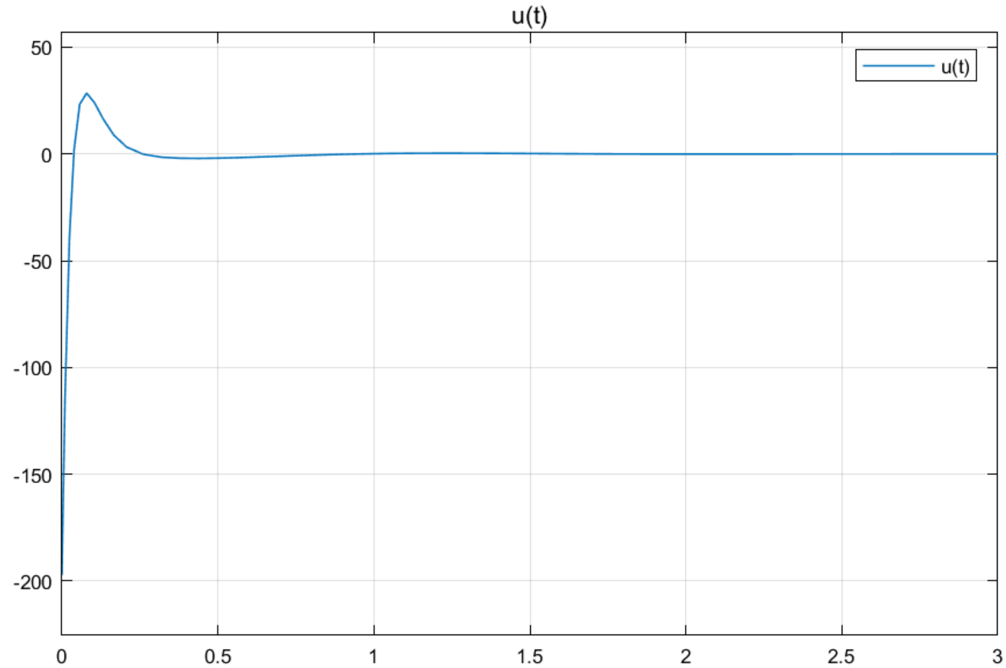
Επαναφορά στην αρχική θέση - τοποθέτηση πόλων βάσει DS1, DS2, DS3 (Διάνυσμα κατάστασης μετρήσιμο)

Πόλοι του συστήματος (όπως προέκυψαν από τον κώδικα MATLAB):
$-25.5447 + j\cdot 1.3306$, $-25.5447 - j\cdot 1.3306$, $-2.1775 + j\cdot 3.8186$, $-2.1775 - j\cdot 3.8186$

Φαίνονται αρκετά κοντά στους πόλους που ιδανικά θα θέλαμε. Οι αποκρίσεις είναι:



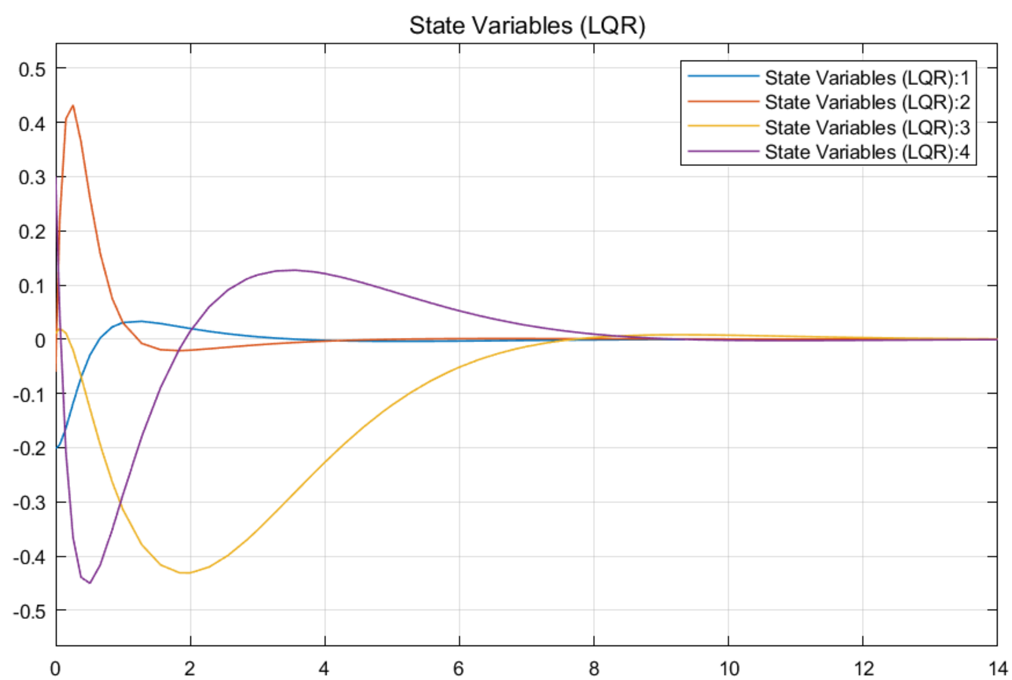
Διάνυσμα Μεταβλητών Κατάστασης



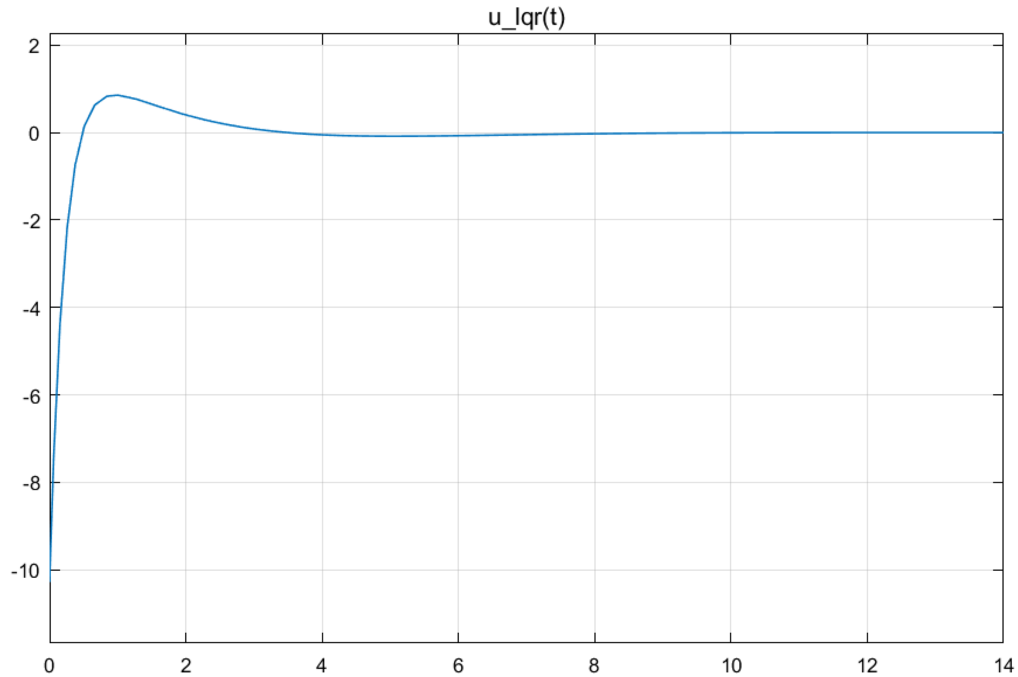
Απόκριση Εισόδου με Ανατροφοδότηση Κατάστασης

Επαναφορά στην αρχική θέση - LQR (Διάνυσμα κατάστασης μετρήσιμο)

Οι αποκρίσεις παρατίθενται παρακάτω:



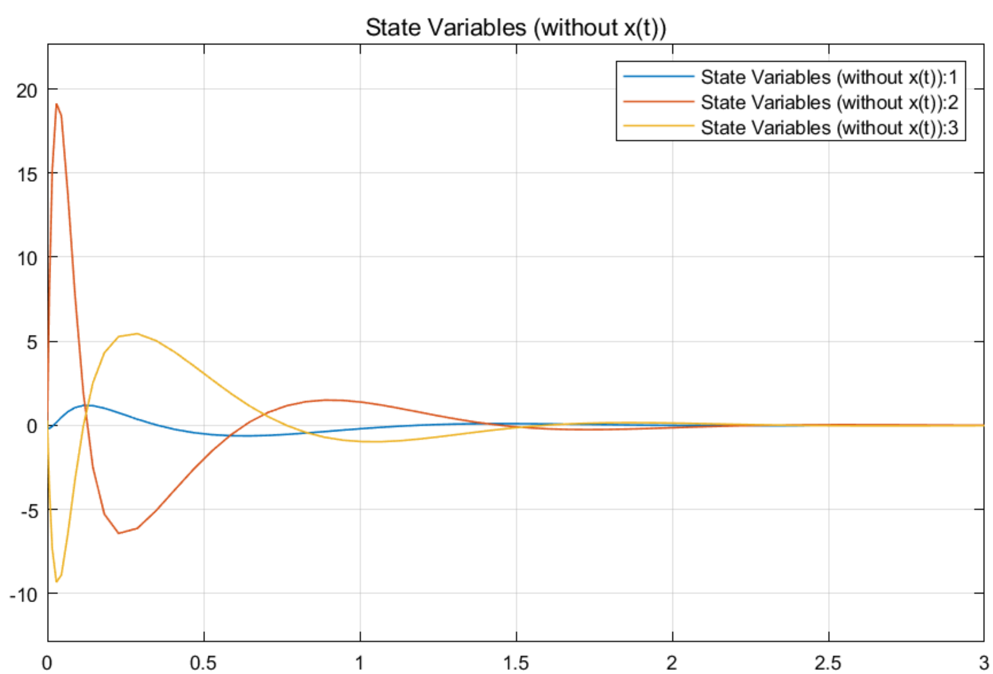
Διάνυσμα Μεταβλητών Κατάστασης



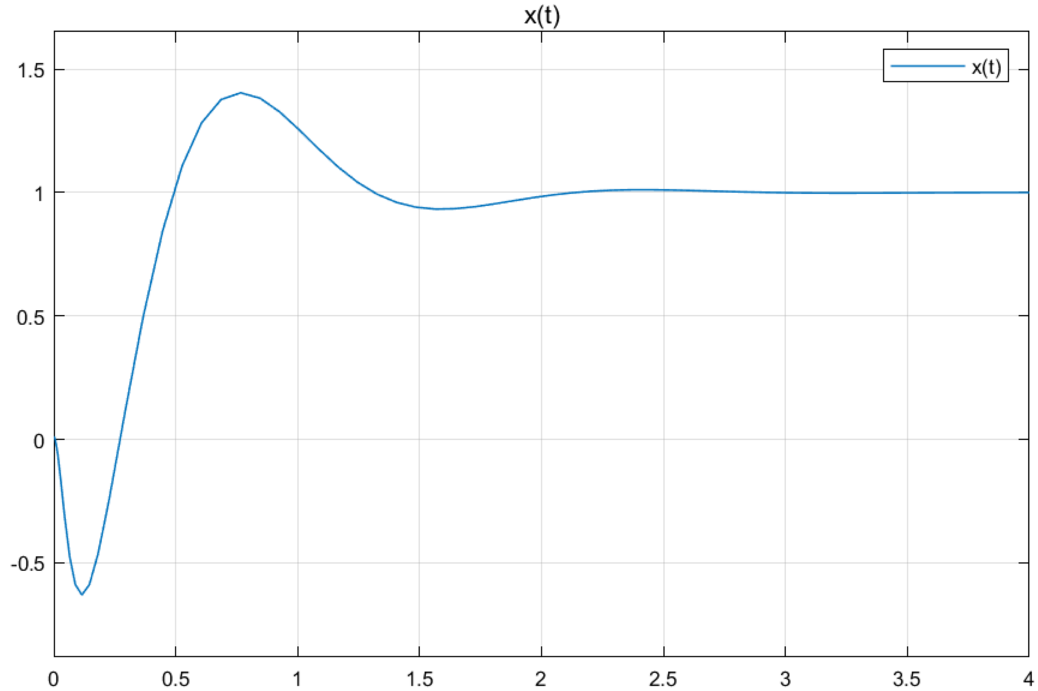
Απόκριση Εισόδου με Ανατροφοδότηση Κατάστασης

Ισορροπία σε επιθυμητή θέση (x = 1) (Διάνυσμα κατάστασης μετρήσιμο)

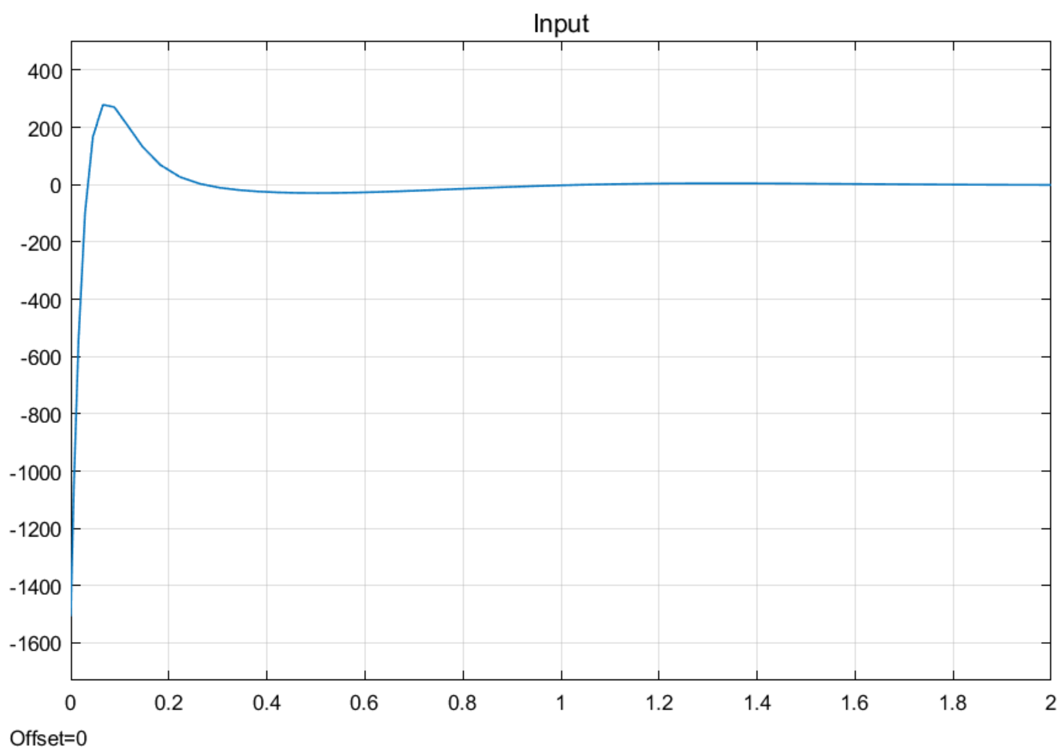
Οι αποκρίσεις παρατίθενται παρακάτω:



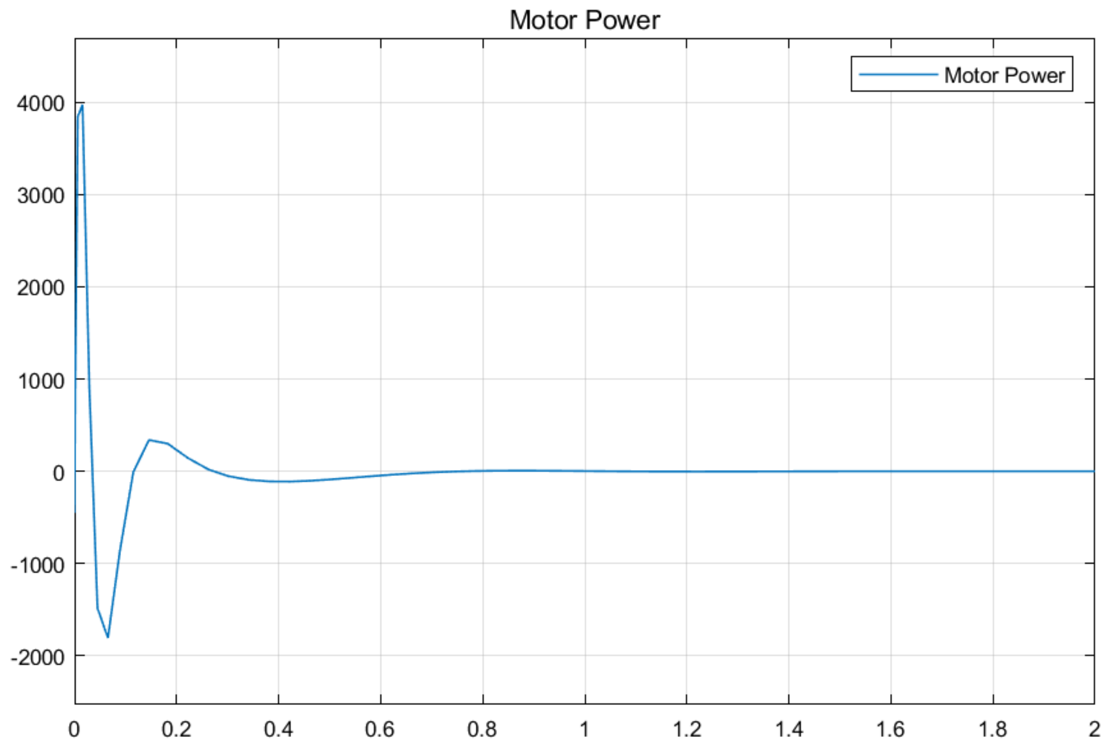
Απόκριση μεταβλητών κατάστασης (πλην μετατόπισης)



Απόκριση Μετατόπισης x(t)



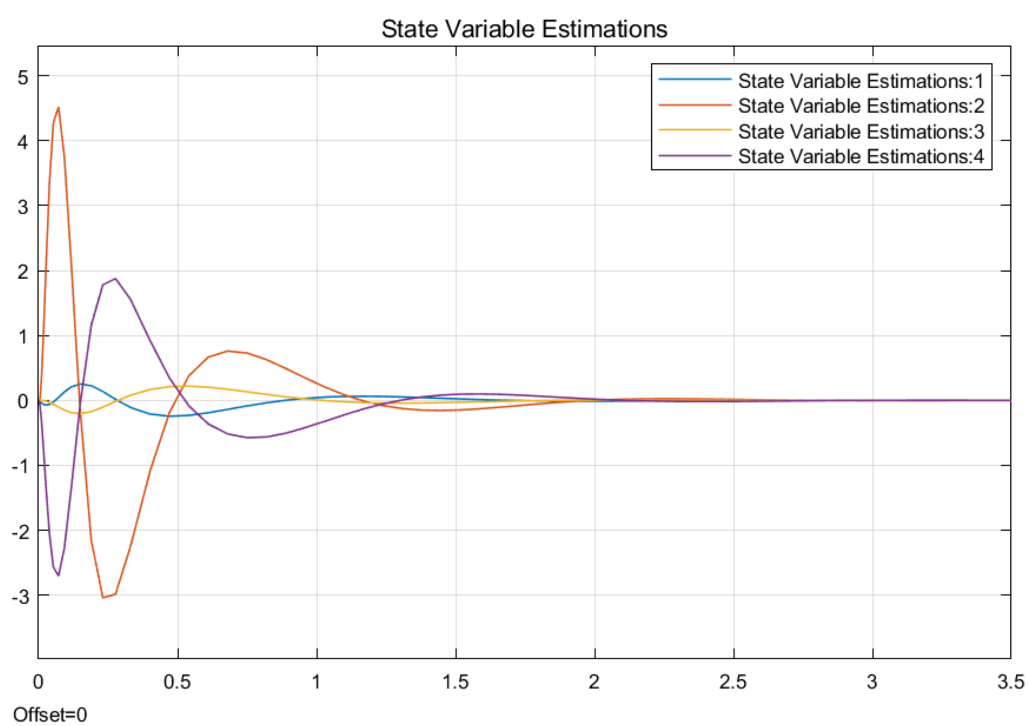
Απόκριση Εισόδου u(t)



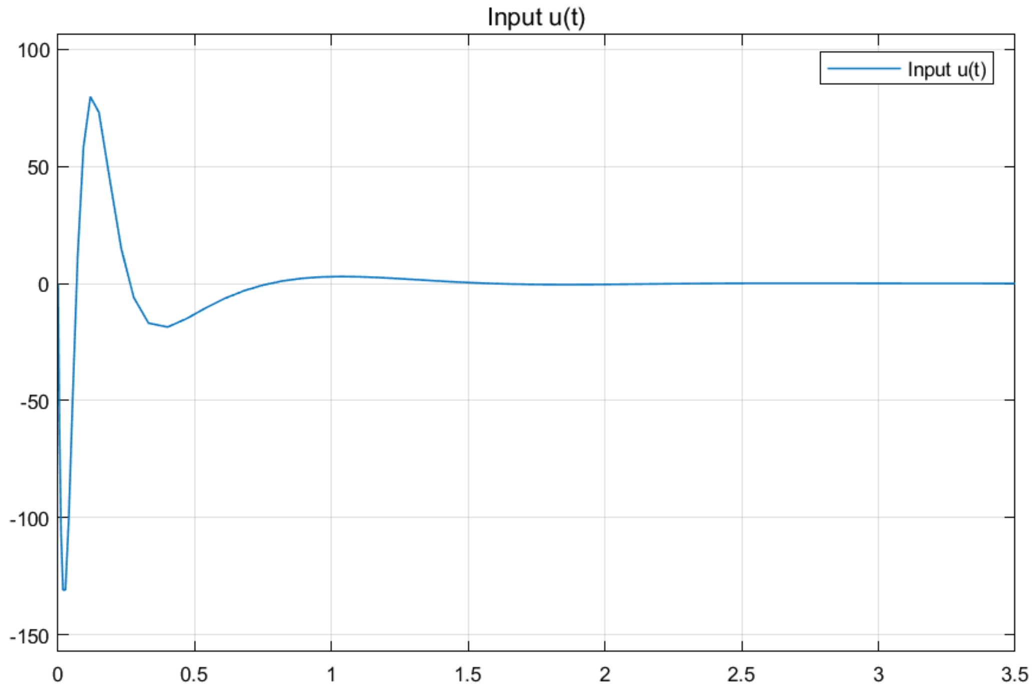
Ισχύς Κινητήρα

Επαναφορά στην αρχική θέση - τοποθέτηση πόλων βάσει DS1, DS2, DS3 (Διάνυσμα κατάστασης μη μετρήσιμο) – Παρατηρητής Luenberger

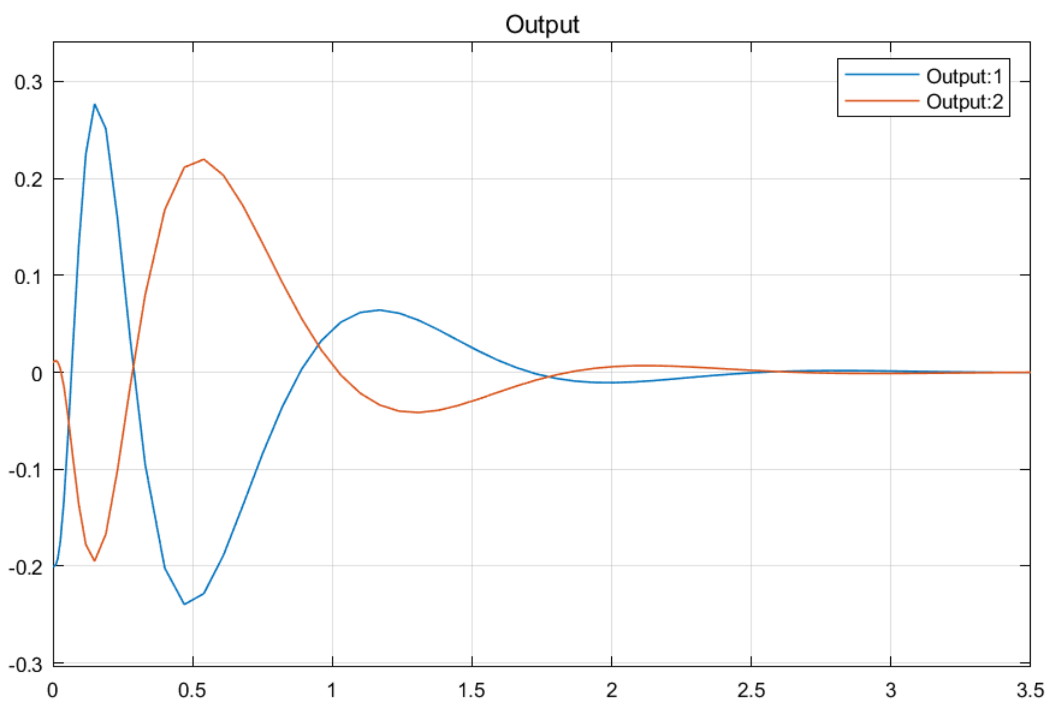
Οι αποκρίσεις παρατίθενται παρακάτω:



Εκτίμηση Διανύσματος Κατάστασης



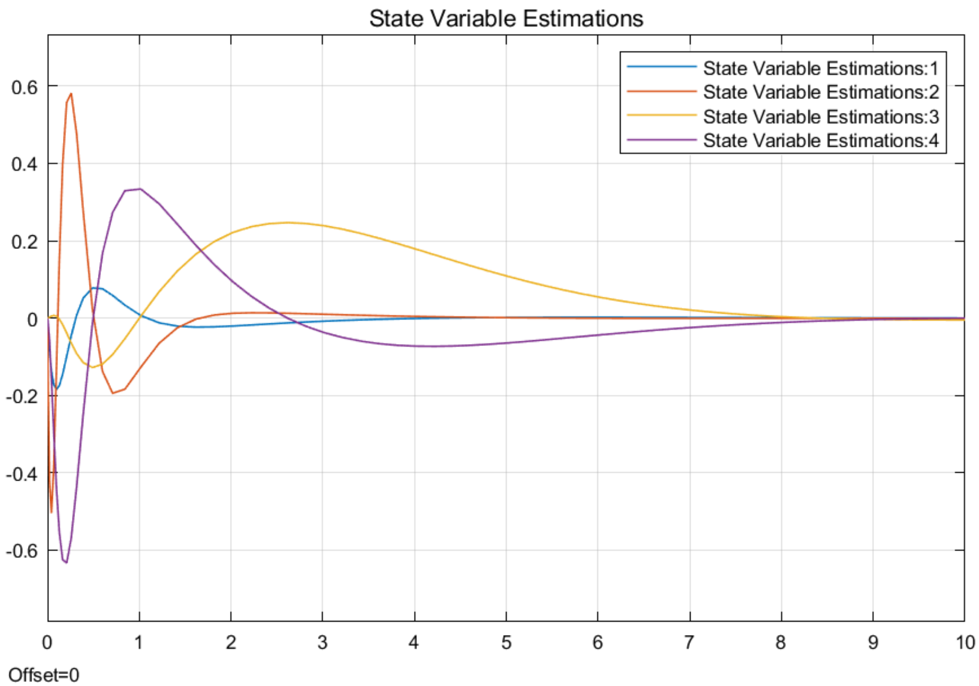
Απόκριση Εισόδου u(t)



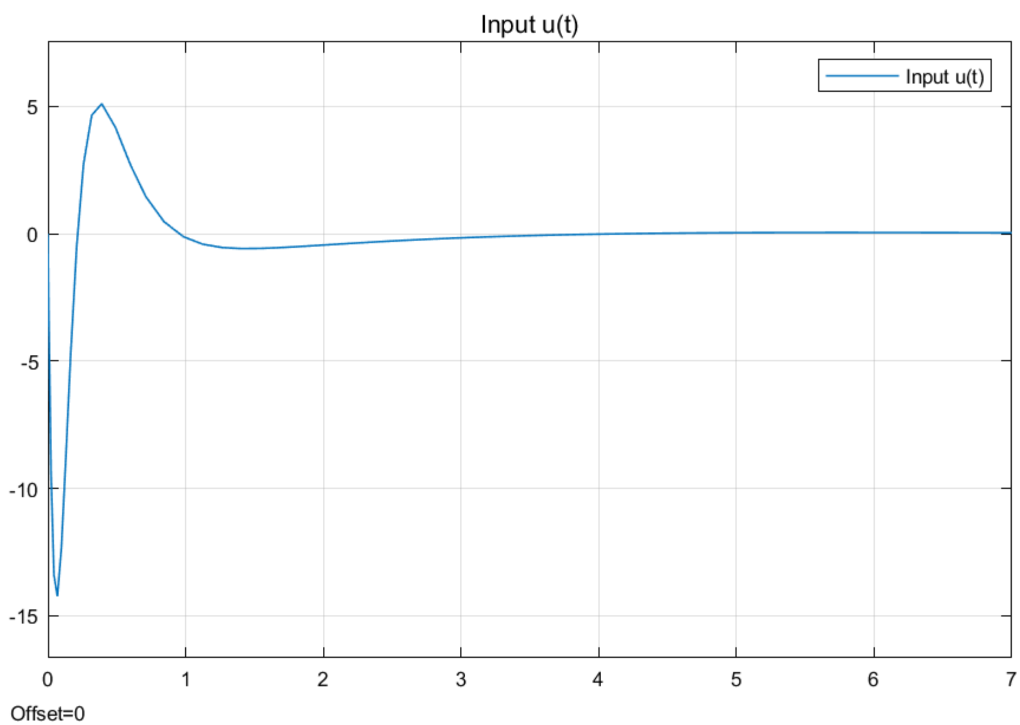
Μετρήσιμη Έξοδος

Επαναφορά στην αρχική θέση - LQR (Διάνυσμα κατάστασης μη μετρήσιμο) – Παρατηρητής Luenberger

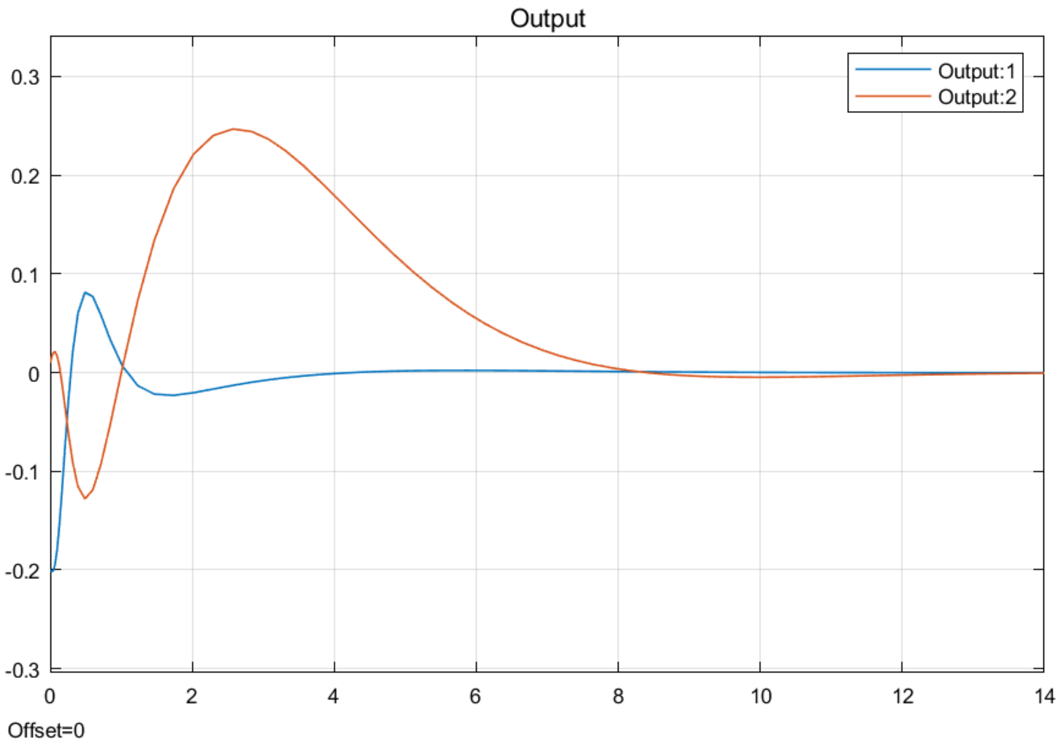
Οι αποκρίσεις παρατίθενται παρακάτω:



Εκτίμηση Διανύσματος Κατάστασης



Απόκριση Εισόδου



Μετρήσιμη Έξοδος

Παρατηρώντας τις αποκρίσεις, διαπιστώνουμε ότι αυτές είναι πάρα πολύ κοντά σε αυτές που θα θέλαμε να έχουμε ιδανικά (δηλαδή με τον αρχικό πίνακα Α). Επομένως, το σύστημά μας παραμένει ευσταθές και πληροί τις σχεδιαστικές προδιαγραφές για κάθε περίπτωση που εξετάσαμε, ακόμη κι αν επέλθει κάποια μεταβολή στην μήτρα Α.

Τελικώς, οι ελεγκτές και οι παρατηρητές που σχεδιάστηκαν χαρακτηρίζονται άρτιοι και η σχεδίαση επιτυχής.

Βιβλιογραφία

[1] Richard C. Dorf και Robert H. Bishop, (2010) "Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου", 13η Έκδοση, σελίδα 761.

[2] Richard C. Dorf και Robert H. Bishop, (2010) "Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου", 13η Έκδοση, σελίδα 749.