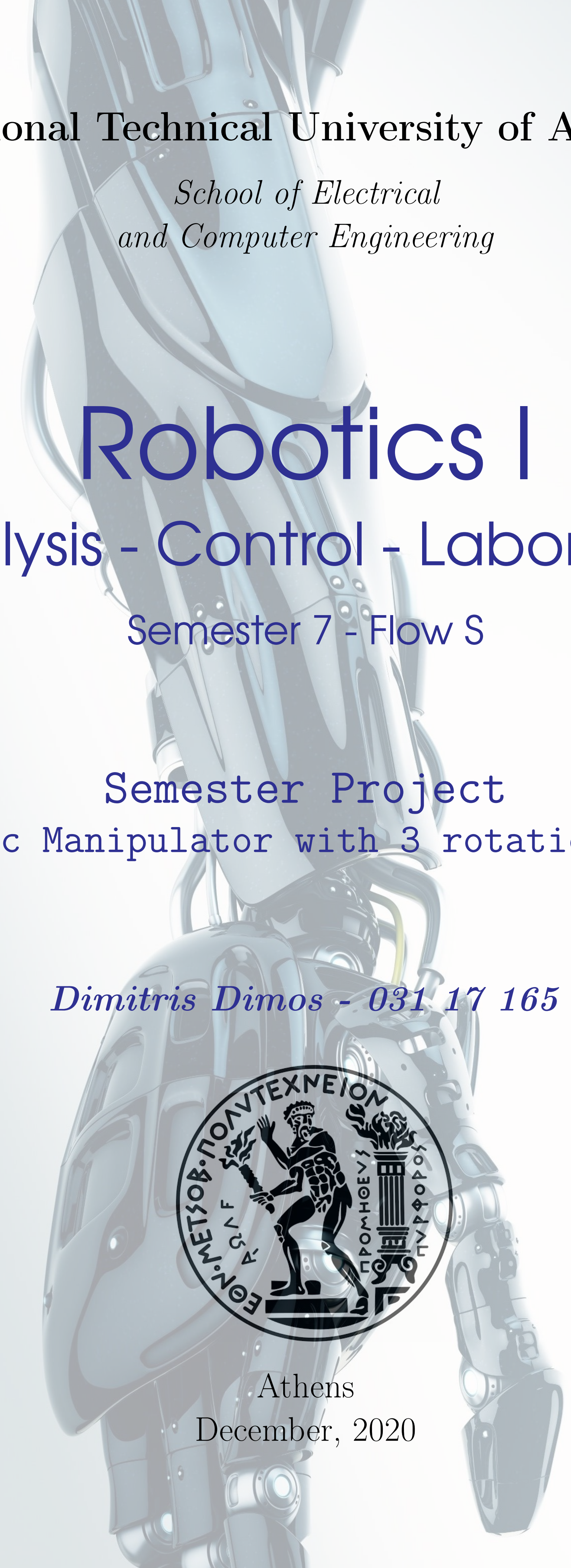

National Technical University of Athens

School of Electrical
and Computer Engineering

Robotics I

Analysis - Control - Laboratory

Semester 7 - Flow S

Semester Project

Robotic Manipulator with 3 rotational DOF

Dimitris Dimos - 031 17 165

Athens
December, 2020

Περιεχόμενα

1 ΜΕΡΟΣ Α: Θεωρητική Ανάλυση

Στην Figure 1 παρουσιάζεται η κινηματική δομή ενός ρομποτικού χειριστή τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας q_1, q_2, q_3 σε διάταξη αρχικοποίησης (όπου $q_i = 0, \forall i = 1, 2, 3$). Τα μήκη των συνδέσμων $l_0, ..., l_5$ θεωρούνται γνωστά και σταθερά.

Για το μέρος της θεωρητικής ανάλυσης, πραγματοποιούμε τις παρακάτω 5 διαδικασίες:

- Με εφαρμογή της μεθόδου Denavit - Hartenberg για:
  - τοποθέτηση πλαισίων αναφοράς των συνδέσμων του βραχίονα και
  - προσδιορισμός του πίνακα των παραμέτρων της μεθόδου

  Θεωρώντας, στη συνέχεια, πως $l_3 = 0$:

- Προσδιορισμός της ευθείας κινηματικής εξίσωσης του ρομπότ
- Προσδιορισμός της Ιακωβιανής μήτρας που περιγράφει το ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο για δοθείσα διάταξη του ρομπότ.
- Μελέτη του αντίστροφου διαφορικό κινηματικού μοντέλου του ρομπότ ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης, και προσδιορισμός των ιδιόμορφων κινηματικών διατάξεων του συστήματος (singular configurations).
- Προσδιορισμός του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου του ρομποτικού βραχίονα για δεδομένη θέση p_E του τελικού εργαλείου δράσης.

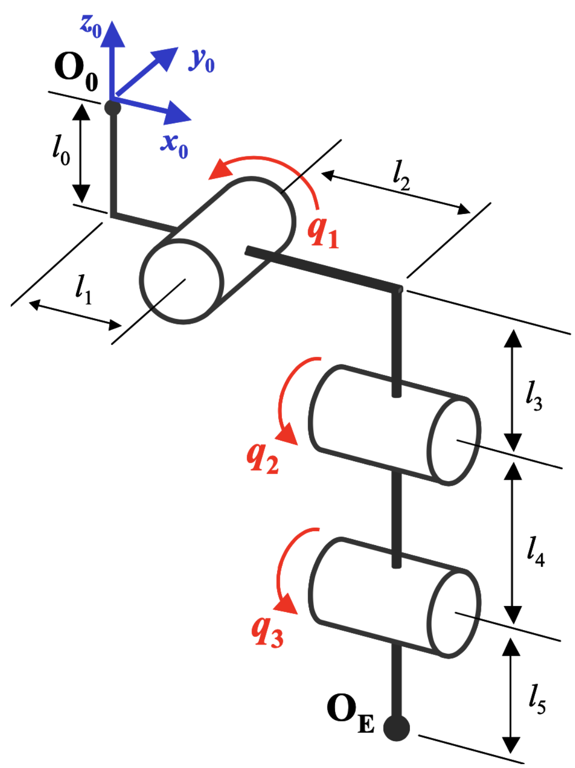

Figure 1: Κινηματική δομή ρομποτικού χειριστή 3 στροφικών β.ε

1.1 Μέθοδος DH - Τοποθέτηση Πλαισίων - Πίνακας Παραμέτρων

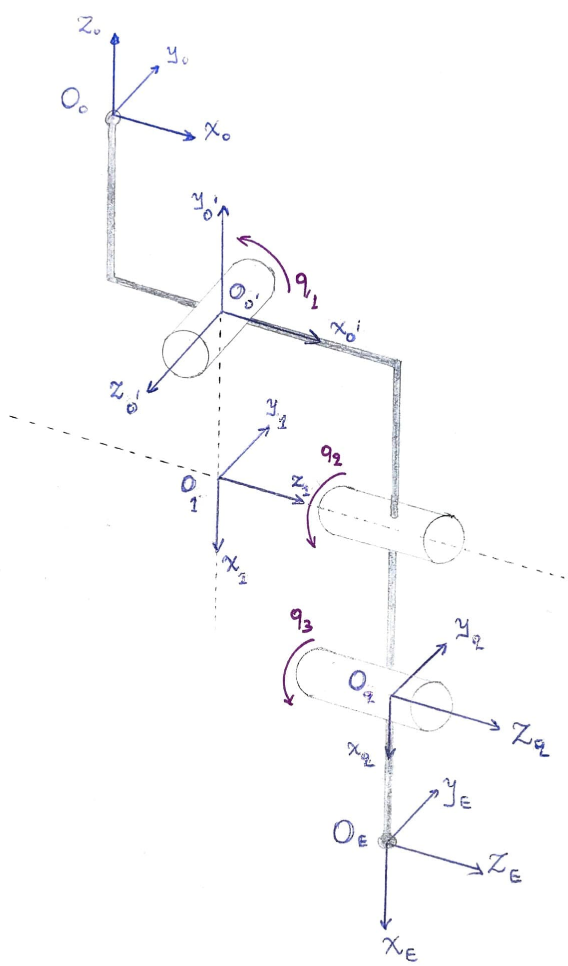

Figure 2: Τοποθέτηση Πλαισίων

Τα νέα πλαίσια που τοποθετούμε θα είναι σε πλήθος ίσα με #αρθρώσεων + 1 (ένα για κάθε άρθρωση + 1 για τον end-effector). Αναλυτικά, ακολουθούμε τις εξής οδηγίες για να τοποθετήσουμε το πλαίσιο της άρθρωσης i:

- ο z_i άξονας βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα της άρθρωσης
- ο x_i άξονας είναι κάθετος στους z_i και z_{i-1}. Αν δεν υπάρχει μοναδική κάθετος στους z_i και z_{i-1}, τότε ο x_i βρίσκεται στην κατεύθυνση από τον z_{i-1} προς τον z_i
- ο y_i άξονας τοποθετείται με τρόπο ώστε οι άξονες να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα
- ο x_i άξονας πρέπει να τέμνει τον z_{i-1}. Διαφορετικά, το πλαίσιο πρέπει να μετατοπιστεί (χωρίς να περιστραφεί), ώστε να πληρούται η εν λόγω σύμβαση.

Το πλαίσιο του end-effector μπορεί να τοποθετηθεί αυθαίρετα, οπότε επιλέγουμε το πλαίσιο που φαίνεται στην Figure 2.

Ύστερα, εξάγουμε τον πίνακα παραμέτρων DH.

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
$0'$	l_1	$90°$	$-l_0$	0
1	l_3	-90°	0	$q_1 - 90°$
2	l_4	0	l_2	q_2
E	l_5	0	0	q_3

Εξηγούμε, λίαν συντόμως, την σημασία του κάθε συμβόλου του πίνακα:

- a_i: απόσταση των κέντρων των πλαισίων $i-1$ και i στην κατεύθυνση του x_i
- α_i: περιστροφή του $i-1$ πλαισίου γύρω από τον x_i για να συμπέσει ο z_{i-1} με τον z_i
- d_i: απόσταση των κέντρων των πλαισίων $i-1$ και i στην κατεύθυνση του z_{i-1}
- θ_i: περιστροφή του $i-1$ πλαισίου γύρω από τον z_{i-1} για να συμπέσει ο x_{i-1} με τον x_i

1.2 Ευθεία Κινηματική Εξίσωση - Ευθύ Γεωμετρικό Μοντέλο

Στη συνέχεια, θεωρούμε πως $l_3 = 0$ και, συνεπώς, το πλαίσιο O_1 "πέφτει" πάνω στο πλαίσιο $O_{0'}$ (έχουν κοινή αρχή). Για τον προσδιορισμό της ευθείας κινηματικής εξίσωσης, θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις επιμέρους μήτρες ομογενών μετασχηματισμών. Ο γενικός τύπος που δίνει την κάθε μήτρα συναρτήσει των παραμέτρων DH, είναι:

$$A_i^{i-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} cos\theta_i & -sin\theta_i \cdot cos\alpha_i & sin\theta_i \cdot sin\alpha_i & a_i \cdot cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i \cdot cos\alpha_i & -cos\theta_i \cdot sin\alpha_i & a_i \cdot sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

Για οικονομία χώρου και για να είναι πιο ευανάγνωστοι οι υπολογισμοί, θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

- c_i για το $cosq_i$
- s_i για το $sinq_i$
- Κατ' αναλογία, ένα $cos(q_i + q_j)$ θα συμβολίζεται ως c_{ij} κ.ο.κ.

Σύμφωνα, με τη σχέση (1) και τον πίνακα παραμέτρων DH, έχουμε:

$$A_{0'}^0 = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad A_1^{0'}(q_1) = \left[\begin{array}{ccc:c} s_1 & 0 & c_1 & l_3 s_1 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_3 c_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad A_E^2(q_3) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_3 & -s_3 & 0 & l_5 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Επομένως, προκύπτουν:

$$A_1^0(q_1) = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'}(q_1) = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 + l_3 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -c_1 l_3 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^1(q_2, q_3) = A_2^1(q_2) \cdot A_E^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & l_4 c_2 + l_5 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, η κινηματική εξίσωση του ρομποτικού χειριστή είναι:

$$T(\mathbf{q}) = A_E^0(\mathbf{q}) = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'}(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot A_E^2(q_3) = A_1^0(q_1) \cdot A_E^1(q_2, q_3) =$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 + l_3 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -c_1 l_3 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & l_4 c_2 + l_5 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_{23}s_1 & -s_1 s_{23} & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + l_3 s_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - l_3 c_1 - c_1 c_2 l_4 - c_1 c_{23} l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή, ακόμη, $l_3 = 0$ η ευθεία κινηματική εξίσωση είναι τελικά:

$$T(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{23}s_1 & -s_1 s_{23} & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - c_1 c_2 l_4 - c_1 c_{23} l_5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1.3 Ιακωβιανή Μήτρα - Ευθύ Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}$, όπου $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n]^T$ το $(n \times 1)$ διάνυσμα των ταχυτήτων των αρθώσεων.

Ο γενικός τύπος της Ιακωβιανής Μήτρας $(6 \times n)$ $\mathbf{J}$ είναι:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{J_{L_1}} & \mathbf{J_{L_2}} & \cdots & \mathbf{J_{L_n}} \\ \mathbf{J_{A_1}} & \mathbf{J_{A_2}} & \cdots & \mathbf{J_{A_n}} \end{array}\right]$$

Κάθε στήλη i της μήτρας αφορά την άρθρωση i. Συγκεκριμένα, τα $\mathbf{J_{Li}}$ και $\mathbf{J_{Ai}}$, είναι το καθένα (3×1) διανύσματα στήλες που αντιπροσωπεύουν την "συνεισφορά" του $\dot{q}_i$ (ταχύτητα της άρθρωσης i) στην ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης. Αν πρόκειται για:

- στροφική άρθρωση, τότε:
  - $\mathbf{J_{L_i}} = \mathbf{b_{i-1}} \times \mathbf{r_{i-1,E}}$
  - $\mathbf{J_{A_i}} = \mathbf{b_{i-1}}$
- πρισματική άρθρωση, τότε:
  - $\mathbf{J_{L_i}} = \mathbf{b_{i-1}}$
  - $\mathbf{J_{A_i}} = \mathbf{0}$

$$\text{όπου:} \begin{cases} \mathbf{b_{i-1}} &= \mathbf{R^0_{i-1}}(\mathbf{q_1}, \cdots, \mathbf{q_{i-1}}) \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{r_{i-1,E}} &= \mathbf{A^0_n}(\mathbf{q_1}, \cdots, \mathbf{q_n}) \cdot \underline{\mathbf{r}} - \mathbf{A^0_{i-1}}(\mathbf{q_1}, \cdots, \mathbf{q_{i-1}}) \cdot \underline{\mathbf{r}} \\ \underline{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \qquad \text{(στη μεθοδολογία DH)} \\ \underline{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

Για την περίπτωση που μελετάμε, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους για στροφικές αρθρώσεις και το διάνυσμα $\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, εφόσον ακολουθούμε τη μεθοδολογία DH.

Προχωράμε στους υπολογισμούς. Θα χρειαστούμε, καταρχάς, λόγω του τύπου που δίνει το $\mathbf{r_{i-1,E}}$ τους πίνακες: $A^0_{0'}$, A^0_1, A^0_2 και A^0_E. Από αυτούς, δεν έχουμε υπολογίσει τον A^0_2. Θα είναι, λοιπόν:

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 =$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 + l_3 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -c_1 l_3 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & l_1 + c_1 l_2 + l_3 s_1 + l_4 c_2 s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - l_3 c_1 - l_4 c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_2^0 = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & l_1 + c_1 l_2 + l_3 s_1 + l_4 c_2 s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - l_3 c_1 - l_4 c_1 c_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Πλέον διαθέτουμε όσα χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή Μήτρα.

<u>Για $i = 1$:</u>

$$\mathbf{b_{0'}} = \mathbf{R_{0'}^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_{0',E}} = \mathbf{A_E^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{A_{0'}^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ l_2 s_1 - c_1 c_2 l_4 - c_1 c_{23} l_5 \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$\mathbf{J_{L_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ l_2 s_1 - c_1 c_2 l_4 - c_1 c_{23} l_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 l_4 + c_1 c_{23} l_5 - l_2 s_1 \\ 0 \\ c_1 l_2 + c_2 l_4 s_1 + c_{23} l_5 s_1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{J_{A_1}} = \mathbf{b_{0'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Για $i = 2$:</u>

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{R_1^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_{1,E}} = \mathbf{A_E^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{A_1^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_1 - l_3 s_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ l_2 s_1 + l_3 c_1 - c_1 c_2 l_4 - c_1 c_{23} l_5 \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$\mathbf{J_{L_2}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2c_1 - l_3s_1 + l_4s_1c_2 + l_5s_1c_{23} \\ l_4s_2 + l_5s_{23} \\ l_2s_1 + l_3c_1 - c_1c_2l_4 - c_1c_{23}l_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23} \\ -l_3 + l_4c_2 + l_5c_{23} \\ l_4c_1s_2 + l_5c_1s_{23} \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{J_{A_2}} = \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

<u>Για $i = E$:</u>

$$\mathbf{b_2} = \mathbf{R_2^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_{2,E}} = \mathbf{A_E^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{A_2^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3s_1 + l_5s_1c_{23} \\ l_5s_{23} \\ l_3c_1 - l_5c_1c_{23} \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$\mathbf{J_{L_2}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3s_1 + l_5s_1c_{23} \\ l_5s_{23} \\ l_3c_1 - l_5c_1c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_5s_1s_{23} \\ -l_3 + l_5c_{23} \\ l_5c_1s_{23} \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{J_{A_2}} = \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

Τελικά, η Ιακωβιανή μήτρα είναι (θεωρώντας $l_3 = 0$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_2s_1 + l_4c_1c_2 + l_5c_1c_{23} & -l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23} & -l_5s_1s_{23} \\ 0 & l_4c_2 + l_5c_{23} & l_5c_{23} \\ l_2c_1 + l_4c_2s_1 + l_5c_{23}s_1 & l_4c_1s_2 + l_5c_1s_{23} & l_5c_1s_{23} \\ 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix}$$

1.4 Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Η αντίστροφη διαφορική κινηματική ανάλυση γίνεται με την υπόθεση ότι γνωρίζουμε (για δοσμένη διάταξη $\mathbf{q}$) το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\mathbf{v_E} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{E_x} & \dot{p}_{E_y} & \dot{p}_{E_z} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ του end-effector, ως προς το πλαίσιο αναφοράς της βάσης.

Έτσι, αν η $\mathbf{J_L} = \mathbf{J}[1:3][1:3]$ (δηλαδή το κομμάτι της Ιακωβιανής που αφορά τις γραμμικές ταχύτητες) αντιστρέφεται, η εξίσωση του ευθέως διαφορικού κινηματικού μοντέλου $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J_L^{-1}} \cdot \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{E}$ (αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο ως προς τη γραμμική ταχύτητα του Τ.Ε.Δ.).

Για να διαπιστώσουμε αν μπορεί να υπάρξει ο ζητούμενος αντίστροφος πίνακας, θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε την ορίζουσά του:

$$\left|\mathbf{J_L}\right| = \begin{vmatrix} c_1c_2l_4 + c_1c_{23}l_5 - l_2s_1 & -l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23} & -l_5s_1s_{23} \\ 0 & l_4c_2 + l_5c_{23} & l_5c_{23} \\ c_1l_2 + c_2l_4s_1 + c_{23}l_5s_1 & l_4c_1s_2 + l_5c_1s_{23} & l_5c_1s_{23} \end{vmatrix} =$$

$$(c_1c_2l_4 + c_1c_{23}l_5 - l_2s_1) \cdot \begin{vmatrix} l_4c_2 + l_5c_{23} & l_5c_{23} \\ l_4c_1s_2 + l_5c_1s_{23} & l_5c_1s_{23} \end{vmatrix} +$$

$$(c_1l_2 + c_2l_4s_1 + c_{23}l_5s_1) \cdot \begin{vmatrix} -l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23} & -l_5s_1s_{23} \\ l_4c_2 + l_5c_{23} & l_5c_{23} \end{vmatrix} =$$

$$(c_1c_2l_4 + c_1c_{23}l_5 - l_2s_1) \cdot [(l_4c_2 + l_5c_{23}) \cdot (l_5c_1s_{23}) - (l_5c_{23}) \cdot (l_4c_1s_2 + l_5c_1s_{23})] +$$

$$(c_1l_2 + c_2l_4s_1 + c_{23}l_5s_1) \cdot [(-l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23}) \cdot (l_5c_{23}) - (-l_5s_1s_{23}) \cdot (l_4c_2 + l_5c_{23})] =$$

$$c_1l_4l_5 \cdot (c_2s_{23} - c_{23}s_2) \cdot (c_1c_2l_4 + c_1c_{23}l_5 - l_2s_1) +$$

$$l_4l_5s_1 \cdot (c_2s_{23} - c_{23}s_2) \cdot (c_1l_2 + c_2l_4s_1 + c_{23}l_5s_1) =$$

$$l_4l_5 \cdot (\underbrace{c_1^2 + s_1^2}_{=1}) \cdot (c_2l_4 + c_{23}l_5) \cdot (\underbrace{c_2s_{23} - c_{23}s_2}_{=s_3}) =$$

$$l_4l_5 \cdot s_3 \cdot (c_2l_4 + c_{23}l_5) \implies$$

$$\boxed{det(\mathbf{J_L}) = l_4l_5s_3(c_2l_4 + c_{23}l_5)}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{J_L}$ μηδενίζεται για τις τιμές που μηδενίζουν τα s_3 και $c_2 l_4 + c_{23} l_5$. Συγκεκριμένα:

- $s_2 = 0 \implies q_2 = 0$ ή π
- $c_2 l_4 + c_{23} l_5 = 0$

Όταν ισχύει κάποια από τις παραπάνω σχέσεις, τότε το ρομπότ βρίσκεται σε ιδιόμορφη διάταξη ως προς τη γραμμική ταχύτητα του Τ.Ε.Δ.

- $q_2 = 0$: πρόκειται για workspace singularity. Για αυτή τη γωνία ο βραχίονας βρίσκεται σε οριακό σημείο του workspace και ο end-effector δεν μπορεί να κινηθεί στην κατεύθυνση του X_E.
- $q_2 = \pi$: ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση
- $c_2 l_4 + c_{23} l_5 = 0$: πρόκειται για internal singularity. Για οποιαδήποτε γωνία q_1 ο end-effector υποχρεωτικά κινείται σε ευθεία παράλληλη με τον y_1, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έτσι, το σύστημα που επιθυμούμε να λύσουμε $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J_L^{-1}} \cdot \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{E}$, δεν θα μπορούσε να μας δώσει μοναδική λύση υπό αυτή τη συνθήκη, αλλά άπειρες, εξού και ο μηδενισμός της ορίζουσας.

  Έχουμε σχεδιάσει τον χειριστή καθώς τον κοιτάμε με κατεύθυνση αντίθετη στον $x_{0'}$ παραλείποντας τον σύνδεσμο στήριξης l_0:

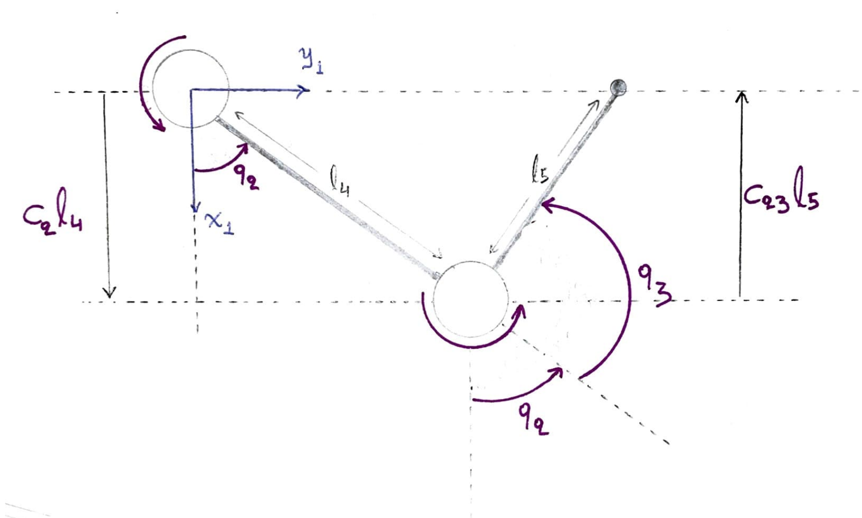

Figure 3: Internal Singularity: $c_2 l_4 + c_{23} l_5 = 0$:

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα $\mathbf{J_L}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{J_L})} \cdot adj(\mathbf{J_L})$, με την $det(\mathbf{J_L})$ υπολογισμένη αμέσως πριν. Μένει να υπολογίσουμε τον $adj(\mathbf{J_L})$. Γενικά:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Για τον πίνακα $adj(\mathbf{J_L})$, θα έχουμε:

- $a_{11} = -l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23}$
- $a_{12} = -l_4 s_1 s_2 - l_5 s_1 s_{23}$
- $a_{13} = -l_5 s_1 s_{23}$
- $a_{21} = 0$
- $a_{22} = l_4 c_2 + l_5 c_{23}$
- $a_{23} = l_5 c_{23}$
- $a_{31} = l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1$
- $a_{32} = l_4 c_1 s_2 + l_5 c_1 s_{23}$
- $a_{33} = l_5 c_1 s_{23}$

- $+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_4 c_2 + l_5 c_{23} & l_5 c_{23} \\ l_4 c_1 s_2 + l_5 c_1 s_{23} & l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = l_4 l_5 c_1 (\underbrace{c_2 s_{23} - c_{23} s_2}_{=s_3}) = l_4 l_5 c_1 s_3$

- $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & l_5 c_{23} \\ l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1 & l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = l_5 c_{23} \cdot (l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1)$

- $+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & l_4 c_2 + l_5 c_{23} \\ l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1 & l_4 c_1 s_2 + l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = -(l_4 c_2 + l_5 c_{23})(l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23})$

- $-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -l_4 s_1 s_2 - l_5 s_1 s_{23} & -l_5 s_1 s_{23} \\ l_4 c_1 s_2 + l_5 c_1 s_{23} & l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = 0$

- $+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23} & -l_5 s_1 s_{23} \\ l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1 & l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = l_5 s_{23}(l_4 c_2 + l_5 c_{23})$

- $-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23} & -l_4 s_1 s_2 - l_5 s_1 s_{23} \\ l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1 & l_4 c_1 s_2 + l_5 c_1 s_{23} \end{vmatrix} = -(l_4 s_2 + l_5 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23})$

- $+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -l_4 s_1 s_2 - l_5 s_1 s_{23} & -l_5 s_1 s_{23} \\ l_4 c_2 + l_5 c_{23} & l_5 c_{23} \end{vmatrix} = l_4 l_5 s_1 s_3$

- $-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23} & -l_5 s_1 s_{23} \\ 0 & l_5 c_{23} \end{vmatrix} = -l_5 c_{23}(-l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23})$

- $+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -l_2s_1 + l_4c_1c_2 + l_5c_1c_{23} & -l_4s_1s_2 - l_5s_1s_{23} \\ 0 & l_4c_2 + l_5c_{23} \end{vmatrix} = (l_4c_2 + l_5c_{23})(-l_2s_1 + l_4c_1c_2 + l_5c_1c_{23})$

Τελικώς:

$$\mathbf{J_L^{-1}} = \frac{1}{l_4l_5s_3(c_2l_4 + c_{23}l_5)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} l_4l_5c_1s_3 & 0 & l_4l_5s_1s_3 \\ l_5c_{23} \cdot (l_2c_1 + l_4c_2s_1 + l_5c_{23}s_1) & l_5s_{23}(l_4c_2 + l_5c_{23}) & -l_5c_{23}(-l_2s_1 + l_4c_1c_2 + l_5c_1c_{23}) \\ -(l_4c_2 + l_5c_{23})(l_2c_1 + l_4s_1c_2 + l_5s_1c_{23}) & -(l_4s_2 + l_5c_{23})(l_4c_2 + l_5c_{23}) & (l_4c_2 + l_5c_{23})(-l_2s_1 + l_4c_1c_2 + l_5c_1c_{23}) \end{bmatrix}$$

1.5 Αντίστροφο Γεωμετρικό Μοντέλο

Στο τελευταίο στάδιο της θεωρητικής ανάλυσης καλούμαστε να προσδιορίσουμε το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα για δεδομένη θέση p_E του Τ.Ε.Δ. Μαθηματικά, δηλαδή, θεωρούμε γνωστό το διάνυσμα:

$$\vec{p_E} = \begin{bmatrix} p_{E_x} \\ p_{E_y} \\ p_{E_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2c_1 + l_4s_1c_2 + l_5s_1c_{23} \\ l_4s_2 + l_5s_{23} \\ -l_0 + l_2s_1 - c_1c_2l_4 - c_1c_{23}l_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x'_E \\ y'_E \\ z'_E \end{bmatrix}}_{\vec{p'_E}} = \begin{bmatrix} x_E - l_1 \\ y_E \\ z_E + l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2c_1 + l_4s_1c_2 + l_5s_1c_{23} \\ l_4s_2 + l_5s_{23} \\ l_2s_1 - c_1c_2l_4 - c_1c_{23}l_5 \end{bmatrix}$$

και προσπαθούμε τα βρούμε τις γωνίες q_1, q_2 και q_3. Πρόκειται για ένα μη γραμμικό σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους.

$$\begin{aligned} x'_E &= l_2c_1 + l_4s_1c_2 + l_5s_1c_{23} \\ y'_E &= l_4s_2 + l_5s_{23} \\ z'_E &= l_2s_1 - c_1c_2l_4 - c_1c_{23}l_5 \end{aligned} \tag{2}$$

Σαν πρώτη κίνηση, υψώνουμε τα μέλη των (3) εις το τετράγωνο:

$$\begin{aligned} x'^2_E &= l_2^2c_1^2 + 2l_2l_4c_1c_2s_1 + 2l_2l_5c_1c_{23}s_1 + l_4^2c_2^2s_1^2 + 2l_4l_5c_2c_{23}s_1^2 + l_5^2c_{23}^2s_1^2 \\ y'^2_E &= l_4^2s_2^2 + 2l_4l_5s_2s_{23} + l_5^2s_{23}^2 \\ z'^2_E &= l_2^2s_1^2 - 2l_2l_4c_1c_2s_1 - 2l_2l_5c_1c_{23}s_1 + l_4^2c_2^2c_1^2 + 2l_4l_5c_2c_{23}c_1^2 + l_5^2c_{23}^2c_1^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι με πρόσθεση των (3.1) και (3.3) κάποιοι όροι απλοποιούνται:

$$(3.1) + (3.3) \implies x_E'^2 + z_E'^2 = l_2^2 + l_4^2 c_2^2 + 2l_4 l_5 c_2 c_{23} + l_5^2 c_{23}^2$$

Αν στη σχέση που προέκυψε προσθέσουμε και την (3.2), βλέπουμε πως, εν τέλει, παραμένει μόνο ένας άγνωστος:

$$(3.1) + (3.2) + (3.3) \implies x_E'^2 + y_E'^2 + z_E'^2 = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 + 2l_4 l_5 c_3$$

Άρα, βρήκαμε τη σχέση που δίνει το q_3:

$$c_3 = \frac{x_E'^2 + y_E'^2 + z_E'^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2l_4 l_5} \implies$$

$$q_3 = \pm\, arccos\left(\frac{x_E'^2 + y_E'^2 + z_E'^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2l_4 l_5}\right) \implies$$

$$\boxed{q_3 = \pm\, arccos\left(\frac{(x_E - l_1)^2 + y_E^2 + (z_E + l_0)^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2l_4 l_5}\right)}$$

Φυσικά, για να θεωρηθεί έγκυρη η λύση θα πρέπει η ποσότητα εντός του τόξου του συνημιτόνου να έχει τιμή από -1 έως 1.

Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι η σχέση (2.2) εμπλέκει μόνο τους αγνώστους q_2 και q_3. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, έχοντας βρει την q_3 να βρούμε την q_2 από την σχέση (2.2):

$$y_E' = l_4 s_2 + l_5 s_{23} \implies$$

$$y_E' = l_4 s_2 + l_5(s_2 c_3 + c_2 s_3) \implies$$

$$y_E' = l_4 s_2 + l_5 s_2 c_3 + l_5 c_2 s_3$$

Παρατηρούμε, ότι ο κύριος άγνωστος (q_2) υπάρχει εντός ενός ημιτόνου κι ενός συνημιτόνου, άρα υποπτευόμαστε ότι θα χρειαστεί να "φέρουμε" στους υπολογισμούς μας ένα τουλάχιστον από τα δύο τριγωνομετρικά εις το τετράγωνο (λόγω του ότι $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$). Επιλέγουμε να το κάνουμε με τον εξής τρόπο:

$$y_E' - l_5 s_3 c_2 = (l_4 + l_5 c_3) s_2 \overset{\hat{}2}{\implies}$$

$$(y_E')^2 - 2y_E' l_5 s_3 c_2 + (l_5 s_3 c_2)^2 = (l_4 + l_5 c_3)^2 s_2^2 \implies$$

$$(y'_E)^2 - 2y'_E l_5 s_3 c_2 + (l_5 s_3 c_2)^2 = (l_4 + l_5 c_3)^2 (1 - c_2^2) \implies$$

$$(y'_E)^2 - 2y'_E l_5 s_3 c_2 + (l_5 s_3)^2 c_2^2 - (l_4 + l_5 c_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2 c_2^2 = 0 \implies$$

$$\Big[(l_5 s_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2\Big] c_2^2 + (-2y'_E l_5 s_3) c_2 + \Big[(y'_E)^2 - (l_4 + l_5 c_3)^2\Big] = 0 \tag{4}$$

Φτάνουμε, λοιπόν, σε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο το c_2. Προτού προχωρήσουμε, ειναι απαραίτητο να μελετήσουμε το αν το τριώνυμο του πρώτου μέλους υφίσταται όντως, δηλαδή ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι διάφορος του 0.

$$\Big[(l_5 s_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2\Big] = 0$$

$$\iff \begin{cases} l_5 s_3 & = 0 \\ l_4 + l_5 c_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s_3 & = 0 \\ c_3 & = -\frac{l_4}{l_5} \end{cases}$$

Κι εφόσον τα l_4 και l_5 είναι μήκη, το c_3 θα πρέπει να είναι αρνητικό. Ταυτόχρονα, για μας σημασία έχουν οι γωνίες εντός ενός κύκλου. Άρα:

$$\iff \begin{cases} q_3 & = \pi \\ l_4 & = l_5 \end{cases}$$

Παρατηρούμε, βλέποντας και την Figure 3, πως όταν ισχύουν οι τελευταίες συνθήκες, τότε θεωρητικά ο end-effector βρίσκεται πάνω στην άρθρωση q_2 και οποιαδήποτε κι αν είναι η τιμή της γωνίας q_2 δεν θα επηρεάσει την θέση του end-effector καθόλου. Μαθηματικά, λοιπόν, αυτό σημαίνει ότι δεν προκύπτει μοναδική q_2 στο αρχικό μας σύστημα. Άλλωστε, όταν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες, εύκολα φαίνεται ότι:

$$(2.2) \implies y'_E = l_4 sin(q_2) + l_4 sin(\pi + q_2) \implies y'_E = l_4 sin(q_2) - l_4 sin(q_2) \implies y'_E = y_E = 0,$$

που σημαίνει πως αν πράγματι $y_E = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, διαφορετικά δεν έχει καμία (το επιθυμητό σημείο είναι εκτός του workspace).

Για τη γενική περίπτωση, συνεχίζουμε επιλύοντας την εξίσωση (4):

$$\Delta = (-2y'_E l_5 s_3)^2 - 4\Big[(l_5 s_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2\Big]\Big[(y'_E)^2 - (l_4 + l_5 c_3)^2\Big]$$

Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ποσότητα, τότε η ζητούμενη θέση είναι ανέφικτη, καθώς δεν υπάρχει κατάλληλο q_2 που να ικανοποιεί την (4), άρα ούτε και την (2.2).

Θεωρώντας πως είναι θετική, προχωρούμε στη λύση:

$$c_2 = \frac{y_E l_5 s_3 \pm (l_4 + l_5 c_3)\sqrt{(l_4 + l_5 c_3)^2 + l_5^2 s_3^2 - y_E^2}}{(l_5 s_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2} \implies$$

$$\boxed{q_2 = \pm\, arccos \left(\frac{y_E l_5 s_3 \pm (l_4 + l_5 c_3)\sqrt{(l_4 + l_5 c_3)^2 + l_5^2 s_3^2 - y_E^2}}{(l_5 s_3)^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2} \right)}$$

Στο τέλος, βάσει της (2.1) προσπαθούμε να βρούμε την q_1:

$$(2.1) \implies x'_E = l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23} \implies$$

$$x'_E - l_2 c_1 = (l_4 c_2 + l_5 c_{23}) s_1 \overset{\hat{}2}{\implies}$$

$$(x'_E)^2 - 2 l_2 c_1 x'_E + (l_2 c_1)^2 = (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2 s_1^2 \implies$$

$$(x'_E)^2 - 2 l_2 c_1 x'_E + (l_2 c_1)^2 = (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2 (1 - c_1^2) \implies$$

$$(x'_E)^2 - 2 l_2 c_1 x'_E + (l_2 c_1)^2 = (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2 - (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2 c_1^2 \implies$$

$$\Big[l_2^2 + (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2\Big] c_1^2 + (-2 l_2 x'_E) c_1 + \Big[(x'_E)^2 - (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2\Big] = 0$$

Για την περίπτωση που ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι 0, έχουμε παρόμοια ανάλυση ειδικής περίπτωσης με παραπάνω. Προχωρούμε, λοιπόν:

$$\Delta = (-2 l_2 x'_E)^2 - 4\Big[l_2^2 + (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2\Big]\Big[(x'_E)^2 - (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2\Big]$$

Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ποσότητα, τότε η ζητούμενη θέση είναι ανέφικτη, καθώς δεν υπάρχει κατάλληλο q_1 που να ικανοποιεί την εξίσωση, άρα ούτε και την (2.1).

Θεωρώντας πως είναι θετική, προχωρούμε στη λύση:

$$c_1 = \frac{2 l_2 x'_E \pm \sqrt{\Delta}}{2 l_2^2 + 2(l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2} \implies$$

$$\boxed{q_1 = \pm\, arccos \left(\frac{2 l_2 x'_E \pm \sqrt{\Delta}}{2 l_2^2 + 2(l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2} \right)}$$

2 ΜΕΡΟΣ Β: Κινηματική Προσομοίωση

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, αρχικά, επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στον σχεδιασμό επιθυμητής τροχιάς της κίνησης του end-effector. Θεωρούμε ότι:

- ο end-effector πρόκειται να εκτελέσει περιοδική ευθύγραμμη κίνηση μεταξύ δύο σημείων στάσης $P_A(x_A, y_A, z_A)$ και $P_B(x_B, y_B, z_B)$ επί οριζοντίου επιπέδου, απόστασης h από το κέντρο του συστήματος αναφοράς της ρομποτικής βάσης (δηλ. $z_A = z_B = h$).
- τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Τ.Ε.Δ βρίσκεται ήδη (εν στάσει) στη δεδομένη αρχική θέση P_A και ότι η χρονική περίοδος της κίνησής του (μεταξύ των θέσεων P_A και P_B) είναι T secs.
- παράλληλος στόχος μας είναι η ομαλότητα της εκτελούμενης τροχιάς, δηλαδή συνολική χρονική συνέχεια της τροχιάς και ως προς την ταχύτητα.

Για το μέρος της κινηματικής προσομοίωσης, πραγματοποιούμε τις παρακάτω 2 διαδικασίες:

- Αναλυτική περιγραφή του σχεδιασμού της επιθυμητής τροχιάς στον χώρο εργασίας.
- Κινηματική προσομοίωση του ρομποτικού χειριστή με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

2.1 Σχεδιασμός Τροχίας (Trajectory Planning)

Συνοπτικά, αναφέρουμε ότι ο πρακτικός στόχος αυτής της ανάλυσης αφορά την παραγωγή ορισμένων σημάτων αναφοράς $\Big($θέσεων $p(i)$ και ταχυτήτων $\dot{p}(i)\Big)$ στον καρτεσιανό χώρο εργασίας του ρομποτικού εργαλείου, που ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών.

Τα σήματα αυτά, γενικά, αποτελούν την είσοδο αλγορίθμων αντίστροφης κινηματικής ανάλυσης (αντίστροφο γεωμετρικό και διαφορικό μοντέλο) που στην έξοδό τους παράγουν τις επιθυμητές γωνίες και ταχύτητες $q_r(i)$ και $\dot{q}_r(i)$. Με τη σειρά τους τα $q_r(i)$ και $\dot{q}_r(i)$ θα αποτελέσουν τα σήματα αναφοράς των ελεγκτών που ελέγχουν την κίνηση του ρομπότ.

Η σχεδιαζόμενη τροχία, εν ολίγοις, πρόκειται για χρονικές συναρτήσεις κίνησης του end-effector και σχεδιάζοντε ώστε να παρουσιάζουν συνέχεια θέσης και ταχύτητας.

Ζητούμενο είναι η σχεδιαζόμενη τροχιά να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $z = h$ και, συγκεκριμένα, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A \longrightarrow B$. Η εξίσωση των σημείων που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A \longrightarrow B$, είναι:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Αυτό, αμέσως, δεσμεύει τις συντεταγμνένες του end-effector $x(t), y(t), z(t)$ ως εξής:

- $x = x(t)$
- $y = f\Big(x(t)\Big)$
- $z(t) = h, \forall t \in [0, T]$

Δηλαδή, η συντεταγμένη $x(t)$ θα είναι μια χρονική συνάρτηση, την οποία θα σχεδιάσουμε αμέσως μετά, ώστε να πληρούνται οι επιθυμητές προδιαγραφές ομαλότητας, η συντεταγμένη $y(t)$ μπορεί να βρεθεί από την $x(t)$ μέσα από την εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η συντεταγμένη $z(t)$ παραμένη διαρκώς σταθερή και ίση με h ώστε η κίνηση να γίνεται στο ίδιο επίπεδο.

Επομένως, προχωρούμε στον σχεδιασμό του $x(t)$:

Χωρίζουμε την κίνηση σε τρεις φάσεις, σε κάθε μία εκ των οποίων θα προσδιορίσουμε την τιμή του $x(t)$. Για τις φάσεις με επιτάχυνση χρησιμοποιούμε πολυώνυμο τετάρτου βαθμού ως προς t.

1. Φάση επιτάχυνσης: διάρκεια $0 \longrightarrow 2\Delta$
2. Φάση σταθερής ταχύτητας: διάρκεια $2\Delta \longrightarrow T - 2\Delta$
3. Φάση επιβράδυνση: διάρκεια $T - 2\Delta \longrightarrow T$

$$x(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 & , 0 \leq t \leq 2\Delta \\ b_0 + b_1 t & , 2\Delta \leq t \leq T - 2\Delta \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 & , T - 2\Delta \leq t \leq T \end{cases}$$

Φάση Επιτάχυνσης:

$$x(0) = x_A \Longrightarrow \boxed{a_0 = x_A}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$\ddot{x}(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$x(2\Delta^-) = x(2\Delta^+) \quad (5)$$

$$\dot{x}(2\Delta^-) = \dot{x}(2\Delta^+) \quad (6)$$

$$\ddot{x}(2\Delta) = 0 \Longrightarrow 6a_3(2\Delta) + 12a_4(2\Delta)^2 = 0 \quad (7)$$

Φάση σταθερής ταχύτητας:

Η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με:

$$\dot{x}(t) = b_1 \Longrightarrow \boxed{b_1 = \frac{x_B - x_A}{T - 2\Delta}}$$

$$(6) \Longrightarrow \dot{x}(2\Delta) = 3a_3(2\Delta)^2 + 4a_4(2\Delta)^3 = \frac{x_B - x_A}{T - 2\Delta} \quad (8)$$

$$(7),(8) \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{a_3 = \dfrac{x_B - x_A}{4\Delta^2 T - 8\Delta^3}} \\ \\ \boxed{a_4 = \dfrac{x_B - x_A}{32\Delta^4 T - 16\Delta^3 T}} \end{cases}$$

$$(5) \Longrightarrow b_0 + \frac{x_B - x_A}{T - 2\Delta} \cdot (2\Delta) = x_A + \frac{x_B - x_A}{4\Delta^2 T - 8\Delta^3}(2\Delta)^3 + \frac{x_B - x_A}{32\Delta^4 T - 16\Delta^3 T}(2\Delta)^4$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_0 = x_A + \frac{\Delta(x_B - x_A)}{T(2\Delta - 1)}}$$

Αξιοποιώντας τις υπόλοιπες οριακές σχέσεις:

- $x(T - 2\Delta^-) = x(T - 2\Delta^+)$
- $\dot{x}(T - 2\Delta) = b_1$
- $\ddot{x}(T - 2\Delta) = 0$
- $x(T) = x_B$
- $\dot{x}(T) = 0$
- $\ddot{x}(T) = 0$

μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες παραμέτρους του πολυωνύμου για την επιβραδυνόμενη κίνηση. Οι υπολογισμοί είναι πολλοί και, παρότι, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι αρκετά ικανοποιητικό, επιλέγουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση θεωρώντας πως η χρονική συνάρτηση $x(t)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, διατηρώντας φυσικά τις συνθήκες ομαλότητας. Έτσι, θα διευκολυνθούν οι υπολογισμού, θα απλοποιηθεί ο κώδικας της συνέχειας και, γενικά, θα εξυπηρετείται καλύτερα ο στόχος της εργασίας. Οι φάσεις της κίνησης είναι πλέον μόνο οι φάσεις επιτάχυνσης κι επιβράδυνσης.

Εχουμε:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, 0 \le t \le T$$

$$x(0) = x_A \Longrightarrow \boxed{a_0 = x_A}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$x(T) = x_B \Longrightarrow x_A + a_2 T^2 + a_3 T^3 = x_B \quad (9)$$

$$\dot{x}(T) = 0 \Longrightarrow 2a_2 T + 3a_3 T^2 = 0 \quad (10)$$

$$(9),(10) \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{a_2 = -\dfrac{3}{T^2}(x_A - x_B)} \\ \boxed{a_3 = \dfrac{2}{T^3}(x_A - x_B)} \end{cases}$$

Δηλαδή, τελικώς:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = x_A - \frac{3}{T^2}(x_A - x_B)t^2 + \frac{2}{T^3}(x_A - x_B)t^3 & \\ y(t) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot \Big(x(t) - x_A\Big) & , 0 \leq t \leq T \\ z(t) = h & \end{array} \right\}}$$

2.2 Κινηματική Προσομοίωση

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε:

- $l_0 = l_1 = l_3 = 0$
- υπόλοιπα μήκη, P_A και P_B (εντός του workspace), T, h (εφικτό) επιλέγονται αυθαίρετα για την εξυπηρέτηση της προσομοίωσης.

Θα δημιουργήσουμε μια συνάρτηση Matlab, με εισόδους τα P_A, P_B και T. Η συνάρτηση παρατίθεται στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας και μέσω αυτής έχουμε παράξει όλες τις επιθυμητές γραφικές παραστάσεις. Αυθαίρετα έχουμε επιλέξει: $l_2 = 4$, $l_4 = 14$, $l_5 = 16$. Οι γραφικές είναι το αποτέλεσμα της συνάρτησης με είσοδο: $P_A = (x_A, y_A, z_A) = (1, 2, 5), P_B = (x_B, y_B, z_B) = (9, 8, 5)$ και $T = 10$.

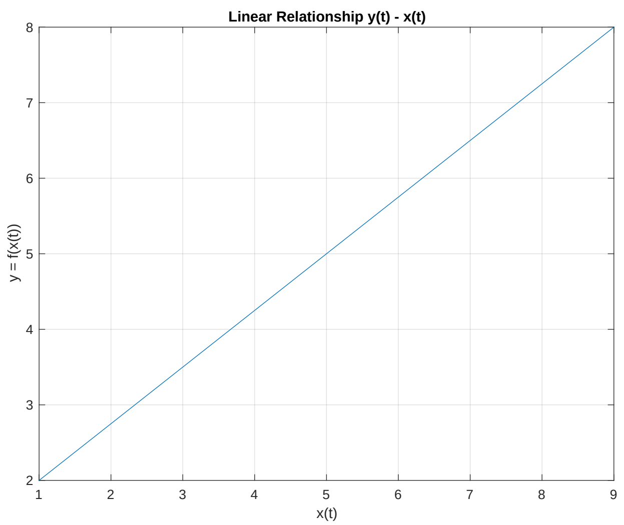

Figure 4: Οι συντεταγμένες x-y του end-effector συνδέονται γραμμικά

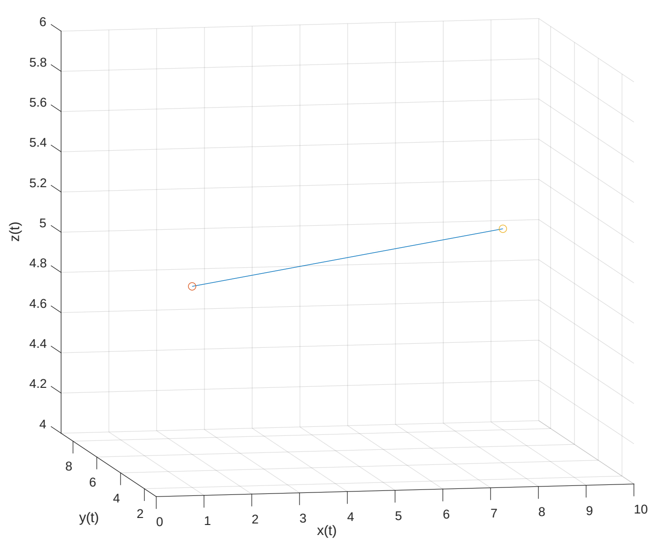

Figure 5: Επιθυμητή τροχιά $P_A = (1, 2, 5), P_B = (9, 8, 5)$

2.2.1 Προφίλ Κίνησης

Ακολουθεί το επιθυμητό προφίλ κίνησης του τελικού εργαλείου δράσης, δηλαδή το $P_E(t)$ και το $v_E(t)$.

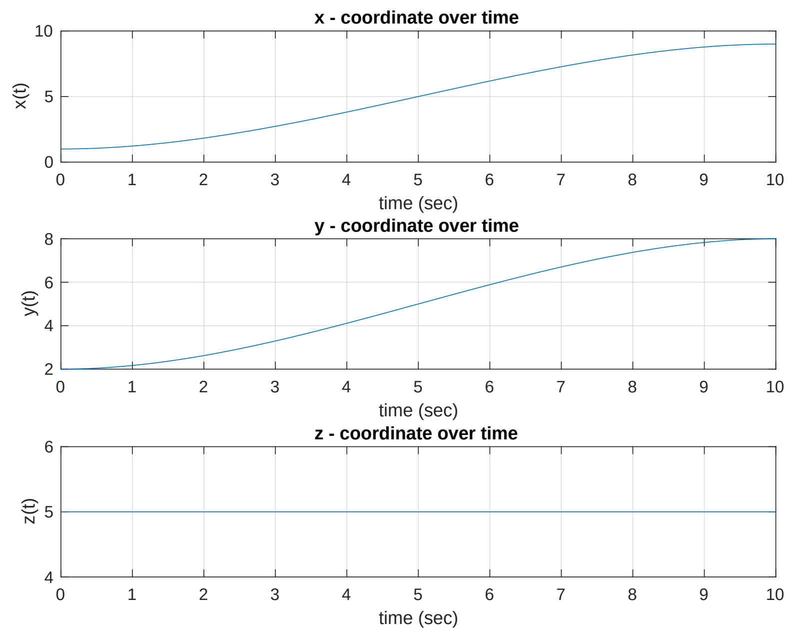

Figure 6: Εξέλιξη των συντεταγμένων θέσης στη διάρκεια των 10 sec

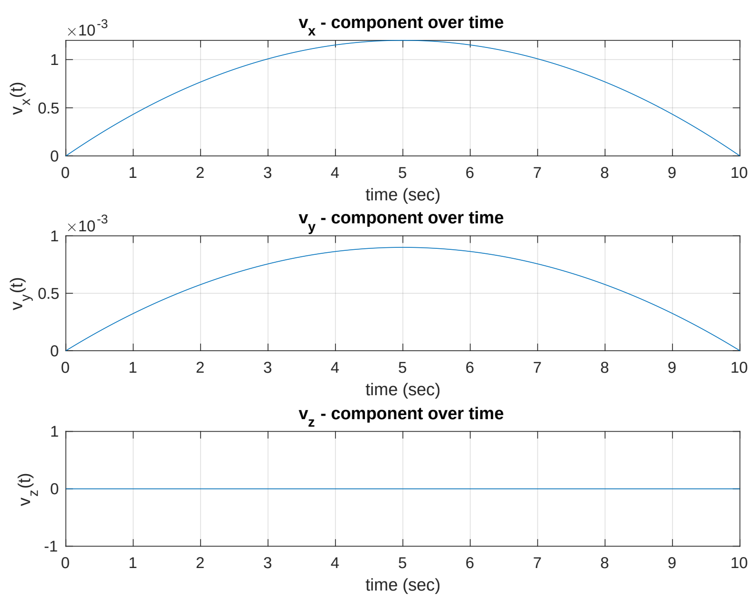

Figure 7: Εξέλιξη των συνιστωσών ταχύτητας στη διάρκεια των 10 sec

2.2.2 Γωνίες και γωνιακές ταχύτητες αρθρώσεων

Παραθέτουμε τα διαγράμματα γωνιών αρθρώσεων και γωνιακών ταχυτήτων, δηλαδή το $q(t)$ και το $\dot{q}(t)$.

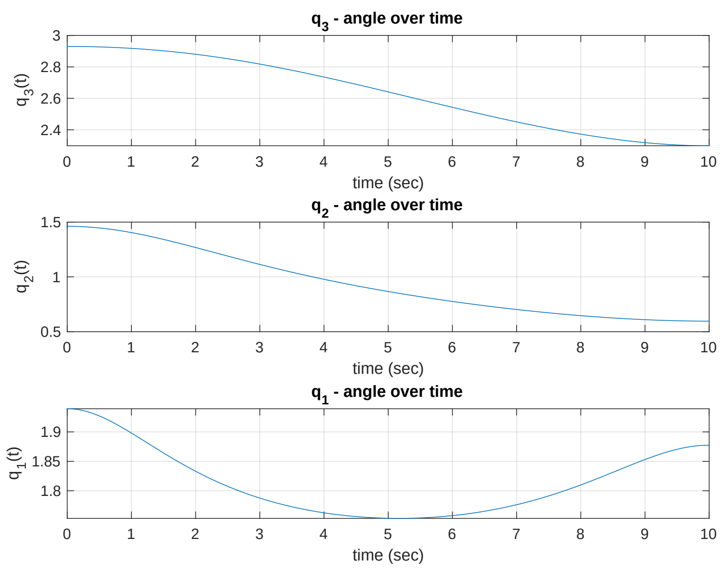

Figure 8: Εξέλιξη των γωνιών των αρθρώσεων στη διάρκεια των 10 sec

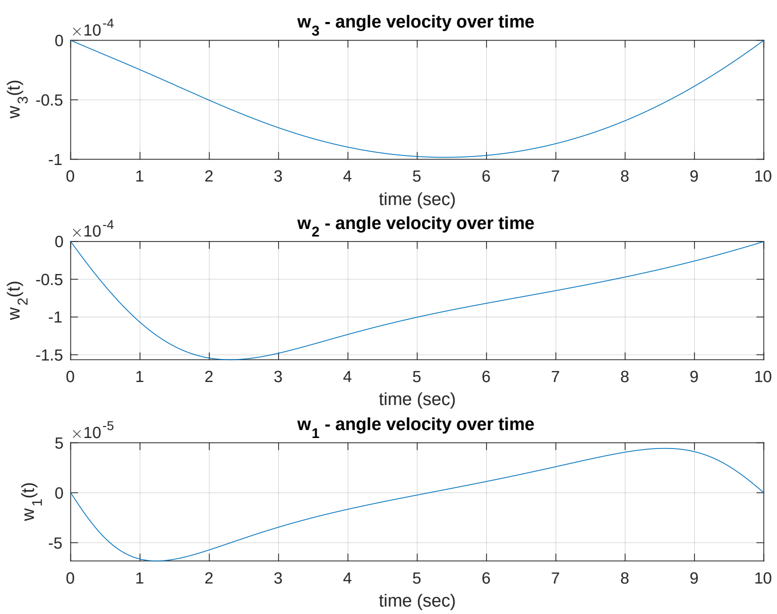

Figure 9: Εξέλιξη των γωνιακών ταχυτήτων στη διάρκεια των 10 sec

2.2.3 Παρουσίαση Κίνησης - Animation

Εν τέλει, παρουσιάζουμε το διάγραμμα κίνησης που εικονίζει μια χρονική ακολουθία ενδιάμεσων διατάξεων της ρομποτικής κινηματικής αλυσίδας κατά την εκτέλεση της εργασίας (από το animation της κίνησης).

Δηλαδή, απεκονίζουμε σε κοινό διάγραμμα διαδοχικές φάσεις στις οποίες βρίσκεται ο ρομποτικός χειριστής κατά τη διάρκεια της κίνησης $A \longrightarrow B$.

Στα διαγράμματα, τα μαύρα ευθύγραμμα τμήματα συμβολίζουν τους συνδέσμους. Οι αρθρώσεις - οι οποίες βρίσκονται στα "σπασίματα" των τμημάτων - επισημειώνονται με κυκλάκι ή τετραγωνάκι, ενώ ο end-effector σημειώνεται με x. Η τροχιά του end-effector έχει σχηματιστεί με έντονο πράσινο χρώμα.

Γίνεται εμφανές πως η τροχιά βρίσκεται στο επίπεδο $z = h = 5$. Παραθέτουμε το ίδιο διάγραμμα από τρεις οπτικές γωνίες για να γίνουν σαφή τα συμπεράσματά μας.

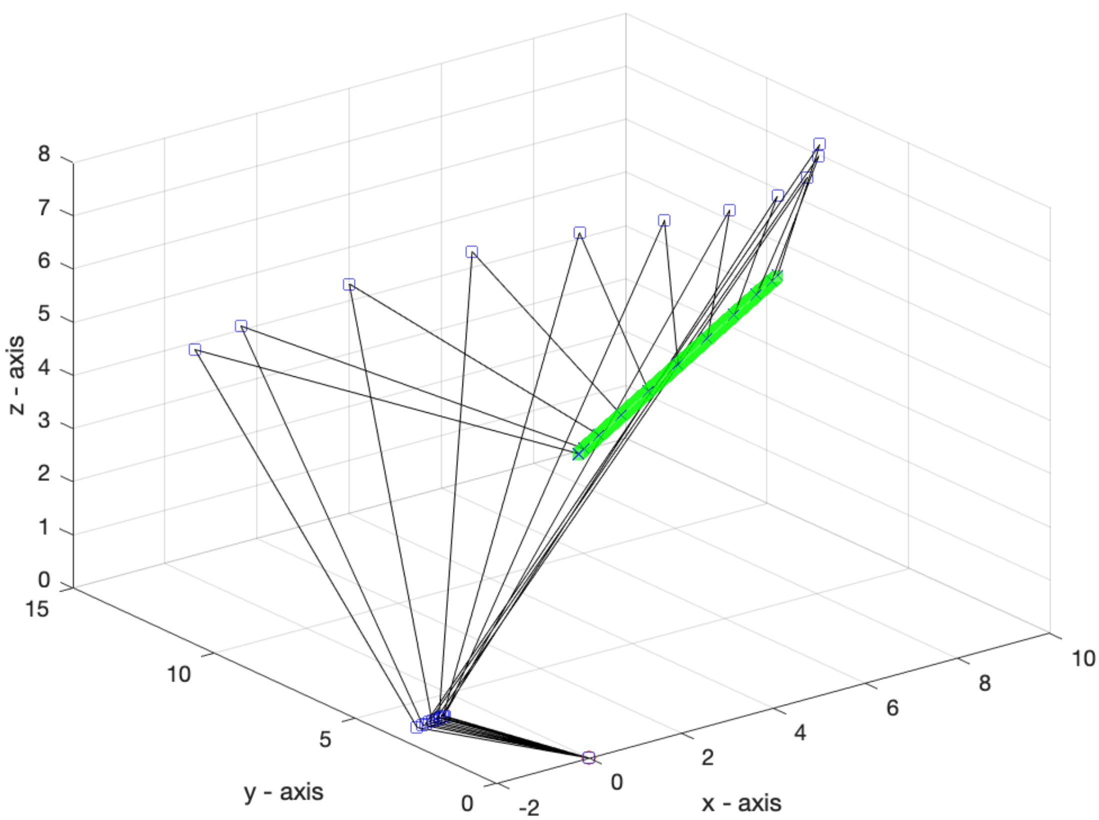

Figure 10: Γενική εικόνα κίνησης στα 10 sec

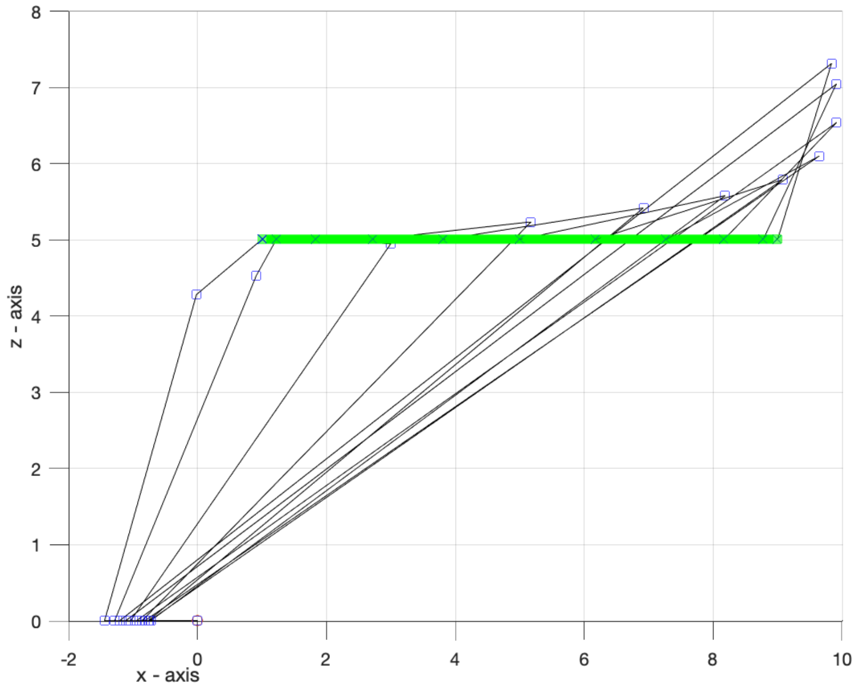

Figure 11: Κάτοψη επιπέδου xz

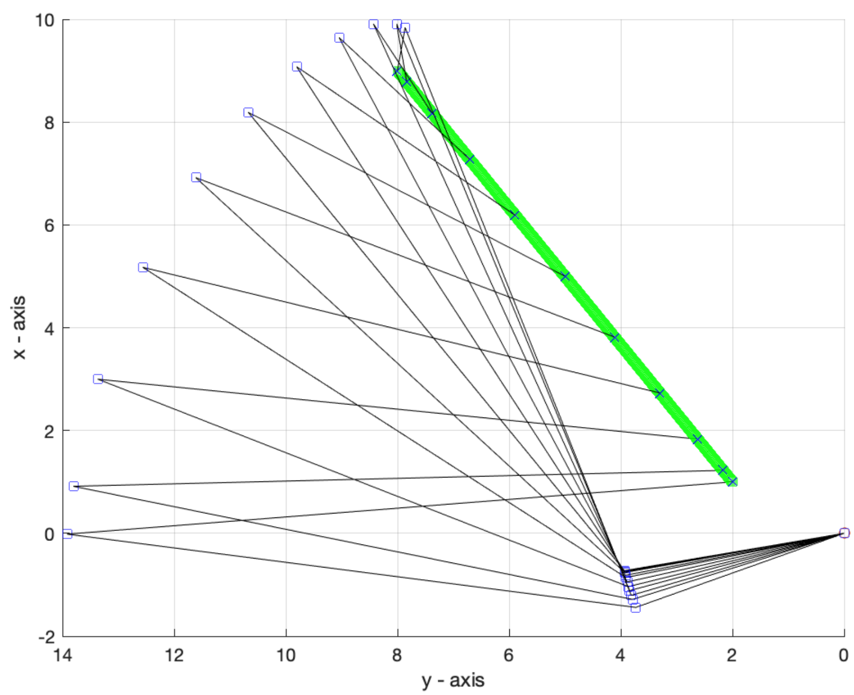

Figure 12: Κάτοψη επιπέδου xy

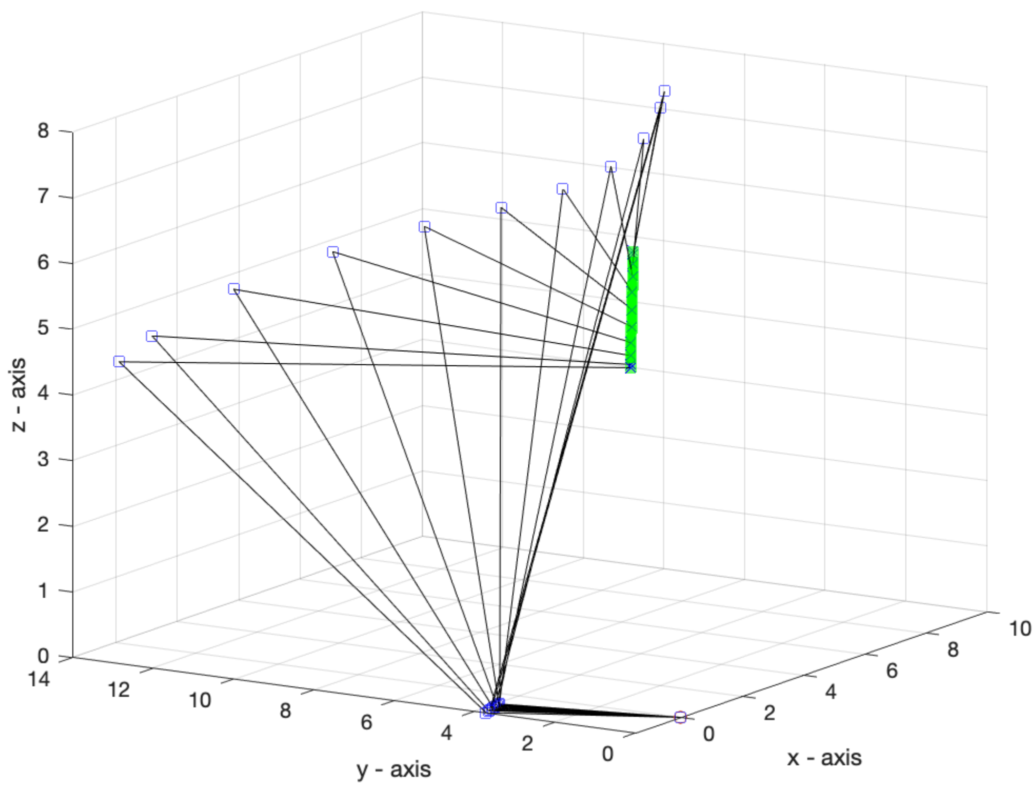

Figure 13: Μια ελάχιστα διαφορετική οπτική

3 Κώδικας Matlab Κινηματικής Προσομοίωσης

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παραθέτουμε τον κώδικα με τον οποίο υλοποιήσαμε την κινηματική προσομοίωση και παραγάγαμε τις επιθυμητές γραφικές παραστάσεις.

```
%% Robotics I: Analysis - Control - Laboratory
% Semester 7 - Flow S

% Semester Project: Robotic Manipulator with 3 Rotational DOF
% Dimitris Dimos [031 17 165]


% Project Part B: Kinematic Simulation


%% function to simulate motion
% input: P_A (starting point), P_B (end point), T (motion duration)
function simulate (P_A, P_B, T)

close all;  % close all currently opened figures

% translate input - trajectory end point coordinates
[x_A, y_A, z_A] = deal(P_A(1), P_A(2), P_A(3));
[x_B, y_B, z_B] = deal(P_B(1), P_B(2), P_B(3));

if z_A ≠ z_B
    disp('Error: Line Points must have same z-coordinate');
    return;
end

% robot links
l_0 = 0.0;
l_1 = 0.0;
l_2 = 4.0;
l_3 = 0.0;
l_4 = 14.0;
l_5 = 16.0;

% sampling period
dt = 0.001;  % 1kHz sampling frequency

% trajectory polynomial coefficients
a0 = x_A;
a = [0, -3*(x_A - x_B)/T.^2, 2*(x_A - x_B)/T.^3];

% time axis definition
t = 0:dt:T;

% trajectory definition - end-effector position
x = a0 + a(1)*t + a(2)*t.^2 + a(3)*t.^3;
y = y_A + (x - x_A)*(y_B - y_A)/(x_B - x_A);
for i = 1:length(x)
    z(i) = z_A;
end

% trajectory definition - end-effector linear velocity
v_x = [0 diff(x)];
v_y = [0 diff(y)];
for i = 1:length(v_x)
    v_z(i) = 0;
end

%% PLOT: x - y linearity
figure(1)
xlabel('x(t)')
plot(x,y)
title('Linear Relationship y(t) - x(t)')
xlabel('x(t)')
ylabel('y = f(x(t))')
```

```
grid on

%% PLOT: desired position coordinates
figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,x)
title('x - coordinate over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('x(t)')
grid on
subplot(3,1,2)
plot(t,y)
title('y - coordinate over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('y(t)')
grid on
subplot(3,1,3)
plot(t,z)
title('z - coordinate over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('z(t)')
grid on

%% PLOT: desired 3D trajectory
figure(3)
plot3(x,y,z)
xlim([x_A-1, x_B+1])
ylim([y_A-1, y_B+1])
zlim([z_A-1, z_B+1])
hold on
plot3(x_A,y_A,z_A,'O')
plot3(x_B,y_B,z_B,'O')
xlabel('x(t)')
ylabel('y(t)')
zlabel('z(t)')
grid on

%% PLOT: desired velocity components
figure(4)
subplot(3,1,1)
plot(t,v_x)
title('v_x - component over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('v_x(t)')
grid on
subplot(3,1,2)
plot(t,v_y)
title('v_y - component over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('v_y(t)')
grid on
subplot(3,1,3)
plot(t,v_z)
title('v_z - component over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('v_z(t)')
grid on

%% INVERSE KINEMATIC MODEL
nom_3 = (x(:) - l_1).^2 + y(:).^2 + (z(:) + l_0).^2 - l_2.^2 - l_4.^2 - l_5.^2;
den_3 = 2 * l_4 * l_5;
q_3 = acos(nom_3 / den_3);

nom_2 = y(:).*l_5.*sin(q_3) + (l_4 + l_5.*cos(q_3)).*sqrt( (l_4 + l_5.*cos(q_3)).^2 + ...
    (l_5.*sin(q_3) ).^2 - y(:).^2);
den_2 = (l_5 .* sin(q_3)) .^ 2 + (l_4 + l_5 * cos(q_3)).^2;
q_2 = acos(nom_2./den_2);

nom_1 = (l_4.*cos(q_2) + l_5.*cos(q_2 + q_3)).*z(:) + l_2.*sqrt((l_4.*cos(q_2) + ...
    l_5.*cos(q_2+q_3)).^2 + (l_1 + l_2).^2 - z(:).^2);
den_1 = (l_4.*cos(q_2) + l_5.*cos(q_2 + q_3)).^2 + l_2.^2;
```

```
q_1 = acos(nom_1 ./ den_1);

%% PLOT: desired joint angles
figure(5)
subplot(3,1,1)
plot(t,q_3(:))
title('q_3 - angle over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('q_3(t)')
grid on
subplot(3,1,2)
plot(t,q_2(:))
title('q_2 - angle over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('q_2(t)')
grid on
subplot(3,1,3)
plot(t,q_1(:))
title('q_1 - angle over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('q_1(t)')
grid on

%% INVERSE DIFFERENTIAL MODEL

w_1 = [0; diff(q_1)];
w_2 = [0; diff(q_2)];
w_3 = [0; diff(q_3)];

%% PLOT: desired joint angle velocity
figure(6)
subplot(3,1,1)
plot(t,w_3(:))
title('w_3 - angle velocity over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('w_3(t)')
grid on
subplot(3,1,2)
plot(t,w_2(:))
title('w_2 - angle velocity over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('w_2(t)')
grid on
subplot(3,1,3)
plot(t,w_1(:))
title('w_1 - angle velocity over time')
xlabel('time (sec)')
ylabel('w_1(t)')
grid on

%% FORWARD KINEMATIC MODEL

points = length(t);

% joint 1 position
j1_x(1:points) = 0;
j1_y(1:points) = 0;
j1_z(1:points) = 0;

% joint 2 position
j2_x = l_2 .* cos(q_1);
j2_y = l_2 .* sin(q_1);
j2_z(1:points) = 0;

% joint 3 position
j3_x = l_1 + cos(q_1) .* l_2 + l_3 .* sin(q_1) + l_4 .* cos(q_2) .* sin(q_1);
j3_y = l_4 .* sin(q_2);
j3_z = -l_0 + l_2 .* sin(q_1) - l_3 .* cos(q_1) - l_4 .* cos(q_1) .* cos(q_2);
```

```
%% KINEMATIC SIMULATION
figure(7)

plot3(x,y,z, 'gs'); % trajectory
hold on
dt_a = 1000;
plot([0], [0], 'o')    % axis origin

%% animation
for i = 1:dt_a:points
    pause(0.1);     % pause motion

    % joint 1
    plot3([j1_x(i)],[j1_y(i)],[j1_z(i)],'bs');

    % link from joint 1 to joint 2
    plot3([j1_x(i),j2_x(i)],[j1_y(i),j2_y(i)],[j1_z(i),j2_z(i)], 'k');

    % joint 2
    plot3([j2_x(i)],[j2_y(i)],[j2_z(i)],'bs');

    % link from joint 2 to joint 3
    plot3([j2_x(i),j3_x(i)],[j2_y(i),j3_y(i)],[j2_z(i),j3_z(i)], 'k');

    % joint 3
    plot3([j3_x(i)],[j3_y(i)],[j3_z(i)],'bs');

    % link from joint 3 to end-effector
    plot3([j3_x(i),x(i)],[j3_y(i),y(i)],[j3_z(i),z(i)], 'k');

    % end-effector
    plot3([x(i)],[y(i)],[z(i)],'bx');
end

xlabel('x - axis');
ylabel('y - axis');
zlabel('z - axis');
grid on

end
```