# Theoretische Informatik 1

22. Mai 2013

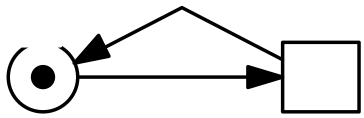
Praktikumsaufgabe 3

Lucas Jenss und Tommy Redel in Gruppe 1

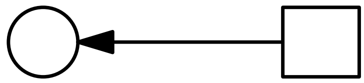
# 1 Eigenschaften von Netzen

## 1.1 Reversibilität - Lebendigkeit

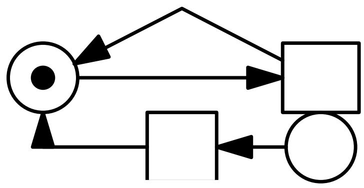
Unabhängig.



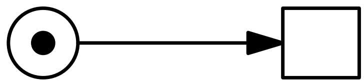
Reversibel + Lebendig



Nicht reversibel + Lebendig



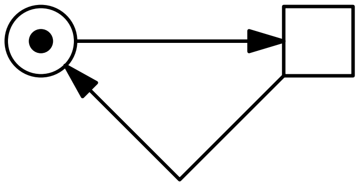
Reversibel + nicht lebendig



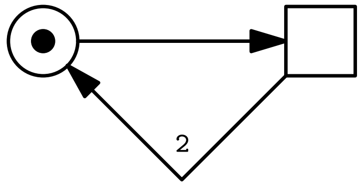
Nicht reversibel + nicht lebendig

## 1.2 Beschränktheit - Lebendigkeit

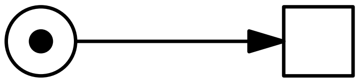
Unabhängig.



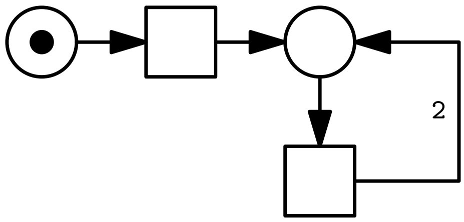
beschrnkt + lebendig




Nicht beschrnkt + lebendig



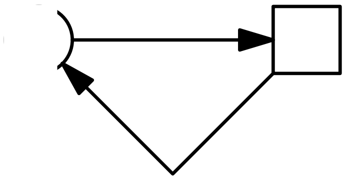
beschrnkt + nicht lebendig



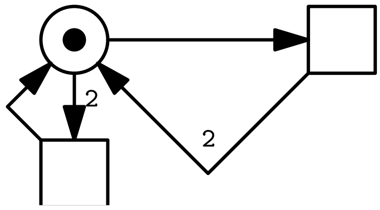

Nicht beschrnkt + nicht lebendig

## 1.3 Beschränktheit - Reversibilität

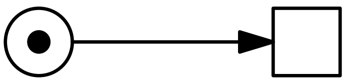
Unabhängig.



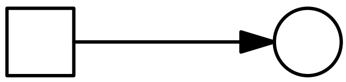
beschraenkt + reversibel




Nicht beschraenkt + reversibel



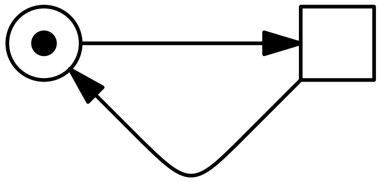
beschraenkt + nicht reversibel



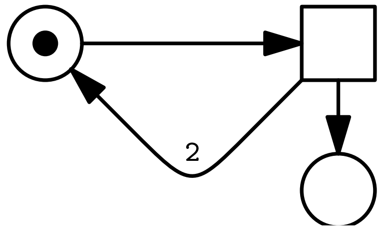
Nicht beschraenkt, nicht reversibel

## 1.4 Stelleninvarianten - Lebendigkeit

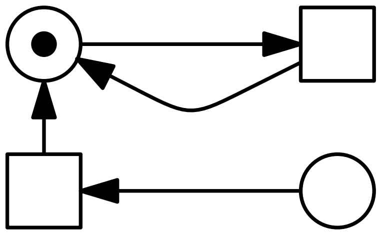
Unabhängig.



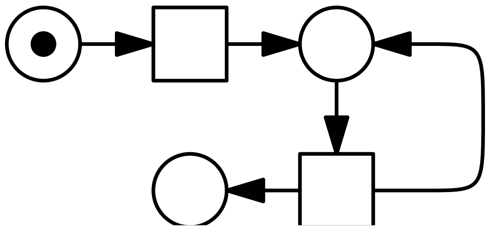
P-Inv + lebendig




keine P-Inv + lebendig



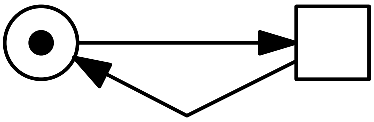
P-Inv + nicht lebendig



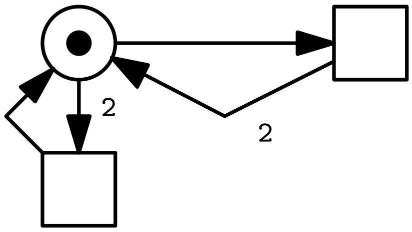
keine P-Inv + nicht lebendig

## 1.5 Stelleninvarianten - Reversibilität

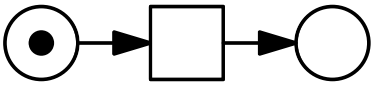
Unabhängig.



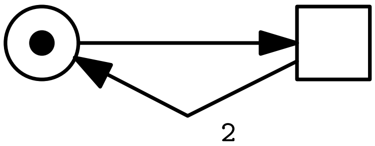
P-Inv + reversibel




keine P-Inv + reversibel



P-Inv + nicht reversibel




keine P-Inv + nicht reversibel

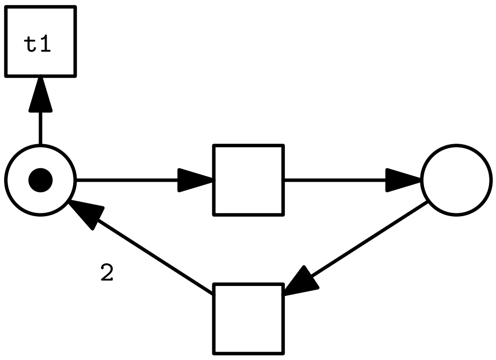
## 1.6 Stelleninvarianten - Beschränktheit

Wenn ein Netz eine echt positive Stelleninvariante hat, d.h. $I^T$, als homogenes Gleichungssystem gelöst, eine Lösung hat, dann muss das Netz beschränkt sein, denn dann bleibt die nach der Invariante gewichtete Tokensumme immer gleich. Demnach gilt $\text{Stelleninvariante} \implies \text{Beschraenktheit}$.

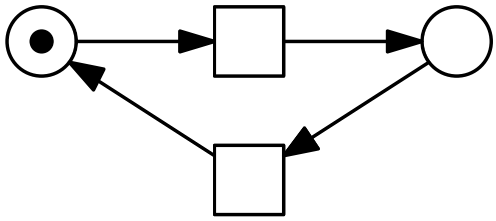
## 1.7 Transitionsinvarianten - Lebendigkeit

Eine echt positive Transitionsinvariante und Lebendigkeit sind nur unter Einschränkung verknüpft. Nimmt man eine endliches, beschränktes, lebendiges Netz $N$, dann muss es für dieses Netz auch eine echt positive Transitionsinvariante geben.

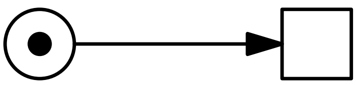
Weitere Zusammenhänge sind nicht erkennbar:



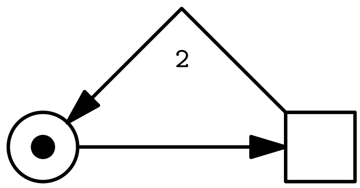

T-Inv, tot



T-Inv, lebendig



keine T-Inv, tot

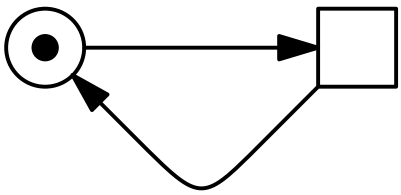



keine T-Inv, lebendig

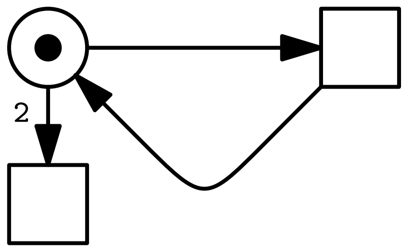
## 1.8 Transitionsinvarianten - Reversibilität

Transitionsinvarianten beschreiben Zyklen im Markierungsgraphen eines Netzes $N = (P, T, W)$, allerdings unabhängig von der Startmarkierung $M_0$ des Netzes. Die Existenz einer echt positiven Transitionsinvariante besagt also, dass eine Markierung $M_0$ existiert, für die es einen endlichen Pfad $M_0 \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$ gibt, sodass $M_0 = M_{n+1}$.

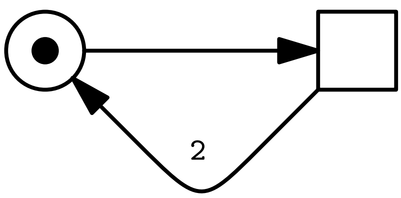
Eine allgemeine Aussage ist allerdings anhand einer echt positiven Transitionsinvariante nicht treffbar. Es gilt zwar, dass ein reversibles Netz auch eine Transitionsinvariante haben muss, allerdings nicht zwingend eine echt positive:



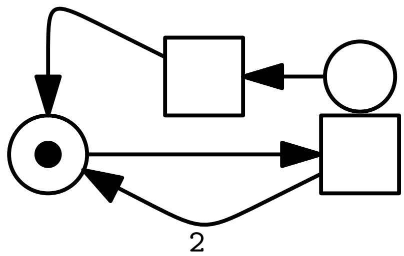
`T-Inv + reversibel`




`keine T-Inv + reversibel`



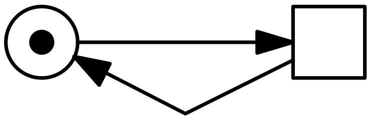

`T-Inv + nicht reversibel`



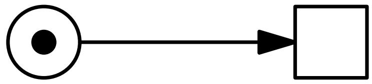

`keine T-Inv + nicht reversibel`

## 1.9 Transitionsinvarianten - Beschränktheit

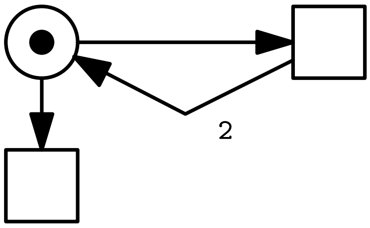
Unabhängig



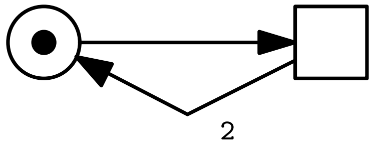
T-Inv + beschraenkt



keine T-Inv + beschraenkt




T-Inv + nicht beschraenkt




keine T-Inv + nicht beschraenkt

## 1.10 Transitionsinvarianten - Stelleninvarianten

Die Transitionsinvarianten eines Netzes $N = (P, T, W)$ sind die Stelleninvarianten des Netzes $N' = (P', T', W')$ gdw. $W = W'$ sowie $T' = P$ und $P' = T$.

## 1.11 Überdeckungsgraph - Lebendigkeit

Es gilt:

$$\left(\forall m \in UG : m \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_n} m : T \setminus \{t_1, \ldots, t_n\} = \emptyset\right) \Longrightarrow \text{Lebendig}$$

Die umgekehrte Annahme gilt nicht, denn im UG ist es nicht möglich, von einer $\omega$-Markierung wieder zurück zur Ursprungsmarkierung zu gelangen.

## 1.12 Überdeckungsgraph - Reversibilität

Es gilt:

$$\left(\forall m \in UG : m \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_n} M_0\right) \Longrightarrow \text{Reversibel}$$

Die umgekehrte Annahme gilt aus dem selben Grund wie für "Überdeckungsgraph - Lebendigkeit" nicht.

## 1.13 Überdecksungsgraph - Beschränktheit

Ein Netz ist genau dann beschränkt, wenn in seinem Überdeckungsgraphen keine $\omega$-Stellen vorkommen.

## 1.14 Überdeckungsgraph - Stelleninvarianten

Wenn es im Überdeckungsgraph keine Markierungen gibt, welche ein $\omega$ enthalten, dann muss das dazugehörige Netz beschränkt sein. Da wir außerdem bereits wissen, dass ein beschränktes Netz auch immer eine echt positive Stelleninvariante hat, gilt:

$(\forall m \in UG : \forall x \in m : m \neq \omega) \Longleftarrow$ echt positive Stelleninvariante

## 1.15 Überdeckungsgraph - Transitionsinvarianten

Zyklen im Überdeckungsgraphen ohne $\omega \Longrightarrow$ in Zyklus genutzte Transitionen bilden T-Invariante

## 1.16 Kondensation des EG und Lebendigkeit

Der Kondensationsgraph eines Erreichbarkeitsgraphen fasst alle stark zusammenhängenden Knoten des Erreichbarkeitsgraphen zu Komponenten zusammen. Die Komponenten selbst sind in sich lebendig.

$|KEG| = 1 \Longrightarrow Lebendig$

## 1.17 Kondensation des EG und Reversibilität

Besteht der KEG aus einer Komponente, ist das Netz reversibel.

$|KEG| = 1 \Longleftrightarrow Reversibel$

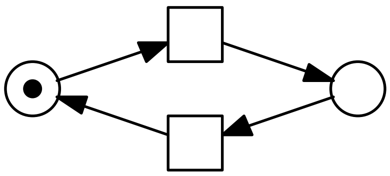
## 1.18 Kondensation des EG und Beschränktheit

Für unbeschränkte Netze, in denen also immer mehr Token entstehen, hat der zugehörige Erreichbarkeitsgraph unendlich viele Knoten. Umgekehrt hat ein beschränktes Netz immer einen endlichen Erreichbarkeitsgraphen. Da sich unendliche Erreichbarkeitsgraphen nicht kondensieren lassen, gilt also folgende Beziehung:

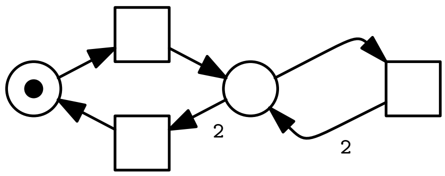
$Unbeschraenkt \Longrightarrow |KnotendesEG| = +\infty \Longrightarrow |KnotendesKG| = +\infty$

## 1.19 Kondensation des EG und Stelleninvarianten

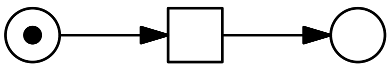
Der Kondensationsgraph und positive Stelleninvarianten stehen in keinem Zusammenhang.



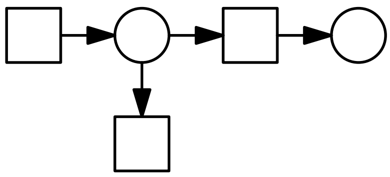
1 Knoten (KG) + S-Invariante




1 Knoten (KG) + keine S-Invariante



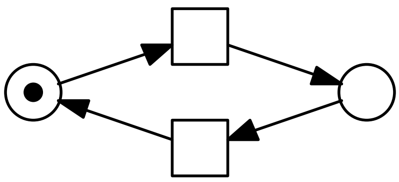
2 Knoten (KG) + S-Invariante



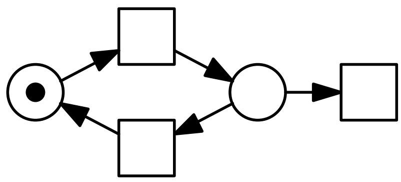
viele Knoten (KG) + keine S-Invariante

## 1.20 Kondensation des EG und Transitionsinvarianten

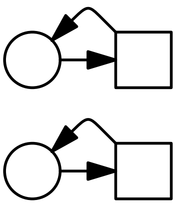
Unabhängig



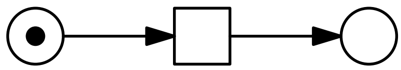
1 Knoten (KG) + T-Invariante



1 Knoten (KG) + keine T-Invariante



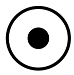
2 Knoten (KG) + T-Invariante



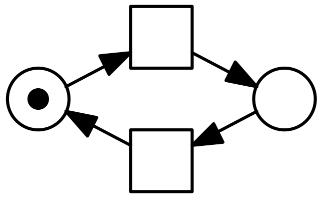
2 Knoten (KG) + keine T-Invariante

## 1.21 Kondensation des EG und Überdeckungsgraph

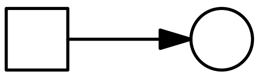
Unabhängig



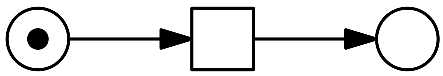
KEG 1 Knoten + UG 1 Knoten



KEG 1 Knoten + UG 2 Knoten



KEG mehrere Knoten + UG 2 Knoten



KEG 2 Knoten + UG 2 Knoten

## 1.22 Verklemmung und Lebendigkeit

$lebendig \Longrightarrow verklemmungsfrei$
$verklemmt \Longrightarrow \neg lebendig$

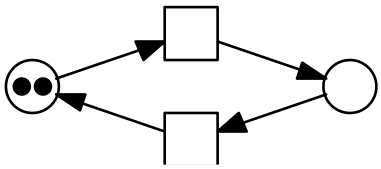
## 1.23 Verklemmung und Reversibilität

Ist ein S/T-Netz reversibel, hat es keine Verklemmungen. Da durch die verklemmte Stelle die Definition der Reversibilität verletzt wäre.

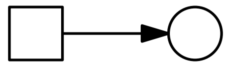
$R \Longrightarrow \neg V$

## 1.24 Verklemmung und Beschränktheit

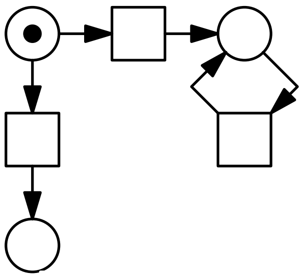
Es besteht kein Zusammenhang.



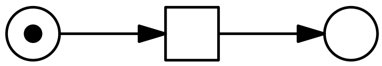
nicht verklemmt + beschraenkt



nicht verklemmt + nicht beschraenkt



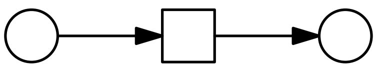
verklemmt + nicht beschraenkt



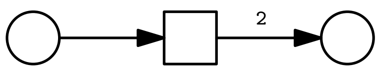
verklemmt + beschraenkt

## 1.25 Verklemmung und Stelleninvarianten

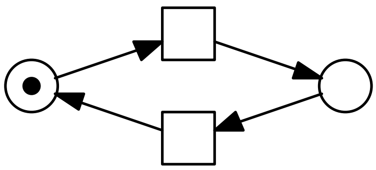
Da sich Verklemmungen immer auf Markierungen stützen, S-Invarianten aber unabhängig von Markierungen sind, besteht hier kein Zusammenhang.



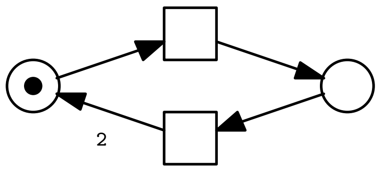
verklemmt + S-Invariante




verklemmt + keine S-Invariante



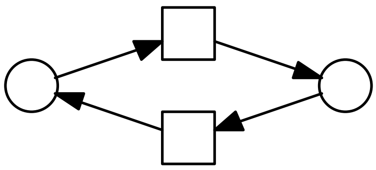
nicht verklemmt + S-Invariante



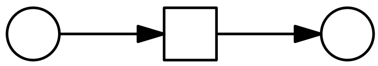

nicht verklemmt + keine S-Invariante

## 1.26 Verklemmung und Transitionsinvarianten

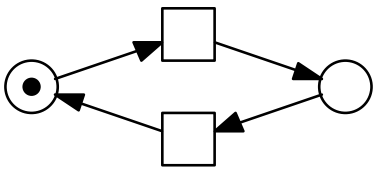
Da sich Verklemmungen immer auf Markierungen stützen, T-Invarianten aber unabhängig von Markierungen sind, besteht hier kein Zusammenhang.



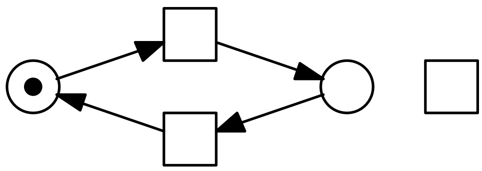
verklemmt + T-Invariante



verklemmt + keine T-Invariante



nicht verklemmt + T-Invariante



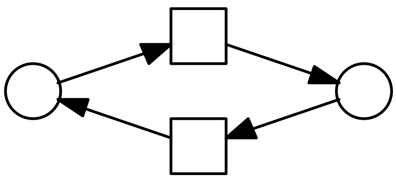
nicht verklemmt + keine T-Invariante

## 1.27 Verklemmung und Überdeckungsgraph

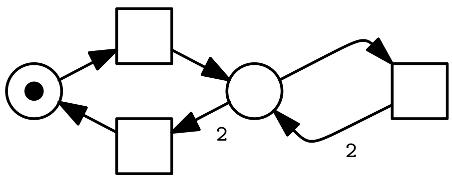
Senken im ÜG $\Longrightarrow$ Verklemmung.

## 1.28 Verklemmung und Kondensation des EG

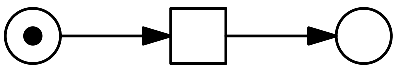
Unabhängig.



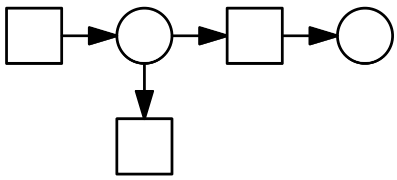
1 Knoten (KG) + verklemmt




1 Knoten (KG) + nicht verklemmt



2 Knoten (KG) + verklemmt



viele Knoten (KG) + nicht verklemmt