

Theoretische Informatik 1

21. Mai 2013

Praktikumsaufgabe 3

Lucas Jenss und Tommy Redel in Gruppe 1

1 Definitionen

1.1 Lebendigkeit

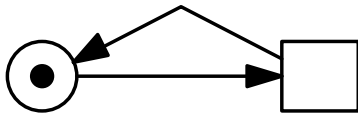
Eine Transition $t \in T$ ist lebendig in N_{M_0} , wenn sie für alle Markierungen $M \in EG$ M-erreichbar ist.

Ein Netz N_{M_0} ist lebendig, wenn alle seine Transitionen lebendig sind.

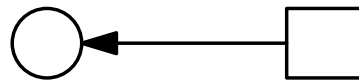
2 Eigenschaften von Netzen

2.1 Reversibilität - Lebendigkeit

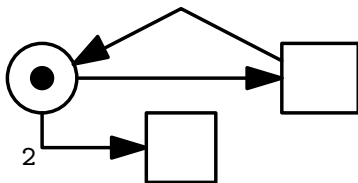
Unabhängig.



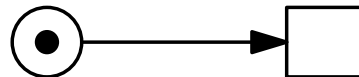
Reversibel + Lebendig



Nicht reversibel + Lebendig



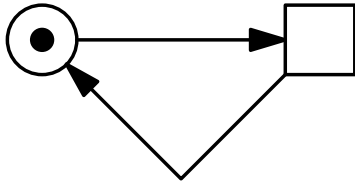
Reversibel + nicht lebendig



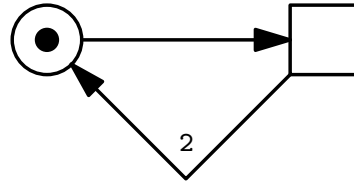
Nicht reversibel + nicht lebendig

2.2 Beschränktheit - Lebendigkeit

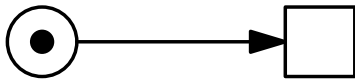
Unabhängig.



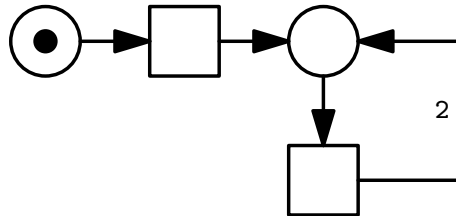
beschrnkt + lebendig



Nicht beschrnkt + lebendig



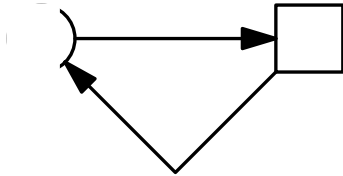
beschrnkt + nicht lebendig



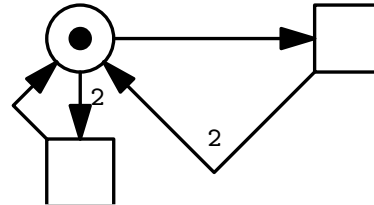
Nicht beschrnkt + nicht lebendig

2.3 Beschränktheit - Reversibilität

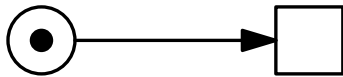
Unabhängig.



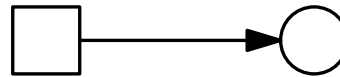
beschraenkt + reversibel



Nicht beschraenkt + reversibel



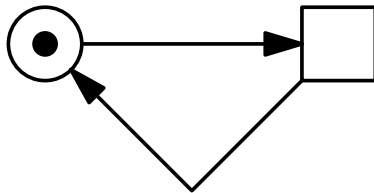
beschraenkt + nicht reversibel



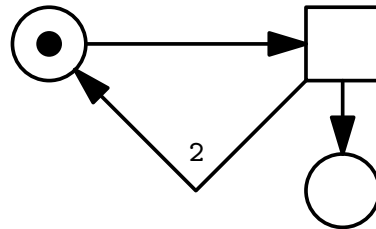
Nicht beschraenkt, nicht reversibel

2.4 Stelleninvarianten - Lebendigkeit

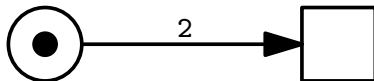
Unabhängig.



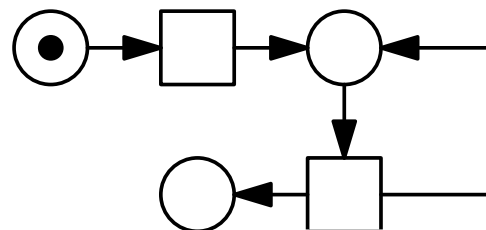
P-Inv + lebendig



keine P-Inv + lebendig



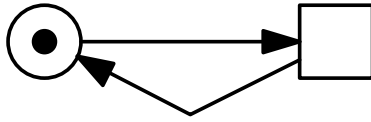
P-Inv + nicht lebendig



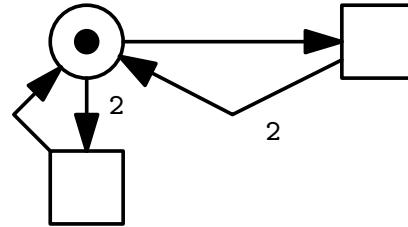
keine P-Inv + nicht lebendig

2.5 Stelleninvarianten - Reversibilität

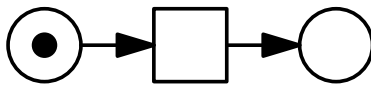
Unabhängig.



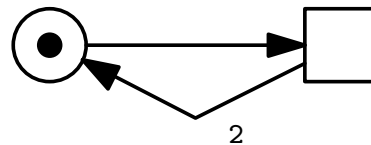
P-Inv + reversibel



keine P-Inv + reversibel



P-Inv + nicht reversibel



keine P-Inv + nicht reversibel

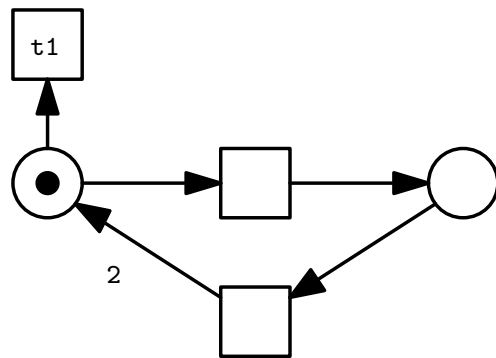
2.6 Stelleninvarianten - Beschränktheit

Wenn ein Netz eine Stelleninvariante hat, d.h. I^T , als homogenes Gleichungssystem gelöst, eine Lösung hat, dann muss das Netz beschränkt sein, denn dann bleibt die nach der Invariante gewichtete Tokensumme immer gleich. Demnach gilt Stelleninvariante \iff Beschränktheit.

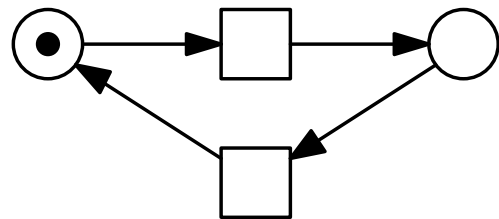
2.7 Transitionsinvarianten - Lebendigkeit

Eine echt positive Transitionsinvariante und Lebendigkeit sind nur unter Einschränkung verknüpft. Nimmt man eine endliches, beschränktes, lebendiges Netz N , dann muss es für dieses Netz auch eine echt positive Transitionsinvariante geben.

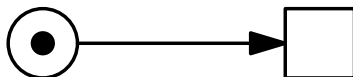
Weitere Zusammenhänge sind nicht erkennbar:



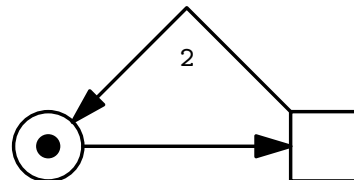
T-Inv, tot



T-Inv, lebendig



keine T-Inv, tot



keine T-Inv, lebendig

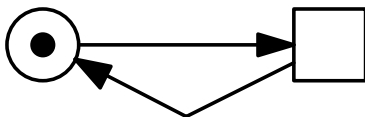
2.8 Transitionsinvarianten - Reversibilität

Transitionsinvarianten beschreiben Zyklen im Erreichbarkeitsgraphen eines Netzes $N = (P, T, W)$, allerdings unabhängig von der Startmarkierung M_0 des Netzes. Die Existenz einer echt positiven Transitionsinvariante besagt also, dass eine Markierung M_0 existiert, für die das Netz reversibel ist, also dass es einen endlichen Pfad $M_0 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$ gibt, sodass $M_0 = M_{n+1}$.

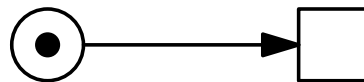
Eine allgemeine Aussage ist allerdings anhand einer echt positiven Transitionsinvariante nicht treffbar. Es gilt zwar, dass ein reversibles Netz auch eine Transitionsinvariante haben muss, allerdings nicht zwingend eine echt positive.

2.9 Transitionsinvarianten - Beschränktheit

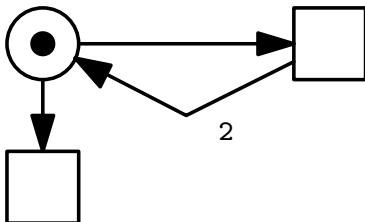
Unabhängig



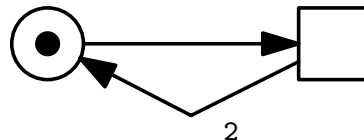
T-Inv + beschränkt



keine T-Inv + beschränkt



T-Inv + nicht beschränkt



keine T-Inv + nicht beschränkt

2.10 Transitionsinvarianten - Stelleninvarianten

Die Transitionsinvarianten eines Netzes $N = (P, T, W)$ sind die Stelleninvarianten des Netzes $N' = (P', T', W')$ gdw. $W = W'$ sowie $T' = P$ und $P' = T$.

2.11 Überdeckungsgraph - Lebendigkeit

Es gilt:

$$\left(\forall m \in UG : m \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} m : T \setminus \{t_1, \dots, t_n\} = \emptyset \right) \implies \text{Lebendig}$$

Die umgekehrte Annahme gilt nicht, denn im UG ist es nicht möglich, von einer ω -Markierung wieder zurück zur Ursprungsmarkierung zu gelangen.

2.12 Überdeckungsgraph - Reversibilität

Es gilt:

$$\left(\forall m \in UG : m \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M_0 \right) \implies \text{Reversibel}$$

Die umgekehrte Annahme gilt aus dem selben Grund wie für "Überdeckungsgraph - Lebendigkeit" nicht.

2.13 Überdeckungsgraph - Stelleninvarianten

Wenn es im Überdeckungsgraph keine Markierungen gibt, welche ein ω enthalten, dann muss das dazugehörige Netz beschränkt sein. Da wir außerdem bereits wissen, dass ein beschränktes Netz auch immer eine Stelleninvariante hat, gilt:

$$(\forall m \in UG : \forall x \in m : m \neq \omega) \iff \text{Stelleninvariante}$$

2.14 Überdeckungsgraph - Beschränktheit

Ein Netz ist genau dann beschränkt, wenn in seinem Überdeckungsgraphen keine ω -Stellen vorkommen.

2.15 Überdeckungsgraph - Transitionsinvarianten

Zyklen im Überdeckungsgraphen ohne $\omega \implies$ in Zyklus genutzte Transitionen haben T-Invariante

2.16 Kondensation des EG und Lebendigkeit

KG fasst alle stark zusammenhängenden Komponenten zusammen. Dafür müssen die Komponenten lebendig sein. Alle Teile einer Komponente des KG sind lebendig.

$$|KEG| = 1 \iff \text{Lebendigkeit}$$

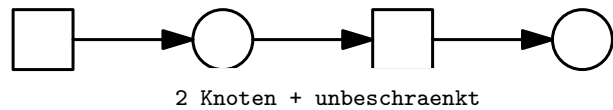
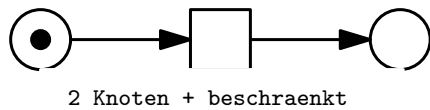
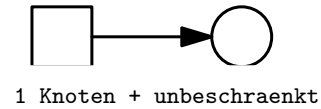
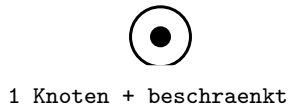
2.17 Kondensation des EG und Reversibilität

Besteht der KEG aus einer Komponente, ist das Netz reversibel.

$$|KG| = 1 \implies \text{Reversibilität}$$

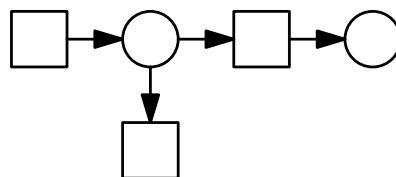
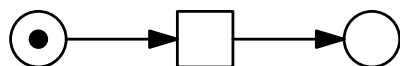
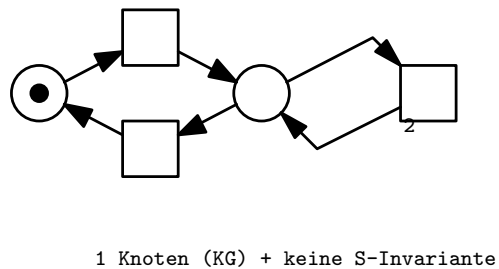
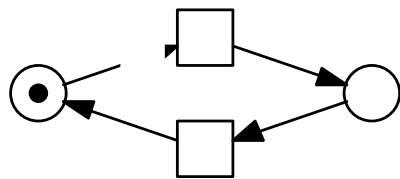
2.18 Kondensation des EG und Beschränktheit

Es besteht kein Zusammenhang zwischen der Größe des Kondensationsgraphen und der Beschränktheit des Netzes.



2.19 Kondensation des EG und Stelleninvarianten

Der Kondensationsgraph und positive Stelleninvarianten stehen in keinem Zusammenhang.



2.20 Kondensation des EG und Transitionsinvarianten

$|KEG| = 1 \implies$ echt positive T-Invariante

2.21 Kondensation des EG und Überdeckungsgraph

Der KEG stellt die stark zusammenhängenden Knoten des Überdeckungsgraphen ab.

2.22 Verklemmung und Lebendigkeit

lebendig \implies verklemmungsfrei

verklemmt $\implies \neg$ lebendig

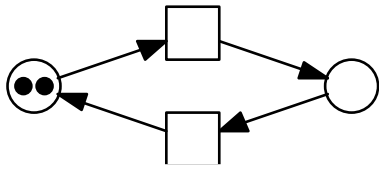
2.23 Verklemmung und Reversibilität

Ist ein S/T-Netz reversibel, hat es keine Verklemmungen. Da durch die verklemmte Stelle die Definition der Reversibilität verletzt wäre.

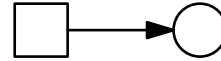
$R \implies \neg V$

2.24 Verklemmung und Beschränktheit

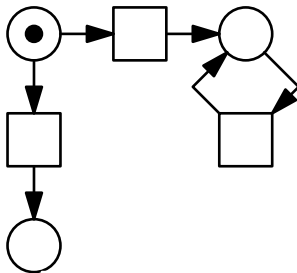
Es besteht kein Zusammenhang.



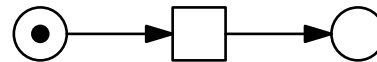
nicht verklemmt + beschränkt



nicht verklemmt + nicht beschränkt



verklemmt + nicht beschränkt



verklemmt + beschränkt

2.25 Verklemmung und Stelleninvarianten

Ist M_0 verklemmt, ist eine P-Invariante vorhanden, in der alle Stellen mit 1 gewichtet sind.

2.26 Verklemmung und Transitionsinvarianten

Echt positive T-Invariante \implies keine Verklemmung.

2.27 Verklemmung und Überdeckungsgraph

\neg Senken im ÜG $\implies \neg$ Verklemmung.

2.28 Verklemmung und Kondensation des EG

$$|KG| = 1 \implies \neg Verklemmung$$