Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

TDK dolgozat címe
ALULAKTUÁLT ŰRBÉLI ROBOT SZABÁLYOZÁSI MÓDSZEREI

Készítette: Gángó Dániel

Témavezető:

Dr. Zelei Ambrus

tudományos munkatárs

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az ipari robotok szabályozástechnikájának uralkodó irányzata a rendszer dinamikáját kompenzáló, lineáris szabályozási módszerek használata. Ennek nagy hátránya, hogy ezek a szabályozási stratégiák nem használják ki a rendszer természetes dinamikája adta lehetőségeket, így veszítenek hatékonyságukból. Az alulaktuált rendszerek vizsgálatakor olyan szabályozók tervezésére törekszünk, amik a rendszer dinamikáját felhasználva gyorsabb, energia-hatékonyabb és robusztusabb szabályozást tesznek lehetővé.

Dolgozatom témája egy űrbéli robot szabályozási módszereinek vizsgálata. A robot egy robottestből és a hozzá kapcsolódó robotkarból épül fel. A robot 3 szabadságfokú, de csak két aktuátorral rendelkezik, ezért alulaktuáltnak tekinthető.

Dolgozatomban két szabályozási módszert alkalmaztam a robot irányírásához. Az egyik módszer az általam már korábban vizsgált, Laplace transzformáción alapuló szabályozó. A szabályozó implementálása során vizsgáltam a rendszer ún. relative degree-it, melynek segítségével leírható a szabályozó jel kimeneten való megjelenése.

A második szabályozási módszer a Wen-Bayard szabályozó algoritmuson alapszik. Ez a szabályozó azonban önmagában nem alkalmazható alulaktuált rendszerek irányítására. A perdületmegmaradást felírva kiegészítettem a szabályozót oly módon, hogy így már alkalmazható legyen az űrbéli robot szabályozására.

2. fejezet

A szabályozási módszerek bemutatása

2.1. Analitikus megoldás Laplace transzformációval

A szabályozó bemutatása néhány módosítással [2] forrásból került átvételre.

Tegyük fel, hogy egy n szabadságfokú rendszer mozgásegyenlete lineáris az általános koordináták $\boldsymbol{q}(t)$ vektorára , és annak első és második idő szerinti deriváltjaira, $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$-re és $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$-re nézve. Ekkor a mozgásegyenlet felírható

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer tömegmátrixa, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer csillapításait tartalmazó mátrix, $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer merevségi mátrixa, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n}$ a rendszerre ható gravitációs erők vektora, $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a rendszer bemeneti mátrixa, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m}$ a rendszerre ható bemenetek vektora. Írjuk elő, hogy a rendszer aktuátorainak száma legyen kevesebb a szabadságfokok számánál ($m < n$), ezáltal a rendszer alulaktuálttá válik.

A rendszer mozgásának előírásához vezessünk be egy ún. szervo-kényszert:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, t) - \boldsymbol{y}_d(t) = 0, \tag{2.2}$$

ahol $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, t) \in \mathbb{R}^{m}$ egy tetszőleges függvény, $\boldsymbol{y}_d(\boldsymbol{q}, t) \in \mathbb{R}^{m}$ pedig $\boldsymbol{f}$ előírt értéke. Ahhoz, hogy a Laplace transzformációt alkalmazhassuk, írjuk fel (2.2) szervo-kényszert egy köttebb, lineáris alakban:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{y}_d(t) = \boldsymbol{0} \tag{2.3}$$

alakban.

Ezek után állítsuk elő (2.1) és (2.3) egyenletek Laplace-transzformáltját :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{B}s + \boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}(s) - \dot{\boldsymbol{q}}_0 - s\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{G} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(s), \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(s) + \boldsymbol{Y}_d(s) &= \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol $\boldsymbol{Q}(s)$ az általános koordináták, $\boldsymbol{U}(s)$ a beavatkozó erők, $\boldsymbol{Y}_d(s)$ az előírt pálya Laplace-transzformáltja, $\boldsymbol{q}$ és $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ a rendszer általános koordinátáinak és azok deriváltjának a $t = 0$

időpillanatban vett kezdeti értékei. Az így kapott lineáris egyenletrendszert

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{B}s + \boldsymbol{K}) & -\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}(s) \\ \boldsymbol{U}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_0 + s\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{Y}_d(s) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

hipermátrixos alakba rendezve, amennyiben a hipermátrix invertálható, megoldást kapunk $\boldsymbol{Q}(s)$-ra és $\boldsymbol{U}(s)$-ra. A megoldások inverz Laplace transzformációját elvégezve megkapjuk a rendszer által leírt $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{y}_d(t)$ pályát, és a pálya követéséhez szükséges $\boldsymbol{u}(t)$ beavatkozó erőt. A kapott $\boldsymbol{u}$ beavatkozó erő azonban csak akkor tartja az előírt $\boldsymbol{y}_d$ pályán a rendszert, ha a rendszer kezdeti $\boldsymbol{q}_0$ állapota és annak $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ deriváltja rendre megegyezik $\boldsymbol{y}_d$ és $\dot{\boldsymbol{y}}_d$ $t = 0$ időpontban vett értékével.

Ahhoz, hogy a rendszer tetszőleges kezdeti értékekkel is az előírt pályát kövesse, ki kell egészítenünk egy PD szabályozóval. Ehhez elő kell állítanunk a rendszer pályakövetési hibáját:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}_d - \boldsymbol{q}, \tag{2.6}$$

és annak idő szerinti deriváltját:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{y}}_d - \dot{\boldsymbol{q}}, \tag{2.7}$$

melyekből kiszámíthatjuk a rendszerre beavatkozó erőinek új vektorát az alábbi módon:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}}(t). \tag{2.8}$$

Megfelelően megválasztott

$$\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}\{(p_i)\},\ p_i > 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}\{(d_i)\},\ d_i > 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{2.10}$$

mátrixokkal a rendszer véges időn belül beáll az előírt $\boldsymbol{y}_d$ pályára.

Könnyen látható, hogy (2.8) egyenlet két részből épül fel. Az $\boldsymbol{u}(t)$ tag, ami a pályán való haladást biztosítja, valójában egy referenciajel, a $\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ tagok pedig a hibák korrigálásáért felelnek.

2.2. Wen-Bayard szabályozó

Az itt bemutatott szabályozó [5, 2] eredetileg nem alulaktuált rendszerek irányítására lett kifejlesztve, de ahogy később REF-ben láthatjuk, kiegészíthető úgy, hogy bizonyos alulaktuált rendszerekhez is alkalmazható legyen.

A szabályozó alapgondolata, hogy az előírt $\boldsymbol{y}_d = \boldsymbol{q}_d$ pályát a mozgásegyenletbe behelyettesítve állítjuk elő a beavatkozó erők alapjelét,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}_d)\ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{q}}_d, \boldsymbol{q}_d)\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}). \tag{2.11}$$

(2.8) egyenlethez hasonlóan,

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}, \tag{2.12}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{q}}_d - \dot{\boldsymbol{q}} \tag{2.13}$$

hibavektorokat bevezetve (2.11) is kiegészíthető egy korrigáló PD szabályozóval,

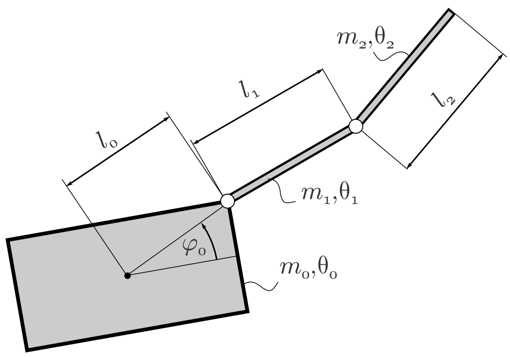
$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}_d)\ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{q}}_d, \boldsymbol{q}_d)\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}}(t). \tag{2.14}$$

Fontos megjegyezni, hogy alulaktuált rendszereknél m beavatkozó esetén m kényszer írható elő, ami kevesebb, mint a $\boldsymbol{q}$ vektor n dimenziója. Következésképp alulaktuált rendszerek szabályozására (2.14) önmagában nem alkalmazható.

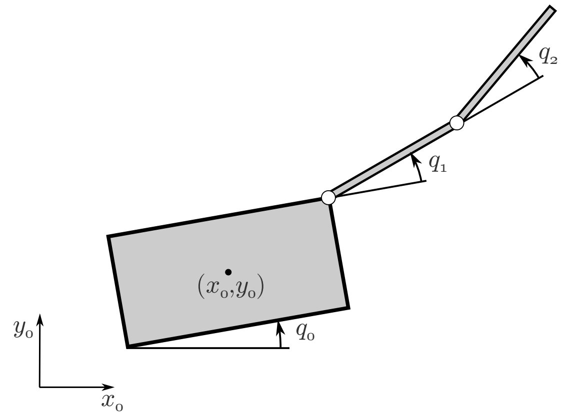
3. fejezet

Az űrbéli robot mozgásegyenletének felírása

Az űrbéli robot 2 dimenziós modellje egy robottestből és a hozzá kapcsolódó robotkarból épül fel (3.1 ábra). A robot két aktuátorral rendelkezik, melyek a robotkaron találhatók. A robot 3 rotációs szabadsági fokkal (mindhárom rész elfordulása), és 2 transzlációs szabadsági fokkal (a robot x - y síkbeli pozíciója) rendelkezik (3.2 ábra) . A 3.1 ábrán jelölt fizikai mennyiségek numerikus értékeit a 3.1 táblázat tartalmazza.



3.1. ábra. Az űrbéli robot felépítése



3.2. ábra. A robot mozgását leíró általános koordináták

jelölés	érték
φ_0	$30\,°$
m_0	$40\,\mathrm{kg}$
m_1	$4\,\mathrm{kg}$
m_2	$3\,\mathrm{kg}$
θ_0	$6,667\,\mathrm{kgm}^2$
θ_1	$0,333\,\mathrm{kgm}^2$
θ_2	$0,25\,\mathrm{kgm}^2$
l_0	$1\,\mathrm{m}$
l_1	$1\,\mathrm{m}$
l_2	$1\,\mathrm{m}$

3.1. táblázat. A robotra jellemző fizikai mennyiségek

Mivel a rendszer nem tartalmaz disszipatív elemeket, illetve nem hatnak rá külső erők, felírható rá a lendületmegmaradás tétele. Ennek következtében a két transzlációs szabadsági fok elhanyagolható, hiszen lendületmegmaradás értelmében a rendszer közös súlypontja nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Tehát ha a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgáljuk a rendszert, a szabadsági fokok száma 3-ra redukálódik. Így a robot mozgása leírható a három rész elfordulását jellemző szögkoordinátával (3.2 ábra),

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

A mozgási egyenlet felírásához a másodfajú Lagrange egyenletet használjuk,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = Q_j,\; j = 1...n, \tag{3.1}$$

ahol $\mathcal{T}$ a rendszer összes mozgási energiája, $\mathcal{D}$ a disszipatív potenciál, $\mathcal{U}$ a rendszer potenciális energiája. Q_j jelöli a rendszerre ható általános erőket, q_j pedig az n szabadságfokú rendszer j. általános koordinátáját. Az űrbáli robot esetében a disszipatív potenciál és a potenciális energia is azonosan nulla.

A rendszer összes mozgási energiája

$$T = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 + \frac{1}{2}\theta_i \omega_i^2, \tag{3.2}$$

ahol m_i a robot egyes részeinek tömege, $\boldsymbol{v}_i$ a sebességvektora, θ_i a tehetetlenségi nyomatéka és ω_i a szögsebessége.

Az egyes részek szögsebességei a következőképpen írhatók fel:

$$\omega_0 = \dot{q}_0, \tag{3.3}$$

$$\omega_1 = \dot{q}_0 + \dot{q}_1, \tag{3.4}$$

$$\omega_2 = \dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2. \tag{3.5}$$

A sebességvektorok előállításához először fel kell írnunk az egyes részek súlypontjába mutató helyvektorokat, melyek a következők:

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

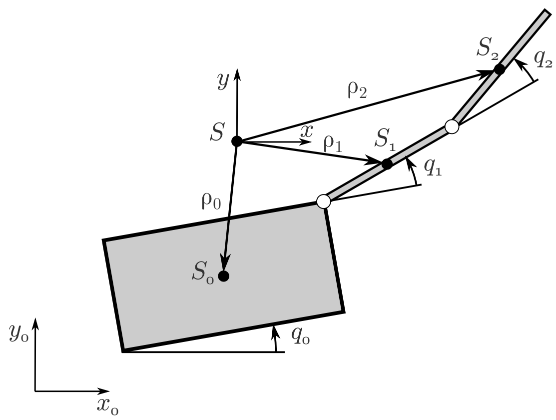
$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x_0 + l_0\cos(\varphi_0 + q_0) + \frac{l_1}{2}\cos(q_0 + q_1) \\ y_0 + l_0\sin(\varphi_0 + q_0) + \frac{l_1}{2}\sin(q_0 + q_1) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x_0 + l_0\cos(\varphi_0 + q_0) + l_1\cos(q_0 + q_1) + \frac{l_2}{2}\cos(q_0 + q_1 + q_2) \\ y_0 + l_0\sin(\varphi_0 + q_0) + l_1\sin(q_0 + q_1) + \frac{l_2}{2}\sin(q_0 + q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

A különálló részek súlypontjába mutató helyvektorokból kiszámítható a rendszer közös súlypontja

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}. \tag{3.9}$$

Ahhoz, hogy a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgáljuk a rendszert, fel kell írnunk a közös súlypontból az egyes részek súlypontjaiba mutató helyvektorokat a 3.3 ábrának megfelelően.



3.3. ábra. Az egyes részek súlypontjai és a közös súlypont

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_S =$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{2l_0(m_1+m_2)\cos(\varphi_0+q_0)+l_1(m_1+2m_2)\cos(q_0+q_1)+l_2m_2\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ -\frac{2l_0(m_1+m_2)\sin(\varphi_0+q_0)+l_1(m_1+2m_2)\sin(q_0+q_1)+l_2m_2\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_S =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{2l_0m_0\cos(\varphi_0+q_0)+l_1(m_0-m_2)\cos(q_0+q_1)-l_2m_2\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ \frac{2l_0m_0\sin(\varphi_0+q_0)+l_1(m_0-m_2)\sin(q_0+q_1)-l_2m_2\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_S = \left[\begin{array}{c} \frac{2l_0 m_0 \cos(\varphi_0+q_0)+l_1(2m_0+m_1)\cos(q_0+q_1)+l_2(m_0+m_1)\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ \frac{2l_0 m_0 \sin(\varphi_0+q_0)+l_1(2m_0+m_1)\sin(q_0+q_1)+l_2(m_0+m_1)\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{array}\right]. \tag{3.12}$$

Látható, hogy ezekben a vektorokban már nem szerepelnek az x_0 és y_0 koordináták, tehát a rendszer valóban 3 szabadságfokúra egyszerűsödött.

A sebességvektorok előállításához vegyük a fent kiszámított helyvektorok idő szerinti deriváltját:

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{d\boldsymbol{\rho}_0}{dt} = \left[\begin{array}{c} -\frac{-2l_0(m_1+m_2)\dot{q}_0 \sin(\varphi_0+q_0)-l_1(m_1+2m_2)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\sin(q_0+q_1)-l_2 m_2(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ -\frac{2l_0(m_1+m_2)\dot{q}_0 \cos(\varphi_0+q_0)+l_1(m_1+2m_2)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\cos(q_0+q_1)+l_2 m_2(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{array}\right], \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d\boldsymbol{\rho}_1}{dt} = \left[\begin{array}{c} \frac{-2l_0 m_0 \dot{q}_0 \sin(\varphi_0+q_0)-l_1(m_0-m_2)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\sin(q_0+q_1)+l_2 m_2(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ \frac{2l_0 m_0 \dot{q}_0 \cos(\varphi_0+q_0)+l_1(m_0-m_2)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\cos(q_0+q_1)-l_2 m_2(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{array}\right], \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{d\boldsymbol{\rho}_2}{dt} = \left[\begin{array}{c} \frac{-2l_0 m_0 \dot{q}_0 \sin(\varphi_0+q_0)-l_1(2m_0+m_1)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\sin(q_0+q_1)-l_2(m_0+m_1)(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ \frac{2l_0 m_0 \dot{q}_0 \cos(\varphi_0+q_0)+l_1(2m_0+m_1)(\dot{q}_0+\dot{q}_1)\cos(q_0+q_1)+l_2(m_0+m_1)(\dot{q}_0+\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)} \end{array}\right]. \tag{3.15}$$

Ezek után a másodfajú Lagrange egyenlet (3.1) segítségével felírhatjuk a rendszer mozgásegyenletét, ami a következő alakban írható fel:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}, \tag{3.16}$$

ahol $\boldsymbol{M}$ a rendszer tömegmátrixa, $\boldsymbol{C}$ a centripetális és Coriolis erőket tartalmazó vektor,

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3.17}$$

a rendszer bemeneti mátrixa,

$$\boldsymbol{u} = \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] \tag{3.18}$$

pedig a bemeneti nyomatékok vektora. Terjedelmük miatt az $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{C}$ mátrixok az F.1 függelékben találhatók.

4. fejezet

A rendszer relatív fokai

4.1. Definíció

Az ún. relatív fok (relative degree) fontos szerepet játszik a nemlineáris rendszerek szabályozásában. Használatával leírhatjuk a bemenetek és kimenetek közt fellépő kapcsolatot. [1, 3]

A relatív fok definiálásához vegyünk egy általános egy bemenetű, egy kimenetű (SISO) rendszert:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u, \tag{4.1}$$

ahol $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ a rendszer állapotvektora. A rendszer kimenete pedig legyen

$$y = h(\boldsymbol{x}). \tag{4.2}$$

Ha a rendszer kimenetét r-szer differenciáljuk az idő szerint addig, amíg az u bemenet explicit módon meg nem jelenik a kifejezésben, akkor r a rendszer bemenete és kimenete közti relatív fok. Behelyettesítve (4.1) egyenletet, (4.2) idő szerinti deriváltja a következő:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u. \tag{4.3}$$

A jelölések egyszerűsítésének érdekében vezessük be az ún. Lie-derivált fogalmát:

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = L_f h. \tag{4.4}$$

A következőkben számítsuk ki a kimenet idő szerinti deriváltjait, és vezessük be a k indexet, melynek szerepét később a definícióban láthatjuk [3]:

- a kimenet (nulladik derivált)

$$y = h(\boldsymbol{x}) \tag{4.5}$$

- első derivált,$k = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u) = L_f h + L_g h \cdot u \tag{4.6}$$

  Feltételezzük, hogy $L_g h = 0$, így $\dot{y} = L_f h$.

- második derivált,$k = 1$

$$\frac{d^2y}{dt^2} == \frac{\partial (L_f h)}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u) = L_f^2 h + L_g L_f h \cdot u \tag{4.7}$$

  Feltételezzük, hogy $L_g L_f h = 0$, így $\ddot{y} = L_f^2 h$.

- harmadik derivált,$k = 2$

$$\frac{d^3y}{dt^3} == \frac{\partial (L_f^2 h)}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u) = L_f^3 h + L_g L_f^2 h \cdot u \tag{4.8}$$

  Ha $L_g L_f^2 h \neq 0$, a rendszer relatív foka $r = 3$. Ellenkező esetben addig folytatjuk a differenciálást, amíg az $L_g L_f^k h \neq 0$ feltétel nem teljesül.

A relatív fok általános definíciója tehát a következő [3]:

Egy nemlineáris, egy bemenetű, egy kimenetű (SISO) rendszer

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ y &= h(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

relatív foka r az $\boldsymbol{x}^0$ pontban, ha

1. $L_g L_f^k h(\boldsymbol{x}) = 0$ minden $\boldsymbol{x}$-re az $\boldsymbol{x}^0$ pont környezetében minden k-ra úgy, hogy $k < r - 1$.
2. $L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$.

Fontos megjegyezni, hogy a relatív fok értelmezhető több bemenetű, több kimenetű (MIMO) rendszerekre is. Ekkor a relatív fokokat páronként, az összes lehetséges bemenet-kimenet kombinációra számítjuk [3].

4.2. Az űrbéli robot relatív fokai

Az űrbéli robot több bemenetű, több kimenetű (MIMO) rendszer, ezért relatív fokai bemenet-kimenet páronként definiálhatók. A robot két bemenete a karon található két aktuátor, kimenete pedig a robotkar végpontjának pozíciója, mely szintén két kimenetet (a végpont x és y koordinátája) jelent. Így tehát összesen 4 különböző, $r_{u_1,x}$, $r_{u_1,y}$, $r_{u_2,x}$, $r_{u_2,y}$ relatív fokokat definiálhatunk az űrbéli robot esetén.

Az űrbéli robot esetében a állapotváltozók vektora $\boldsymbol{x} = [q_0,\, q_1,\, q_2,\, \dot{q}_0,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2]^{\mathrm{T}}$, melynek deriváltja $\dot{\boldsymbol{x}} = [\dot{q}_0,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \ddot{q}_0,\, \ddot{q}_1,\, \ddot{q}_2]^{\mathrm{T}}$. Mivel a szögsebesség értékek állapotváltozók is egyben, a 4.1 alakú felíráshoz a szöggyorsulásokat kell kifejeznünk a szögekkel és szögsebességekkel. Ezt a (3.16) mozgásegyenlet segítségével tehetjük meg az alábbi módon:

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{C}). \tag{4.9}$$

4.2.1. Az u_1 bemenet relatív fokai

A (4.1) egyenlet ez esetben

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u_1. \tag{4.10}$$

Az $\dot{\boldsymbol{x}}$ vektor kifejezéséből u_1 együtthatóinak kigyűjtése után az $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ és $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ vektorok könnyedén meghatározóak, azonban terjedelmi okok miatt itt nem közöljük őket.

4.2.1.1. A robotkar végpontjának x koordinátájára nézve

Legyen a rendszer kimenete a robotkar végpontjának x koordinátája a robot súlypontjához rögzített koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}) = &\frac{2l_0m_0\cos(\varphi_0+q_0) + l_1(2m_0+m_1)\cos(q_0+q_1)}{2(m_0+m_1+m_2)} \\ &+ \frac{l_2(2m_0+2m_1+m_2)\cos(q_0+q_1+q_2)}{2(m_0+m_1+m_2)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Most számítsuk ki a relatív fok meghatározásához szükséges Lie-deriváltakat.

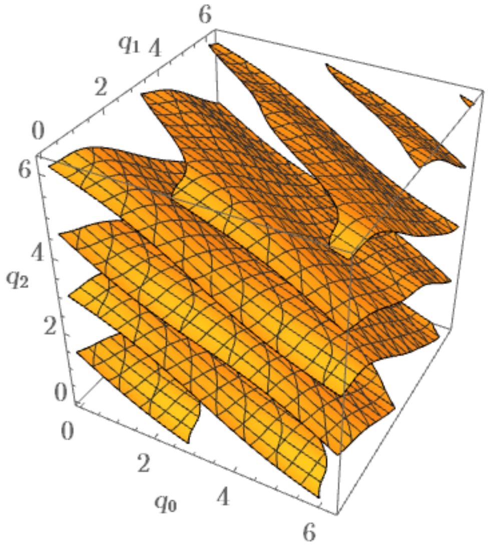
- $k = 0$

$$L_g h = 0 \tag{4.12}$$

- $k = 1$

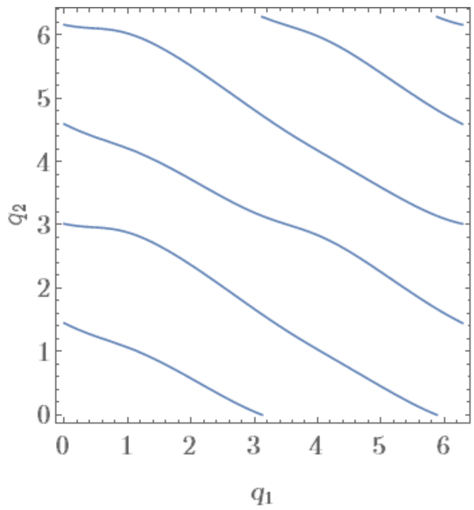
$$L_g L_f h = \phi_{u_1,x}(q_0, q_1, q_2) \tag{4.13}$$

A kapott $\phi_{u_1,x}$ összefüggés a robot szögkoordinátáitól függ (terjedelmi okok miatt a kifejtett összefüggést nem közöljük), ami a legtöbb esetben nem nulla. Ilyenkor a relatív fok $r_{u_1,x} = 2$. Előállhat azonban a szögkoordinátáknak olyan kombinációja, melyekre $\phi_{u_1,x}(q_0, q_1, q_2) = 0$. E kombinációk előfordulása a 4.1 ábrán látható.
A q_0 változót kiküszöbölhetjük a $\phi_{u_1,x}$ összefüggésből úgy, hogy a koordináta-rendszert úgy rögzítjük a robot súlypontjához, hogy ne csak eltolva kerüljön a súlypontba, hanem forogjon is együtt a robot alapjával (q_0 szöggel). Ez a megfontolás nem változtat a relatív fokokon, viszont az így kapott $\hat{\phi}_{u_1,x}(q_1, q_2)$ összefüggés így már csak két változótól függ, mivel így az új koordináta-rendszerben $q_0 \equiv 0$. A $\hat{\phi}_{u_1,x}(q_1, q_2) = 0$-t eredményező szögértékek a 4.2 ábrán láthatóak. Ezen szögértékek esetén a relatív fok $r_{u_1,x} > 2$. A 4.2 ábrán látható, hogy egy fix q_1 értékhez 4 különböző q_2 érték



4.1. ábra. A $\phi_{u_1,x}(q_0, q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

tartozik, melyek 2π periódusonként ismétlődnek, de a 4 q_2 érték között is felfedezhető π eltolás páronként 2-2 érték között.



4.2. ábra. A $\hat{\phi}_{u_1,x}(q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

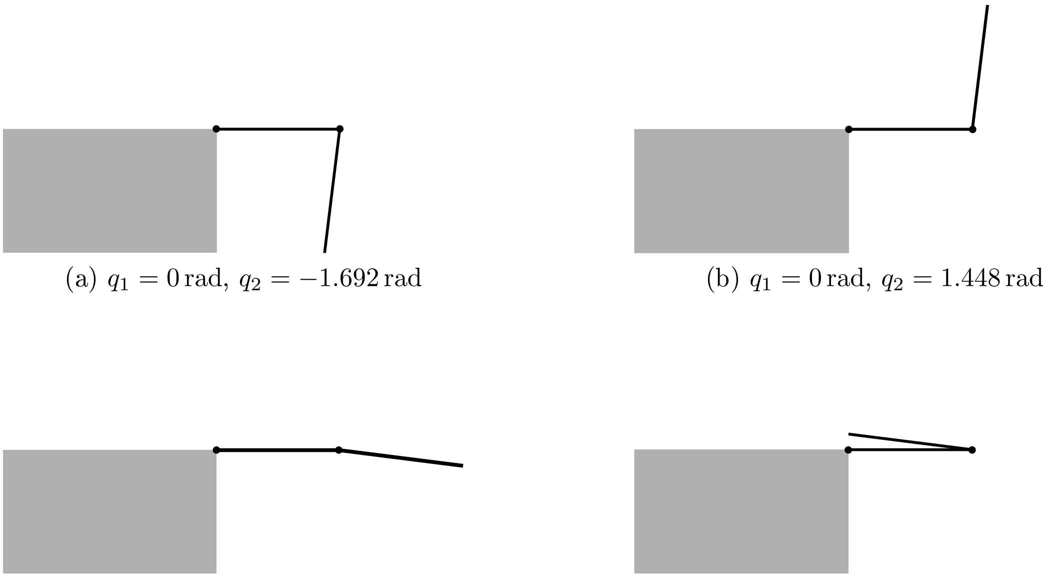
Ha a $\hat{\phi}_{u_1,x}(q_1, q_2) = 0$ összefüggésbe például $q_1 = 0$-t helyettesítünk, a kapott 4 konfiguráció, melyekre $r_{u_1,x} > 2$, a 4.3 ábrán látható.

- $k = 2$

$$L_g L_f^2 h = \tilde{\phi}_{u_1,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{4.14}$$

A most kapott összefüggés a $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ szögsebességektől függ. Azokban az esetekben, amikor $\tilde{\phi}_{u_1,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_1,x} = 3$.
Amikor $\tilde{\phi}_{u_1,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = 0$, a relatív fok $r_{u_1,x} > 3$. Ilyenkor $\tilde{\phi}_{u_1,x}$-ból egy lineáris összefüggést kapunk $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ között

$$\dot{q}_1 = a + b\dot{q}_2 \tag{4.15}$$



(a) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = -1.692\,\mathrm{rad}$

(b) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 1.448\,\mathrm{rad}$

(c) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = -0.1254\,\mathrm{rad}$

(d) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 3.016\,\mathrm{rad}$

4.3. ábra. 4 konfiguráció, melyekre $r_{u_1,x} > 2$

alakban. Ha ez a feltétel teljesül, tovább kell folytatnunk a számolást.

- $k = 3$

$$L_g L_f^3 h = \check{\phi}_{u_1,x}(u_2) = \alpha + \beta u_2 \tag{4.16}$$

Ez az összefüggés már csak az u_2 bemenettől függ, méghozzá lineárisan. Abban az esetben, ha $\check{\phi}_{u_1,x}(u_2) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_1,x} = 4$. Egy u_2 érték létezik, melyre $\check{\phi}_{u_1,x}(u_2) = 0$, ilyenkor a relatív fok $r_{u_1,x} > 4$, és folytatnunk kell a számolást.

- $k = 4$

$$L_g L_f^4 h = C \neq 0 \tag{4.17}$$

Mivel nem maradt már több változónk, aminek nincs előírt értéke, a fenti összefüggés minden esetben egy nem zérus konstans. Az előfordulható legmagasabb relatív fok az u_1 bemenet és a robotkar végpontjának x koordinátája között tehát $r_{u_1,x} = 5$.

4.2.1.2. A robotkar végpontjának y koordinátájára nézve

Hasonlóan számíthatjuk ki a relatív fokot, ha kimenetnek a robotkar végpontjának y koordinátáját választjuk a súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}) = & \frac{2 l_0 m_0 \sin(\varphi_0 + q_0) + l_1(2m_0 + m_1)\sin(q_0 + q_1)}{2(m_0 + m_1 + m_2)} \\ & + \frac{l_2(2m_0 + 2m_1 + m_2)\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{2(m_0 + m_1 + m_2)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

A számolás menete megegyezik az előző számítással, csak az eredményekben tér el attól.

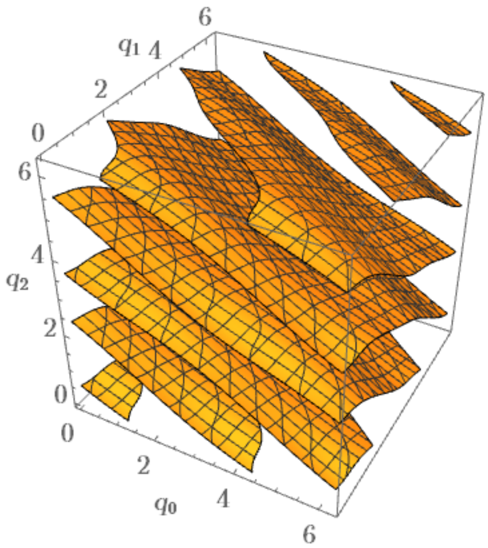
- $k = 0$

$$L_g h = 0 \tag{4.19}$$

- $k = 1$

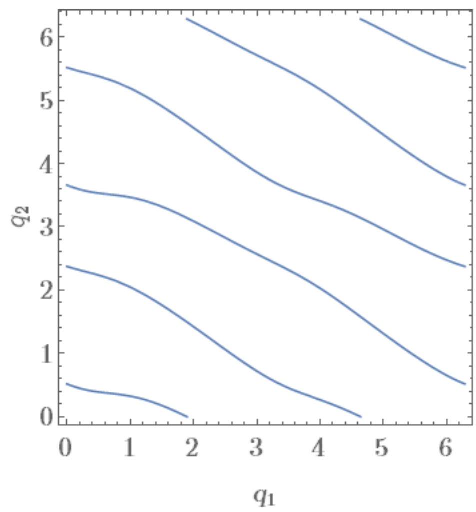
$$L_g L_f h = \phi_{u_1,y}(q_0, q_1, q_2) \tag{4.20}$$

A kapott ϕ összefüggés itt is a szögkoordinátáktól függ, ami a legtöbb esetben nem nulla. Ilyenkor a relatív fok $r_{u_1,y} = 2$. Az $r_{u_1,y} > 2$ relatív fokot eredményező szögkoordináta kombinációk a 4.4 ábrán láthatóak.



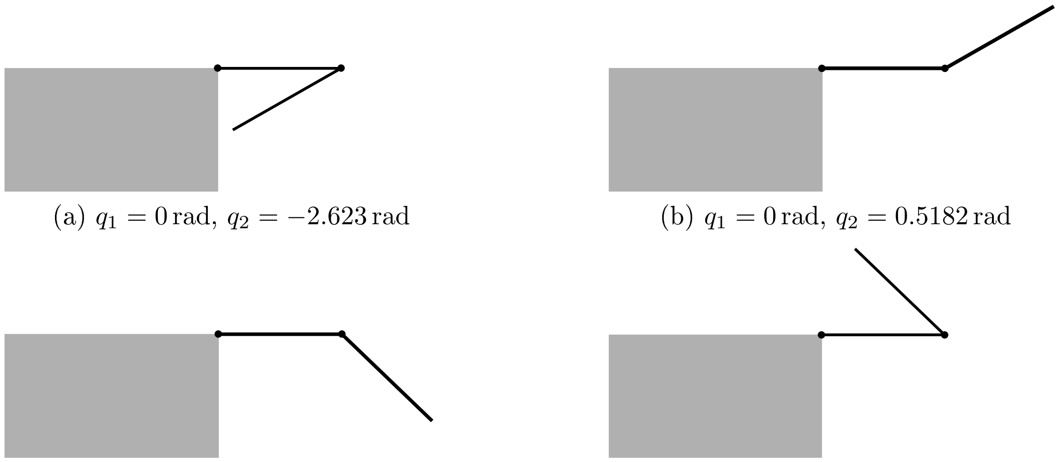
4.4. ábra. A $\phi_{u_1,y}(q_0, q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

A q_0 változó kiküszöbölése utána a kapott összefüggés $\hat{\phi}_{u_1,y}(q_1, q_2)$. A $\hat{\phi}_{u_1,y}(q_1, q_2) =$ 0-t, tehát $r_{u_1,y} > 2$ relatív fokot eredményező szögértékek a 4.5 ábrán láthatóak. Egy fix q_1 értékhez itt is 4 különböző q_2 érték tartozik, melyek 2π periódusonként ismétlődnek. A 4 q_2 érték között itt is felfedezhető π eltolás páronként 2-2 érték között.



4.5. ábra. A $\hat{\phi}_{u_1,y}(q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

Példaképp, ha a $\hat{\phi}_{u_1,y}(q_1, q_2) = 0$ összefüggésbe $q_1 = 0\,\text{rad}$-t helyettesítünk, a kapott 4 konfiguráció, melyekre $r_{u_1,y} > 2$, a 4.6 ábrán látható.



(a) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = -2.623\,\mathrm{rad}$

(b) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 0.5182\,\mathrm{rad}$

(c) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = -0.7657\,\mathrm{rad}$

(d) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 2.375\,\mathrm{rad}$

4.6. ábra. 4 konfiguráció, melyekre $r_{u_1,y} > 2$

- $k = 2$

$$L_g L_f^2 h = \tilde{\phi}_{u_1,y}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{4.21}$$

Ez az összefüggés a $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ szögsebességektől függ. Azokban az esetekben, amikor $\tilde{\phi}_{u_1,y}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_1,y} = 3$.
Amikor $\tilde{\phi}_{u_1,y}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = 0$, a relatív fok $r_{u_1,y} > 3$. Ilyenkor $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ között

$$\dot{q}_1 = a + b\dot{q}_2 \tag{4.22}$$

lineáris összefüggés figyelhető meg.

- $k = 3$

$$L_g L_f^3 h = \check{\phi}_{u_1,y}(u_2) = \alpha + \beta u_2 \tag{4.23}$$

Ez az összefüggés csak az u_2 bemenettől függ, méghozzá lineárisan. Amikor $\check{\phi}_{u_1,y}(u_2) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_1,y} = 4$.Az egy u_2 értékre, melyre $\check{\phi}_{u_1,y}(u_2) = 0$, a relatív fok $r_{u_1,y} > 4$.

- $k = 4$

$$L_g L_f^4 h = C \neq 0 \tag{4.24}$$

Mivel már minden változó értékét fixáltuk, ez a kifejezés minden esetben nem nulla. Így az előfordulható legmagasabb relatív fok az u_1 bemenet és a robotkar végpontjának y koordinátája között $r_{u_1,y} = 5$.

4.2.2. Az u_2 bemenet relatív fokai

Vizsgáljuk most az u_2 bemenet hatását a robotkar végpontjának pozíciójára. A (4.1) egyenlet így

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u_2, \tag{4.25}$$

ahol $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ és $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ vektorok könnyedén meghatározóak, de terjedelmi okokból nem közöljük őket.

4.2.2.1. A robotkar végpontjának x koordinátájára nézve

Válasszuk először kimenetnek a robotkar végpontjának x koordinátáját ((4.11) egyenlet). Az $u_1$bemenet relatív fokainak számításával analóg módon most is a különböző Lie-deriváltakat kell vizsgálnunk az $r_{u_2,x}$ relatív fok meghatározásához.

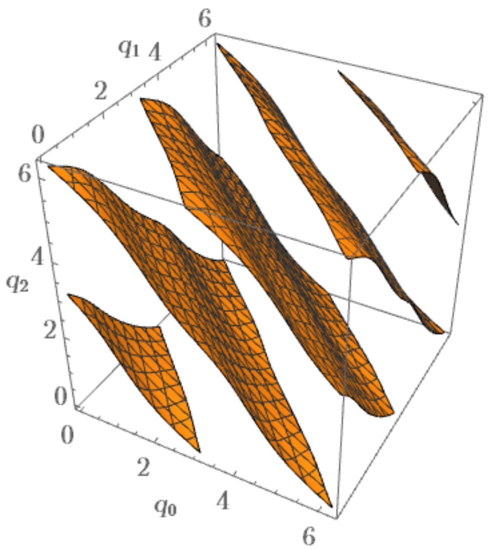
- $k = 0$

$$L_g h = 0 \tag{4.26}$$

- $k = 1$

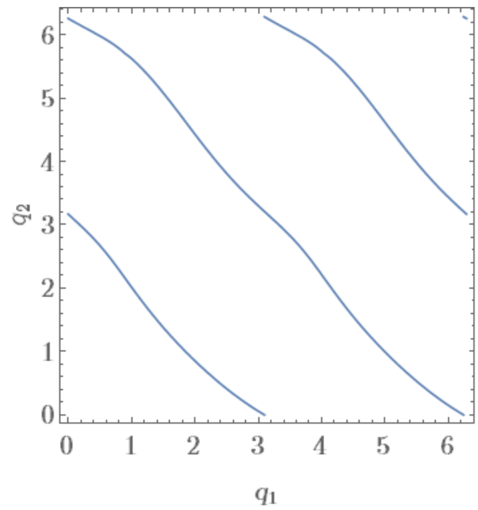
$$L_g L_f h = \phi_{u_2,x}(q_0, q_1, q_2) \tag{4.27}$$

A $\phi_{u_2,x}$ összefüggés a robot 3 szögkoordinátájának függvénye, és a legtöbb esetben nem nulla értéket vesz fel. Ekkor a relatív fok $r_{u_2,x} = 2$. Az $r_{u_2,x} > 2$ relatív fokot eredményező szögkoordináták a 4.7 ábrán láthatóak.



4.7. ábra. A $\phi_{u_2,x}(q_0, q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

A $\phi_{u_2,x}$ kifejezésből szintén kiejthetjük a q_0 szöget a koordináta-rendszer forgatásával, így a $\hat{\phi}_{u_2,x}(q_1, q_2)$ kifejezéshez jutva. Az $r_{u_2,x} > 2$ relatív fokot eredményező q_1 és q_2 értékek a 4.8 ábrán láthatóak. Az ábráról észrevehetjük, hogy ellentétben az u_1 bemenet relatív fokainál tapasztaltakkal, itt egy rögzített q_1-hez csak 2 q_2 érték tartozik, melyek 2π periodikusak.
Szemléltetésül a $\hat{\phi}_{u_2,x}(q_1, q_2) = 0$ összefüggésbe $q_1 = 0\,\text{rad}$-t helyettesítve, a kapott 2 konfiguráció, melyeknél $r_{u_2,x} > 2$, a 4.9 ábrán látható. Észrevehetjük, hogy a kapott q_2 értékek közel állnak a $0\,\text{rad}$ és $\pi\,\text{rad}$ értékekhez, az eltérést csak a numerikus számítások pontatlansága okozza.



4.8. ábra. A $\hat{\phi}_{u_2,x}(q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

(a) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 3.114\,\mathrm{rad}$ (b) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 0.02650\,\mathrm{rad}$

4.9. ábra. 2 konfiguráció, melyekre $r_{u_2,x} > 2$

- $k = 2$

$$L_g L_f^2 h = \tilde{\phi}_{u_2,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{4.28}$$

A $\tilde{\phi}_{u_2,x}$ összefüggés a $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ szögsebességektől függ. Amikor $\tilde{\phi}_{u_2,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_2,x} = 3$. Ha $\tilde{\phi}_{u_2,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = 0$, a relatív fok $r_{u_2,x} > 3$. Ilyenkor $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ között

$$\dot{q}_1 = a + b\dot{q}_2 \tag{4.29}$$

lineáris kapcsolat áll fent.

- $k = 3$

$$L_g L_f^3 h = \check{\phi}_{u_2,x}(u_1) = \alpha + \beta u_1 \tag{4.30}$$

A $\check{\phi}_{u_2,x}$ kifejezés az u_1 bemenet lineáris függvénye. Amikor $\check{\phi}_{u_2,x}(u_1) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_2,x} = 4$. $\check{\phi}_{u_2,x}(u_1)$ az $u_1$bemenet egyetlen értékénél vesz fel 0-t, ilyenkor a relatív fok $r_{u_2,x} > 4$.

- $k = 4$

$$L_g L_f^4 h = C \neq 0 \tag{4.31}$$

A kapott összefüggés nem nulla, így az előfordulható legmagasabb relatív fok az u_2 bemenet és a robotkar végpontjának x koordinátája között is $r_{u_2,x} = 5$.

4.2.2.2. A robotkar végpontjának y koordinátájára nézve

Legyen a kimenet a robotkar végpontjának y koordinátája ((4.18) egyenlet), és ismételjük meg az előző pontban leírt számításokat.

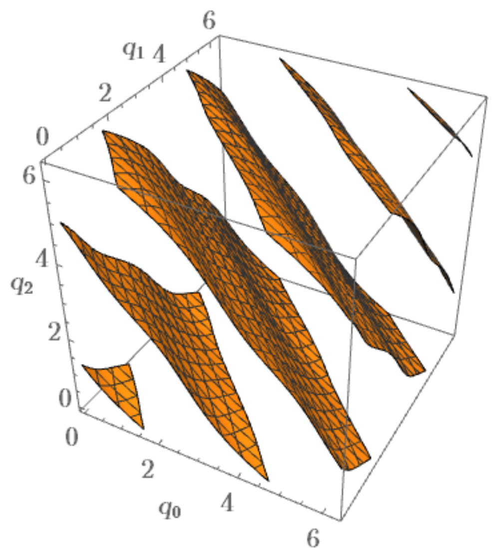
- $k = 0$

$$L_g h = 0 \tag{4.32}$$

- $k = 1$

$$L_g L_f h = \phi_{u_2,y}(q_0, q_1, q_2) \tag{4.33}$$

A $\phi_{u_2,y}$ összefüggés itt is a robot 3 szögkoordinátájának függvénye, ami a legtöbb esetben nem nulla. Ekkor a relatív fok $r_{u_2,y} = 2$. Az $r_{u_2,y} > 2$ relatív fokot eredményező szögkoordináták a 4.10 ábrán láthatóak.



4.10. ábra. A $\phi_{u_2,y}(q_0, q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

A $\phi_{u_2,y}$ kifejezésből q_0 a szög kiejtésével a $\hat{\phi}_{u_2,y}(q_1, q_2)$ kifejezést kapjuk. Az $r_{u_2,y} > 2$ relatív fokot eredményező q_1 és q_2 értékek a 4.11 ábrán láthatóak. Az előző számításhoz hasonlóan egy rögzített q_1 értékhez 2 q_2 érték tartozik, melyek 2π periodikusak.

Egy példaként $q_1 = 0\,\text{rad}$-t helyettesítve a $\hat{\phi}_{u_2,y}(q_1, q_2) = 0$ összefüggésbe , a kapott 2 konfiguráció, melyekre $r_{u_2,y} > 2$, a 4.12 ábrán látható.

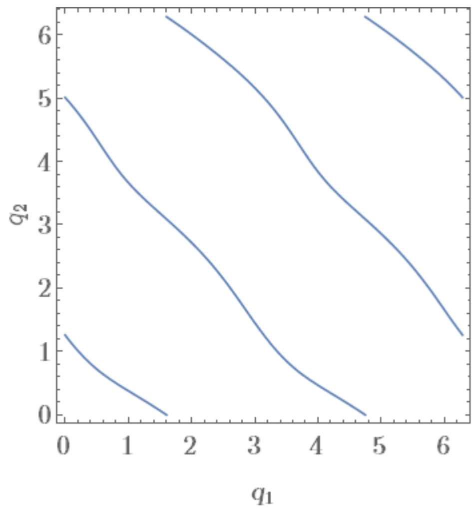
- $k = 2$

$$L_g L_f^2 h = \tilde{\phi}_{u_2,y}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{4.34}$$

A $\tilde{\phi}_{u_2,y}$ összefüggés a $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ szögsebességek függvénye. $\tilde{\phi}_{u_2,x}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \neq 0$ esetén a relatív fok $r_{u_2,y} = 3$. Akkor, ha $\tilde{\phi}_{u_2,y}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = 0$, a relatív fok $r_{u_2,y} > 3$. Ilyenkor $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$között

$$\dot{q}_1 = a + b\dot{q}_2 \tag{4.35}$$

lineáris kapcsolat van.



4.11. ábra. A $\hat{\phi}_{u_2,x}(q_1, q_2) = 0$ esetek előfordulása

(a) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = -1.272\,\mathrm{rad}$

(b) $q_1 = 0\,\mathrm{rad}$, $q_2 = 1.259\,\mathrm{rad}$

4.12. ábra. 2 konfiguráció, melyekre $r_{u_2,y} > 2$

- $k = 3$
$$L_g L_f^3 h = \check{\phi}_{u_2,y}(u_1) = \alpha + \beta u_1 \tag{4.36}$$
$\check{\phi}_{u_2,y}$ az u_1 bemenet lineáris függvénye. Amikor $\check{\phi}_{u_2,y}(u_1) \neq 0$, a relatív fok $r_{u_2,y} = 4$. $\check{\phi}_{u_2,x}(u_1) = 0$ egyetlen u_1 értéknél valósul meg, ekkor a relatív fok $r_{u_2,y} > 4$.

- $k = 4$
$$L_g L_f^4 h = C \neq 0 \tag{4.37}$$
Az összefüggés nem nulla, tehát az előfordulható legmagasabb relatív fok az u_2 bemenet és a robotkar végpontjának y koordinátája között szintén $r_{u_2,y} = 5$.

5. fejezet

Összefoglalás

Irodalomjegyzék

[1] László Bencsik. "Dynamic analysis and tracking control of underactuated multibody systems". PhD thesis. Budapest University of Thechnology and Economics, 2017.

[2] Dániel Gángó. "Alulaktuált rendszerek szabályozási módszereinek összehasonlítása". BSc thesis. Budapest University of Technology and Economics, 2016.

[3] Katalin M Hangos, József Bokor, and Gábor Szederkényi. *Analysis and control of nonlinear process systems*. Springer Science & Business Media, 2006.

[4] Elzbieta Jarzebowska and Bartlomiej Pilarczyk. "Design of tracking controller for object interception in space". Institute of Aeronautics and Applied Mechanics, Warsaw University of Technology, 2016.

[5] A Mazur. "Universal adaptive tracking controller for rigid manipulators". In: *APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE* 6 (1996), pp. 759–788.

Függelék

F.1. A robot mozgásegyenletének mátrixai

Az űrbéli robot mozgásegyenletének tömegmátrixa

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \tag{F.1}$$

ahol

$$\begin{aligned} m_{11} = \; & \frac{4l_0l_1m_0(m_1+2m_2)\cos(\varphi_0-q_1)+4l_0l_2m_0m_2\cos(\varphi_0-q_1-q_2)+4\theta_0m_0+4\theta_0m_1+4\theta_0m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{4\theta_1m_0+4\theta_1m_1+4\theta_1m_2+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2+4l_0^2m_0m_1+4l_0^2m_0m_2+l_1^2m_0m_1}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{4l_1^2m_0m_2+l_1^2m_1m_2+4l_1l_2m_0m_2\cos(q_2)+2l_1l_2m_1m_2\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.2}$$

$$\begin{aligned} m_{12} = \; & \frac{2l_0l_1m_0(m_1+2m_2)\cos(\varphi_0-q_1)+2l_0l_2m_0m_2\cos(\varphi_0-q_1-q_2)+4\theta_1m_0}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{4\theta_1m_1+4\theta_1m_2+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2+l_1^2m_0m_1+4l_1^2m_0m_2+}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{l_1^2m_1m_2+4l_1l_2m_0m_2\cos(q_2)+2l_1l_2m_1m_2\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.3}$$

$$\begin{aligned} m_{13} = \; & \frac{2l_0l_2m_0m_2\cos(\varphi_0-q_1-q_2)+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.4}$$

$$\begin{aligned} m_{21} = \; & \frac{2l_0l_1m_0(m_1+2m_2)\cos(\varphi_0-q_1)+2l_0l_2m_0m_2\cos(\varphi_0-q_1-q_2)+4\theta_1m_0}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{4\theta_1m_1+4\theta_1m_2+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2+l_1^2m_0m_1+4l_1^2m_0m_2+}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{l_1^2m_1m_2+4l_1l_2m_0m_2\cos(q_2)+2l_1l_2m_1m_2\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned} m_{22} = \; & \frac{4\theta_1(m_0+m_1+m_2)+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2+l_1^2m_0m_1 4l_1^2m_0m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{l_1^2m_1m_2+2l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.6}$$

$$m_{23} = \frac{4\theta_2(m_0+m_1+m_2)+l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\cos(q_2)+l_2^2m_2(m_0+m_1)}{4(m_0+m_1+m_2)}, \tag{F.7}$$

$$\begin{aligned} m_{31} = \; & \frac{2l_0l_2m_0m_2\cos(\varphi_0-q_1-q_2)+4\theta_2m_0+4\theta_2m_1+4\theta_2m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \frac{l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\cos(q_2)+l_2^2m_0m_2+l_2^2m_1m_2}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.8}$$

$$m_{32} = \frac{4\theta_2(m_0+m_1+m_2)+l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\cos(q_2)+l_2^2m_2(m_0+m_1)}{4(m_0+m_1+m_2)}, \tag{F.9}$$

$$m_{33} = \frac{4\theta_2(m_0+m_1+m_2)+l_2^2 m_2(m_0+m_1)}{4(m_0+m_1+m_2)}. \tag{F.10}$$

A centripetális és Coriolis erőket tartalmazó vektor

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \tag{F.11}$$

ahol

$$\begin{aligned} c_1 = & -\tfrac{2l_2m_2\dot{q}_2(\dot{q}_0+\dot{q}_1)(l_1(2m_0+m_1)\sin(q_2)-2l_0m_0\sin(\varphi_0-q_1-q_2))}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \tfrac{-2l_0m_0\dot{q}_1(2\dot{q}_0+\dot{q}_1)(l_1(m_1+2m_2)\sin(\varphi_0-q_1)+l_2m_2\sin(\varphi_0-q_1-q_2))}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \tfrac{l_2m_2\dot{q}_2^2(l_1(2m_0+m_1)\sin(q_2)-2l_0m_0\sin(\varphi_0-q_1-q_2))}{4(m_0+m_1+m_2)}, \end{aligned} \tag{F.12}$$

$$\begin{aligned} c_2 = & -\tfrac{2l_0m_0\dot{q}_0^2(l_1(m_1+2m_2)\sin(\varphi_0-q_1)+l_2m_2\sin(\varphi_0-q_1-q_2))}{4(m_0+m_1+m_2)} \\ & \tfrac{+2l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\dot{q}_0\dot{q}_2\sin(q_2)+l_1l_2m_2(2m_0+m_1)\dot{q}_2\sin(q_2)(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \end{aligned} \tag{F.13}$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \tfrac{l_2m_2\dot{q}_0^2(l_1(2m_0+m_1)\sin(q_2)-2l_0m_0\sin(\varphi_0-q_1-q_2))}{4(m_0+m_1+m_2)}+ \\ & \tfrac{l_2m_2\left(2l_1(2m_0+m_1)\dot{q}_0\dot{q}_1\sin(q_2)+l_1(2m_0+m_1)\dot{q}_1^2\sin(q_2)\right)}{4(m_0+m_1+m_2)}. \end{aligned} \tag{F.14}$$