%% LyX 2.2.2 created this file. For more info, see http://www.lyx.org/.

%% Do not edit unless you really know what you are doing.

\documentclass[12pt,twoside,magyar,twoside,rightopen]{report}

\usepackage[T1]{fontenc}

\usepackage[latin2]{inputenc}

\usepackage[a4paper]{geometry}

\geometry{verbose,tmargin=2cm,bmargin=2cm,lmargin=3cm,rmargin=2cm,headheight=12pt,headsep=24pt}

\usepackage{fancyhdr}

\pagestyle{fancy}

\setcounter{secnumdepth}{3}

\setcounter{tocdepth}{3}

\usepackage{verbatim}

\usepackage{textcomp}

\usepackage{bm}

\usepackage{amsmath}

\usepackage{amssymb}

\usepackage{graphicx}

\usepackage{setspace}

\onehalfspacing

\makeatletter

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LyX specific LaTeX commands.

%% Because html converters don't know tabularnewline

\providecommand{\tabularnewline}{\\}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% User specified LaTeX commands.

%\textwidth 160mm

%\oddsidemargin 0cm

%\topmargin -15mm

\usepackage{bm}

\lhead{}

\cfoot{}\rfoot{\thepage}

\renewcommand{\chaptermark}[1]{\markboth{\MakeUppercase{\thechapter.\ fejezet. #1}}{}}

\newcommand{\tg}{\mathop\mathrm{tg}}

\newcommand{\grad}{\mathop\mathrm{grad}}

\newcommand{\BME}{\hrule\vspace{6pt}{\large Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem\\

Gépészmérnöki Kar\\

Műszaki Mechanikai Tanszék}}

\newcommand{\szerzo}{Gángó Dániel}

\newcommand{\konzulensek}{%

\hfill%

\parbox[t]{6cm}{\normalsize Témavezető:\\

\hspace\*{3em}Dr. Zelei Ambrus\\

\hspace\*{3em}tudományos munkatárs}}

\usepackage{babel}

\usepackage[style=numeric, backend=bibtex]{biblatex}

\addbibresource{irodalomjegyzek.bib}

\fancyhf{}

\fancyfoot[CE, CO]{\thepage}

\fancyhead[RO]{\rightmark}

\fancyhead[LE]{\leftmark}

%\renewcommand{\footrulewidth}{0.4pt}

\renewcommand{\sectionmark}[1]{\markright{\ \uppercase{#1}}}

\@ifundefined{showcaptionsetup}{}{%

\PassOptionsToPackage{caption=false}{subfig}}

\usepackage{subfig}

\makeatother

\usepackage{babel}

\begin{document}

\title{\vspace{-5cm}

\includegraphics[width=0.4\textwidth,keepaspectratio]{bme\_skyline}\\

\BME\vspace{5cm}

\\

TDK dolgozat címe\\

ALULAKTUÁLT ŰRBÉLI ROBOT SZABÁLYOZÁSI MÓDSZEREI}

\author{Készítette: \textsc{\szerzo}}

\date{\vspace{3cm}

\konzulensek\\

\vspace{4cm}

Budapest, 2017}

\maketitle

\pagenumbering{roman}\thispagestyle{empty}

Szerzői jog \copyright~\szerzo, 2017

\newpage{}\thispagestyle{empty}

\tableofcontents{}

\thispagestyle{empty}

\newpage{}

\chapter{Bevezetés}

\pagenumbering{arabic}

Az ipari robotok szabályozástechnikájának uralkodó irányzata a rendszer

dinamikáját kompenzáló, lineáris szabályozási módszerek használata.

Ennek nagy hátránya, hogy ezek a szabályozási stratégiák nem használják

ki a rendszer természetes dinamikája adta lehetőségeket. Az alulaktuált rendszerek vizsgálatakor olyan szabályozók

tervezésére törekszünk, amik a rendszer dinamikáját felhasználva gyorsabb,

energia-hatékonyabb és robusztusabb szabályozást tesznek lehetővé.

Dolgozatom témája egy űrbéli robot szabályozási módszereinek vizsgálata.

A síkbeli modell egy robottestből és a hozzá kapcsolódó két tagú robotkarból épül fel.

A robot 3 szabadságfokú, de csak két aktuátorral rendelkezik, ezért

alulaktuáltnak tekinthető. A robot térbeli orientációjának közvetlen szabályozására nincs aktuátor.

Dolgozatomban két szabályozási módszert alkalmaztam a robot irányírásához.

Az egyik módszer az általam már korábban vizsgált, Laplace transzformáción

alapuló szabályozó. A szabályozó implementálása során vizsgáltam a

rendszer ún. relatív fokait (relative degree), melynek segítségével leírható a szabályozó

bemenő jelének és a szabályozó kimenetének kapocslata.

A második szabályozási módszer a Wen-Bayard szabályozó algoritmuson

alapszik. Ez a szabályozó azonban önmagában nem alkalmazható alulaktuált

rendszerek irányítására. A perdületmegmaradást felírva kiegészítettem

a szabályozót oly módon, hogy így már alkalmazható legyen az űrbéli

robot szabályozására.

\chapter{A szabályozási módszerek bemutatása}

\section{Analitikus megoldás Laplace transzformációval}

A szabályozó bemutatása néhány módosítással \cite{Gango2016} forrásból

került átvételre.

Tegyük fel, hogy egy $n$ szabadságfokú rendszer mozgásegyenlete lineáris

az általános koordináták $\bm{q}(t)$ vektorára, illetve annak első és

második idő szerinti deriváltjaira, $\dot{\bm{q}}(t)$-re és $\ddot{\bm{q}}(t)$-re

nézve. Ekkor a mozgásegyenlet felírható

% u-ra is lineáris nem? És szerintem nem teljesen biztos benne az olvasó, hogy M, B, K, G és H azok q-tól független konstansok.

% Kéne megerősítés a szövegbe.

\begin{equation}

\bm{M}\ddot{\bm{q}}+\bm{B}\dot{\bm{q}}+\bm{Kq}+\bm{G}=\bm{Hu}\label{eq:lin-mozgasegyenlet}

\end{equation}

% itt az MM-en inkább a boldface, nem döntött mátrix és vektor jelölésekhez vannak szokva az emberek,

% szóval szeirintem a \bm{…} helyett inkább \bf{…} kellene mindenhol. Ctrl+F segítségével talán gyorsan módosítható.

alakban, ahol $\bm{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer általános tömegmátrixa,

$\bm{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer csillapításait tartalmazó

mátrix, $\bm{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ a rendszer merevségi mátrixa,

$\bm{G}\in\mathbb{R}^{n}$ a gravitációból származó általános erők vektora,

$\bm{H}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ a rendszer bemeneti mátrixa, $\bm{u}\in\mathbb{R}^{m}$

a szabályozási bemenetek vektora. Írjuk elő, hogy a rendszer aktuátorainak

száma legyen kevesebb a szabadságfokok számánál ($m<n$), ezáltal

a rendszer alulaktuálttá válik.

A rendszer mozgásának előírásához vezessünk be egy ún. szervo-kényszert:

% A szervo kényszer kapcsán ezekre hivatkozz légyszi:

% V. I. Kirgetov, “The motion of controlled mechanical systems with prescribed constraints (servo constraints),” Prikl. Mat. Mekh., vol. 31, no. 3, pp. 433–447, 1967.

% W. Blajer, “Dynamics and control of mechanical systems in partly speciﬁed motion,” Journal of the Franklin Institute, vol. 334, no. 3, pp. 407–426, 1997.

% majd el is küldöm őket, hogy megnézhesd

% Meg ezt is lehet szervo-kényszer témában: bencsik2017dynamic

\begin{equation}

\bm{\sigma}(\bm{q},t)=\bm{f}(\bm{q},t)-\bm{y}\_{d}(t)=0,\label{eq:szervo}

\end{equation}

ahol $\bm{f}(\bm{q},t)\in\mathbb{R}^{m}$ egy tetszőleges függvény,

$\bm{y}\_{d}(,t)\in\mathbb{R}^{m}$ pedig $\bm{f}$ előírt értéke.

Ahhoz, hogy a Laplace transzformációt alkalmazhassuk, írjuk fel \eqref{eq:szervo}

szervo-kényszert egy köttebb, lineáris alakban:

\begin{equation}

\boldsymbol{\sigma}(\bm{q},t)=\bm{Aq}(t)-\bm{y}\_{d}(t)=\mathbf{0}\label{eq:szervo-lin}

\end{equation}

alakban.

Ezek után állítsuk elő \eqref{eq:lin-mozgasegyenlet} és \eqref{eq:szervo-lin}

egyenletek Laplace-transzformáltját :

\begin{equation}

\begin{array}{rcl}

(\bm{M}s^{2}+\bm{B}s+\bm{K})\bm{Q}(s)-\dot{\bm{q}}\_{0}-s\bm{q}\_{0}-\bm{q}\_{0}+\bm{G} & = & \bm{HU}(s),\\

\bm{AQ}(s)+\bm{Y}\_{d}(s) & = & \mathbf{0},

\end{array}

\end{equation}

% fura, hogy van q0 és s\*q0 egymás mellett. Jó így?

ahol $\bm{Q}(s)$ az általános koordináták, $\bm{U}(s)$ a beavatkozó

erők, $\bm{Y}\_{d}(s)$ az előírt kimenet Laplace-transzformáltja, $\bm{q}\_{0}$

és $\dot{\bm{q}}\_{0}$ a rendszer általános koordinátáinak és azok

deriváltjának a $t=0$ időpillanatban vett kezdeti értékei. Az így

kapott lineáris egyenletrendszert felírhatjuk a

\begin{equation}

\left[\begin{array}{cc}

(\bm{M}s^{2}+\bm{B}s+\bm{K}) & -\bm{H}\\

\bm{A} & \bm{0}

\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}

\bm{Q}(s)\\

\bm{U}(s)

\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}

\dot{\bm{q}}\_{0}+s\bm{q}\_{0}+\bm{q}\_{0}-\bm{G}\\

-\bm{Y}\_{d}(s)

\end{array}\right]

\end{equation}

hipermátrixos alakba rendezve.Amennyiben a hipermátrix invertálható,

megoldást kapunk $\bm{Q}(s)$-ra és $\bm{U}(s)$-ra. A megoldások

inverz Laplace transzformációját elvégezve megkapjuk a rendszer által

leírt $\bm{q}(t)=\bm{y}\_{d}(t)$ pályát, és a pálya kövezéséhez szükséges

$\bm{u}(t)$ beavatkozó erőt.

% itt még azt kéne hozzátenni, hogy ez akkor most nem csak egy időpillanatra, hanem tetszőleges t-re megadja a szabályozó erőket.

A kapott $\bm{u}$ beavatkozó erő azonban

csak akkor tartja az előírt $\bm{y}\_{d}$ pályán a rendszert, ha a

rendszer kezdeti $\bm{q}\_{0}$ állapota és annak $\dot{\bm{q}}\_{0}$

deriváltja rendre megegyezik $\bm{y}\_{d}$ és $\dot{\bm{y}}\_{d}$

$t=0$ időpontban vett értékével.

Ahhoz, hogy a rendszer tetszőleges kezdeti értékekkel is az előírt

pályához tartson, ki kell egészítenünk egy PD szabályozóval. Ehhez elő

kell állítanunk a rendszer pályakövetési hibáját:

% Ez az yd elvileg nem ugyanaz, mint a szervo kényszerben lévő yd, csak, ha A egységmátrix!

% És ha ez nem a szervo-kényszer beli yd, akkor honnan tudjuk, hogy mennyinek kéne lennie az egyes időpillanatokban?

% Ide nem qd-t kell írni? Ha nem tiszta, beszéljünk róla.

\begin{equation}

\bm{e}=\bm{y}\_{d}-\bm{q},

\end{equation}

és annak idő szerinti deriváltját:

\begin{equation}

\dot{\bm{e}}=\dot{\bm{y}}\_{d}-\dot{\bm{q}},

\end{equation}

melyekből kiszámíthatjuk a rendszerre beavatkozó erőinek új vektorát

az alábbi módon:

\begin{equation}

\hat{\bm{u}}(t)=\bm{u}(t)+\bm{Pe}(t)+\bm{D}\dot{\bm{e}}(t).\label{eq:input-vector}

\end{equation}

Megfelelően megválasztott

\begin{equation}

\bm{P}=\text{diag}\left\{ (p\_{i})\right\} ,\,p\_{i}>0,\,i=1,\ldots,m,

\end{equation}

\begin{equation}

\bm{D}=\text{diag}\left\{ (d\_{i})\right\} ,\,d\_{i}>0,\,i=1,\ldots,m

\end{equation}

mátrixokkal a rendszer tart az előírt $\bm{y}\_{d}$

pályához.

% Az yd akkor most pálya, vagy csak egy függvény a szervo-kényszerben? Nem az kell írni, hogy a szervo-kényszer hibája nullához tart?

Könnyen látható, hogy \eqref{eq:input-vector} egyenlet két részből

épül fel. Az $\bm{u}(t)$ tag, ami a pályán való haladást biztosítja,

valójában egy referenciajel, a $\bm{Pe}(t)+\bm{D}\dot{\bm{e}}(t)$

tagok pedig a hibák korrigálásáért felelnek.

% régebben itt még volt egy alfejezet, hogy az egész hogyan alkalmazható nemlineáris rendszerre.

% Amikor időlépésenként linearizálunk.

% Ez most is kell, nem?

\section{Wen-Bayard szabályozó}

Az itt bemutatott szabályozó \cite{mazur1996universal,Gango2016}

% itt nem kellene a Jarzebowska cikkre is hivatkozni? Vagy az a lentebbi REF lenne? Ha igen, akkor ok.

% Illetve még van egy ilyen is, ami az eredeti volt, ezt is hivatkoznám:

% Davis S. Bayard, John T. Wen: New class of control laws for robotic manipulators, Part 2. Apadtive case. Int. J. Control, 1988, vol 47., no. 5., pp 1387-1406.

% ezt is el tudom küldeni, ha nincs meg. Ez soros kinematikájú, teljesen aktuált robotokra működik

% Meg ebben a Mazur hivatkozásban ne legyen csupa nagybetű az újság neve.

eredetileg nem alulaktuált rendszerek irányítására lett kifejlesztve,

de ahogy később REF-ben láthatjuk, kiegészíthető úgy, hogy bizonyos

alulaktuált rendszerekhez is alkalmazható legyen.

A szabályozó alapgondolata, hogy az előírt $\bm{y}\_{d}=\bm{q}\_{d}$

pályát a mozgásegyenletbe behelyettesítve állítjuk elő a beavatkozó

erők alapjelét,

\begin{equation}

\bm{u}=\bm{M}(\bm{q}\_{d})\ddot{\bm{q}}\_{d}+\bm{C}(\dot{\bm{q}}\_{d},\bm{q}\_{d})\dot{\bm{q}}\_{d}+\bm{G}(\bm{q}).\label{eq:wen-bayard}

\end{equation}

\eqref{eq:input-vector} egyenlethez hasonlóan,

\begin{equation}

\bm{e}=\bm{q}\_{d}-\bm{q},

\end{equation}

\begin{equation}

\dot{\bm{e}}=\dot{\bm{q}}\_{d}-\dot{\bm{q}}

\end{equation}

hibavektorokat bevezetve \eqref{eq:wen-bayard} is kiegészíthető egy

korrigáló PD szabályozóval,

\begin{equation}

\hat{\bm{u}}=\bm{M}(\bm{q}\_{d})\ddot{\bm{q}}\_{d}+\bm{C}(\dot{\bm{q}}\_{d},\bm{q}\_{d})\dot{\bm{q}}\_{d}+\bm{G}(\bm{q})+\bm{Pe}(t)+\bm{D}\dot{\bm{e}}(t).\label{eq:wen-bayard-pd}

\end{equation}

Fontos megjegyezni, hogy alulaktuált rendszereknél $m$ beavatkozó

esetén $m$ kényszer írható elő, ami kevesebb, mint a $\bm{q}$ vektor

$n$ dimenziója. Következésképp alulaktuált rendszerek szabályozására

\eqref{eq:wen-bayard-pd} önmagában nem alkalmazható.

% itt ki kéne hangúlyozni, hogy alulaktuáltaknál nem ismerjük az yd pályát, tehát emiatt sem lehet alkalmazható.

% És azt nem lenne jó nagyvonalakban leírni, hogy hogyan tetted alulaktuált rendszerekre is alkalmazhatóvá?

\chapter{Az űrbéli robot mozgásegyenletének felírása}

Az űrbéli robot 2 dimenziós modellje egy robottestből és a hozzá kapcsolódó

robotkarból épül fel (\ref{fig:Az-=000171rb=0000E9li-robot-fel=0000E9p=0000EDt=0000E9se}

ábra). A robot két aktuátorral rendelkezik, melyek a robotkaron találhatók.

A robot 3 rotációs szabadsági fokkal (mindhárom rész elfordulása),

és 2 transzlációs szabadsági fokkal (a robot $x$ - $y$ síkbeli pozíciója)

rendelkezik ( \ref{fig:=0000E1ltal=0000E1nos-koordin=0000E1t=0000E1k}

ábra) . A \ref{fig:Az-=000171rb=0000E9li-robot-fel=0000E9p=0000EDt=0000E9se}

ábrán jelölt fizikai mennyiségek numerikus értékeit a \ref{tab:A-robotra-jellemz=000151-fizikai-mennyis=0000E9gek}

táblázat tartalmazza.

% Ha lehet könnyen egyesíteni a 3.1 és 3.2 ábrát (robot felépítése és koordinátái) az jó lenne.

% Az l1 és l2 elég, ha ugyanúgy oda van írva, mint a tömeg meg a telehetlenségi nyomaték. Csak l0, amit mindenképp méretvonalazni kell.

% Meg kéne jelölni valamilyen betűkkel a csuklókat. és akkor lehetne mondani, hogy pl A és B csuklóban van aktuátor.

\begin{figure}[h]

\begin{centering}

\includegraphics[scale=0.35]{image/robot\_paramss}

\par\end{centering}

\caption{Az űrbéli robot felépítése\label{fig:Az-=000171rb=0000E9li-robot-fel=0000E9p=0000EDt=0000E9se}}

\end{figure}

\begin{figure}[h]

\begin{centering}

\includegraphics[scale=0.35]{image/robot}

\par\end{centering}

\caption{A robot mozgását leíró általános koordináták\label{fig:=0000E1ltal=0000E1nos-koordin=0000E1t=0000E1k}}

\end{figure}

\begin{table}[h]

\begin{centering}

\begin{tabular}{|c|c|}

\hline

jelölés & érték\tabularnewline

\hline

\hline

$\varphi\_{0}$ & $30\,\text{\textdegree}$\tabularnewline

\hline

$m\_{0}$ & $40\,\mathrm{kg}$\tabularnewline

\hline

$m\_{1}$ & $4\,\mathrm{kg}$\tabularnewline

\hline

$m\_{2}$ & $3\,\mathrm{kg}$\tabularnewline

\hline

$\theta\_{0}$ & $6,667\,\mathrm{kgm^{2}}$\tabularnewline

\hline

$\theta\_{1}$ & $0,333\,\mathrm{kgm^{2}}$\tabularnewline

\hline

$\theta\_{2}$ & $0,25\,\mathrm{kgm^{2}}$\tabularnewline

\hline

$l\_{0}$ & $1\,\mathrm{m}$\tabularnewline

\hline

$l\_{1}$ & $1\,\mathrm{m}$\tabularnewline

\hline

$l\_{2}$ & $1\,\mathrm{m}$\tabularnewline

\hline

\end{tabular}

\par\end{centering}

\caption{A robotra jellemző fizikai mennyiségek\label{tab:A-robotra-jellemz=000151-fizikai-mennyis=0000E9gek}}

\end{table}

Mivel a rendszer nem tartalmaz disszipatív elemeket, illetve nem hatnak

rá külső erők, felírható rá a lendületmegmaradás tétele. Ennek következtében

a két transzlációs szabadsági fok elhanyagolható, hiszen lendületmegmaradás

értelmében a rendszer közös súlypontja nyugalomban van, vagy egyenes

vonalú egyenletes mozgást végez. Tehát ha a közös súlyponthoz rögzített

koordináta-rendszerből vizsgáljuk a rendszert, a szabadsági fokok

száma 3-ra redukálódik. Így a robot mozgása leírható a három rész

elfordulását jellemző szögkoordinátával (\ref{fig:=0000E1ltal=0000E1nos-koordin=0000E1t=0000E1k}

ábra),

\[

\bm{q}(t)=\left[\begin{array}{c}

q\_{0}(t)\\

q\_{1}(t)\\

q\_{2}(t)

\end{array}\right].

\]

A mozgási egyenlet felírásához a másodfajú Lagrange egyenletet használjuk,

% bedobnám a szumma argumentumát egy zárójelbe

\begin{equation}

\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}\_{j}}-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q\_{j}}+\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q\_{j}}}+\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q\_{j}}=Q\_{j},\;j=1...n,\label{lagrange}

\end{equation}

ahol $\mathcal{T}$ a rendszer összes mozgási energiája, $\mathcal{D}$

a disszipatív potenciál, $\mathcal{U}$ a rendszer potenciális energiája.

$Q\_{j}$ jelöli a rendszerre ható általános erőket, $q\_{j}$ pedig

az $n$ szabadságfokú rendszer $j$-edik általános koordinátáját. Az űrbéli

robot esetében a disszipatív potenciál és a potenciális energia is

azonosan nulla.

A rendszer összes mozgási energiája

\begin{equation}

T=\sum\_{i=0}^{2}\frac{1}{2}m\_{i}\boldsymbol{v}\_{i}^{2}+\frac{1}{2}\theta\_{i}\omega\_{i}^{2},

\end{equation}

ahol $m\_{i}$ a robot egyes részeinek tömege, $\bm{v}\_{i}$ a sebességvektora,

$\theta\_{i}$ a tehetetlenségi nyomatéka és $\omega\_{i}$ a szögsebessége.

Az egyes részek szögsebességei a következőképpen írhatók fel:

\begin{equation}

\omega\_{0}=\dot{q}\_{0},

\end{equation}

\begin{equation}

\omega\_{1}=\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1},

\end{equation}

\begin{equation}

\omega\_{2}=\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}.

\end{equation}

A sebességvektorok előállításához először fel kell írnunk az egyes

részek súlypontjába mutató helyvektorokat, melyek a következők:

\begin{equation}

\boldsymbol{r}\_{0}=\left[\begin{array}{c}

x\_{0}\\

y\_{0}

\end{array}\right],

\end{equation}

\begin{equation}

\boldsymbol{r}\_{1}=\left[\begin{array}{c}

x\_{0}+l\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+\frac{l\_{1}}{2}\cos(q\_{0}+q\_{1})\\

y\_{0}+l\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+\frac{l\_{1}}{2}\sin(q\_{0}+q\_{1})

\end{array}\right],

\end{equation}

\begin{equation}

\boldsymbol{r}\_{2}=\left[\begin{array}{c}

x\_{0}+l\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}\cos(q\_{0}+q\_{1})+\frac{l\_{2}}{2}\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})\\

y\_{0}+l\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}\sin(q\_{0}+q\_{1})+\frac{l\_{2}}{2}\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})

\end{array}\right].

\end{equation}

A különálló részek súlypontjába mutató helyvektorokból kiszámítható

a rendszer közös súlypontja

\begin{equation}

\boldsymbol{r}\_{S}=\frac{m\_{0}\boldsymbol{r}\_{0}+m\_{1}\boldsymbol{r}\_{1}+m\_{2}\boldsymbol{r}\_{2}}{m\_{0}+m\_{1}+m\_{2}}.

\end{equation}

Ahhoz, hogy a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgáljuk

a rendszert, fel kell írnunk a közös súlypontból az egyes részek súlypontjaiba

mutató helyvektorokat a \ref{fig:s=0000FAlypont} ábrának megfelelően.

% Az ábrán valahogy úgy kone, hogy a fizikailag lehetségeshez közelebb kerüljön a súlypont. Az S-nek elvileg benne kell lennie az S0, S1 és S2 átlal alkotott háromszög belsejében. A q0 q1 q2 meg már levehető, ha negyon keverednek a vonalak.

\begin{figure}[h]

\begin{centering}

\includegraphics[scale=0.35]{image/robot\_com}

\par\end{centering}

\caption{Az egyes részek súlypontjai és a közös súlypont\label{fig:s=0000FAlypont}}

\end{figure}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{\rho}\_{0}=\bm{r}\_{0}-\bm{r}\_{S}=\\

\left[\begin{array}{c}

-\frac{2l\_{0}(m\_{1}+m\_{2})\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\cos(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

-\frac{2l\_{0}(m\_{1}+m\_{2})\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\sin(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right],

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{\rho}\_{1}=\bm{r}\_{1}-\bm{r}\_{S}=\\

\left[\begin{array}{c}

\frac{2l\_{0}m\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{0}-m\_{2})\cos(q\_{0}+q\_{1})-l\_{2}m\_{2}\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

\frac{2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{0}-m\_{2})\sin(q\_{0}+q\_{1})-l\_{2}m\_{2}\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right],

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{\rho}\_{2}=\bm{r}\_{2}-\bm{r}\_{S}=\\

\left[\begin{array}{c}

\frac{2l\_{0}m\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}(m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

\frac{2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}(m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right].

\end{array}

\end{equation}

% hogy kerül a nevezőbe egy kettes? Az tuti jó?

Látható, hogy ezekben a vektorokban már nem szerepelnek az $x\_{0}$

és $y\_{0}$ koordináták, tehát a rendszer valóban 3 szabadságfokúra

egyszerűsödött.

A sebességvektorok előállításához vegyük a fent kiszámított helyvektorok

idő szerinti deriváltját:

\begin{center}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{v}\_{0}=\frac{d\bm{\rho}\_{0}}{dt}=\\

\left[\begin{array}{c}

-\frac{-2l\_{0}(m\_{1}+m\_{2})\dot{q}\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})-l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1})-l\_{2}m\_{2}\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

-\frac{2l\_{0}(m\_{1}+m\_{2})\dot{q}\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right],

\end{array}

\end{equation}

\par\end{center}

\begin{center}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{v}\_{1}=\frac{d\bm{\rho}\_{1}}{dt}=\\

\left[\begin{array}{c}

\frac{-2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})-l\_{1}(m\_{0}-m\_{2})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

\frac{2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(m\_{0}-m\_{2})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1})-l\_{2}m\_{2}\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right],

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{c}

\bm{v}\_{2}=\frac{d\bm{\rho}\_{2}}{dt}=\\

\left[\begin{array}{c}

\frac{-2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})-l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1})-l\_{2}(m\_{0}+m\_{1})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

\frac{2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1})+l\_{2}(m\_{0}+m\_{1})\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}

\end{array}\right].

\end{array}

\end{equation}

\par\end{center}

Ezek után a másodfajú Lagrange egyenlet \eqref{lagrange} segítségével

felírhatjuk a rendszer mozgásegyenletét, ami a következő alakban írható

fel:

\begin{equation}

\bm{M}(\bm{q})\ddot{\bm{q}}+\bm{C}(\bm{q},\dot{\bm{q}})=\bm{Hu},\label{eq:eq-of-motion}

\end{equation}

ahol $\bm{M}$ a rendszer tömegmátrixa, $\bm{C}$ a sebességfüggő tehetetlenségi erőket tartalmazó általános erő vektor,

\begin{equation}

\bm{H}=\left[\begin{array}{cc}

1 & 0\\

0 & 1

\end{array}\right]

\end{equation}

a rendszer bemeneti mátrixa, % szerintem még egy sornak lenni kéne a H-ban!!

\begin{equation}

\bm{u}=\left[\begin{array}{c}

u\_{1}\\

u\_{2}

\end{array}\right]

\end{equation}

pedig a szabályozó nyomatékok vektora. Terjedelmük miatt az $\bm{M}$

és $\bm{C}$ mátrixok az \ref{chap:A-robot-mozg=0000E1segyenlet=0000E9nek}

függelékben találhatók.

\chapter{A rendszer relatív fokai}

\section{Definíció}

Az ún. relatív fok (relative degree) fontos szerepet játszik a nemlineáris

rendszerek szabályozásában. Használatával leírhatjuk a bemenetek és

kimenetek közt fennálló kapcsolatot. \cite{bencsik2017dynamic,hangos2006analysis}

A relatív fok definiálásához vegyünk egy általános egy bemenetű, egy

kimenetű (SISO) rendszert:

\begin{equation}

\dot{\bm{x}}=\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u,\label{eq:rel-deg-xdot}

\end{equation}

ahol $\bm{x}=\left[\bm{q},\,\dot{\bm{q}}\right]^{\mathrm{T}},\,\bm{x}\in\mathbb{R}^{2n}$

a rendszer állapotvektora. A rendszer kimenete pedig legyen

\begin{equation}

y=h(\bm{x}).\label{eq:rel-deg-output}

\end{equation}

Ha a rendszer kimenetét $r$-szer differenciáljuk az idő szerint addig,

amíg az $u$ bemenet explicit módon meg nem jelenik a kifejezésben,

akkor $r$ a rendszer bemenete és kimenete közti relatív fok. Behelyettesítve

\eqref{eq:rel-deg-xdot} egyenletet, \eqref{eq:rel-deg-output} idő

szerinti deriváltja a következő:

% ezt a 4.3 egyenletet szedd szét 2 egyenletre. Soha ne legyen olyna, hogy két egyenlőségjel van egy számozott egyenletben, mert azt ugye 3 egyenletként lehet értelmezni, pl a=b=c jelenti ezt a hármat: a=b, a=c, b=c

\begin{equation}

\frac{dy}{dt}=\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}\dot{\bm{x}}=\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}\bm{f}(\bm{x})+\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}\bm{g}(\bm{x})u.

\end{equation}

A jelölések egyszerűsítésének érdekében az ún. Lie-derivált

fogalmát használja a hivatkozott szakirodalom:

\begin{equation}

\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}\bm{f}(\bm{x})=L\_{f}h.

\end{equation}

% ne csak az Lf(h) hanem az Lg(h) is legyen bevezetve

A következőkben számítsuk ki a kimenet idő szerinti deriváltjait,

és vezessük be a $k$ indexet, melynek szerepét később a definícióban

láthatjuk \cite{hangos2006analysis}:

\begin{itemize}

\item a kimenet (nulladik derivált)

\begin{equation}

y=h(\bm{x})

\end{equation}

\item első derivált,%space$k=0$

\begin{equation}

\frac{dy}{dt}=\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}\dot{\bm{x}}=\frac{\partial h(\bm{x})}{\partial\bm{x}}(\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u)=L\_{f}h+L\_{g}h\cdot u

\end{equation}

Feltételezzük, hogy olyan rendszert vizsgálunk, amelyre $L\_{g}h=0$, így $\dot{y}=L\_{f}h$.

\item második derivált,$k=1$

\begin{equation}

\frac{d^{2}y}{dt^{2}}==\frac{\partial(L\_{f}h)}{\partial\bm{x}}(\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u)=L\_{f}^{2}h+L\_{g}L\_{f}h\cdot u

\end{equation}

Feltételezzük, hogy olyan rendszert vizsgálunk, amelyre $L\_{g}L\_{f}h=0$, így $\ddot{y}=L\_{f}^{2}h$.

\item harmadik derivált,$k=2$

\begin{equation}

\frac{d^{3}y}{dt^{3}}==\frac{\partial(L\_{f}^{2}h)}{\partial\bm{x}}(\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u)=L\_{f}^{3}h+L\_{g}L\_{f}^{2}h\cdot u

\end{equation}

Ha a vizsglát rendszerre $L\_{g}L\_{f}^{2}h\neq0$, akkor a rendszer relatív foka $r=3$. Ellenkező

esetben addig folytatjuk a differenciálást, amíg az $L\_{g}L\_{f}^{k}h\neq0$

feltétel nem teljesül.

\end{itemize}

A relatív fok általános definíciója tehát a következő \cite{hangos2006analysis}:

Egy nemlineáris, egy bemenetű, egy kimenetű (SISO) rendszer

\begin{align\*}

\dot{\bm{x}} & =\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u\\

y & =h(\bm{x})

\end{align\*}

relatív foka $r$ az $\bm{x}^{0}$ pontban, ha

\begin{enumerate}

\item $L\_{g}L\_{f}^{k}h(\bm{x})=0$ minden $\bm{x}$-re az $\bm{x}^{0}$

pont környezetében minden $k$-ra úgy, hogy $k<r-1$.

\item $L\_{g}L\_{f}^{r-1}h(\bm{x}^{0})\neq0.$

\end{enumerate}

Egész biztos, hogy a második pontban r-1 –et kell írni Lf kitevőjébe és nem r-et? Lehet ám, nem tudom hirtelen.

Fontos megjegyezni, hogy a relatív fok értelmezhető több bemenetű,

több kimenetű (MIMO) rendszerekre is. Ekkor a relatív fokokat páronként,

az összes lehetséges bemenet-kimenet kombinációra számítjuk \cite{hangos2006analysis}.

% Bencsik Laci PhD-ben nézd meg a (2.6) egyenlet alatt: elvileg csak annyi relative degree számít végül, ahány kimenetünk van. Te itt most egy relative degree 2 dimenziós mátrixról beszélsz, de elég egy relative degree egy dimenziós vektor is. Valahogy úgy, hog ymindgyik kimenetre azt állapítom, meg, hogy mikor jelenik meg benne bármelyik bemenet. De azért olvasd el ezt a részt e tekintetben. És mondhatod, hogy azért Te az érdekesség kedvéért a teljes r mátrixot előállítottad. Majd abból összerakhatnád az egy dimanziós, 2 méretű r vektort is.

\section{Az űrbéli robot relatív fokai}

Az űrbéli robot több bemenetű, több kimenetű (MIMO) rendszer, ezért

relatív fokai bemenet-kimenet páronként definiálhatók. A robot két

bemenete a karon található két aktuátor, kimenete pedig a robotkar

végpontjának pozíciója, mely szintén két kimenetet (a végpont $x$

és $y$ koordinátája) jelent. Így tehát összesen 4 különböző, $r\_{u\_{1},x}$,

$r\_{u\_{1},y}$, $r\_{u\_{2},x}$, $r\_{u\_{2},y}$ relatív fokokat definiálhatunk

az űrbéli robot esetén.

Az űrbéli robot esetében a állapotváltozók vektora $\bm{x}=\left[q\_{0},\,q\_{1},\,q\_{2},\,\dot{q}\_{0},\,\dot{q}\_{1},\,\dot{q}\_{2}\right]^{\mathrm{\mathrm{T}}}$,

melynek deriváltja $\dot{\bm{x}}=\left[\dot{q}\_{0},\,\dot{q}\_{1},\,\dot{q}\_{2},\,\ddot{q}\_{0},\,\ddot{q}\_{1},\,\ddot{q}\_{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

Mivel a szögsebesség értékek állapotváltozók is egyben, a \ref{eq:rel-deg-xdot}

alakú felíráshoz a szöggyorsulásokat kell kifejeznünk a szögekkel

és szögsebességekkel. Ezt a \eqref{eq:eq-of-motion} mozgásegyenlet

segítségével tehetjük meg az alábbi módon:

\begin{equation}

\ddot{\bm{q}}=\bm{M}^{-1}(\bm{Hu}-\bm{C}).

\end{equation}

\subsection{Az $u\_{1}$ bemenet relatív fokai}

A \eqref{eq:rel-deg-xdot} egyenlet ez esetben

\begin{equation}

\dot{\bm{x}}=\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u\_{1}.

\end{equation}

Az $\dot{\bm{x}}$ vektor kifejezéséből $u\_{1}$ együtthatóinak kigyűjtése

után az $\bm{f}(\bm{x})$ és $\bm{g}(\bm{x})$ vektorok könnyedén

meghatározóak, azonban terjedelmi okok miatt itt nem közöljük őket.

% függelékben se fér el? A tömegmátrix meg a C például jó volt, hogy megvolt ott.

% (Amúgy ott is van minimális javítás a szövegben)

\subsubsection{A robotkar végpontjának $x$ koordinátájára nézve}

A rendszer kimenete a robotkar végpontjának $x$ koordinátája

a robot súlypontjához rögzített koordináta-rendszerben:

\begin{align}

h(\bm{x})= & \frac{2l\_{0}m\_{0}\cos(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{0}+q\_{1})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\nonumber \\

& +\frac{l\_{2}(2m\_{0}+2m\_{1}+m\_{2})\cos(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}.\label{eq:x-output}

\end{align}

Most számítsuk ki a relatív fok meghatározásához szükséges Lie-deriváltakat.

\begin{itemize}

\item $k=0$

\begin{equation}

L\_{g}h=0

\end{equation}

\item $k=1$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}h=\phi\_{u\_{1},x}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})

\end{equation}

A kapott $\phi\_{u\_{1},x}$ összefüggés a robot szögkoordinátáitól

függ (terjedelmi okok miatt a kifejtett összefüggést nem közöljük),

ami a legtöbb esetben nem nulla. Ilyenkor a relatív fok $r\_{u\_{1},x}=2$.

Előállhat azonban a szögkoordinátáknak olyan kombinációja, melyekre

$\phi\_{u\_{1},x}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})=0$. E kombinációk előfordulása

a \ref{fig:r-u1-x-3d} ábrán látható.

\begin{figure}[h]

\begin{centering}

\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u1\_x\_3dplot}\caption{A $\phi\_{u\_{1},x}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u1-x-3d}}

\par\end{centering}

\end{figure}

\\

A $q\_{0}$ változót kiküszöbölhetjük a $\phi\_{u\_{1},x}$ összefüggésből

úgy, hogy a koordináta-rendszert úgy rögzítjük a robot súlypontjához,

hogy ne csak eltolva kerüljön a súlypontba, hanem forogjon is együtt

a robot alapjával ($q\_{0}$ szöggel). Ez a megfontolás nem változtat

a relatív fokokon, viszont az így kapott $\hat{\phi}\_{u\_{1},x}(q\_{1},q\_{2})$

összefüggés így már csak két változótól függ, mivel így az új koordináta-rendszerben

$q\_{0}\equiv0$. A $\hat{\phi}\_{u\_{1},x}(q\_{1},q\_{2})=0$-t eredményező

szögértékek a \ref{fig:r-u1-x-2d} ábrán láthatóak. Ezen szögértékek

esetén a relatív fok $r\_{u\_{1},x}>2$. A \ref{fig:r-u1-x-2d} ábrán

látható, hogy egy fix $q\_{1}$ értékhez 4 különböző $q\_{2}$ érték

tartozik, melyek $2\pi$ periódusonként ismétlődnek, de a 4 $q\_{2}$

érték között is felfedezhető $\pi$ eltolás páronként 2-2 érték között.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u1\_x\_2dplot}\caption{A $\hat{\phi}\_{u\_{1},x}(q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u1-x-2d}}

\end{figure}

\\

Ha a $\hat{\phi}\_{u\_{1},x}(q\_{1},q\_{2})=0$ összefüggésbe például

$q\_{1}=0$-t helyettesítünk, a kapott 4 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{1},x}>2$,

a \ref{fig:4-konfig-ru1x} ábrán látható. Ezekben a konfigurációkban is meghatározható a reletív fok, amit a további számítások foglalnak össze.

\begin{figure}[h]

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=-1.692\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_x\_example1}}\hspace{2cm}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=1.448\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_x\_example3}}\smallskip{}

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=-0.1254\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_x\_example2}}\hspace{2cm}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=3.016\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_x\_example4}}

\caption []{4 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{1},x}>2$}

\label{fig:4-konfig-ru1x}

\end{figure}

\item $k=2$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{2}h=\tilde{\phi}\_{u\_{1},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})

\end{equation}

A most kapott összefüggés a $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$ szögsebességektől

függ. Azokban az esetekben, amikor $\tilde{\phi}\_{u\_{1},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})\neq0$,

a relatív fok $r\_{u\_{1},x}=3.$\\

Amikor $\tilde{\phi}\_{u\_{1},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})=0$, a relatív

fok $r\_{u\_{1},x}>3.$ Ilyenkor $\tilde{\phi}\_{u\_{1},x}=0$ egyenletből egy lineáris

összefüggést kapunk $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$ között

\begin{equation}

\dot{q}\_{1}=a+b\dot{q}\_{2}

\end{equation}

alakban. Ha ez a feltétel teljesül, tovább kell folytatnunk a számolást.

\item $k=3$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{3}h=\check{\phi}\_{u\_{1},x}(u\_{2})=\alpha+\beta u\_{2}

\end{equation}

Ez az összefüggés már csak az $u\_{2}$ bemenettől függ, méghozzá lineárisan.

Abban az esetben, ha $\check{\phi}\_{u\_{1},x}(u\_{2})\neq0$, a relatív

fok $r\_{u\_{1},x}=4.$ Egy $u\_{2}$ érték létezik, melyre $\check{\phi}\_{u\_{1},x}(u\_{2})=0$,

ilyenkor a relatív fok $r\_{u\_{1},x}>4$, és folytatnunk kell a számolást.

\item $k=4$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{4}h=C\neq0

\end{equation}

Mivel nem maradt már több változónk, aminek nincs előírt értéke, a

fenti összefüggés minden esetben egy nem zérus konstans. Az előfordulható

legmagasabb relatív fok az $u\_{1}$ bemenet és a robotkar végpontjának

$x$ koordinátája között tehát $r\_{u\_{1},x}=5$.

\end{itemize}

% Ezt az r=5-öt meg lehetne előlegezni, és a 4.1, 4.2 ábrákon az üres tartomámnyokra rányilazni, hogy r=2, a felületekre/vonalakra pedig, hogy r=5.

% A két ábrát pedig lehetne egymás mellé rakni, akkor kevésbé kerülne távoli helyekre a sok ábra. Az ábrafelirat ilyenkor lehet így: 4.1. ábra. A fi=0 esetek előfordulása (bal oldalon). A fikalap=0 esetek előfordulása (jobb oldalon).

\subsubsection{A robotkar végpontjának $y$ koordinátájára nézve}

Hasonlóan számíthatjuk ki a relatív fokot, ha kimenetnek a robotkar

végpontjának $y$ koordinátáját választjuk a súlyponthoz rögzített

koordináta-rendszerben:

\begin{align}

h(\bm{x})= & \frac{2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}+q\_{0})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{0}+q\_{1})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\nonumber \\

& +\frac{l\_{2}(2m\_{0}+2m\_{1}+m\_{2})\sin(q\_{0}+q\_{1}+q\_{2})}{2(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}.\label{eq:y-output}

\end{align}

A számolás menete megegyezik az előző számítással, csak az eredményekben

tér el attól.

\begin{itemize}

\item $k=0$

\begin{equation}

L\_{g}h=0

\end{equation}

\item $k=1$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}h=\phi\_{u\_{1},y}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})

\end{equation}

A kapott $\phi$ összefüggés itt is a szögkoordinátáktól függ, ami

a legtöbb esetben nem nulla. Ilyenkor a relatív fok $r\_{u\_{1},y}=2$.

Az $r\_{u\_{1},y}>2$ relatív fokot eredményező szögkoordináta kombinációk

a \ref{fig:r-u1-y-3d} ábrán láthatóak.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u1\_y\_3dplot}\caption{A $\phi\_{u\_{1},y}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u1-y-3d}}

\end{figure}

\\

A $q\_{0}$ változó kiküszöbölése utána a kapott összefüggés $\hat{\phi}\_{u\_{1},y}(q\_{1},q\_{2})$

. A $\hat{\phi}\_{u\_{1},y}(q\_{1},q\_{2})=0$-t, tehát $r\_{u\_{1},y}>2$

relatív fokot eredményező szögértékek a \ref{fig:r-u1-y-2d} ábrán

láthatóak. Egy fix $q\_{1}$ értékhez itt is 4 különböző $q\_{2}$ érték

tartozik, melyek $2\pi$ periódusonként ismétlődnek. A 4 $q\_{2}$

érték között itt is felfedezhető $\pi$ eltolás páronként 2-2 érték

között.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u1\_y\_2dplot}\caption{A $\hat{\phi}\_{u\_{1},y}(q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u1-y-2d}}

\end{figure}

\\

Példaképp, ha a $\hat{\phi}\_{u\_{1},y}(q\_{1},q\_{2})=0$ összefüggésbe

$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$-t helyettesítünk, a kapott 4 konfiguráció,

melyekre $r\_{u\_{1},y}>2$, a \ref{fig:4-konfig-ru1y} ábrán látható.

\begin{figure}[h]

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=-2.623\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_y\_example1}}\hspace{2cm}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=0.5182\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_y\_example3}}\smallskip{}

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=-0.7657\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_y\_example2}}\hspace{2cm}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=2.375\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u1\_y\_example4}}

\caption []{4 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{1},y}>2$}

\label{fig:4-konfig-ru1y}

\end{figure}

\item $k=2$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{2}h=\tilde{\phi}\_{u\_{1},y}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})

\end{equation}

Ez az összefüggés a $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$ szögsebességektől

függ. Azokban az esetekben, amikor $\tilde{\phi}\_{u\_{1},y}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})\neq0$,

a relatív fok $r\_{u\_{1},y}=3.$\\

Amikor $\tilde{\phi}\_{u\_{1},y}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})=0$, a relatív

fok $r\_{u\_{1},y}>3.$ Ilyenkor $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$ között

\begin{equation}

\dot{q}\_{1}=a+b\dot{q}\_{2}

\end{equation}

lineáris összefüggés figyelhető meg.

\item $k=3$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{3}h=\check{\phi}\_{u\_{1},y}(u\_{2})=\alpha+\beta u\_{2}

\end{equation}

Ez az összefüggés csak az $u\_{2}$ bemenettől függ, méghozzá lineárisan.

Amikor $\check{\phi}\_{u\_{1},y}(u\_{2})\neq0$, a relatív fok $r\_{u\_{1},y}=4.$Az

egy $u\_{2}$ értékre, melyre $\check{\phi}\_{u\_{1},y}(u\_{2})=0$, a

relatív fok $r\_{u\_{1},y}>4$.

\item $k=4$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{4}h=C\neq0

\end{equation}

Mivel már minden változó értékét fixáltuk, ez a kifejezés minden esetben

nem nulla. Így az előfordulható legmagasabb relatív fok az $u\_{1}$

bemenet és a robotkar végpontjának $y$ koordinátája között $r\_{u\_{1},y}=5$.

\end{itemize}

\subsection{Az $u\_{2}$ bemenet relatív fokai}

Vizsgáljuk most az $u\_{2}$ bemenet hatását a robotkar végpontjának

pozíciójára. A \eqref{eq:rel-deg-xdot} egyenlet így

\begin{equation}

\dot{\bm{x}}=\bm{f}(\bm{x})+\bm{g}(\bm{x})u\_{2},

\end{equation}

ahol $\bm{f}(\bm{x})$ és $\bm{g}(\bm{x})$ vektorok könnyedén meghatározóak,

de terjedelmi okokból nem közöljük őket.

\subsubsection{A robotkar végpontjának $x$ koordinátájára nézve}

Válasszuk először kimenetnek a robotkar végpontjának $x$ koordinátáját

(\eqref{eq:x-output} egyenlet). Az $u\_{1}$bemenet relatív fokainak

számításával analóg módon most is a különböző Lie-deriváltakat kell

vizsgálnunk az $r\_{u\_{2},x}$ relatív fok meghatározásához.

\begin{itemize}

\item $k=0$

\begin{equation}

L\_{g}h=0

\end{equation}

\item $k=1$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}h=\phi\_{u\_{2},x}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})

\end{equation}

A $\phi\_{u\_{2},x}$ összefüggés a robot 3 szögkoordinátájának függvénye,

és a legtöbb esetben nem nulla értéket vesz fel. Ekkor a relatív fok

$r\_{u\_{2},x}=2$. Az $r\_{u\_{2},x}>2$ relatív fokot eredményező szögkoordináták

a \ref{fig:r-u2-x-3d} ábrán láthatóak.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u2\_x\_3dplot}\caption{A $\phi\_{u\_{2},x}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u2-x-3d}}

\end{figure}

\\

A $\phi\_{u\_{2},x}$ kifejezésből szintén kiejthetjük a $q\_{0}$ szöget

a koordináta-rendszer forgatásával, így a $\hat{\phi}\_{u\_{2},x}(q\_{1},q\_{2})$

kifejezéshez jutva. Az $r\_{u\_{2},x}>2$ relatív fokot eredményező

$q\_{1}$ és $q\_{2}$ értékek a \ref{fig:r-u2-x-2d} ábrán láthatóak.

Az ábráról észrevehetjük, hogy ellentétben az $u\_{1}$ bemenet relatív

fokainál tapasztaltakkal, itt egy rögzített $q\_{1}$-hez csak 2 $q\_{2}$

érték tartozik, melyek $2\pi$ periodikusak.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u2\_x\_2dplot}\caption{A $\hat{\phi}\_{u\_{2},x}(q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u2-x-2d}}

\end{figure}

\\

Szemléltetésül a $\hat{\phi}\_{u\_{2},x}(q\_{1},q\_{2})=0$ összefüggésbe

$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$-t helyettesítve, a kapott 2 konfiguráció,

melyeknél $r\_{u\_{2},x}>2$, a \ref{fig:4-konfig-ru2x} ábrán látható.

Észrevehetjük, hogy a kapott $q\_{2}$ értékek közel állnak a $0\,\mathrm{rad}$

és $\pi\,\mathrm{rad}$ értékekhez, az eltérést csak a numerikus számítások

pontatlansága okozza.

\begin{figure}[h]

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=3.114\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u2\_x\_example1}}\hfill{}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=0.02650\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u2\_x\_example2}}

\caption []{2 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{2},x}>2$}

\label{fig:4-konfig-ru2x}

\end{figure}

\item $k=2$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{2}h=\tilde{\phi}\_{u\_{2},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})

\end{equation}

A $\tilde{\phi}\_{u\_{2},x}$ összefüggés a $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$

szögsebességektől függ. Amikor $\tilde{\phi}\_{u\_{2},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})\neq0$,

a relatív fok $r\_{u\_{2},x}=3.$ Ha $\tilde{\phi}\_{u\_{2},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})=0$,

a relatív fok $r\_{u\_{2},x}>3.$ Ilyenkor $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$

között

\begin{equation}

\dot{q}\_{1}=a+b\dot{q}\_{2}

\end{equation}

lineáris kapcsolat áll fent.

\item $k=3$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{3}h=\check{\phi}\_{u\_{2},x}(u\_{1})=\alpha+\beta u\_{1}

\end{equation}

A $\check{\phi}\_{u\_{2},x}$ kifejezés az $u\_{1}$ bemenet lineáris

függvénye. Amikor $\check{\phi}\_{u\_{2},x}(u\_{1})\neq0$, a relatív

fok $r\_{u\_{2},x}=4.$ $\check{\phi}\_{u\_{2},x}(u\_{1})$ az $u\_{1}$bemenet

egyetlen értékénél vesz fel $0$-t, ilyenkor a relatív fok $r\_{u\_{2},x}>4$.

\item $k=4$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{4}h=C\neq0

\end{equation}

A kapott összefüggés nem nulla, így az előfordulható legmagasabb relatív

fok az $u\_{2}$ bemenet és a robotkar végpontjának $x$ koordinátája

között is $r\_{u\_{2},x}=5$.

\end{itemize}

% Próbáld ki, ha lehet, hogy ha a robot testének tömege végtelenszer (vagy mondjuk legalább 1000-szer) nagyobb a kar össztömegénél, akkor milyen szögekben fognak állni a karok. Akkor lehet, hogy szép merőleges és függőleges irányokban.

% Ha mégsem jön ez be, akkor meg érdemes végtelenszeres kar tömeget nézni….

\subsubsection{A robotkar végpontjának $y$ koordinátájára nézve}

% az előző változtatásokat ide is alkalmazd légyszi

Legyen a kimenet a robotkar végpontjának $y$ koordinátája (\eqref{eq:y-output}

egyenlet), és ismételjük meg az előző pontban leírt számításokat.

\begin{itemize}

\item $k=0$

\begin{equation}

L\_{g}h=0

\end{equation}

\item $k=1$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}h=\phi\_{u\_{2},y}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})

\end{equation}

A $\phi\_{u\_{2},y}$ összefüggés itt is a robot 3 szögkoordinátájának

függvénye, ami a legtöbb esetben nem nulla. Ekkor a relatív fok $r\_{u\_{2},y}=2$.

Az $r\_{u\_{2},y}>2$ relatív fokot eredményező szögkoordináták a \ref{fig:r-u2-y-3d}

ábrán láthatóak.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u2\_y\_3dplot}\caption{A $\phi\_{u\_{2},y}(q\_{0},q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u2-y-3d}}

\end{figure}

\\

A $\phi\_{u\_{2},y}$ kifejezésből $q\_{0}$ a szög kiejtésével a $\hat{\phi}\_{u\_{2},y}(q\_{1},q\_{2})$

kifejezést kapjuk. Az $r\_{u\_{2},y}>2$ relatív fokot eredményező $q\_{1}$

és $q\_{2}$ értékek a \ref{fig:r-u2-y-2d} ábrán láthatóak. Az előző

számításhoz hasonlóan egy rögzített $q\_{1}$ értékhez 2 $q\_{2}$ érték

tartozik, melyek $2\pi$ periodikusak.

\begin{figure}[h]

\centering{}\includegraphics[scale=0.5]{image/r\_u2\_y\_2dplot}\caption{A $\hat{\phi}\_{u\_{2},x}(q\_{1},q\_{2})=0$ esetek előfordulása\label{fig:r-u2-y-2d}}

\end{figure}

\\

Egy példaként $q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$-t helyettesítve a $\hat{\phi}\_{u\_{2},y}(q\_{1},q\_{2})=0$

összefüggésbe , a kapott 2 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{2},y}>2$,

a \ref{fig:4-konfig-ru2y} ábrán látható.

\begin{figure}[h]

\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=-1.272\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u2\_y\_example1}}\hfill{}\subfloat[$q\_{1}=0\,\mathrm{rad}$, $q\_{2}=1.259\,\mathrm{rad}$]{\centering{}\includegraphics[scale=0.2]{image/r\_u2\_y\_example2}}

\caption []{2 konfiguráció, melyekre $r\_{u\_{2},y}>2$}

\label{fig:4-konfig-ru2y}

\end{figure}

\item $k=2$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{2}h=\tilde{\phi}\_{u\_{2},y}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})

\end{equation}

A $\tilde{\phi}\_{u\_{2},y}$ összefüggés a $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$

szögsebességek függvénye. $\tilde{\phi}\_{u\_{2},x}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})\neq0$

esetén a relatív fok $r\_{u\_{2},y}=3.$ Akkor, ha $\tilde{\phi}\_{u\_{2},y}(\dot{q}\_{1},\dot{q}\_{2})=0$,

a relatív fok $r\_{u\_{2},y}>3.$ Ilyenkor $\dot{q}\_{1}$ és $\dot{q}\_{2}$között

\begin{equation}

\dot{q}\_{1}=a+b\dot{q}\_{2}

\end{equation}

lineáris kapcsolat van.

\item $k=3$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{3}h=\check{\phi}\_{u\_{2},y}(u\_{1})=\alpha+\beta u\_{1}

\end{equation}

$\check{\phi}\_{u\_{2},y}$ az $u\_{1}$ bemenet lineáris függvénye.

Amikor $\check{\phi}\_{u\_{2},y}(u\_{1})\neq0$, a relatív fok $r\_{u\_{2},y}=4.$

$\check{\phi}\_{u\_{2},x}(u\_{1})=0$ egyetlen $u\_{1}$ értéknél valósul

meg, ekkor a relatív fok $r\_{u\_{2},y}>4$.

\item $k=4$

\begin{equation}

L\_{g}L\_{f}^{4}h=C\neq0

\end{equation}

Az összefüggés nem nulla, tehát az előfordulható legmagasabb relatív

fok az $u\_{2}$ bemenet és a robotkar végpontjának $y$ koordinátája

között szintén $r\_{u\_{2},y}=5$.

\end{itemize}

\chapter{Összefoglalás}

\begin{comment}

\bibliographystyle{plain}

\addcontentsline{toc}{chapter}{\bibname}\nocite{\*}

\bibliography{irodalomjegyzek}

\end{comment}

\nocite{\*}

\printbibliography[ heading=bibintoc, title={Irodalomjegyzék} ]

\appendix

%dummy comment inserted by tex2lyx to ensure that this paragraph is not empty%dummy comment inserted by tex2lyx to ensure that this paragraph is not empty%dummy comment inserted by tex2lyx to ensure that this paragraph is not empty%dummy comment inserted by tex2lyx to ensure that this paragraph is not empty

\chapter\*{Függelék}

\addcontentsline{toc}{chapter}{Függelék} \setcounter{chapter}{6}

%\setcounter{equation}{0} % a fofejezet-szamlalo az angol ABC 6. betuje (F) lesz \numberwithin{equation}{section} \numberwithin{figure}{section}

\section{A robot mozgásegyenletének mátrixai\label{chap:A-robot-mozg=0000E1segyenlet=0000E9nek}}

Az űrbéli robot mozgásegyenletének általános tömegmátrixa

\begin{equation}

\bm{M}=\left[\begin{array}{ccc}

m\_{11} & m\_{12} & m\_{13}\\

m\_{21} & m\_{22} & m\_{23}\\

m\_{31} & m\_{32} & m\_{33}

\end{array}\right],

\end{equation}

ahol

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{11}= & \frac{4l\_{0}l\_{1}m\_{0}(m\_{1}+2m\_{2})\cos(\varphi\_{0}-q\_{1})+4l\_{0}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2})+4\theta\_{0}m\_{0}+4\theta\_{0}m\_{1}+4\theta\_{0}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{4\theta\_{1}m\_{0}+4\theta\_{1}m\_{1}+4\theta\_{1}m\_{2}+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}+4l\_{0}^{2}m\_{0}m\_{1}+4l\_{0}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{1}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{4l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{1}^{2}m\_{1}m\_{2}+4l\_{1}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(q\_{2})+2l\_{1}l\_{2}m\_{1}m\_{2}\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{12}= & \frac{2l\_{0}l\_{1}m\_{0}(m\_{1}+2m\_{2})\cos(\varphi\_{0}-q\_{1})+2l\_{0}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2})+4\theta\_{1}m\_{0}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{4\theta\_{1}m\_{1}+4\theta\_{1}m\_{2}+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}+l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{1}+4l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{2}+}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{1}^{2}m\_{1}m\_{2}+4l\_{1}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(q\_{2})+2l\_{1}l\_{2}m\_{1}m\_{2}\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{13}= & \frac{2l\_{0}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2})+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{21}= & \frac{2l\_{0}l\_{1}m\_{0}(m\_{1}+2m\_{2})\cos(\varphi\_{0}-q\_{1})+2l\_{0}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2})+4\theta\_{1}m\_{0}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{4\theta\_{1}m\_{1}+4\theta\_{1}m\_{2}+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}+l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{1}+4l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{2}+}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{1}^{2}m\_{1}m\_{2}+4l\_{1}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(q\_{2})+2l\_{1}l\_{2}m\_{1}m\_{2}\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{22}= & \frac{4\theta\_{1}(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}+l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{1}4l\_{1}^{2}m\_{0}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{1}^{2}m\_{1}m\_{2}+2l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

m\_{23}=\frac{4\theta\_{2}(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})+l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{2}(m\_{0}+m\_{1})}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

m\_{31}= & \frac{2l\_{0}l\_{2}m\_{0}m\_{2}\cos(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2})+4\theta\_{2}m\_{0}+4\theta\_{2}m\_{1}+4\theta\_{2}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{0}m\_{2}+l\_{2}^{2}m\_{1}m\_{2}}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

m\_{32}=\frac{4\theta\_{2}(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})+l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\cos(q\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{2}(m\_{0}+m\_{1})}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{equation}

\begin{equation}

m\_{33}=\frac{4\theta\_{2}(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})+l\_{2}^{2}m\_{2}(m\_{0}+m\_{1})}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}.

\end{equation}

A sebességfüggő tehetetlenségi erőket tartalmazó általános erő vektor

\begin{equation}

\bm{C}=\left[\begin{array}{c}

c\_{1}\\

c\_{2}\\

c\_{3}

\end{array}\right],

\end{equation}

ahol

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

c\_{1}= & -\frac{2l\_{2}m\_{2}\dot{q}\_{2}\left(\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)(l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{2})-2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2}))}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{-2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{1}\left(2\dot{q}\_{0}+\dot{q}\_{1}\right)(l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\sin(\varphi\_{0}-q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\sin(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2}))}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{2}m\_{2}\dot{q}\_{2}^{2}(l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{2})-2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2}))}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})},

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

c\_{2}= & -\frac{2l\_{0}m\_{0}\dot{q}\_{0}^{2}(l\_{1}(m\_{1}+2m\_{2})\sin(\varphi\_{0}-q\_{1})+l\_{2}m\_{2}\sin(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2}))}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}\\

& \frac{+2l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\dot{q}\_{0}\dot{q}\_{2}\sin(q\_{2})+l\_{1}l\_{2}m\_{2}(2m\_{0}+m\_{1})\dot{q}\_{2}\sin(q\_{2})\left(2\dot{q}\_{1}+\dot{q}\_{2}\right)}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+

\end{array}

\end{equation}

\begin{equation}

\begin{array}{cc}

c\_{3}= & \frac{l\_{2}m\_{2}\dot{q}\_{0}^{2}(l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\sin(q\_{2})-2l\_{0}m\_{0}\sin(\varphi\_{0}-q\_{1}-q\_{2}))}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}+\\

& \frac{l\_{2}m\_{2}\left(2l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\dot{q}\_{0}\dot{q}\_{1}\sin(q\_{2})+l\_{1}(2m\_{0}+m\_{1})\dot{q}\_{1}^{2}\sin(q\_{2})\right)}{4(m\_{0}+m\_{1}+m\_{2})}.

\end{array}

\end{equation}

\end{document}