第1章　ストークスパラメータ

1.1　ストークスパラメータの定義

xyz 直交座標系において、z 軸正の方向に進行する光を考える。この光の電場ベクトルを $\boldsymbol{E}(t)$ とすると、これは一般に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t) &= E_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_y\hat{\boldsymbol{e}}_y &(1.1)\\ &= a_x\cos(\omega t - kz + \delta_x)\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_y\cos(\omega t - kz + \delta_y)\hat{\boldsymbol{e}}_y &(1.2)\end{aligned}$$

と表される。ここで、E_x, E_y は x 軸、y 軸方向成分であり、a_x, a_y は振幅、ω は角振動数、k は波数、δ_x, δ_y は位相オフセットである。また、$\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ はそれぞれ x 軸、y 軸正の方向の単位ベクトルである。$\delta = \delta_y - \delta_x$ とすると、ストークスパラメータ I, Q, U, V は

$$\begin{aligned}I &= a_x^2 + a_y^2 &(1.3)\\ Q &= a_x^2 - a_y^2 &(1.4)\\ U &= 2a_xa_y\cos\delta &(1.5)\\ V &= 2a_xa_y\sin\delta &(1.6)\end{aligned}$$

と定義される。複素電場ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ を用いてストークスパラメータを表すことを考える。$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ は一般に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}} &= a_xe^{i(\omega t - kz + \delta_x)}\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_ye^{i(\omega t - kz + \delta_y)}\hat{\boldsymbol{e}}_y &(1.7)\\ &= \mathcal{E}_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + \mathcal{E}_y\hat{\boldsymbol{e}}_y &(1.8)\end{aligned}$$

と表される。ここで、$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ は x 軸、y 軸方向成分である。ストークスパラメータは

$$\begin{aligned}I &= |\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2 &(1.9)\\ Q &= |\mathcal{E}_x|^2 - |\mathcal{E}_y|^2 &(1.10)\\ U &= 2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*\right] = \mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* + \mathcal{E}_x^*\mathcal{E}_y &(1.11)\\ V &= 2\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*\right] = \frac{1}{i}\left(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* - \mathcal{E}_x^*\mathcal{E}_y\right) &(1.12)\end{aligned}$$

と表される。

1.2　座標回転に対するストークスパラメータの変換

xyz 直交座標系を z 軸周りに θ だけ回転させた $x'y'z$ 直交座標系を考える。このとき、x', y', z 軸の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_{x'}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{y'}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ はそれぞれ

$$\left(\hat{\boldsymbol{e}}_x,\, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z\right) = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_{x'},\, \hat{\boldsymbol{e}}_{y'}, \hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

と表される。複素電場ベクトル (1.8) を $x'y'z$ 直交座標系で表すと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_x\big(\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{x'} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{y'}\big) + \mathcal{E}_y(-\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{x'} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{y'}) && (1.14)\\
&= (\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_{x'} + (\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_{y'} && (1.15)\\
&= \mathcal{E}_{x'}\hat{\boldsymbol{e}}_{x'} + \mathcal{E}_{y'}\hat{\boldsymbol{e}}_{y'} && (1.16)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\mathcal{E}_{x'} = \mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta$, $\mathcal{E}_{y'} = \mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta$ である。このとき、$x'y'z$ 直交座標系でのストークスパラメータは

$$
\begin{aligned}
I' &= |\mathcal{E}_{x'}|^2 + \left|\mathcal{E}_{y'}\right|^2\\
&= |\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta|^2 + |\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta|^2\\
&= |\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2\\
&= I
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

$$
\begin{aligned}
Q' &= |\mathcal{E}_{x'}|^2 - \left|\mathcal{E}_{y'}\right|^2\\
&= |\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta|^2 - |\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta|^2\\
&= \Big(|\mathcal{E}_x|^2 - |\mathcal{E}_y|^2\Big)\cos 2\theta - \big(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* + \mathcal{E}_x^*\mathcal{E}_y\big)\sin 2\theta\\
&= Q\cos 2\theta - U\sin 2\theta
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

$$
\begin{aligned}
U' &= \mathcal{E}_{x'}\mathcal{E}_{y'}^* - \mathcal{E}_{x'}^*\mathcal{E}_{y'}\\
&= (\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta)(\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta)^*\\
&\qquad - (\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta)^*(\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta)\\
&= \Big(|\mathcal{E}_x|^2 - |\mathcal{E}_y|^2\Big)\sin 2\theta + \big(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* + \mathcal{E}_x^*\mathcal{E}_y\big)\cos 2\theta\\
&= Q\sin 2\theta + U\cos 2\theta
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \frac{1}{i}\big(\mathcal{E}_{x'}\mathcal{E}_{y'}^* - \mathcal{E}_{x'}^*\mathcal{E}_{y'}\big)\\
&= \frac{1}{i}\left[(\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta)(\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta)^*\right.\\
&\qquad \left.-(\mathcal{E}_x\cos\theta - \mathcal{E}_y\sin\theta)^*(\mathcal{E}_x\sin\theta + \mathcal{E}_y\cos\theta)\right]\\
&= \frac{1}{i}\big(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* - \mathcal{E}_x^*\mathcal{E}_y\big)\\
&= V
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

となる。すなわち

$$
\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}
\tag{1.21}
$$

と座標の回転に対して 2 倍の角度で回転することがわかる。