# Задачи журнала Квант

# Chapter 1

# 1970

**Exercise 1.0.1: M24**

Любую дробь $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ - натуральные числа, $1 < m < n$, можно представить в виде суммы нескольких дробей вида $\frac{1}{q}$, причём таких, что знаменатель каждой следующей из этих дробей делится на знаменатель предыдущей дроби. Докажите это.

**Решение.**
По условию задачи

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{a_2}\left(1 + \frac{1}{a_3}(1 + \dots)\right)\right)$$

Исходя из этого можно предложить следующий алгоритм. Пусть $a_1$ будет минимальным числом при котором выполняется $ma_1 > n$. Очевидно, что $ma_1 - n < m$. Тогда

$$\frac{ma_1}{n} - 1 = \frac{ma_1 - n}{n} = \frac{m_1}{n} < \frac{m}{n}$$

Аналогично поступая с $\frac{m_1}{n}$ находим $a_2$. Так как числитель всегда уменьшается и взаимно прост со знаментателем, то в итоге он станет равным единице. На этом алгоритм завершается. ◀

**Exercise 1.0.2: M33**

Рассмотрим натуральное число $n > 1000$. Найдём остатки от деления числа $2^n$ на числа $1, 2, 3, \dots, n$ и найдём сумму всех этих остатков. Докажите, что эта сумма больше $2n$.

# Chapter 2

# 1971

**Exercise 2.0.1: M113**

Для любого натурального числа $n$ существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на $2^n$. Докажите это. (Например, 2 делится на 2, число 12 делится на 4, на 8 делится число 112, а на 16 делится число 2112.)

**Решение.**
Докажем это по индукции. Допустим, что существует число $S = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ из $n$ цифр, которое делится на $2^n$. Примеры таких чисел приведены в условии задачи. Тогда образуем следующее число из $n+1$ цифры $P = 10^n d + S$, где $d$ равно один или два. Если $S$ не делится на $2^{n+1}$, то выберем $d = 1$. Тогда $P = 2^n(5^n + R)$, где $R$ нечетное. И значит $P$ делится на $2^{n+1}$. В ином случае выберем $d = 2$. И получим аналогичный результат. ◀

# Chapter 3

# 1972

**Exercise 3.0.1: M146**

- В вершинах правильного 7-угольника расставлены чёрные и белые фишки. Докажите, что есть 3 фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.
- Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?
- Выясните, для каких правильных $n$-угольников аналогичное верно, а для каких - нет.

**Решение.**
В семиугольнике, очевидно, найдется две фишки одного цвета стоящие рядом. Пусть этот цвет - белый. Обозначим их $L$ и $R$ если следовать по часовой стрелке. Тогда фишки $L_1$ слева от $L$ и $R_1$ справа от $R$ должны быть черного цвета. Но тогда при любом цвете фишки $Q$ напротив стороны $LR$ возникнет равнобедренный треугольник $LRQ$ или $L_1R_1Q$. Очевидно данное рассуждение справедливо для всех многоугольников с нечетным числом сторон, кроме треугольника.
Для восьмиугольника контрпримером является раскраска 11221122. Очевидно в ней нет одноцветных равнобедренных тругольников.
Для произвольного правильного $n$-угольника с четным $n > 8$ любая раскраска где нет рядом стоящих фишек одного цвета, очевидно, не подходит. Значит будет две одноцветных фишки стоящие рядом. Рассуждая по аналогии, получим, что раскраска имеет вид 11221122.... Но в ней в силу периодичности будут равнобедренные тругольники одного цвета. ◀

**Exercise 3.0.2: M154**

На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

- некоторые 8 из этих отрезков имеют общую точку;
- некоторые 8 из этих отрезков таковы, что никакие два из них не пересекаются.

**Решение.**
Рассмотрим отрезок $[L_1, R_1]$ правый конец которого лежит левее всех остальных правых концов. Если существует 7 отрезков, левые концы которых лежат левее $R_1$, то задача решена. В ином случае существует не менее 43 отрезков, левые концы которых лежат правее $R_1$. Тем же способом выберем отрезок $[L_2, R_2]$. Аналогично, если существует 7 отрезков, левые концы которых лежат левее $R_2$, то задача решена. Если нет, то существет 36 отрезков левые концы которых лежат правее $R_2$. Действуя таким образом получим либо систему из 8 отрезков, имеющих общую точку, либо систему из отрезков $[L_1, R_1], [L_2, R_2], \ldots, [L_8, R_8]$ никакие два из которых не пересекаются. ◀

# Chapter 4

# 1974

**Exercise 4.0.1: M287**

Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух чисел этой последовательности единственным образом?

**Решение.**
Рассмотрим алгоритм для построения такой последовательности. Пусть последовательность уже построена до члена с номером $k$ и выглядит как $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Выберем наименьшее натуральное число $S$, которое еще не встречалось как разность между членами искомой последовательности, то есть $S \neq a_i - a_j$, где $j < i$ и $i, j \leqslant k$. Тогда добавим два новых элемента $a_{k+1} = 2a_k$ и $a_{k+2} = 2a_k + S$. Заметим, что $a_{k+1} - a_i = 2a_k - a_i \geqslant a_k$, где $i \leqslant k$, а значит точно не встречается среди разностей уже построенной последовательности. ◄

# Chapter 5

# 1975

**Exercise 5.0.1: M306**

Из шахматной доски удалена одна угловая клетка. На какое наименьшее число равновеликих (одинаковых по площади) треугольников можно разрезать оставшуюся часть доски?

# Chapter 6

# 1979

**Exercise 6.0.1: M554**

Назовём натуральное число $n$ хорошим, если существуют (не обязательно различные) такие натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_k$, что $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ и $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$. Известно, что все числа между 33 и 73 - хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, - тоже хорошие.

**Решение.**
Докажем несколько простых лемм. Во первых, если $n$ - хорошее, то $2n+2$ тоже хорошее.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n \implies 2 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i = 2n+2, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1 \implies \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = 1$$

Аналогично докажем, что $2n+9$ тоже хорошее

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n \implies 3 + 6 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i = 2n+9, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1 \implies \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = 1$$

Далее очевидно по индукции. ◀

**Exercise 6.0.2: M557**

Среди любых $n$ попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$, есть хотя бы одно простое число. Докажите это.

**Решение.**
Выберем произвольное множество $A$, удовлетворяющее условиям задачи. Допустим простых чисел в $A$ нет. Значит каждое число $a_i$ в $A$ делится, как минимум, на два простых числа $p_i$ и $q_i$, где $i = 1, \dots, n$. Пусть $p_i \geqslant q_i$. Так как любые два числа в $A$ взаимно просты, то $q_1, q_2, \dots, q_n$ все различны. Тогда $q_i^2 \leqslant p_i q_i = a_i < (2n-1)^2$. Значит $q_i < 2n-1$. Но простых чисел меньших $2n-1$ и больших 1 не более $n-1$. Противоречие. ◀

# Chapter 7

# 1991

**Exercise 7.0.1: M1275**

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots,$ натуральных чисел такова, что при любом натуральном $n$ верно равенство $a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1$. Докажите, что при $n > 9$ число $a_n - 22$ составное.

**Решение.**
Заметим, что если $a_k = 0$, то последовательность выглядит следующим образом

$$a_{k-1}, 0, 1, 1, 2, 3, 7, 22, \dots$$

Но мы можем получить эту последовательность представляя, что это значения по модулю $a_k$. Значит

$$a_{k+6} = 22 \mod a_k \implies a_{k+6} - 22 = 0 \mod a_k$$

◀

# Chapter 8

# 1999

**Exercise 8.0.1: M1667**

Натуральный ряд разбит на два бесконечных множества чисел. Докажите, что сумма некоторых 100 чисел одного из этих множеств равна сумме некоторых 100 чисел другого множества.

# Chapter 9

# 2000

**Exercise 9.0.1: M1731**

В ряд нарисованы 60 звёздочек. Два игрока по очереди заменяют звёздочки на цифры. Какую именно из оставшихся звёздочек заменять на цифру, решает игрок, делающий очередной ход. Докажите, что второй игрок может играть так, чтобы полученное число (возможно, начинающееся на цифру 0) делилось на 13.

**Решение.**
Заметим, что любое число вида $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$, а значит делится на 13. Значит можно разбить зведочки на 10 блоков по 6 звездочек, а второй игрок может дублировать цифру написанную первым игроком, чтобы получился набор блоков указанного выше типа. ◀

# Chapter 10

# 2001

**Exercise 10.0.1: M1756**

Среди любых трёх из нескольких данных натуральных чисел можно выбрать два, одно из которых делится на другое. Докажите, что все числа можно так покрасить двумя красками, что из любых чисел одного цвета одно делится на другое.

# Chapter 11

# 2003

**Exercise 11.0.1: M1847**

В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешено выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых чётное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в банках оказалось поровну пауков?

# Chapter 12

# 2006

**Exercise 12.0.1: M1981**

В клетках таблицы размером $11 \times 11$ расставлены натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша — произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

**Решение.**
Рассмотрим простые числа из промежутка от 1 до 121, для которых в таблице нет кратных. Это 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113. Их 13 штук. Значит в каком то столбце их не менее двух. Но если эти два числа встретились в одном столбце, то одно из них или его кратное должно быть и в одной строке с другим. Но этого быть не может. ◄

# Chapter 13

# 2007

**Exercise 13.0.1: M2033**

У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешено задавать ведущему вопросы вида "Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?". Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

# Chapter 14

# 2008

**Exercise 14.0.1: M2096**

Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая - не более чем из 10 человек. Любые 11 комиссий имеют хотя бы одного общего члена. Докажите, что существует человек, входящий во все комиссии.

# Chapter 15

# 2010

**Exercise 15.0.1: M2162**

Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовём хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Сейф откроется, если введён хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?