Задачи всероссийской олимпиады школьников по математике

Chapter 1

1992-1993

Exercise 1.0.1

Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

Решение.

◄

Exercise 1.0.2

В колоде n карт. Часть из них лежит рубашками вверх, остальные - рубашками вниз. За один ход разрешается взять несколько карт сверху, перевернуть полученную стопку и снова положить ее сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали рубашками вниз?

Chapter 2

1993-1994

Exercise 2.0.1

На столе лежат три кучки спичек. В первой кучке находится 100 спичек, во второй - 200, а в третьей - 300. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди, за один ход игрок должен убрать одну из кучек, а любую из оставшихся разделить на две непустые части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Exercise 2.0.2

В правильном $(6n+1)$-угольнике K вершин покрашено в красный цвет, а остальные - в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски.

Решение.
Введем обозначение $N = 6n+1$. Заметим, что среди треугольников нет равносторонних и отрезок между любыми двумя вершинами принадлежит ровно трем равнобедренным треугольникам. Составим соотношения между количествами треугольников и отрезков. T - количества треугольников, L количества отрезков.

- Количество синих отрезков, в силу того, что каждый такой отрезок входит либо в синий треугольник (который содержит три таких отрезка), либо в треугольник с двумя синими вершинами (содержит один такой отрезок) - $3L_b = 3T_{bbb} + T_{bb}$.
- Количество красных отрезков вычисляется аналогично - $3L_r = 3T_{rrr} + T_{rr}$.
- Количество красно-синих отрезков, так как их два в треугольнике с двумя синими вершинами и два в треугольнике с двумя красными вершинами - $3L_{rb} = 2T_{bb} + 2T_{rr}$

Тогда количество одноцветных треугольников

$$T_{rrr} + T_{bbb} = \frac{(3L_b - T_{bb}) + (3L_r - T_{rr})}{3} = L_b + Lr - \frac{L_{rb}}{2} = \binom{N-K}{2} + \binom{K}{2} - \frac{K(N-K)}{2}$$

◀

Chapter 3

2014-2015

Exercise 3.0.1

Назовём натуральное число почти квадратом, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.