Математические задачи, задачки и головоломки

Chapter 1

2024

Exercise 1.0.1

Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых десятичная запись числа $3n^2$ начинается с n (всех цифр n в десятичной записи, в том же порядке).

Решение.
Запишем условие в виде

$$3n^2 = 10^m n + b$$

где $b < 10^m$. Рассмотрим число вида

$$\overline{33\ldots34} = \frac{10^m + 2}{3}$$

Как видно из

$$3n^2 - 10^m n = \frac{10^{2m} + 4 \cdot 10^m + 4}{3} - \frac{10^{2m} + 2 \cdot 10^m}{3} = \frac{2}{3}(10^m + 2) < 10^m$$

это является решением задачи. ◀

Exercise 1.0.2

Доказать, что существует бесконечно много троек попарно взаимно-простых натуральных чисел a, b, c таких, что $a^2 + b^3 = c^4$.

Решение.
Запишем уравнение в виде

$$(c^2 - a)(c^2 + a) = b^3$$

Предположим, что $b = pq$, где p и q взаимно просты. И пусть

$$\begin{cases} c^2 - a = p^3 \\ c^2 + a = q^3 \end{cases}$$

Тогда получаем следующую систему

$$\begin{cases} 2c^2 = p^3 + q^3 \\ 2a = q^3 - p^3 \end{cases}$$

Решим уравнение $2c^2 = p^3 + q^3$. Пусть $p = s - 1$, а $q = s + 1$. Тогда при замене $c = 3d$ и $s = 3t$

$$d^2 = t(3t^2 + 1)$$

◀

Chapter 2

2021

Exercise 2.0.1

Reverse(n) - "обращение" десятичной записи числа n, то есть число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что уравнение Reverse$(n) = \frac{4n}{7}$ имеет бесконечно много решений.

Решение.
Пусть $n = 10a + b$. Тогда Reverse$(n) = 10^m b + a$. И $a < 10^m$. Запишем уравнение

$$\frac{4n}{7} = \text{Reverse}(n) \implies 40a + 4b = 7(10^m b + a) \implies 33a = b(7 \cdot 10^m - 4)$$

Заметим, что $7 \cdot 10^m - 4$ при нечетном m будет делиться нацело на 33. И, например, при $m = 1$ получим $a = 2b$. Положив $b = 1$ получим $n = 21$. Легко проверить, что оно удовлетворяет условию задачи. Заметим, что периодическое решение $\overline{21}$ тоже будет решением уравнения. И оно тоже будет генерироваться формулой

$$a = \frac{7 \cdot 10^{2p+1} - 4}{33} b$$

◄

Chapter 3

2020

Exercise 3.0.1

Сколькими способами можно расставить по кругу 21 цифру, используя только цифры от 1 до 7, чтобы каждая пара различных цифр где-то на круге была соседями?

Exercise 3.0.2

Рассмотрим все упорядоченные четверки натуральных чисел (a, b, c, d) с суммой 239. Докажите, что сумма произведений $abcd$, взятая по всем таким четверкам, кратна 239.

Chapter 4

2017

Exercise 4.0.1

На доске написаны 100 чисел $1, 2, \ldots, 100$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $\frac{ab}{a+b+1}$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

Exercise 4.0.2

Найдите (без компьютера) последние 4 цифры числа $2^{1000} + 5^{1000}$.

Chapter 5

2016

Exercise 5.0.1

В салоне самолета N мест. N пассажиров садятся на места по очереди следующим образом:

1. Первый пассажир садится на произвольное место
2. Каждый следующий пассажир садится на свое место, если оно свободно или на любое, если его место занято.

Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?