Задачи журнала Квант

Chapter 1

1970

Exercise 1.0.1: M24

Любую дробь $\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа, $1 < m < n$, можно представить в виде суммы нескольких дробей вида $\frac{1}{q}$, причём таких, что знаменатель каждой следующей из этих дробей делится на знаменатель предыдущей дроби. Докажите это.

Решение.
По условию задачи

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{a_2}\left(1 + \frac{1}{a_3}(1 + \dots)\right)\right)$$

Исходя из этого можно предложить следующий алгоритм. Пусть a_1 будет минимальным числом при котором выполняется $ma_1 > n$. Очевидно, что $ma_1 - n < m$. Тогда

$$\frac{ma_1}{n} - 1 = \frac{ma_1 - n}{n} = \frac{m_1}{n} < \frac{m}{n}$$

Аналогично поступая с $\frac{m_1}{n}$ находим a_2. Так как числитель всегда уменьшается и взаимно прост со знаментателем, то в итоге он станет равным единице. На этом алгоритм завершается. ◀

Exercise 1.0.2: M27

Если

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

то

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

Exercise 1.0.3: M33

Рассмотрим натуральное число $n > 1000$. Найдём остатки от деления числа 2^n на числа $1, 2, 3, \dots, n$ и найдём сумму всех этих остатков. Докажите, что эта сумма больше $2n$.

Chapter 2

1971

Exercise 2.0.1: M113

Для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n. Докажите это. (Например, 2 делится на 2, число 12 делится на 4, на 8 делится число 112, а на 16 делится число 2112.)

Решение.
Докажем это по индукции. Допустим, что существует число $S = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ из n цифр, которое делится на 2^n. Примеры таких чисел приведены в условии задачи. Тогда образуем следующее число из $n+1$ цифры $P = 10^n d + S$, где d равно один или два. Если S не делится на 2^{n+1}, то выберем $d = 1$. Тогда $P = 2^n(5^n + R)$, где R нечетное. И значит P делится на 2^{n+1}. В ином случае выберем $d = 2$. И получим аналогичный результат. ◀

Chapter 3

1972

Exercise 3.0.1: M146

- В вершинах правильного 7-угольника расставлены чёрные и белые фишки. Докажите, что есть 3 фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.
- Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?
- Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное верно, а для каких - нет.

Решение.
В семиугольнике, очевидно, найдется две фишки одного цвета стоящие рядом. Пусть этот цвет - белый. Обозначим их L и R если следовать по часовой стрелке. Тогда фишки L_1 слева от L и R_1 справа от R должны быть черного цвета. Но тогда при любом цвете фишки Q напротив стороны LR возникнет равнобедренный треугольник LRQ или L_1R_1Q. Очевидно данное рассуждение справедливо для всех многоугольников с нечетным числом сторон, кроме треугольника.
Для восьмиугольника контрпримером является раскраска 11221122. Очевидно в ней нет одноцветных равнобедренных тругольников.
Для произвольного правильного n-угольника с четным $n > 8$ любая раскраска где нет рядом стоящих фишек одного цвета, очевидно, не подходит. Значит будет две одноцветных фишки стоящие рядом. Рассуждая по аналогии, получим, что раскраска имеет вид $11221122\ldots$. Но в ней в силу периодичности будут равнобедренные тругольники одного цвета. ◀

Exercise 3.0.2: M154

На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

- некоторые 8 из этих отрезков имеют общую точку;
- некоторые 8 из этих отрезков таковы, что никакие два из них не пересекаются.

Решение.
Рассмотрим отрезок $[L_1, R_1]$ правый конец которого лежит левее всех остальных правых концов. Если существует 7 отрезков, левые концы которых лежат левее R_1, то задача решена. В ином случае существует не менее 43 отрезков, левые концы которых лежат правее R_1. Тем же способом выберем отрезок $[L_2, R_2]$. Аналогично, если существует 7 отрезков, левые концы которых лежат левее R_2, то задача решена. Если нет, то существет 36 отрезков левые концы которых лежат правее R_2. Действуя таким образом получим либо систему из 8 отрезков, имеющих общую точку, либо систему из отрезков $[L_1, R_1], [L_2, R_2], \ldots, [L_8, R_8]$ никакие два из которых не пересекаются. ◀

Chapter 4

1973

Chapter 5

1974

Exercise 5.0.1: M287

Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух чисел этой последовательности единственным образом?

Решение.
Рассмотрим алгоритм для построения такой последовательности. Пусть последовательность уже построена до члена с номером k и выглядит как $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Выберем наименьшее натуральное число S, которое еще не встречалось как разность между членами искомой последовательности, то есть $S \neq a_i - a_j$, где $j < i$ и $i, j \leqslant k$. Тогда добавим два новых элемента $a_{k+1} = 2a_k$ и $a_{k+2} = 2a_k + S$. Заметим, что $a_{k+1} - a_i = 2a_k - a_i \geqslant a_k$, где $i \leqslant k$, а значит точно не встречается среди разностей уже построенной последовательности. ◀

Chapter 6

1975

Exercise 6.0.1: M306

Из шахматной доски удалена одна угловая клетка. На какое наименьшее число равновеликих (одинаковых по площади) треугольников можно разрезать оставшуюся часть доски?

Chapter 7

1976

Exercise 7.0.1: M387

Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе, то получится точный квадрат?

Решение.
Обозначим искомое число n. Тогда задачу можно записать в виде

$$n(10^p + 1) = x^2$$

И $n < 10^p$. Легко заметить, что если $10^p + 1$ содержит любой простой множитель более чем в первой степени, то искомое число нашлось. Докажем, что $10^{11} + 1$ подходит. Действительно

$$10^{11} + 1 = 11 \cdot (10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + \cdots + 1)$$

Легко видеть, что выражение в скобках делится на 11. Значит искомое число

$$n = \frac{10^{11} + 1}{121}$$

◀

Exercise 7.0.2: M390

Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что сумма цифр десятичной записи числа 2^n больше суммы цифр десятичной записи числа 2^{n+1}. Докажите это.

Exercise 7.0.3: M393

Найдите сумму

$$f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$$

где $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$.

Решение.
Сложим этот ряд с самим собой, но записанным в обратном порядке. Заметим что

$$f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{n-i}{n}\right) = \frac{4^{\frac{i}{n}}}{4^{\frac{i}{n}} + 2} + \frac{4^{\frac{n-i}{n}}}{4^{\frac{n-i}{n}} + 2} = \frac{4 + 2 \cdot 4^{\frac{i}{n}} + 4 + 2 \cdot 4^{\frac{n-i}{n}}}{4 + 2 \cdot 4^{\frac{i}{n}} + 2 \cdot 4^{\frac{n-i}{n}} + 4} = 1$$

То есть, удвоенная сумма ряда равна $n + 1$. Значит ответ $\frac{n+1}{2}$. ◀

Chapter 8

1977

Exercise 8.0.1: M425

Существует ли такое натуральное n, что каждое рациональное число между нулём и единицей представимо в виде суммы n чисел, обратных натуральным?

Exercise 8.0.2: M466

Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на один грамм (в ту или в другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс грузов на чашках. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Научитесь это делать!

Chapter 9

1978

Chapter 10

1979

Exercise 10.0.1: M554

Назовём натуральное число n хорошим, если существуют (не обязательно различные) такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ и $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$. Известно, что все числа между 33 и 73 - хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, - тоже хорошие.

Решение.
Докажем несколько простых лемм. Во первых, если n - хорошее, то $2n+2$ тоже хорошее.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n \implies 2 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i = 2n + 2, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1 \implies \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = 1$$

Аналогично докажем, что $2n+9$ тоже хорошее

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n \implies 3 + 6 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i = 2n + 9, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1 \implies \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = 1$$

Далее очевидно по индукции. ◄

Exercise 10.0.2: M557

Среди любых n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$, есть хотя бы одно простое число. Докажите это.

Решение.
Выберем произвольное множество A, удовлетворяющее условиям задачи. Допустим простых чисел в A нет. Значит каждое число a_i в A делится, как минимум, на два простых числа p_i и q_i, где $i = 1, \ldots, n$. Пусть $p_i \geqslant q_i$. Так как любые два числа в A взаимно просты, то $q_1, q_2, \ldots, q_n$ все различны. Тогда $q_i^2 \leqslant p_i q_i = a_i < (2n-1)^2$. Значит $q_i < 2n-1$. Но простых чисел меньших $2n-1$ и больших 1 не более $n-1$. Противоречие. ◄

Chapter 11

1991

Exercise 11.0.1: M1275

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ натуральных чисел такова, что при любом натуральном n верно равенство $a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1$. Докажите, что при $n > 9$ число $a_n - 22$ составное.

Решение.
Заметим, что если $a_k = 0$, то последовательность выглядит следующим образом

$$a_{k-1}, 0, 1, 1, 2, 3, 7, 22, \ldots$$

Но мы можем получить эту последовательность представляя, что это значения по модулю a_k. Значит

$$a_{k+6} = 22 \mod a_k \implies a_{k+6} - 22 = 0 \mod a_k$$

◀

Exercise 11.0.2

Chapter 12

1999

Exercise 12.0.1: M1667

Натуральный ряд разбит на два бесконечных множества чисел. Докажите, что сумма некоторых 100 чисел одного из этих множеств равна сумме некоторых 100 чисел другого множества.

Chapter 13

2000

Exercise 13.0.1: M1731

В ряд нарисованы 60 звёздочек. Два игрока по очереди заменяют звёздочки на цифры. Какую именно из оставшихся звёздочек заменять на цифру, решает игрок, делающий очередной ход. Докажите, что второй игрок может играть так, чтобы полученное число (возможно, начинающееся на цифру 0) делилось на 13.

Решение.
Заметим, что любое число вида $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$, а значит делится на 13. Значит можно разбить зведочки на 10 блоков по 6 звездочек, а второй игрок может дублировать цифру написанную первым игроком, чтобы получился набор блоков указанного выше типа. ◀

Chapter 14

2001

Exercise 14.0.1: M1756

Среди любых трёх из нескольких данных натуральных чисел можно выбрать два, одно из которых делится на другое. Докажите, что все числа можно так покрасить двумя красками, что из любых чисел одного цвета одно делится на другое.

Chapter 15

2002

Exercise 15.0.1

Назовём несоседние натуральные числа a и b близкими, если $a^2 - 1$ делится на b и $b^2 - 1$ делится на a.

1. Пусть $n > 1$. Докажите, что на отрезке $[n; 8n - 8]$ существует пара близких чисел.

2. Укажите такое $n > 1$, что на отрезке $[n; 8n - 9]$ нет ни одной пары близких чисел.

Chapter 16

2003

Exercise 16.0.1: M1847

В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешено выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых чётное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в банках оказалось поровну пауков?

Chapter 17

2006

Exercise 17.0.1: M1981
В клетках таблицы размером 11×11 расставлены натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша — произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

Решение.
Рассмотрим простые числа из промежутка от 1 до 121, для которых в таблице нет кратных. Это 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113. Их 13 штук. Значит в каком то столбце их не менее двух. Но если эти два числа встретились в одном столбце, то одно из них или его кратное должно быть и в одной строке с другим. Но этого быть не может. ◀

Chapter 18

2007

Exercise 18.0.1: M2033

У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешено задавать ведущему вопросы вида "Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?". Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

Chapter 19

2008

Exercise 19.0.1: M2096

Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая - не более чем из 10 человек. Любые 11 комиссий имеют хотя бы одного общего члена. Докажите, что существует человек, входящий во все комиссии.

Chapter 20

2010

Exercise 20.0.1: M2162

Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовём хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Сейф откроется, если введён хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?

Chapter 21

2020

Exercise 21.0.1: M2593

Каждая вершина правильного многоугольника окрашена в один из трех цветов так, что в каждый из трех цветов окрашено нечетное число вершин. Докажите, что количество равнобедренных треугольников, вершины которых окрашены в три разных цвета, нечетно.

Exercise 21.0.2: M2601

Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$?

Exercise 21.0.3: 2627

Дана бесконечная арифметическая прогрессия. Рассматриваются произведения пар ее членов. Докажите, что произведения в каких-то двух различных парах отличаются не более чем на 1.

Решение.
Зададим прогрессию - $a_n = a_0 + nd$. Легко доказать, что найдется бесконечно много a_m делящихся нацело на a_0. Для этого запишем

$$a_m = a_0 + md = pa_0 \implies (p-1)a_0 = md$$

Тогда положив $p = s \cdot d + 1$ и $m = s \cdot a_0$ получим верное равенство. Теперь запишем отношение двух членов прогрессии

$$\frac{a_0 + nd}{a_0 + md} = \frac{\frac{n}{m}(a_0 + md) + a_0 - \frac{n}{m}a_0}{a_0 + md} = \frac{n}{m} + \frac{a_0 - \frac{n}{m}a_0}{a_0 + md}$$

Пусть n нацело делится на m и $n = q \cdot m$. Тогда мы переписываем выражение выше в виде

$$\frac{n}{m} + \frac{a_0 - \frac{n}{m}a_0}{a_0 + md} = q + \frac{a_0(1-q)}{a_0 + md}$$

Выбираем m так, чтобы $a_0 + md = pa_0$, а $q = p + 1$. Тогда

$$q + \frac{a_0(1-q)}{a_0 + md} = q + \frac{a_0(1-p-1)}{pa_0} = q - 1$$

Выбрав другое a_0 мы повторим процедуру и получим равенство

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_N}{a_M} \implies a_n a_M - a_m a_N = 0$$

◄

Chapter 22

2021

Exercise 22.0.1: M2638

Существует ли целое положительное число n такое, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5?

Exercise 22.0.2: M2669

Докажите, что для любого натурального числа n числа $1, 2, \ldots, n$ можно разбить на несколько групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была равна степени тройки.

Exercise 22.0.3: M2673

В очереди на посадку в n-местный самолет стоят n пассажиров. Первой в очереди стоит рассеянная старушка, которая, зайдя в самолет, садится на случайно выбранное место. Каждый следующий пассажир садится на свое место, если оно свободно, и на случайное место в противном случае. Сколько в среднем пассажиров окажутся не на своих местах?