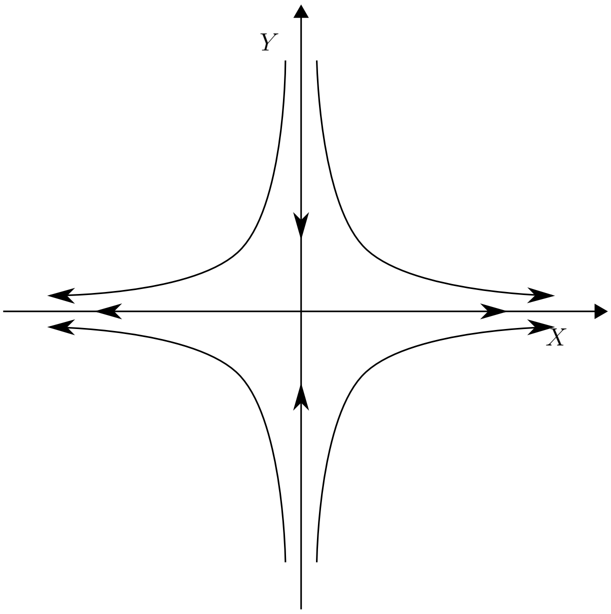
Contents

0.1 Практика 1

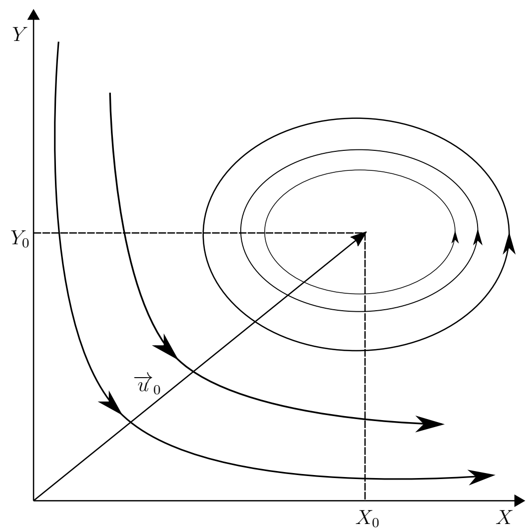
0.1.1 Завдання1:

Рівняння Вольтера-Лотки (еволюційне рівняння) в динаміці популяцій <хижак-жертва>:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -cy + pxy \\ \dfrac{dx}{dt} = ax - byx \end{cases} \tag{1}$$



a)



b)

знайти особливі точки (M(0,0), N($\frac{c}{p}, \frac{a}{b}$))

Потрібно прирівняти рівняння (1) до нуля і розв'язати: $\begin{cases} -cy + pxy = 0 \\ ax - byx = 0 \end{cases}$

1. Припустимо, що $x = 0$, тоді $y = 0$

2. Припустимо, що $x \neq 0$, тоді з другого рівняння випливає:

$$x(a - by) = 0 \Longrightarrow a - by = 0 \Longrightarrow y = \frac{a}{b}$$

відповідно :

$$-c\frac{a}{b} + px\frac{a}{b} \Longrightarrow x = \frac{c}{p}$$

написати рівняння фазових траєкторій

$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+px)}{x(a-by)} \quad \cdot \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-c+px}{x}}{\frac{a-by}{y}}$

$dy\frac{a-by}{y} = dx\frac{-c+px}{x}$

$a\ln y - by = -c\ln x + px + C \quad |b = p = 1$

$x + y - c\ln x - a\ln y = C$: Інтеграл руху (еволюції)

Довести тотожність:

$x + y - c\ln x - a\ln y = C$

$\frac{d}{dt}(x + y - c\ln x - a\ln y) = \frac{d}{dt}C$

$ax - yx - cy + xy - \frac{c}{x}(ax - yx) - \frac{a}{y}(-cy + xy) = 0$

$ax - xy - cy + xy - ac + cy + ac - ax = 0$

Знайти $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$

$\operatorname{div} \overrightarrow{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = a - by - c + px = a - c - by + px$

Знайти Γ

$\ln \Gamma = (a - c - by + px)t + C$

$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{(a-c-by+px)t}$

0.1.2 Завдання 2:

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

Перейти у сферичні координати

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi \\ \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi = r\cos\varphi + \mu r\sin\varphi \\ \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi = \mu r\cos\varphi - r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{r\cos\varphi + \mu r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\cos\varphi}{\sin\varphi} = r\operatorname{ctg}\varphi + \mu r - \dot{\varphi}r\operatorname{ctg}\varphi \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\dot{r}\cos\varphi + r\sin\varphi - \mu r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \dfrac{\dot{r}\operatorname{ctg}\varphi}{r} + 1 - \mu\operatorname{ctg}\varphi \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \operatorname{ctg}^2\varphi + \mu\operatorname{ctg}\varphi - \dot{\varphi}\operatorname{ctg}^2\varphi + 1 - \mu\operatorname{ctg}\varphi$$

$$\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi) = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi \implies \dot{\varphi} = 1$$

$$\dot{r} = r\operatorname{ctg}\varphi + \mu r - \dot{\varphi}r\operatorname{ctg}\varphi = \left|\dot{\varphi} = 1\right| = \mu r$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Знайти фазову траєкторію в сферичних координатах

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \mu r \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

$\frac{dr}{d\varphi} = \mu r$

$\frac{dr}{r} = \mu d\varphi$

$\ln r = \mu\varphi + C$

$r = e^{\mu\varphi + C}$

Знайти фазову траєкторію в (x, y)

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\mu y}{\mu x - y} = \frac{1+\mu\frac{y}{x}}{\mu - \frac{y}{x}} = f(\frac{y}{x})$

шукаємо рішення у вигляді:

$y(x) = xz(x) \quad z = \frac{y}{x}$

$y' = xz' + z = f(\frac{y}{x})$

$z' = \frac{f(z)-z}{x}, \quad \int \frac{dz}{\frac{1+\mu z - \mu z + z^2}{\mu - z}} = \frac{dx}{x}$

тоді

$\frac{dz\mu}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = lnx + C$

$\mu \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln x + C$

$\mu \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+(\frac{y}{x})^2) = \ln x + C$

help

0.1.3 Завдання 3:

Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Знайти особливі точки $[M(0,0,0), N_{1,2}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)]$

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ -bz + xy = 0 \end{cases}$$

Нехай $x \neq 0$ тоді

$$\begin{cases} x = y \\ rx - y - xz = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{b} \end{cases}$$

$rx - x - \frac{x^3}{b} = 0 \mid \ \cdot \frac{1}{x}$

$b(r-1) = x^2 \implies x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \ z = r-1$

Знайти $\Gamma(t)$

$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = -\sigma - 1 - b$

$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = \operatorname{div}\overrightarrow{V}$ (ф-ла Ейлера)

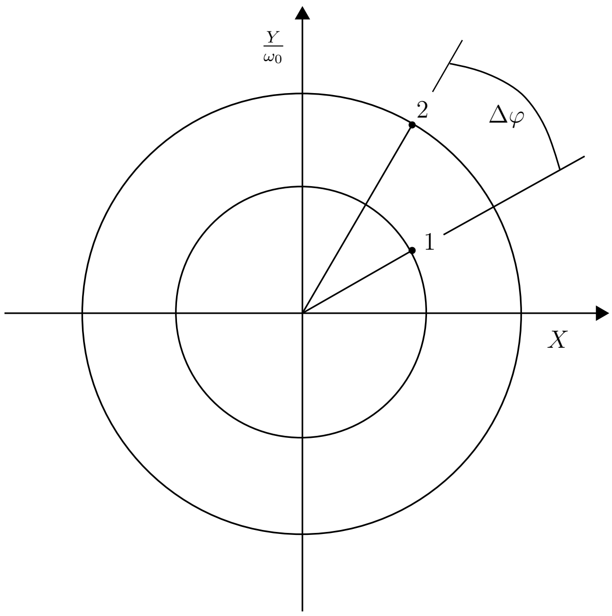
$\ln\Gamma = (-\sigma - 1 - b)t + C$

$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$

0.1.4 Завдання 4:

Осцилятор без затухання $\gamma = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$



Знайти Γ

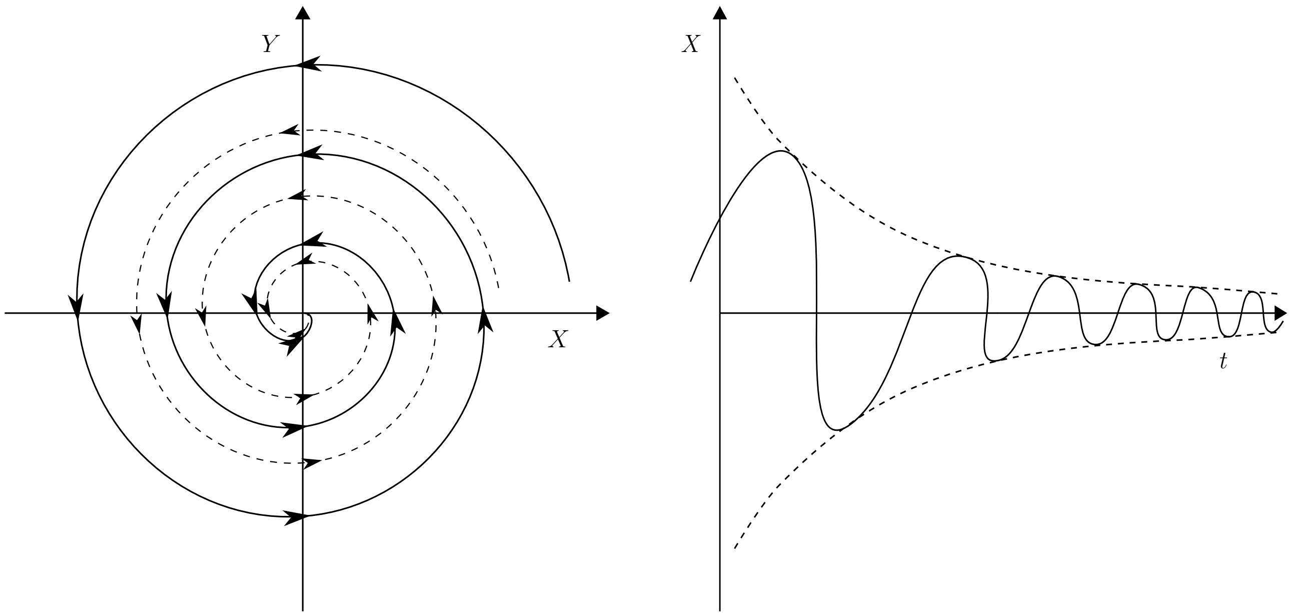
$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = 0$

$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = 0$

$\Gamma = \text{const}$

0.1.5 Завдання 5:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$



a) b)

Знайти Γ

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = -2\gamma$$

$$\ln \Gamma = -2\gamma t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) e^{-2\gamma t}$$

Записати в полярних координатах

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi} r\cos\varphi = -2\gamma r\sin\varphi - \omega_0^2 r\cos\varphi \quad (*) \\ \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi} r\sin\varphi = r\sin\varphi \quad (**) \end{cases}$$

$$\dot{r}: \quad (*)\sin\varphi + (**)\cos\varphi \implies \dot{r} = -2\gamma r\sin^2\varphi - \omega_0^2 r\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi =$$

$= (1-\omega_0^2) r\cos\varphi\sin\varphi - 2\gamma r\sin^2\varphi$

$\dot{\varphi}: \quad (*)\cos\varphi + (**)(-\sin\varphi) \Longrightarrow \dot{\varphi}r = -2\gamma r\sin\varphi\cos\varphi - \omega_0^2 r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r} = (1-\omega_0^2) r\cos\varphi\sin\varphi - 2\gamma r\sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} = -2\gamma\sin\varphi\cos\varphi - \omega_0^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{cases}$$

0.1.6 Завдання 6:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2) \end{cases}$$

Перейти до сферичних координат:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi + r^3\cos\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r^3\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r\dot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi - r\operatorname{tg}\varphi + r^3 \\ \dot{\varphi} = -\dot{r}\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{r} + 1 + r^2\operatorname{tg}\varphi \end{cases}$$

$\dot{\varphi} = -(r\dot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi - r\operatorname{tg}\varphi + r^3)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{r} + 1 + r^2\operatorname{tg}\varphi = -\dot{\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi - r^2\operatorname{tg}\varphi + 1 + r^2\operatorname{tg}\varphi \Longrightarrow$

$\dot{\varphi}(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi$

$\dot{\varphi} = 1$

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Знайти розв'язок системи:

$\int \frac{dr}{r^3} = \int dt$

$-\frac{1}{2}r^{-2} = t + C \Longrightarrow \Big| r(t=0) = r_0 \Big| C = -\frac{1}{2r_0^2}$

$-\frac{1}{2}r^{-2} = t - \frac{1}{2r_0^2} = \frac{t2r_0^2 - 1}{2r_0^2}$

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1-2tr_0^2}$$

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1-2tr_0^2}}$$

0.2 Практика 2

0.2.1 Завдання1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Початкові умови $\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$

Знайти оператор еволюції

$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$

$\int \frac{dx_1}{x_1} = -\int dt$

$\ln x_1 = -t + C_1$

$x_1 = e^{-t}C_1 \mid C_1 = x_{01}$

$x_1 = e^{-t}x_{01}$

$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$

$\int \frac{dx_2}{x_2} = -2\int dt$

$\ln x_2 = -2t + C_2$

$x_2 = e^{-2t}C_2 \mid C_2 = x_{02}$

$x_2 = e^{-2t}x_{02}$

$\overrightarrow{x}(t) = F^t\overrightarrow{x_0}$

$F^t = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

0.2.2 Завдання 2:

$\frac{dx}{dt} = x^2$

$x(t = 0) = x_0$

Знайти оператор еволюції

$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$

$-\frac{1}{x} = t + C \implies -\frac{1}{x_0} = t = 0 + C \implies C = -\frac{1}{x_0}$

$-x = \frac{1}{t - \frac{1}{x_0}} \mid \cdot -\frac{x_0}{x_0}$

$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$

$x(t) = F^t(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$

$F^t = \frac{x}{1-xt}$

0.2.3 Завдання 3:

$\frac{dx}{dt} = x - x^2$

Знайти оператор еволюції

$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int dt$

$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt = \left| \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \implies A + x(B-A) = 1 \implies \begin{cases} A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \implies \right.$

$\implies \left. \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \right| = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \int dt$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x} = \int dt$

$\ln|x| - \ln|1-x| = t + C$

$\ln|\frac{x}{1-x}| = t + C \implies C = \ln \frac{x_0}{1-x_0}$

$\frac{x}{1-x} = e^{t+C}$

$x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}} \mid C = \ln \frac{x_0}{1-x_0}$

$x(0) = \frac{e^t \frac{x_0}{1-x_0}}{1+e^t \frac{x_0}{1-x_0}} \mid \cdot \frac{1-x_0}{1-x_0}$

$x(0) = \frac{e^t x_0}{1-x_0+e^t x_0}$

$F^t = \frac{e^t x}{1+x(e^t-1)}$

У Кравцова ров'язок вийшов $-\ln|\frac{x}{1-x}| = t + C$*, тому там оператор* $F^t = \frac{xe^{-t}}{1+x(e^{-t}-1)}$

0.2.4 Завдання 4:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

Перейти в полярні координати:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\cos\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi = -r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot r = r\dot\varphi\operatorname{tg}\varphi + r + r\operatorname{tg}\varphi - r^3 \\ \dot\varphi = -\dot r\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{r} - 1 + \operatorname{tg}\varphi - r^2\operatorname{tg}\varphi \end{cases}$$

$\dot\varphi = -(r\dot\varphi\operatorname{tg}\varphi + r + r\operatorname{tg}\varphi - r^3)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{r} - 1 + \operatorname{tg}\varphi - r^2\operatorname{tg}\varphi =$
$= -\dot\varphi\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi + r^2\operatorname{tg}\varphi - 1 + \operatorname{tg}\varphi - r^2\operatorname{tg}\varphi \Longrightarrow \dot\varphi + \dot\varphi\operatorname{tg}^2\varphi = -\operatorname{tg}^2\varphi - 1$

$\dot\varphi = -1$

$\dot r = -r\operatorname{tg}\varphi + r + r\operatorname{tg}\varphi - r^3 = r(1-r^2)$

$$\begin{cases} \dot r = r(1-r^2) \\ \dot\varphi = -1 \end{cases}$$

Знайти точний розв'язок

$\frac{dr}{r(1-r^2)} = dt \mid \cdot \frac{r}{r}$

$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{r^2(1-r^2)} = \left| r^2 = R \right| = \frac{1}{2}\frac{dR}{R(1-R)} = dt$

$\ln\left|\frac{R}{1-R}\right| = 2t + C$ (див. (0.2.3))

$R(t=0) = R_0 \Longrightarrow C = \ln\left|\frac{R_0}{1-R_0}\right| \Longrightarrow e^C = C' = \frac{R_0}{1-R_0} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{C'} = \frac{1}{R_0} - 1 \;\Big|$ чому? бо я так хочу (але всеодно потрібно загуглить *чому?*)

$\frac{R}{1-R} = e^{2t+C}$

$R = \frac{e^{2t+C}}{1+e^{2t+C}} = \frac{1}{1+e^{-(2t+C)}} = \frac{1}{1+e^{-2t}e^{-C}} = \frac{1}{1+e^{-2t}\left(\frac{R_0}{1-R_0}\right)^{-1}} = \frac{1}{1+\beta e^{-2t}}$

я звісно не експерт, але порівняно із розв'язком Кравцова у мене щось пішло не по плану ; розв'язок Кравцова: $\frac{1}{1+e^{-t\beta}}$

0.2.5 Завдання 5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Знайти точний розв'язок:

$r = \frac{r_0}{\sqrt{1-2tr_0^2}}$ (див. (0.1.6))

0.3 Практика 3 (Аналіз системи)

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Складемо систему

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$

$\gamma \geq 0,\ \omega_0 \geq 0$

$\overrightarrow{u}$ — вектор стану

$\overrightarrow{b}$ — власний вектор матриці A

λ_i — власні числа матриці A

$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -2\gamma & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = A\overrightarrow{u} \tag{2}$$

Шукаємо розвязок (2) у вигляді $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}e^{\lambda t}$

0.3.1 Завдання 1: (Знайти власні числа)

$\det(A - \lambda E) = 0$

$\begin{vmatrix} -2\gamma - \lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ розв'язавши отримуємо власні числа

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{3}$$

0.3.2 Завдання 2: (Знайти власні вектора)

$(A - \lambda E)\overrightarrow{b} = 0$

$\begin{bmatrix} -2\gamma - \lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{cases} (-2\gamma - \lambda)b_1 - \omega_0^2 b_2 = 0 & (4) \\ b_1 - \lambda b_2 = 0 & (5) \end{cases}$$

Із рівності (5) отримуємо, що $\frac{b_1}{b_2} = \lambda$, тоді власними векторами будуть

$$\overrightarrow{b^1} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{b^2} = c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{6}$$

0.3.3 Завдання 3: (Знайти розв'язок системи)

Розв'язком системи (2) буде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} = \left(c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\gamma t}$$

позначимо $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, тоді отримаємо систему

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left(c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \right) e^{-\gamma t} \tag{7}$$

якби для пошуку власних векторів скористались не рівністю (5), а рівністю (4), отримали б рішення

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left(c_1^* \begin{bmatrix} -\omega_0 \\ \lambda_1 + \gamma \end{bmatrix} e^{i\omega t} + c_2^* \begin{bmatrix} -\omega_0 \\ \lambda_2 + \gamma \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \right) e^{-\gamma t}$$

0.3.4 Завдання 4: (Знайти траєкторію)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\gamma - \omega_0^2 \frac{x}{y} \quad \Bigg| \quad y = xz, \; dy = zdx + xdz$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = -2\gamma - \frac{\omega_0^2}{z}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z + 2\gamma + \frac{\omega_0^2}{z}} \quad \Bigg| \cdot \frac{z}{z}$$

$-\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{z^2+2\gamma z+\omega_0^2}=\frac{zdz}{(z^2+2\gamma z+\gamma^2)-(\gamma^2-\omega_0^2)}$ $\Bigg|\, \Delta=\gamma^2-\omega_0^2$

$-\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{(z+\gamma)^2-\Delta}=\frac{(z+\gamma-\gamma)d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta}=\frac{(z+\gamma)d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta}-\gamma\frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta}$

$-\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{d((z+\gamma)^2-\Delta)}{(z+\gamma)^2-\Delta}-\gamma\frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta}$

$$-\ln x=\frac{1}{2}\ln\left((z+\gamma)^2-\Delta\right)-\gamma\int\frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta}+\ln C_0 \tag{8}$$

Нехай $\Delta<0$ тоді (8) матиме вигляд

$-\ln x=\frac{1}{2}\ln\left((z+\gamma)^2+|\Delta|\right)-\gamma\int\frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2+|\Delta|}+\ln C_0$

$-\ln x=\frac{1}{2}\ln\left((z+\gamma)^2+\Delta\right)-\frac{\gamma}{\sqrt{|\Delta|}}\operatorname{arctg}\frac{z+\gamma}{\sqrt{|\Delta|}}+\ln C$

$\ln x^2((z+\gamma)^2+|\Delta|)=\frac{2\gamma}{\sqrt{|\Delta|}}\operatorname{arctg}\frac{z+\gamma}{\sqrt{|\Delta|}}-\ln C^2$

$\ln(x^2z^2+x^2\gamma z+\gamma^2-\gamma^2+\omega_0^2)=\frac{2\gamma}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{z+\gamma}{\omega}-\ln C^2$

$$\ln(y^2+\gamma xy+\omega_0^2x^2)=\frac{2\gamma}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{y+\gamma x}{\omega x}-\ln C^2 \tag{9}$$

0.4 Практика 4

0.4.1 Завдання 1:

Перевірити виконання умови Коші

$\frac{dx}{dt} = e^{-x}$

$e^x dx = dt$

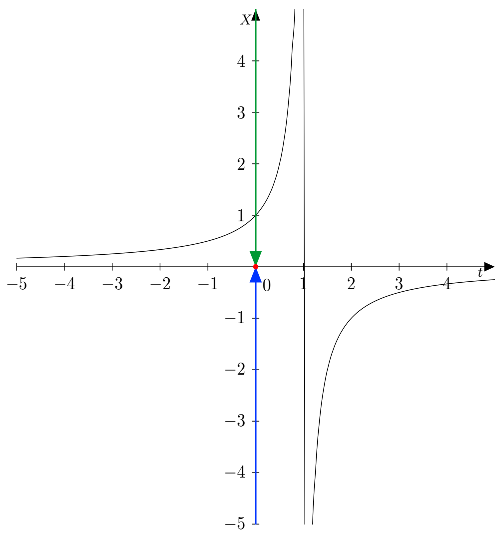
$e^x = t + C$

$x = \ln(t + C) \Longrightarrow t + C > 0$

0.4.2 Завдання 2:

Знайти інтегральну криву і фазову траєкторія

$\frac{dx}{dt} = x^2$
$x^{-2} dx = dt$
$x^{-1} = -t - C$
При $x(t = 0) = 1 \Longrightarrow C = -1$
$x = \frac{1}{1-t}$



$(-\infty; 0)$ – перша фазова траєкторія

$\{0\}$ – друга фазова траєкторія

$(0, \infty)$ – третя фазова траєкторія

0.4.3 Завдання 3:

Знайти інтегральну криву і фазову траєкторія

$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$

$x^{-\frac{2}{3}}dx = 3dt$

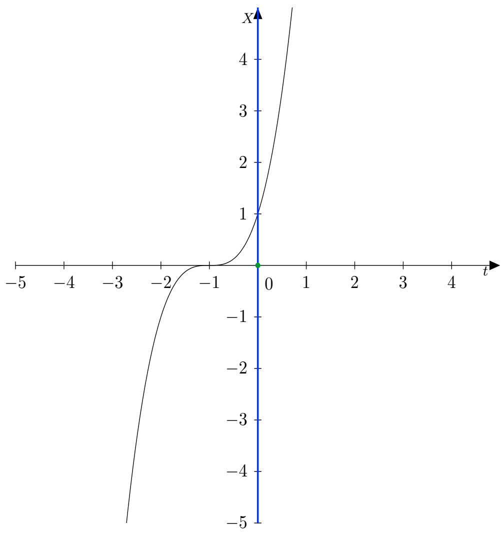
$3x^{\frac{1}{3}} = 3t + C'$

$x^{\frac{1}{3}} = t + C$

$x = \sqrt[3]{t + C}$

При $x(t = 0) = 1 \Longrightarrow C = 1$

$x = (t + 1)^3$



$(-\infty; \infty)$ – перша фазова траєкторія

$\{0\}$ – друга фазова траєкторія

примітка: оскільки права частина є неаналітичною, тому фазові траєкторії перетинаються

0.4.4 Завдання 4:

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2$

$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_1 + x_2) = -2x_2^2$

Стійкість присутня в усій області

b) $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 - x_1 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2$

$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_2^3 + x_1) = -2x_2^4$ Стійкість присутня в усій області

c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2$

$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_1 + (1 - x_1^2)x_2) = -2x_2^2(1 - x_1^2)$

По ідеї стійкіть присутня в області яка обмежена площиною $\begin{cases} x_1 < |1| \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$, але правильною є відповідь $x_1^2 + x_2^2 < 1$

d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 - a) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_2 - b) \end{cases}, \quad L = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2$

$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \frac{2}{a^2}x_1^2(x_1 - a) + \frac{2}{b^2}x_2^2(x_2 - b)$

Потрібно доробить

зрозуміть чому x_1, x_2 обмежені константами a, b відповідно, і чому по цій причині виходить еліпс

0.4.5 Завдання 5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

при малих коиваннях x_1 еквівалентна системі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - x_1 \end{cases}$$

Провести аналіз

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{bmatrix} \Longrightarrow C = \mu,\ D = 1$$

- $\mu = 0$

  $C = 0, D > 0 \Longrightarrow$ центр

- $\mu \neq 0$

  - $\mu \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

    $\frac{C^2}{4} < D,\ D > 0 \Longrightarrow$ фокус

  - $\mu \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

    $\frac{C^2}{4} > D,\ D > 0 \Longrightarrow$ вузол

Пара-па-па-пам, що за нах?

0.5 Практика 5

0.5.1 Завдання 1:

Біфуркація Хопфа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\Gamma x_1 - a x_2 - x_1 r^2 \\ \dot{x}_2 = -\Gamma x_2 + a x_1 - x_2 r^2 \end{cases}$$

В полярні координати:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -\Gamma r\cos\varphi - ar\sin\varphi - r^3\cos\varphi \quad (*) \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = -\Gamma r\sin\varphi + ar\cos\varphi - r^3\sin\varphi \quad (**) \end{cases}$$

$\dot{r}: \quad (*)\cos\varphi + (**)\sin\varphi \Longrightarrow \dot{r} = -\Gamma r - r^3$

$\dot{\varphi}: \quad \frac{(*)(-\sin\varphi)+(**)\cos\varphi}{r} \Longrightarrow \dot{\varphi} = a$

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(\Gamma + r^2) \\ \dot{\varphi} = a \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язати систему (10)

$-\frac{dr}{r(\Gamma+r^2)} = dt$

заміна: $r^2 = z,\ dr = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$

$-\frac{1}{2}\frac{dx}{z(\Gamma+z)} = dt$

$\left| \frac{A}{z} + \frac{B}{\Gamma+z} \Longrightarrow \begin{cases} A\Gamma = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{\Gamma} \\ B = -\dfrac{1}{\Gamma} \end{cases} \right|$

$-\frac{dz}{\Gamma(\Gamma+z)} + \frac{dz}{\Gamma z} = -2dt$

$-2t = \frac{1}{\Gamma}(-\ln(z+\Gamma) + \ln(z_0+\Gamma) + \ln z - \ln z_0)$

$-2\Gamma t = \ln(\frac{(z_0+\Gamma)z}{(z+\Gamma)z_0})$

$e^{-2\Gamma t} = \frac{z_0+\Gamma}{z_0}\frac{z}{z+\Gamma}$

$\frac{z_0}{z_0+\Gamma}e^{-2\Gamma t} = \frac{z}{z+\Gamma}$

$z = \frac{\Gamma(\frac{z_0}{z_0+\Gamma})e^{-2\Gamma t}}{1-\frac{z_0}{z_0+\Gamma}e^{-2\Gamma t}} = \frac{\Gamma}{\frac{z_0+\Gamma}{z_0}e^{2\Gamma t}-1}$

$z = \frac{\Gamma z_0}{(z_0+\Gamma)e^{2\Gamma t}-z_0}$

$r = \sqrt{\frac{\Gamma r_0^2}{(r_0^2+\Gamma)e^{2\Gamma t}-r_0^2}}$

при $\Gamma < 0$ і $t \to \infty \implies r(t) \to \sqrt{|\Gamma|} \implies$ тобто існує граничній цикл: коло із радіусом $\sqrt{|\Gamma|}$

цикл є стійким, оскільки при $r_0 > \sqrt{|\Gamma|}$, і при $r_0 < \sqrt{|\Gamma|}$ $r(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{|\Gamma|}$

Інший спосіб виявити граничний цикл(не розв'язуючи систему Д.Р.)

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(\Gamma + r^2) \\ \dot{\varphi} = a \end{cases}$$

При $\Gamma < 0$ і

- $r \to 0$, можна відкинути член $-r^3$, оскільки $r\Gamma$ домінує, тоді $\dot{r} = -r\Gamma > 0$ отже r зростає
- при $r \to \infty$ відкидаємо $-r\Gamma$ оскільки $-r^3$ домінує, в такому разі $\dot{r} = -r^3 < 0$, r спадає

Отже можна зробити висновок, що існує певне значення R до якого пряме r.

Дослідити цикл на стійкість

Нехай $r \to R + \delta r$, підставимо даний вираз у вихідне Д.Р, при $\Gamma < 0$.

$\frac{d}{dt}(R + \delta r) = -(R + \delta r)\Gamma - (R + \delta r)^3$

$\frac{d}{dt}\delta r = -R\Gamma - \Gamma\delta r - R^3 - 3R^2\delta r - 3R\delta r^2 - \delta r^3$

відкинемо члени в яких порядки більше 1, $R = \sqrt{|\Gamma|}$

$\frac{d}{dt}\delta r = -R\Gamma \; -\Gamma\delta r \; -R^3 \; -3R^2\delta r$

$\frac{d}{dt}\delta r = -2|\Gamma|\delta r$

знак $\frac{d}{dt}\delta r$ протилежний до знака δr, отже цикл є стійким

0.5.2 Завдання 2:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a = const \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases}$$

$v(0) = v_0$

$x(0) = x_0$

Точний розвязок системи

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

замінюємо $t\ ton\tau, \quad n \in \mathbf{N}$

$$\begin{cases} v_n = v_0 + an\tau \\ x_n = x_0 + v_0 n\tau + \dfrac{an^2\tau^2}{2} \end{cases}$$

$v_{n+1} = \underbrace{v_0 + an\tau}_{v_n} + a\tau$

$x_{n+1} = x_0 + v_0 n\tau + v_0\tau + \frac{a(n+1)^2\tau^2}{2} = \underbrace{x_0 + v_0 n\tau + \dfrac{an^2\tau^2}{2}}_{x_n} + v_0\tau + an\tau^2 + \frac{a\tau^2}{2} =$

$\left| an\tau^2 = v_n\tau - v_0\tau \right| = x_n + v_n\tau + \frac{a\tau^2}{2}$

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + a\tau \\ x_{n+1} = x_n + v_n\tau + \dfrac{a\tau^2}{2} \end{cases}$$

0.5.3 Завдання 3:

Біфуркація Хопфа, модель–відображення при $a = 1, \quad \Gamma = -1$

Загальний розвязок див (0.5.1)

$r^2 = \frac{1}{\frac{r_0^2 + \Gamma}{r_0^2 \Gamma} e^{2\Gamma(t-t_0)} - \frac{1}{\Gamma}}$

$\varphi = a(t - t_0)$

при $a = 1, \quad \Gamma = -1$ маємо:

$r^2 = \frac{1}{1+Ce^{-2(t-t_0)}}$

$\varphi = t - t_0, \quad C = \frac{1-r_0^2}{r_0^2}$

Знайти точки і моменти часу в які ф.тр. перетинає вісь OX

$x = r\cos(t - t_0)$

$y = r\sin(t - t_0)$

із умови перетину осі OX :

$y = 0 \Longrightarrow sin(t - t_0) = 0, t = t_0 + \pi n, \quad n \in \mathbf{N}$

підставляємо $t = t_0 + \pi n$ в $x = r\cos(t - t_0)$

$x_n = \frac{\cos \pi n}{\sqrt{1+Ce^{-2\pi n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+Cq^n}}$

Знайдіть відображення $f()$, таке що $x_{n+1} = f(x_n)$

позначимо $q = e^{-2\pi}$

$x_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+Cq^{n+1}}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+Cq^n}}\sqrt{\frac{1+Cq^n}{1+Cq^{n+1}}}$

з x_n виразимо Cq^n і підставимо у x_{n+1}

$x_n^2 = \frac{1}{1+Cq^n} \Longrightarrow Cq^n = \frac{1}{x_n^2} - 1$

$x_{n+1} = -x_n\sqrt{\frac{\frac{1}{x_n^2}}{1+q(\frac{1}{x_n^2}-1)}}$

$x_{n+1} = -\frac{x_n}{|x_n|}\frac{1}{\sqrt{1+q(\frac{1}{x_n^2}-1)}} = \frac{-\operatorname{sign}(x_n)}{\sqrt{1+q(\frac{1}{x_n^2}-1)}}$

$x_{n+1} = \frac{-x_n}{\sqrt{x_n^2+q(1-x)n^2}}$