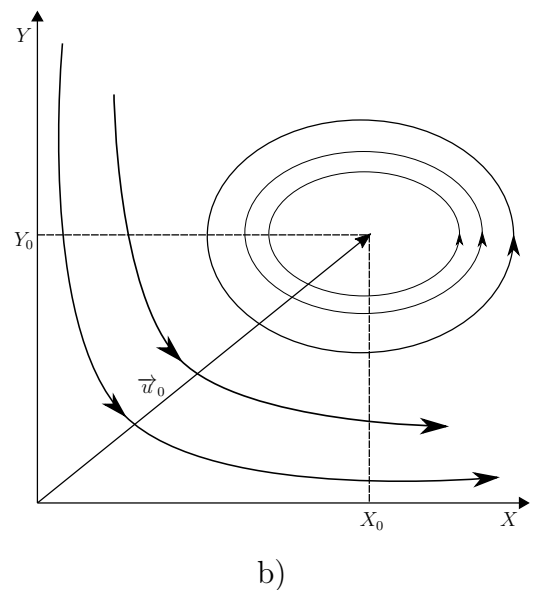
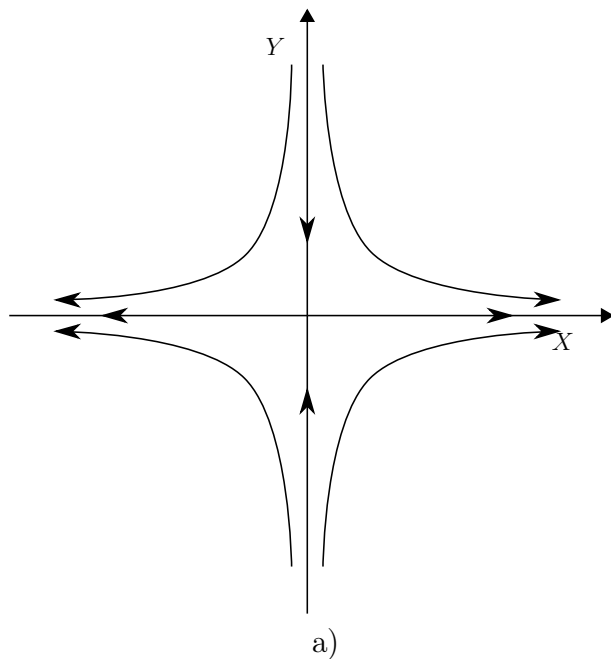


Практика 1

Завдання1:

Рівняння Вольтера-Лотки (еволюційне рівняння) в динаміці популяцій <хижак-жертва>:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -cy + pxy \\ \frac{dx}{dt} = ax - byx \end{cases} \quad (1)$$



знайти особливі точки ($M(0,0)$, $N(\frac{c}{p}, \frac{a}{b})$)

Потрібно прирівняти рівняння (1) до нуля і розв'язати:
$$\begin{cases} -cy + pxy = 0 \\ ax - byx = 0 \end{cases}$$

1. Припустимо, що $x = 0$, тоді $y = 0$
2. Припустимо, що $x \neq 0$, тоді з другого рівняння випливає:

$$x(a - by) = 0 \implies a - by = 0 \implies y = \frac{a}{b}$$

відповідно :

$$-c\frac{a}{b} + px\frac{a}{b} \implies x = \frac{c}{p}$$

написати рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+px)}{x(a-by)} \cdot \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-c+px}{x}}{\frac{a-by}{y}}$$

$$dy \frac{a-by}{y} = dx \frac{-c+px}{x}$$

$$a \ln y - by = -c \ln x + px + C \quad | b = p = 1$$

$x + y - c \ln x - a \ln y = C$: Інтеграл руху (еволюції)

Довести тотожність:

$$x + y - c \ln x - a \ln y = C$$

$$\frac{d}{dt}(x + y - c \ln x - a \ln y) = \frac{d}{dt}C$$

$$ax - yx - cy + xy - \frac{c}{x}(ax - yx) - \frac{a}{y}(-cy + xy) = 0$$

$$ax - xy - cy + xy - ac + cy + ac - ax = 0$$

Знайти $\operatorname{div} \vec{v}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = a - by - c + px = a - c - by + px$$

Знайти Γ

$$\ln \Gamma = (a - c - by + px)t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{(a-c-by+px)t}$$

Завдання 2:

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

Перейти у сферичні координати

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi \\ \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = r \cos \varphi + \mu r \sin \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = \mu r \cos \varphi - r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos \varphi + \mu r \sin \varphi - \dot{\varphi} r \cos \varphi}{\sin \varphi} = r \operatorname{ctg} \varphi + \mu r - \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \cos \varphi + r \sin \varphi - \mu r \cos \varphi}{r \sin \varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + 1 - \mu \operatorname{ctg} \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu \operatorname{ctg} \varphi - \dot{\varphi} \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 - \mu \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \implies \dot{\varphi} = 1$$

$$\dot{r} = r \operatorname{ctg} \varphi + \mu r - \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi = \left| \dot{\varphi} = 1 \right| = \mu r$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Знайти фазову траєкторію в сферичних координатах

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \mu r$$

$$\frac{dr}{r} = \mu d\varphi$$

$$\ln r = \mu \varphi + C$$

$$r = e^{\mu \varphi + C}$$

Знайти фазову траєкторію в (x, y)

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \mu y}{\mu x - y} = \frac{1 + \mu \frac{y}{x}}{\mu - \frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

шукаємо рішення у вигляді:

$$y(x) = xz(x) \quad z = \frac{y}{x}$$

$$y' = xz' + z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad \int \frac{dz}{\frac{1 + \mu z - \mu z + z^2}{\mu - z}} = \frac{dx}{x}$$

тоді

$$\frac{dz\mu}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = \ln x + C$$

$$\mu \arctan z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln x + C$$

$$\mu \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + (\frac{y}{x})^2) = \ln x + C$$

Завдання 3:

Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Знайти особливі точки $[M(0, 0, 0), N_{1,2}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)]$

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ -bz + xy = 0 \end{cases}$$

Нехай $x \neq 0$ тоді

$$\begin{cases} x = y \\ rx - y - xz = 0 \\ z = \frac{x^2}{b} \end{cases}$$

$$rx - x - \frac{x^3}{b} = 0 \mid \cdot \frac{1}{x}$$

$$b(r-1) = x^2 \implies x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r-1$$

Знайти $\Gamma(t)$

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\sigma - 1 - b$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \operatorname{div} \vec{V} \quad (\text{ф-ла Ейлера})$$

$$\ln \Gamma = (-\sigma - 1 - b)t + C$$

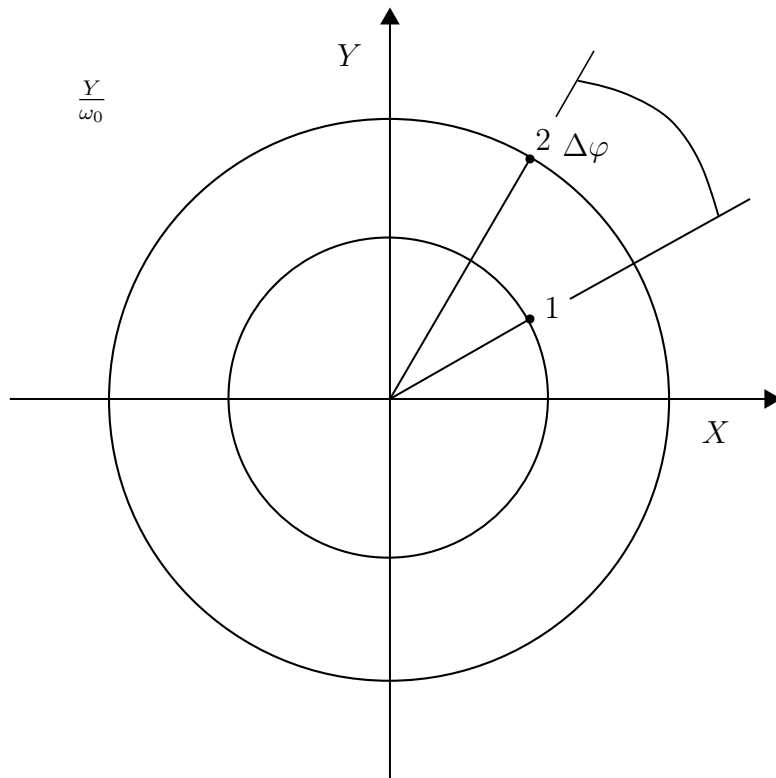
$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

Завдання 4:

Осцилятор без затухання $\gamma = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Знайти Γ



$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

$$\Gamma = \text{const}$$

Завдання 5:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

Знайти Γ

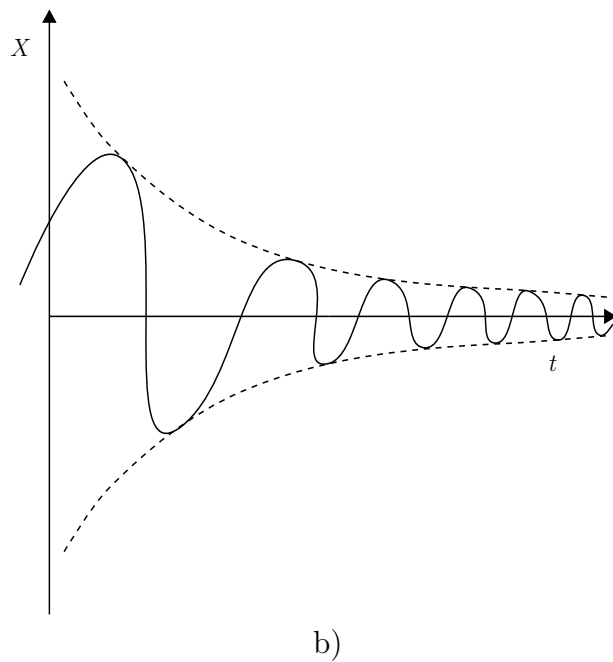
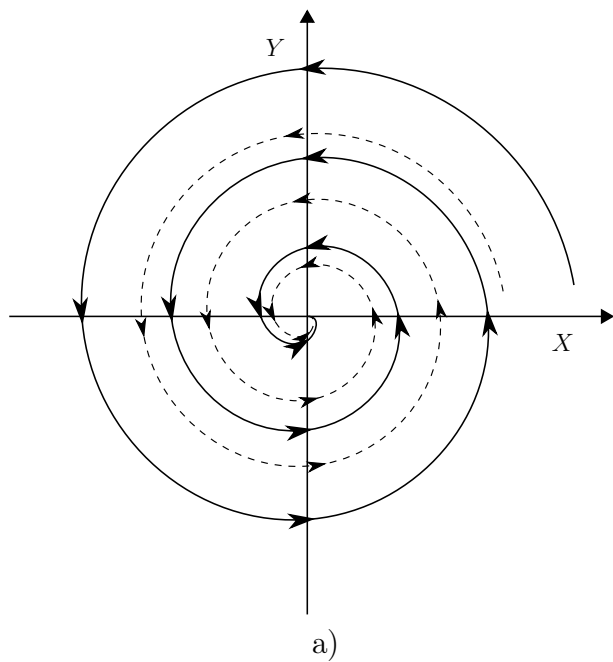
$$\operatorname{div} \vec{V} = -2\gamma$$

$$\ln \Gamma = -2\gamma t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-2\gamma t}$$

Записати в полярних координатах

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = -2\gamma r \sin \varphi - \omega_0^2 r \cos \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dot{r} = \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi + 2\gamma r + \omega_0^2 r \operatorname{ctg} \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{ctg} \varphi}{r} - 1 \end{cases}$$

$$-\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \operatorname{ctg}^2 \varphi + 2\gamma \operatorname{ctg} \varphi + \omega_0^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1$$

$$-\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = 2\gamma \operatorname{ctg} \varphi + \omega_0^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 \mid 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$\dot{\varphi} = -2\gamma \cos \varphi \sin \varphi - \omega_0^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = -\gamma \sin 2\varphi - \omega_0^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \dots$$

Завдання 6:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$