Contents

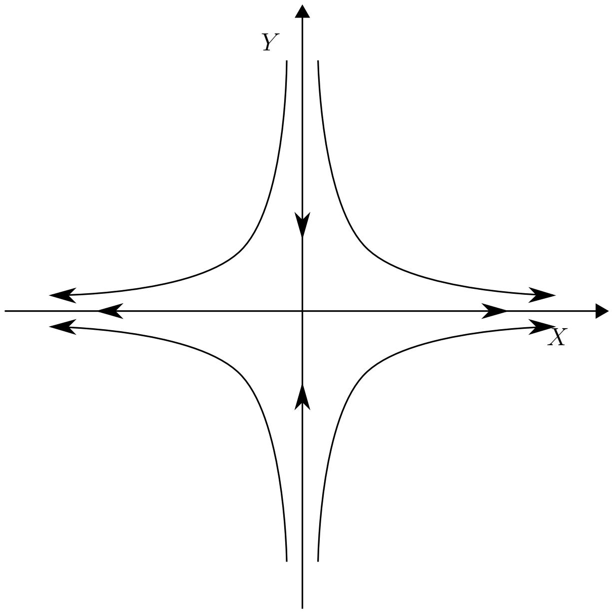
0.1 Практика 1

0.1.1 Завдання1:

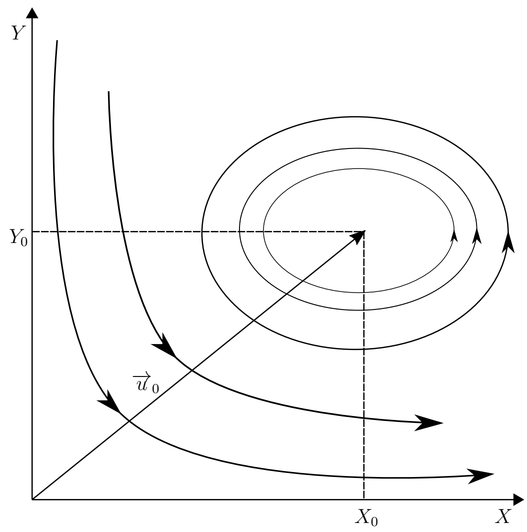
Рівняння Вольтера-Лотки (еволюційне рівняння) в динаміці популяцій $<$хижак-жертва$>$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -cy + pxy \\ \frac{dx}{dt} = ax - byx \end{cases} \tag{1}$$

знайти особливі точки (M(0,0), N($\frac{c}{p}$, $\frac{a}{b}$))



a)



b)

Потрібно прирівняти рівняння (1) до нуля і розв'язати: $\begin{cases} -cy + pxy = 0 \\ ax - byx = 0 \end{cases}$

1. Припустимо, що $x = 0$, тоді $y = 0$
2. Припустимо, що $x \neq 0$, тоді з другого рівняння випливає:

$$x(a - by) = 0 \Longrightarrow a - by = 0 \Longrightarrow y = \frac{a}{b}$$

відповідно :

$$-c\frac{a}{b} + px\frac{a}{b} \Longrightarrow x = \frac{c}{p}$$

написати рівняння фазових траєкторій

$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+px)}{x(a-by)} \quad \cdot \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-c+px}{x}}{\frac{a-by}{y}}$

$dy\frac{a-by}{y} = dx\frac{-c+px}{x}$

$a \ln y - by = -c \ln x + px + C \quad |b = p = 1$

$x + y - c \ln x - a \ln y = C$: Інтеграл руху (еволюції)

Довести тотожність:

$x + y - c \ln x - a \ln y = C$

$\frac{d}{dt}(x + y - c \ln x - a \ln y) = \frac{d}{dt}C$

$ax - yx - cy + xy - \frac{c}{x}(ax - yx) - \frac{a}{y}(-cy + xy) = 0$

$ax - xy - cy + xy - ac + cy + ac - ax = 0$

Знайти $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$

$\operatorname{div} \overrightarrow{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = a - by - c + px = a - c - by + px$

Знайти Γ

$\ln \Gamma = (a - c - by + px)t + C$

$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{(a-c-by+px)t}$

0.1.2 Завдання 2:

$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$

Перейти у сферичні координати

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi \\ \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi = r\cos\varphi + \mu r\sin\varphi \\ \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi = \mu r\cos\varphi - r\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{r\cos\varphi + \mu r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\cos\varphi}{\sin\varphi} = r\operatorname{ctg}\varphi + \mu r - \dot{\varphi}r\operatorname{ctg}\varphi \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\dot{r}\cos\varphi + r\sin\varphi - \mu r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \dfrac{\dot{r}\operatorname{ctg}\varphi}{r} + 1 - \mu\operatorname{ctg}\varphi \end{cases}$$

$\dot{\varphi} = \operatorname{ctg}^2\varphi + \mu\operatorname{ctg}\varphi - \dot{\varphi}\operatorname{ctg}^2\varphi + 1 - \mu\operatorname{ctg}\varphi$

$\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi) = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi \implies \dot{\varphi} = 1$

$$\dot{r} = r\operatorname{ctg}\varphi + \mu r - \dot{\varphi}r\operatorname{ctg}\varphi = \left|\dot{\varphi} = 1\right| = \mu r$$

$\begin{cases} \dot{r} = \mu r \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$

Знайти фазову траєкторію в сферичних координатах

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \mu r \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

$\frac{dr}{d\varphi} = \mu r$

$\frac{dr}{r} = \mu d\varphi$

$\ln r = \mu\varphi + C$

$r = e^{\mu\varphi + C}$

Знайти фазову траєкторію в (x, y)

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\mu y}{\mu x - y} = \frac{1+\mu\frac{y}{x}}{\mu - \frac{y}{x}} = f(\frac{y}{x})$

шукаємо рішення у вигляді:

$y(x) = xz(x) \quad z = \frac{y}{x}$

$y' = xz' + z = f(\frac{y}{x})$

$z' = \frac{f(z)-z}{x}, \quad \int \frac{dz}{\frac{1+\mu z - \mu z + z^2}{\mu - z}} = \frac{dx}{x}$

тоді

$\frac{dz\mu}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = lnx + C$

$\mu \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln x + C$

$\mu \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+(\frac{y}{x})^2) = \ln x + C$

0.1.3 Завдання 3:

Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Знайти особливі точки $[M(0,0,0), N_{1,2}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)]$

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ -bz + xy = 0 \end{cases}$$

Нехай $x \neq 0$ тоді

$$\begin{cases} x = y \\ rx - y - xz = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{b} \end{cases}$$

$rx - x - \frac{x^3}{b} = 0 \mid \cdot \frac{1}{x}$

$b(r-1) = x^2 \implies x = y = \pm\sqrt{b(r-1)},\ z = r - 1$

Знайти $\Gamma(t)$

$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = -\sigma - 1 - b$

$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = \operatorname{div} \overrightarrow{V}$ (ф-ла Ейлера)

$\ln \Gamma = (-\sigma - 1 - b)t + C$

$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$

0.1.4 Завдання 4:

Осцилятор без затухання $\gamma = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Знайти Γ

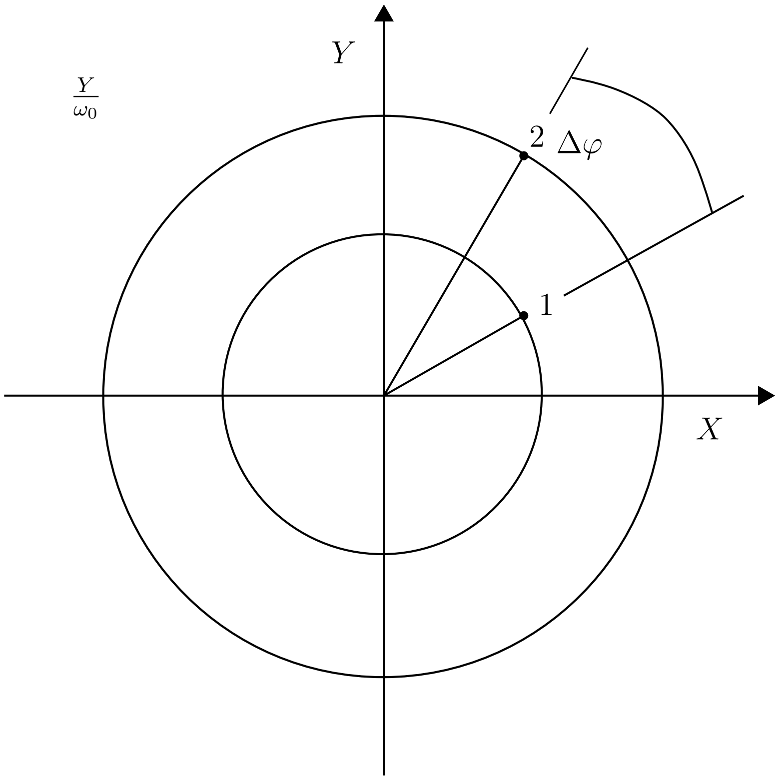
$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$

$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = 0$

$\Gamma = \text{const}$

0.1.5 Завдання 5:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$



Знайти Γ

$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = -2\gamma$

$\ln \Gamma = -2\gamma t + C$

$\Gamma(t) = \Gamma(0) e^{-2\gamma t}$

Записати в полярних координатах

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

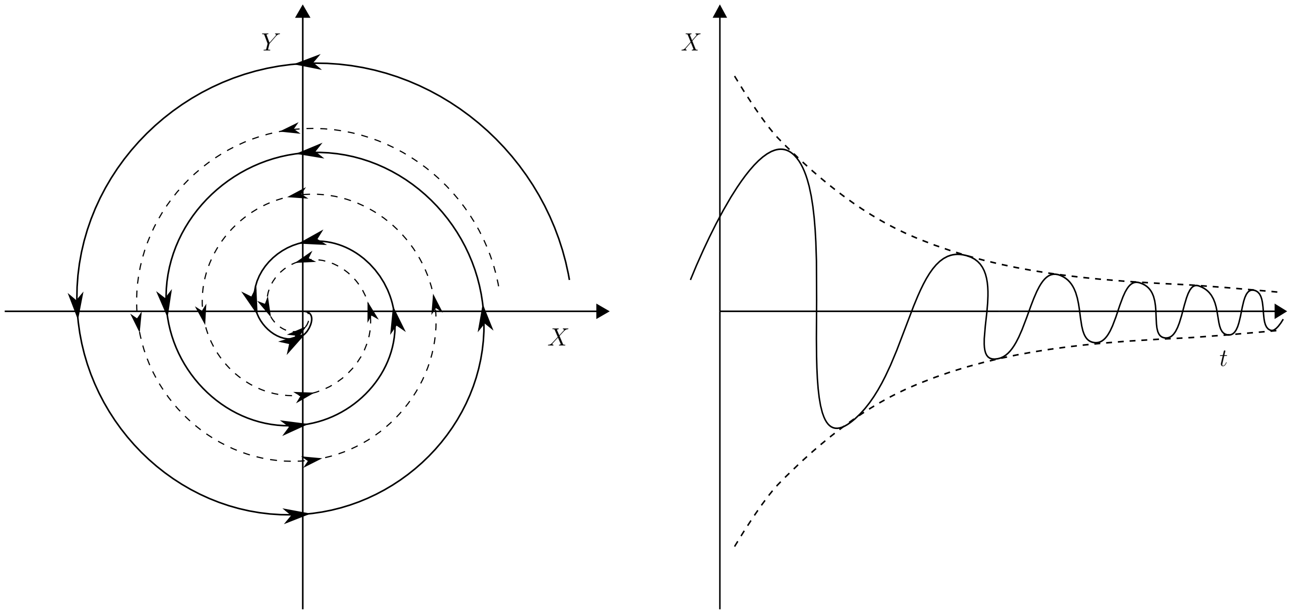
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi} r\cos\varphi = -2\gamma r\sin\varphi - \omega_0^2 r\cos\varphi \\ \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi} r\sin\varphi = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dot{r} = \dot{\varphi} r \operatorname{ctg}\varphi + 2\gamma r + \omega_0^2 r \operatorname{ctg}\varphi \\ \quad \dot{\varphi} = \dfrac{\dot{r}\operatorname{ctg}\varphi}{r} - 1 \end{cases}$$

$-\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\operatorname{ctg}^2\varphi + 2\gamma\operatorname{ctg}\varphi + \omega_0^2\operatorname{ctg}^2\varphi + 1$

$-\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi) = 2\gamma\operatorname{ctg}\varphi + \omega_0^2\operatorname{ctg}^2\varphi + 1 \mid 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}$



a) b)

$$\dot{\varphi} = -2\gamma\cos\varphi\sin\varphi - \omega_0^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -\gamma\sin 2\varphi - \omega_0^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \dots$$

0.1.6 Завдання 6:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

0.2 Практика 2

0.2.1 Завдання1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Початкові умови $\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$

Знайти оператор еволюції

$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$	$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$
$\int \frac{dx_1}{x_1} = -\int dt$	$\int \frac{dx_2}{x_2} = -2\int dt$
$\ln x_1 = -t + C_1$	$\ln x_2 = -2t + C_2$
$x_1 = e^{-t}C_1 \mid C_1 = x_{01}$	$x_2 = e^{-2t}C_2 \mid C_2 = x_{02}$
$x_1 = e^{-t}x_{01}$	$x_2 = e^{-2t}x_{02}$

$\overrightarrow{x}(t) = F^t \overrightarrow{x_0}$

$F^t = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

0.2.2 Завдання 2:

$\frac{dx}{dt} = x^2$

$x(t=0) = x_0$

Знайти оператор еволюції

$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$

$-\frac{1}{x} = t + C \implies -\frac{1}{x_0} = t = 0 + C \implies C = -\frac{1}{x_0}$

$-x = \frac{1}{t - \frac{1}{x_0}} \mid \cdot - \frac{x_0}{x_0}$

$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$

$x(t) = F^t(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$

$F^t = \frac{x}{1 - xt}$

0.2.3 Завдання 3:

$\frac{dx}{dt} = x - x^2$

Знайти оператор еволюції

$\int \frac{dx}{x - x^2} = \int dt$

$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt = \left| \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A - Ax + Bx}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \implies A + x(B - A) = 1 \implies \begin{cases} A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \implies \right.$

$\left. \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \right| = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \int dt$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x} = \int dt$

$\ln|x| - \ln|1 - x| = t + C$

$\ln|\frac{x}{1-x}| = t + C \implies C = \ln \frac{x_0}{1 - x_0}$

$\frac{x}{1-x} = e^{t+C}$

$x = \frac{e^{t+C}}{1 + e^{t+C}} \mid C = \ln \frac{x_0}{1 - x_0}$

$x(0) = \frac{e^t \frac{x_0}{1-x_0}}{1+e^t \frac{x_0}{1-x_0}} \mid \cdot \frac{1-x_0}{1-x_0}$

$x(0) = \frac{e^t x_0}{1-x_0+e^t x_0}$

$F^t = \frac{e^t x}{1+x(e^t-1)}$

У Кравцова чомусь ров'язок вийшов $-\ln|\frac{x}{1-x}| = t + C$, *тому там оператор* $F^t = \frac{xe^{-t}}{1+x(e^{-t}-1)}$