

# Contents

0.1	Практика 1 . . . . .	3
0.1.1	Завдання1: . . . . .	3
0.1.2	Завдання 2: . . . . .	4
0.1.3	Завдання 3: . . . . .	6
0.1.4	Завдання 4: . . . . .	7
0.1.5	Завдання 5: . . . . .	8
0.1.6	Завдання 6: . . . . .	9
0.2	Практика 2 . . . . .	11
0.2.1	Завдання1: . . . . .	11
0.2.2	Завдання 2: . . . . .	11
0.2.3	Завдання 3: . . . . .	12
0.2.4	Завдання 4: . . . . .	12
0.2.5	Завдання 5: . . . . .	14
0.3	Практика 3 (Аналіз системи) . . . . .	15
0.3.1	Завдання 1: (Знайти власні числа) . . . . .	15
0.3.2	Завдання 2: (Знайти власні вектора) . . . . .	15
0.3.3	Завдання 3: (Знайти розв'язок системи) . . . . .	16

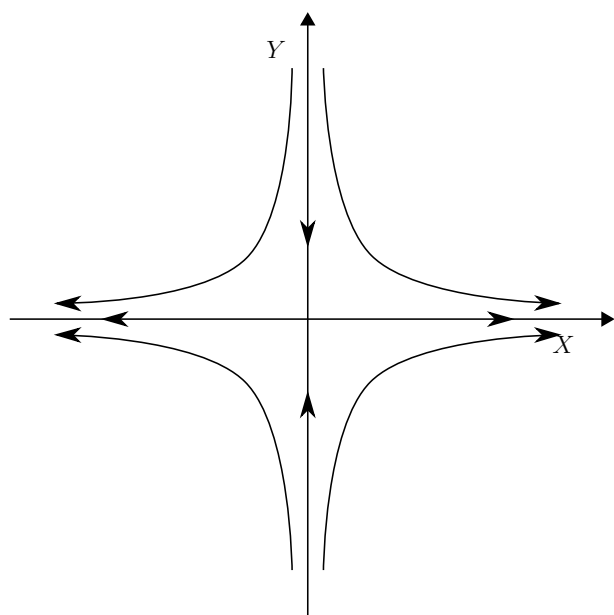
0.3.4	Завдання 4: (Знайти траєкторію) . . . . .	16
0.4	Практика 4 . . . . .	18
0.4.1	Завдання 1: . . . . .	18
0.4.2	Завдання 2: . . . . .	18
0.4.3	Завдання 3: . . . . .	18
0.4.4	Завдання 4: . . . . .	19
0.4.5	Завдання 5: . . . . .	20

## 0.1 Практика 1

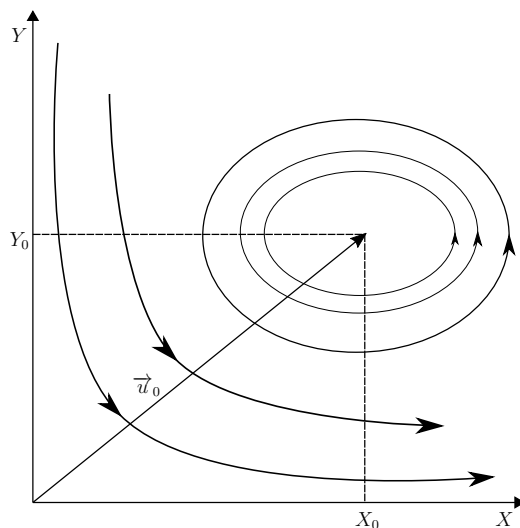
### 0.1.1 Завдання1:

Рівняння Вольтера-Лотки (еволюційне рівняння) в динаміці популяцій <хижак-жертва>:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -cy + pxy \\ \frac{dx}{dt} = ax - byx \end{cases} \quad (1)$$



a)



b)

знайти особливі точки ( $M(0,0)$ ,  $N(\frac{c}{p}, \frac{a}{b})$ )

Потрібно прирівняти рівняння (1) до нуля і розв'язати: 
$$\begin{cases} -cy + pxy = 0 \\ ax - byx = 0 \end{cases}$$

1. Припустимо, що  $x = 0$ , тоді  $y = 0$
2. Припустимо, що  $x \neq 0$ , тоді з другого рівняння випливає:

$$x(a - by) = 0 \implies a - by = 0 \implies y = \frac{a}{b}$$

відповідно :

$$-c\frac{a}{b} + px\frac{a}{b} \implies x = \frac{c}{p}$$

написати рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+px)}{x(a-by)} \cdot \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-c+px}{x}}{\frac{a-by}{y}}$$

$$dy \frac{a-by}{y} = dx \frac{-c+px}{x}$$

$$a \ln y - by = -c \ln x + px + C \quad | b = p = 1$$

$$x + y - c \ln x - a \ln y = C : \text{Інтеграл руху (еволюції)}$$

Довести тотожність:

$$x + y - c \ln x - a \ln y = C$$

$$\frac{d}{dt}(x + y - c \ln x - a \ln y) = \frac{d}{dt}C$$

$$ax - yx - cy + xy - \frac{c}{x}(ax - yx) - \frac{a}{y}(-cy + xy) = 0$$

$$ax - xy - cy + xy - ac + cy + ac - ax = 0$$

Знайти  $\operatorname{div} \vec{v}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = a - by - c + px = a - c - by + px$$

Знайти  $\Gamma$

$$\ln \Gamma = (a - c - by + px)t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{(a-c-by+px)t}$$

### 0.1.2 Завдання 2:

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

Перейти у сферичні координати

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi \\ \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = r \cos \varphi + \mu r \sin \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = \mu r \cos \varphi - r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos \varphi + \mu r \sin \varphi - \dot{\varphi} r \cos \varphi}{\sin \varphi} = r \operatorname{ctg} \varphi + \mu r - \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \cos \varphi + r \sin \varphi - \mu r \cos \varphi}{r \sin \varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + 1 - \mu \operatorname{ctg} \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu \operatorname{ctg} \varphi - \dot{\varphi} \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 - \mu \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \implies \dot{\varphi} = 1$$

$$\dot{r} = r \operatorname{ctg} \varphi + \mu r - \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi = \left| \dot{\varphi} = 1 \right| = \mu r$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

**Знайти фазову траєкторію в сферичних координатах**

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \mu r$$

$$\frac{dr}{r} = \mu d\varphi$$

$$\ln r = \mu \varphi + C$$

$$r = e^{\mu \varphi + C}$$

**Знайти фазову траєкторію в (x, y)**

$$\begin{cases} \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{x} = \mu x - y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \mu y}{\mu x - y} = \frac{1 + \mu \frac{y}{x}}{\mu - \frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

шукаємо рішення у вигляді:

$$y(x) = xz(x) \quad z = \frac{y}{x}$$

$$y' = xz' + z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad \int \frac{dz}{\frac{1+\mu z - \mu z + z^2}{\mu - z}} = \frac{dx}{x}$$

тоді

$$\frac{dz\mu}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = \ln x + C$$

$$\mu \arctan z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln x + C$$

$$\mu \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2) = \ln x + C$$

help

### 0.1.3 Завдання 3:

**Система Лоренца**

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

**Знайти особливі точки**  $[M(0, 0, 0), N_{1,2}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)]$

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ -bz + xy = 0 \end{cases}$$

Нехай  $x \neq 0$  тоді

$$\begin{cases} x = y \\ rx - y - xz = 0 \\ z = \frac{x^2}{b} \end{cases}$$

$$rx - x - \frac{x^3}{b} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{x}$$

$$b(r-1) = x^2 \implies x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r-1$$

**Знайти  $\Gamma(t)$**

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\sigma - 1 - b$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \operatorname{div} \vec{V} \text{ (ф-ла Ейлера)}$$

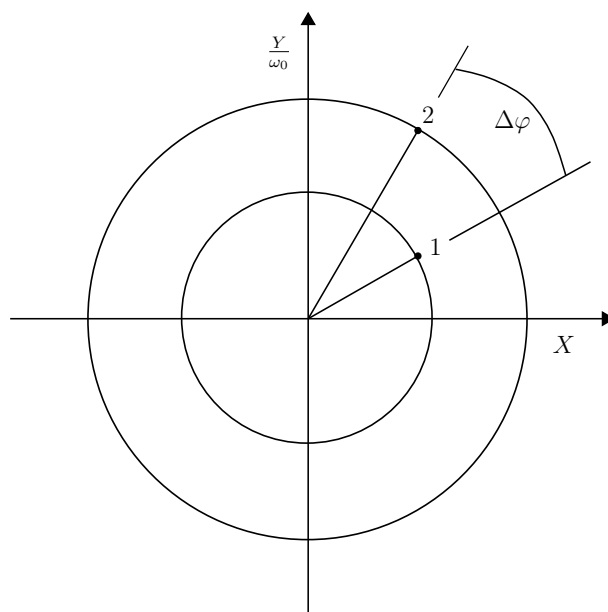
$$\ln \Gamma = (-\sigma - 1 - b)t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

#### 0.1.4 Завдання 4:

**Осцилятор без затухання  $\gamma = 0$**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$



**Знайти  $\Gamma$**

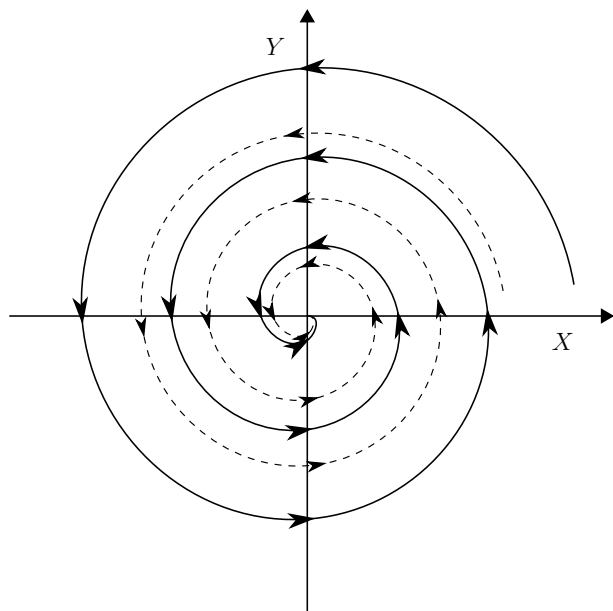
$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

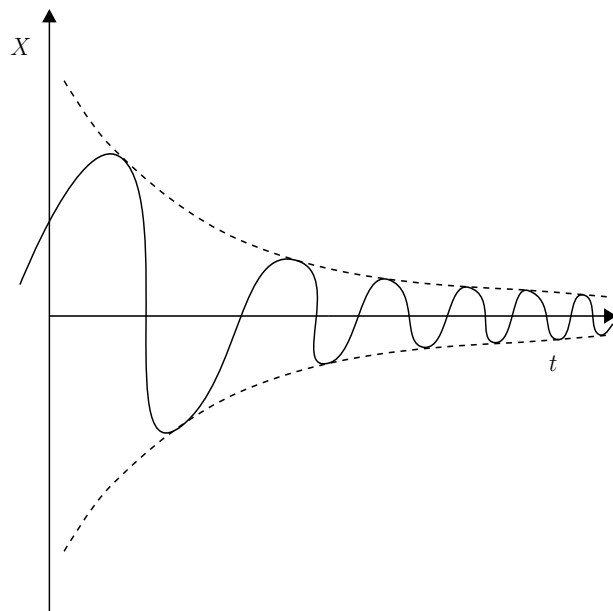
$$\Gamma = \text{const}$$

### 0.1.5 Завдання 5:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$



a)



b)

**Знайти  $\Gamma$**

$$\operatorname{div} \vec{V} = -2\gamma$$

$$\ln \Gamma = -2\gamma t + C$$

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-2\gamma t}$$

**Записати в полярних координатах**

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = -2\gamma r \sin \varphi - \omega_0^2 r \cos \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = r \sin \varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\dot{r} = \dot{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi + 2\gamma r + \omega_0^2 r \operatorname{ctg} \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{ctg} \varphi}{r} - 1 \end{cases}$$

$$-\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \operatorname{ctg}^2 \varphi + 2\gamma \operatorname{ctg} \varphi + \omega_0^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1$$

$$-\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = 2\gamma \operatorname{ctg} \varphi + \omega_0^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 \mid 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$\dot{\varphi} = -2\gamma \cos \varphi \sin \varphi - \omega_0^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = -\gamma \sin 2\varphi - \omega_0^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \dots$$

Потрібно доробити

### 0.1.6 Завдання 6:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Перейти до сферичних координат:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = -r \sin \varphi + r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r^3 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - r \operatorname{tg} \varphi + r^3 \\ \dot{\varphi} = -\dot{r} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} + 1 + r^2 \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = -(r \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - r \operatorname{tg} \varphi + r^3) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} + 1 + r^2 \operatorname{tg} \varphi = -\dot{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - r^2 \operatorname{tg} \varphi + 1 + r^2 \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi}(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$\dot{\varphi} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Знайти розв'язок системи:

$$\int \frac{dr}{r^3} = \int dt$$

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = t + C \implies \left| r(t=0) = r_0 \right| C = -\frac{1}{2r_0^2}$$

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = t - \frac{1}{2r_0^2} = \frac{t2r_0^2-1}{2r_0^2}$$

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1-2tr_0^2}$$

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1-2tr_0^2}}$$

## 0.2 Практика 2

### 0.2.1 Завдання 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

$$\text{Початкові умови } \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

**Знайти оператор еволюції**

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = - \int dt$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = -2 \int dt$$

$$\ln x_1 = -t + C_1$$

$$\ln x_2 = -2t + C_2$$

$$x_1 = e^{-t} C_1 \mid C_1 = x_{01}$$

$$x_2 = e^{-2t} C_2 \mid C_2 = x_{02}$$

$$x_1 = e^{-t} x_{01}$$

$$x_2 = e^{-2t} x_{02}$$

$$\vec{x}(t) = F^t \vec{x}_0$$

$$F^t = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

### 0.2.2 Завдання 2:

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$x(t=0) = x_0$$

**Знайти оператор еволюції**

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$$

$$-\frac{1}{x} = t + C \implies -\frac{1}{x_0} = t = 0 + C \implies C = -\frac{1}{x_0}$$

$$-x = \frac{1}{t - \frac{1}{x_0}} \mid \cdot -\frac{x_0}{x_0}$$

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

$$x(t) = F^t(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$$

$$F^t = \frac{x}{1-x t}$$

### 0.2.3 Завдання 3:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2$$

Знайти оператор еволюції

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int dt$$

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt = \left| \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \right| \Rightarrow A + x(B-A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \left| = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \int dt \right.$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x} = \int dt$$

$$\ln|x| - \ln|1-x| = t + C$$

$$\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C \Rightarrow C = \ln\frac{x_0}{1-x_0}$$

$$\frac{x}{1-x} = e^{t+C}$$

$$x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}} \mid C = \ln\frac{x_0}{1-x_0}$$

$$x(0) = \frac{e^t \frac{x_0}{1-x_0}}{1+e^t \frac{x_0}{1-x_0}} \mid \cdot \frac{1-x_0}{1-x_0}$$

$$x(0) = \frac{e^t x_0}{1-x_0+e^t x_0}$$

$$F^t = \frac{e^t x}{1+x(e^t-1)}$$

*У Кравцова чомусь рів'язок вийшов  $-\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C$ , тому там оператор  $F^t = \frac{x e^{-t}}{1+x(e^{-t}-1)}$*

### 0.2.4 Завдання 4:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

**Перейти в полярні координати:**

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = -r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi + r + r \operatorname{tg} \varphi - r^3 \\ \dot{\varphi} = -\dot{r} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} - 1 + \operatorname{tg} \varphi - r^2 \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -(r \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi + r + r \operatorname{tg} \varphi - r^3) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} - 1 + \operatorname{tg} \varphi - r^2 \operatorname{tg} \varphi = \\ &= -\dot{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi + r^2 \operatorname{tg} \varphi - 1 + \operatorname{tg} \varphi - r^2 \operatorname{tg} \varphi \implies \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi = -\operatorname{tg}^2 \varphi - 1 \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = -1$$

$$\dot{r} = -r \operatorname{tg} \varphi + r + r \operatorname{tg} \varphi - r^3 = r(1 - r^2)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$$

**Знайти точний розв'язок**

$$\frac{dr}{r(1-r^2)} = dt \mid \cdot \frac{r}{r}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{r^2(1-r^2)} = \left| r^2 = R \right| = \frac{1}{2} \frac{dR}{R(1-R)} = dt$$

$$\ln \left| \frac{R}{1-R} \right| = 2t + C \text{ (див. (0.2.3))}$$

$$R(t=0) = R_0 \implies C = \ln \left| \frac{R_0}{1-R_0} \right| \implies e^C = C' = \frac{R_0}{1-R_0} \implies \beta = \frac{1}{C'} = \frac{1}{R_0} - 1 \left| \text{чому? бо я так хочу} \right.$$

(але всеодно потрібно закруглить чому?)

$$\frac{R}{1-R} = e^{2t+C}$$

$$R = \frac{e^{2t+C}}{1+e^{2t+C}} = \frac{1}{1+e^{-(2t+C)}} = \frac{1}{1+e^{-2t}e^{-C}} = \frac{1}{1+e^{-2t}\left(\frac{R_0}{1-R_0}\right)^{-1}} = \frac{1}{1+\beta e^{-2t}}$$

*я звісно не експерт, але порівняно із розв'язком Кравцова у мене щось пішло не по плану ;  
розв'язок Кравцова:  $\frac{1}{1+e^{-t\beta}}$*

### 0.2.5 Завдання 5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

**Знайти точний розв'язок:**

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1-2tr_0^2}} \quad (\text{див. (0.1.6)})$$

## 0.3 Практика 3 (Аналіз системи)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Складемо систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \gamma \geq 0, \omega_0 \geq 0 \\ \vec{u} - \text{вектор стану} \\ \vec{b} - \text{власний вектор матриці } A \\ \lambda_i - \text{власні числа матриці } A \end{array}$$
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -2\gamma & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u} \quad (2)$$

Шукаємо розв'язок (2) у вигляді  $\vec{u} = \vec{b} e^{\lambda t}$

### 0.3.1 Завдання 1: (Знайти власні числа)

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2\gamma - \lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \text{ розв'язавши отримуємо власні числа}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

### 0.3.2 Завдання 2: (Знайти власні вектора)

$$(A - \lambda E) \vec{b} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2\gamma - \lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (-2\gamma - \lambda)b_1 - \omega_0^2 b_2 = 0 \\ b_1 - \lambda b_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

Із рівності (5) отримуємо, що  $\frac{b_1}{b_2} = \lambda$ , тоді власними векторами будуть

$$\vec{b}^1 = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{b}^2 = c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (6)$$

### 0.3.3 Завдання 3: (Знайти розв'язок системи)

Розв'язком системи (2) буде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} = \left( c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\gamma t}$$

позначимо  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ , тоді отримаємо систему

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left( c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \right) e^{-\gamma t} \quad (7)$$

якби для пошуку власних векторів скористались не рівністю (5), а рівністю (4), отримали б рішення

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left( c_1^* \begin{bmatrix} -\omega_0 \\ \lambda_1 + \gamma \end{bmatrix} e^{i\omega t} + c_2^* \begin{bmatrix} -\omega_0 \\ \lambda_2 + \gamma \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \right) e^{-\gamma t}$$

### 0.3.4 Завдання 4: (Знайти траєкторію)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\gamma - \omega_0^2 \frac{x}{y} \quad \left| \quad y = xz, \quad dy = zdx + xdz \right.$$

$$z + x \frac{dz}{dx} = -2\gamma - \frac{\omega_0^2}{z}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z + 2\gamma + \frac{\omega_0^2}{z}} \quad \left| \quad \cdot \frac{z}{z} \right.$$



$$\begin{aligned}
-\frac{dx}{x} &= \frac{zdz}{z^2+2\gamma z+\omega_0^2} = \frac{zdz}{(z^2+2\gamma z+\gamma^2)-(\gamma^2-\omega_0^2)} \quad \left| \Delta = \gamma^2 - \omega_0^2 \right. \\
-\frac{dx}{x} &= \frac{zdz}{(z+\gamma)^2-\Delta} = \frac{(z+\gamma-\gamma)d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta} = \frac{(z+\gamma)d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta} - \gamma \frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta} \\
-\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2} \frac{d((z+\gamma)^2-\Delta)}{(z+\gamma)^2-\Delta} - \gamma \frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2-\Delta} \\
-\ln x &= \frac{1}{2} \ln((z+\gamma)^2 - \Delta) - \gamma \int \frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2 - \Delta} + \ln C_0
\end{aligned} \tag{8}$$

Нехай  $\Delta < 0$  тоді (8) матиме вигляд

$$\begin{aligned}
-\ln x &= \frac{1}{2} \ln((z+\gamma)^2 + \Delta) - \gamma \int \frac{d(z+\gamma)}{(z+\gamma)^2 + \Delta} + \ln C_0 \\
-\ln x &= \frac{1}{2} \ln((z+\gamma)^2 + \Delta) - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{z+\gamma}{\sqrt{\Delta}} + \ln C \\
\ln x^2((z+\gamma)^2 + \Delta) &= \frac{2\gamma}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{z+\gamma}{\sqrt{\Delta}} - \ln C^2 \\
\ln(x^2 z^2 + x^2 \gamma z + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2) &= \frac{2\gamma}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{z+\gamma}{\omega} - \ln C^2
\end{aligned}$$

$$\ln(y^2 + \gamma xy + \omega_0^2 x^2) = \frac{2\gamma}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y + \gamma x}{\omega x} - \ln C^2 \tag{9}$$

## 0.4 Практика 4

### 0.4.1 Завдання 1:

Перевірити виконання умови Коші

$$\frac{dx}{dt} = e^{-x}$$

$$e^x dx = dt$$

$$e^x = t + C$$

$$x = \ln(t + C) \implies t + C > 0$$

### 0.4.2 Завдання 2:

Знайти інтегральну криву і фазову траєкторія

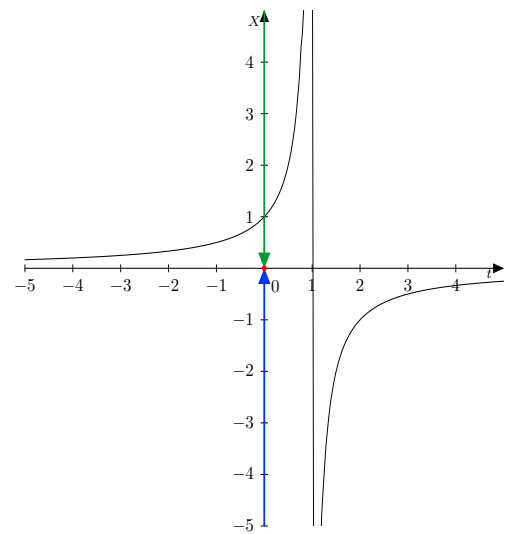
$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$x^{-2} dx = dt$$

$$x^{-1} = -t - C$$

$$\text{При } x(t=0) = 1 \implies C = -1$$

$$x = \frac{1}{1-t}$$



$(-\infty; 0)$  – перша фазова траєкторія

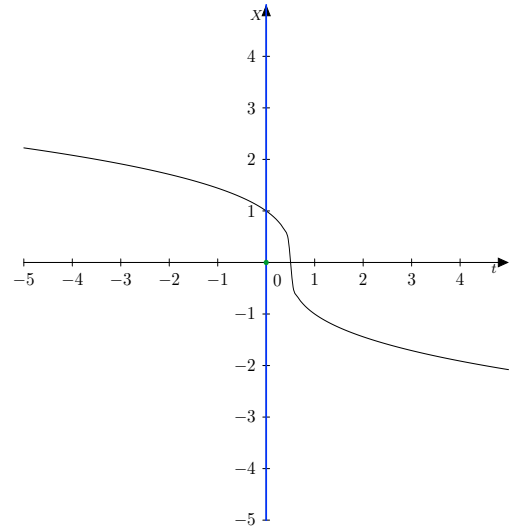
$\{0\}$  – друга фазова траєкторія

$(0, \infty)$  – третя фазова траєкторія

### 0.4.3 Завдання 3:

Знайти інтегральну криву і фазову траєкторія

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x^{\frac{2}{3}} \\ x^{-\frac{2}{3}} dx &= dt \\ -\frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}} &= 3t + C' \\ x^{\frac{1}{3}} &= -2t - C \\ x &= \sqrt[3]{-2t - C} \\ \text{При } x(t=0) &= 1 \implies C = -1 \\ x &= \sqrt[3]{-2t + 1}\end{aligned}$$



$(-\infty; \infty)$  – перша фазова траєкторія

$\{0\}$  – друга фазова траєкторія

примітка: оскільки права частина є неаналітичною, тому фазові траєкторії перетинаються

#### 0.4.4 Завдання 4:

$$\begin{aligned}\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2 \\ \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_1 + x_2) = -2x_2^2\end{aligned}$$

Стійкість присутня в усій області

$$\text{b) } \ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 - x_1 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_2^3 + x_1) = -2x_2^4 \quad \text{Стійкість присутня в усій області}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2 \end{cases}, \quad L = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2(x_1 + (1 - x_1^2)x_2) = -2x_2^2(1 - x_1^2)$$

По ідеї стійкість присутня в області яка обмежена площиною  $\begin{cases} x_1 < |1| \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ , але правильною є

відповідь  $x_1^2 + x_2^2 < 1$

$$\text{d) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 - a) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_2 - b) \end{cases}, \quad L = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{2}{a^2} x_1^2 (x_1 - a) + \frac{2}{b^2} x_2^2 (x_2 - b)$$

Потрібно доробить

зрозуміть чому  $x_1, x_2$  обмежені константами  $a, b$  відповідно, і чому по цій причині виходить еліпс

#### 0.4.5 Завдання 5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

при малих коиваннях  $x_1$  еквівалентна системі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - x_1 \end{cases}$$

Провести аналіз

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{bmatrix} \implies C = \mu, \quad D = 1$$

- $\mu = 0$

$C = 0, D > 0 \implies$  центр

- $\mu \neq 0$

$$\blacktriangledown \mu \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

$$\frac{C^2}{4} < D, \quad D > 0 \implies \text{фокус}$$

$$\blacktriangledown \mu \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$\frac{C^2}{4} > D, \quad D > 0 \implies \text{вузол}$$

Пара-па-па-пам, що за нах?