TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

DE LA TEORÍA DE NUDOS A LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLÓGICA

COMPLEMENTOS DE GEOMETRÍA Y TEORÍA DE GRUPOS EN FÍSICA

Daniel Michel Pino González

Máster en Física Teórica

Curso académico 2021-22

ÍNDICE GENERAL

NUDOS

Y CLASES

DEFINICIÓN FORMAL DE NUDO. NUDOS DOMADOS Y SALVAJES

Definición (Nudo)

K *es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unidad* C *sobre* R^3 *cuya imagen es* K.

Definición (Equivalencia de nudos)

Dos nudos K_1 *y* K_2 *son equivalentes si existe un homeomorfismo de* R^3 *sobre sí mismo que mapea* K_1 *a* K_2.

Figura 1: Deformaciones homeomorfas entre nudos equivalentes.
[1] By Kuchtact - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Knot_Unfolding.gif

Teorema (Nudos domados y salvajes)

Si un nudo parametrizado por la longitud de arco es de clase C^1 *(esto es, continuamente diferenciable), entonces es domado. En caso contrario, se dice que el nudo es salvaje.*

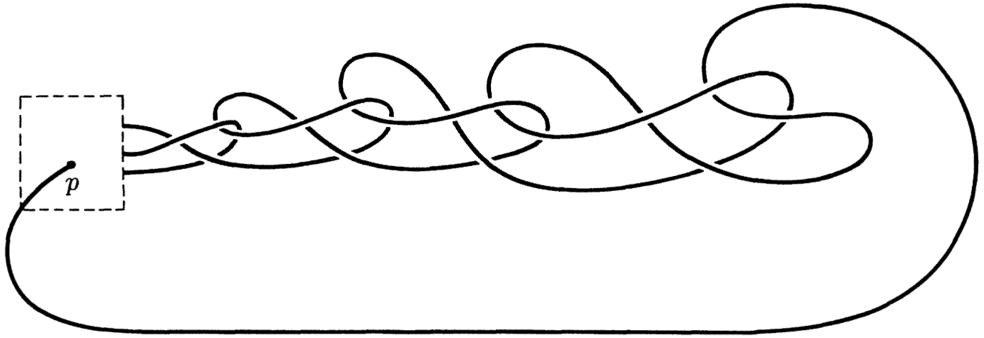


Figura 2: Ejemplo de nudo salvaje.
[2] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, (1963).

TIPO DE ISOTOPÍAS. NUDOS ANFIQUIRALES E INVERTIBLES

Definición (Deformación isotópica)

Una deformación isotópica de un espacio topológico X *es una familia de homeomorfismos* h_t $(0 \leq t \leq 1)$ *de* X *sobre sí mismo tal que* h_0 *es la identidad y la función* $H(t,p) = h_t(p)$ *es simultáneamente continua en* t *y* p.

Definición (Tipo de isotopía)

Se dice que dos nudos K_1 *y* K_2 *pertenecen al mismo tipo de isotopía si existe una deformación isotópica* $\{h_t\}$ *de* R^3 *tal que* $h_1K_1 = K_2$.

Figura 3: Nudo de hoja de trébol (izq.), su imagen espejo (ctr.) y nudo en forma de ocho (dcha.).

Definición (Nudo anfiquiral)

Un nudo K *se dice anfiquiral si existe un homeomorfismo* h *de* R^3 *sobre sí mismo que invierta la orientación tal que* $h(K) = K$.

Un nudo es anfiquiral si y sólo si existe un homeomorfismo de R^3 *sobre sí mismo que preserva la orientación y que mapea* K *sobre su imagen espejo.*

Definición (Imagen espejo)

Se dice que la imagen espejo de un nudo K *es la imagen de* K *bajo la reflexión* $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.

Definición (Nudo invertible)

Un nudo K *se dice invertible si existe un homeomorfismo* h *de* R^3 *sobre sí mismo que preserva la orientación tal que la restricción* $h|K$ *es un homeomorfismo de* K *sobre sí mismo que invierte la orientación.*

PROYECCIONES

Y MOVIMIENTOS DE REIDEMEISTER

Definición (Posición regular)

Un nudo poligonal K *está en posición regular si: (i) los únicos puntos múltiples de* K *son puntos dobles, y existe solamente un número finito de ellos; (ii) ningún punto doble es la imagen de un vértice de* K.

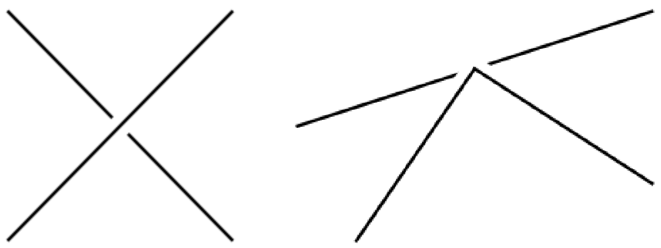


Figura 4: Dos tipos de puntos dobles en proyecciones de nudos.

Teorema

Todo nudo poligonal K *es equivalente bajo una relación arbitrariamente pequeña de* R^3 *a un nudo poligonal en posición regular.*

Definición (Equivalencia de proyecciones)

Se dice que dos proyecciones de nudos son equivalentes si están conectadas por medio de una secuencia finita de isotopías planas y movimientos de Reidemeister.

Teorema de Reidemeister

Dos nudos son equivalentes si y sólo si todas sus proyecciones son equivalentes.

Definición (Nudo invertible)

Un nudo K *se dice invertible si existe un homeomorfismo* h *de* R^3 *sobre sí mismo que preserva la orientación tal que la restricción* $\mathrm{h}|\mathrm{K}$ *es un homeomorfismo de* K *sobre sí mismo que invierte la orientación.*

Definición (Isotopía plana)

Por isotopía plana de una proyección de nudo entendemos un difeomorfismo del plano de proyección sobre sí mismo que no cambia la estructura combinatoria de la proyección.

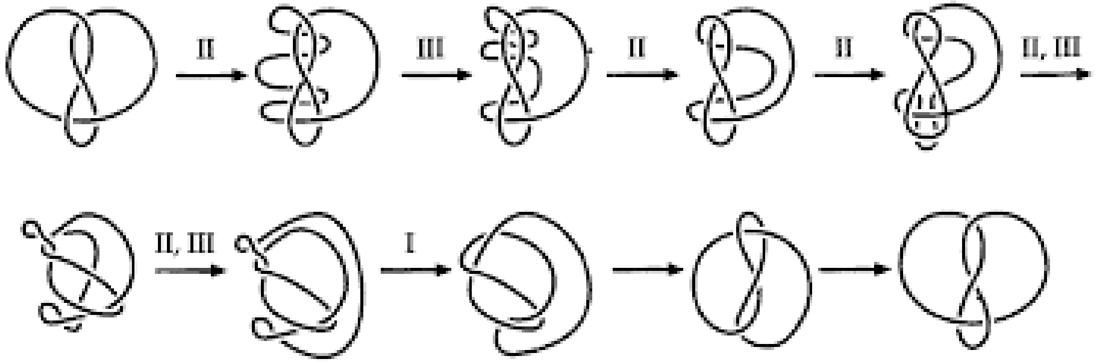
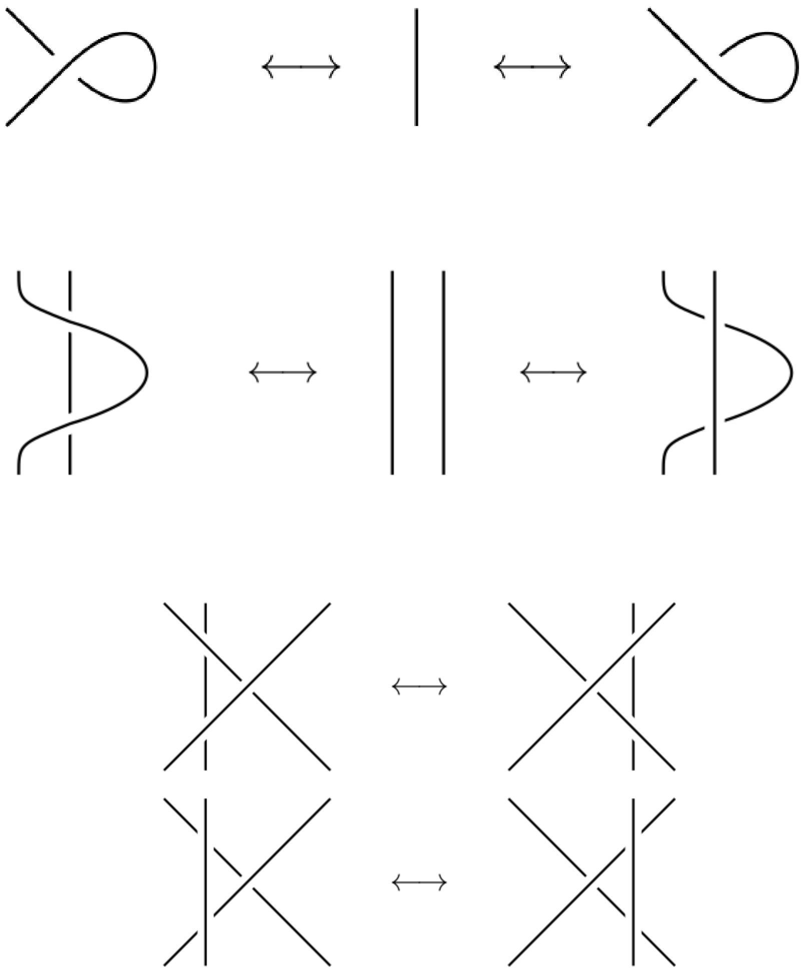


Figura 5: Transformación del nudo en forma de ocho en su imagen espejo bajo movimientos de Reidemeister.

[3] A. Schulze and N. Rahaman, *Knot polynomials*, (2014).



DE LOS NUDOS

A LAS TRENZAS

Definición (Trenza)

El grupo de trenzas Br(m) *de m cuerdas es aquél que viene dado por un conjunto de* (m-1) *generadores que satisfacen las relaciones*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad , \quad |i-j| > 1 \, ,$$
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad , \quad 1 \leq i \leq m-2 \, ,$$

denominadas relaciones de Artin.

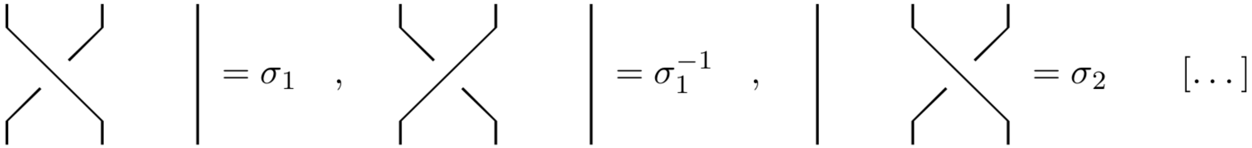


Figura 6: Representación diagramática de los generadores del grupo de trenzas.

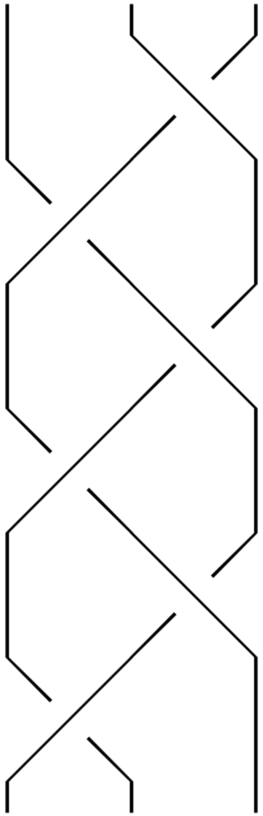


Figura 7: Ejemplo simple de trenza.

Definición (Clausura de trenza)

La clausura de una trenza B *es el enlace* Cl(B) *obtenido de* B *al conectar los extremos inferiores de la trenza con los superiores (en orden y sin cruces), guardando una orientación de abajo a arriba.*

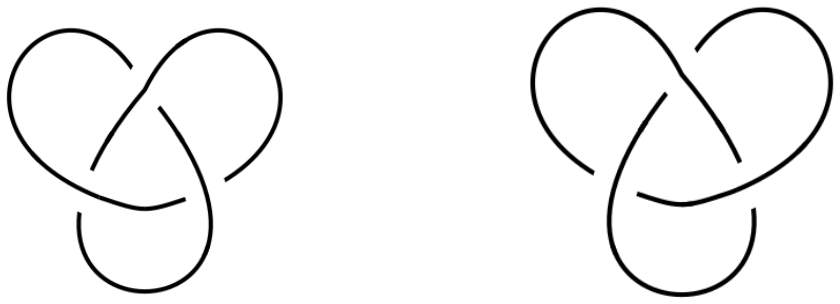


Figura 8: Nudo de hoja de trébol (izq.) y su imagen espejo (dcha.).

Teorema de Alexander

Todo nudo o enlace es isotópico a la clausura de una trenza.

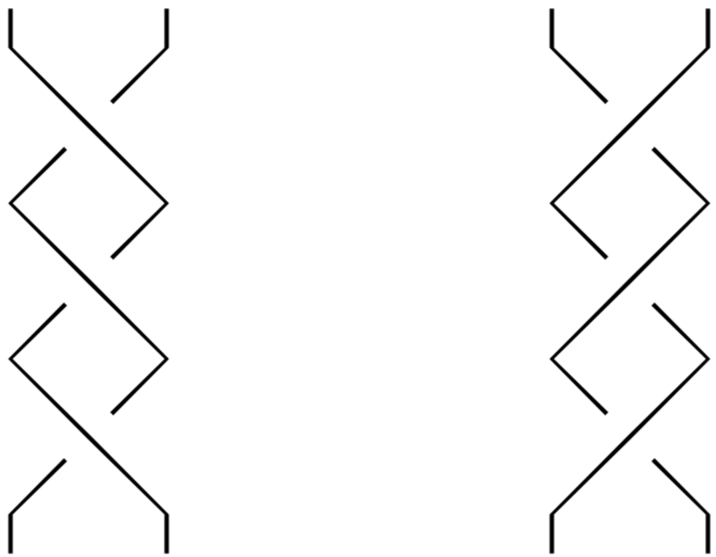


Figura 9: Representación de trenza del nudo de hoja de trébol (izq.) y su imagen espejo (dcha.).

DE LA TEORÍA DE TRENZAS

A LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLÓGICA

Álgebra de Grassmann (Dirac)

Los fermiones de Dirac satisfacen las relaciones de anticunmutación del álgebra de Grassmann,

$$\hat{c}_i\hat{c}_j = -\hat{c}_j\hat{c}_i \quad , \quad \hat{c}_i^2 = (\hat{c}_i^\dagger)^2 = 0 \quad , \quad \hat{c}_i\hat{c}_i^\dagger + \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i = 1$$

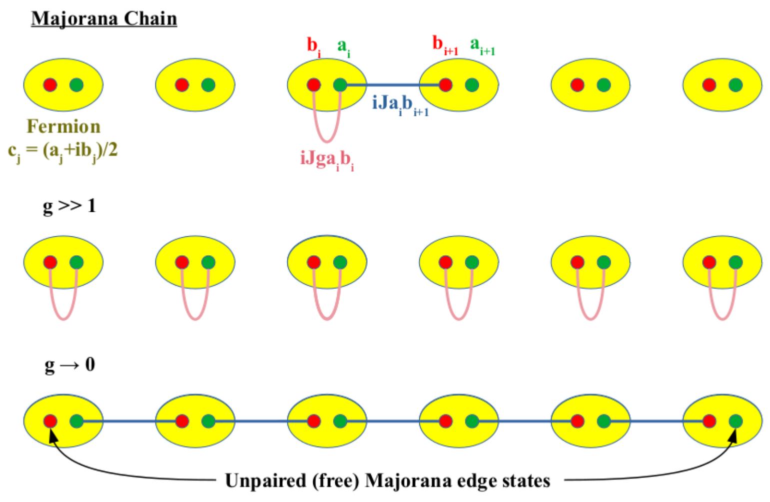


Figura 10: Interpretación de una cadena de fermiones mediante operadores de Majorana y sus diferentes fases topológicas.
[4] K. Chhajed, Resonance, vol. 26 (2021).

Álgebra de Clifford (Majorana)

Los fermiones de Majorana forman operadores reales, por lo que son sus propias antipartículas y siguen el álgebra de Clifford,

$$\hat{a} = \hat{a}^\dagger \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}^\dagger$$

$$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 = 1 \quad , \quad \hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a}$$

En particular, se pueden construir fermiones de Dirac a partir de éstos,

$$\hat{c} = \frac{1}{2}(\hat{a} + i\hat{b}) \quad , \quad \hat{c}^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{a} - i\hat{b})$$

OPERADORES DE TRENZADO Y EL ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Definición (Operadores de trenzado)

Si tomamos una colección $\{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n\}$ *de fermiones de Majorana como base de un espacio vectorial, entonces existen unos operadores de trenzado naturales que actúan sobre dicho espacio,*

$$T_k : \mathrm{Span}\{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n\} \to \mathrm{Span}\{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n\} ,$$

definidos como

$$T_k(x) = \tau_k x \tau_k^{-1} \quad , \quad \begin{cases} T_k(\hat{a}_k) = \hat{a}_{k+1} \\ T_k(\hat{a}_{k+1}) = -\hat{a}_k \end{cases}$$

donde

$$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_{k+1}\hat{a}_k) \quad , \quad \tau_k^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \hat{a}_{k+1}\hat{a}_k)$$

Teorema del trenzado de Clifford

Los elementos $\{\tau_k\}$ *del álgebra de los operadores de trenzado forman una representación del grupo de trenzas de Artin circular. En efecto, estos elementos cumplen las relaciones de Artin,*

$$\text{I)} \quad \tau_k \tau_{k+1} \tau_k = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} \ \forall k,$$

$$\text{II)} \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad , \quad |i - j| > 1.$$

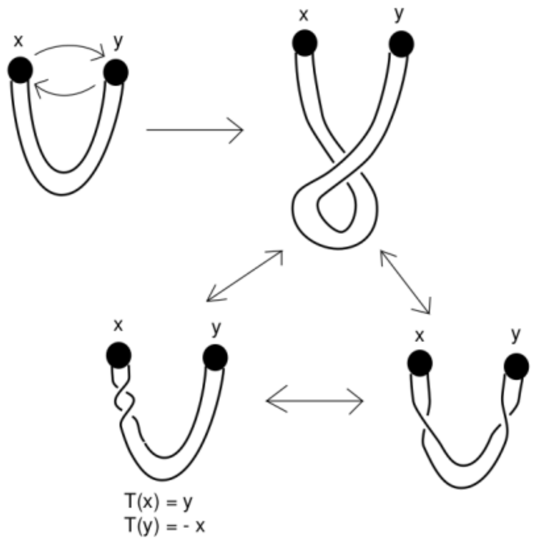


Figura 11: Acción de trenzado sobre un par de fermiones de Majorana.

[5] L. H. Kauffman and S. J. Lomonaco, Proc. ISOP, vol. 9873, (2016).

FERMIONES DE MAJORANA

Y PUERTAS CUÁNTICAS UNIVERSALES

Definición (Puerta cuántica)

Una puerta G *de dos qubits es un mapa lineal unitario* $G: V \otimes V \to V \otimes V$, *donde* V *es un espacio complejo bidimensional.*

Condición de universalidad

Se dice que la puerta G es universal para computación cuántica si G junto a transformaciones locales unitarias de V en V genera todas las transformaciones unitarias del espacio vectorial complejo de dimensión 2^n sobre sí mismo.

Definición (Puerta entrelazante)

Una puerta G se dice entrelazante si existe un vector

$$|\alpha\beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \in V \otimes V$$

tal que la acción de G sobre éste no es descomponible como producto tensorial de dos qubits.

Corolario

Se puede demostrar que una puerta G de dos qubits es universal si y sólo si es entrelazante.

OPERADOR DE YANG-BAXTER Y PUERTAS UNIVERSALES DE TRENZADO

Definición (Operador de Yang-Baxter)

Un operador de Yang-Baxter es un mapa lineal R:V⊗V→V⊗V *que es solución de la ecuación de Yang-Baxter,*

$$(R \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes R)(R \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I} \otimes R)(R \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes R)$$

Este operador generaliza la permutación de los espacios vectoriales donde actúa y es un concepto clave en la construcción de invariantes de nudos cuánticos.

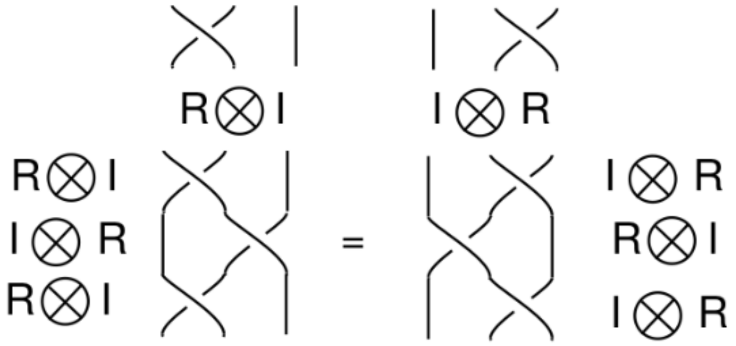


Figura 12: Ecuación de Yang-Baxter y su representación como diagrama de trenzas.
[5] L. H. Kauffman and S. J. Lomonaco, Proc. ISOP, vol. 9873, (2016).

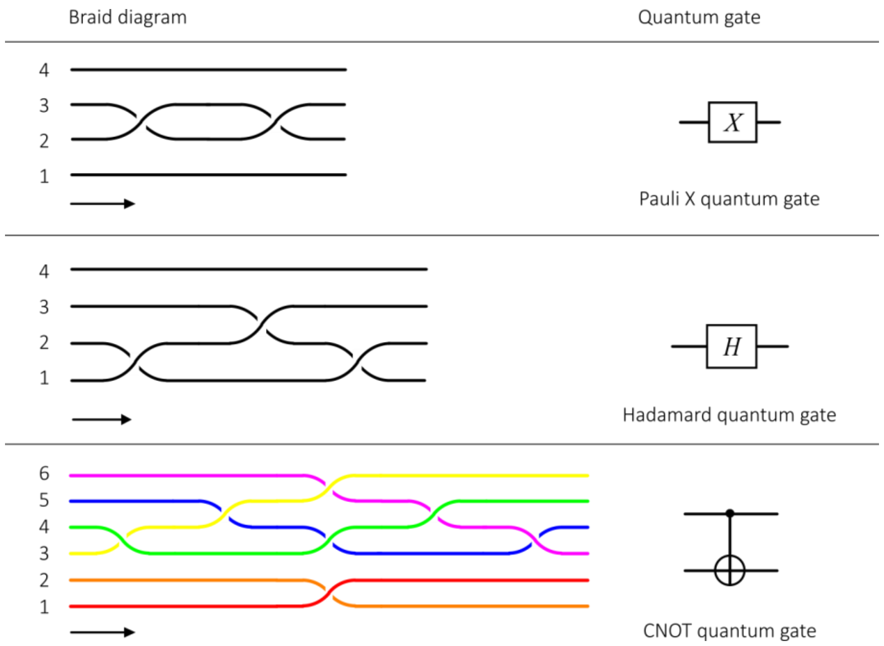


Figura 13: Construcción de puertas universales a partir de operadores de trenzado.
[6] L. S. Georgiev, arXiv, (2016).

FIN

¡GRACIAS!