

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



**DE LA TEORÍA DE NUDOS A LOS DESAFÍOS MÁS
URGENTES DE LA FÍSICA MODERNA**

COMPLEMENTOS DE GEOMETRÍA Y TEORÍA DE GRUPOS EN
FÍSICA

Daniel Michel Pino González

Máster en Física Teórica

Curso académico 2021–22

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. NUDOS Y CLASES DE NUDOS	1
2.1. Definición formal de nudo	1
2.2. Nudos domados y salvajes	2
2.3. Tipo de isotopías. Nudos anfiguirales e invertibles	2
3. PROYECCIONES Y MOVIMIENTOS DE REIDEMEISTER	4
3.1. Proyecciones de nudos	4
3.2. Movimientos de Reidemeister	5
4. INVARIANTES DE NUDOS	6
5. TEORÍA DE TRENZAS	6
5.1. Nudos y trenzas	7
6. DE LA TEORÍA DE TRENZAS A LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLO- GICA	8
6.1. Fermiones de Majorana	8
6.2. Operadores de trenzado y el álgebra de Clifford	9
6.3. Fermiones de Majorana y puertas cuánticas universales	10
6.3.1. Puertas universales	10
6.3.2. El operador de Yang–Baxter y las puertas universales de trenzado	10

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de nudos es una rama muy joven de la topología: comienza a estudiarse en los siglos XVIII y XIX y se desarrolla en su mayoría en su mayor parte a lo largo del siglo XX. Este campo tiene un gran interés científico debido a su carácter interdisciplinar. De hecho, una de las primeras motivaciones del estudio de los nudos fue la propuesta de Lord Kelvin (1867) sobre que los átomos tenían forma de nudo. Aunque esta teoría fue descartada, el interés por los nudos ha permanecido vigente en muchas ramas de la física cuántica, la criptografía e incluso la química y la biología molecular.

Por otro lado, el origen de la teoría de trenzas se remonta a la década de 1920, de la mano del matemático Emil Artin [7]. Sin embargo, su gran utilidad para la definición de muchos conceptos de la teoría de nudos y sus invariantes la sitúan en una posición de gran interés en la topología y la física a la que se aplica. De hecho, uno de los más importantes invariantes de nudos, el polinomio de Jones, fue descubierto a partir de esta teoría.

En el presente estudio, introduciremos [1, 2] los conceptos básicos de la teoría de nudos y su fusión con la teoría de trenzas, para más adelante tratar una de sus aplicaciones más potentes sobre la computación cuántica topológica y la universalidad de las puertas cuánticas. En la sección 2, daremos una definición formal de nudo (sec. 2.1), diferenciando entre nudos domados y salvajes (sec. 2.2) e introduciendo las deformaciones isotópicas ambientales utilizadas para su clasificación, poniendo como ejemplo los nudos anfigurales e invertibles (sec. 2.3).

En la sección 3, trataremos esta clasificación en rigor mediante la introducción [3] de las proyecciones de nudos (sec. 3.1), las deformaciones isotópicas que pueden presentar y los movimientos de Reidemeister (sec. 3.2). Finalmente, en la sección 4, nos detendremos brevemente en la presentación [4] de los invariantes de nudos bajo dichos movimientos isotópicos.

Daremos paso entonces, en la sección 5, a la formalización de la teoría de trenzas y el grupo de Artin, así como su aplicabilidad a la definición de nudo (sec. 5.1).

En la sección 6, trazaremos una potente relación entre la teoría de trenzas y una de sus aplicaciones a la física, la computación cuántica topológica. Para ello, introduciremos brevemente [5, 6] el concepto de fermión de Majorana (sec. 6.1), el álgebra de Clifford de presenta y su posibilidad de conformar una representación fermiónica del grupo de Artin (sec. 6.2). Concluiremos el presente estudio con la realización de puertas lógicas topológicas [8] a partir de dicha representación y su relación con la ecuación de Yang–Baxter (sec. 6.3).

2. NUDOS Y CLASES DE NUDOS

2.1. Definición formal de nudo

Definición 2.1 (Nudo). *K es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unidad C sobre el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 cuya imagen es K . Por círculo C entendemos el conjunto de puntos (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 que satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.*

La siguiente pregunta que debemos tratar es cuándo dos nudos K_1 y K_2 pueden considerarse el mismo. Nótese primero de todo que ésta no es una cuestión de si K_1 y K_2 son o no homeomorfos, ya que ambos lo son al círculo unidad y, consecuentemente, lo son entre sí. La propiedad de estar anudado no es una propiedad topológica intrínseca del espacio consistente en los puntos del nudo, sino una característica del modo en que dicho espacio está embebido en \mathbb{R}^3 . La teoría de nudos es parte de la topología tridimensional y no de la unidimensional. Si un trozo de cuerda se retuerce sobre otro, la deformación determina una correspondencia uno–a–uno entre los puntos de las dos posiciones, y puesto que cortar la cuerda no está permitido, ésta es una correspondencia bicontinua.

Definición 2.2 (Equivalencia de nudos). *Los nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que mapea K_1 a K_2 .*

La relación de equivalencia de nudos es una relación de equivalencia verdadera. Los nudos equivalentes se dicen ser del mismo tipo, y cada clase de equivalencia de nudos es un tipo de nudo. Aquellos nudos que son equivalentes al círculo sin anudar $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, son denominados triviales y constituyen el tipo trivial¹.

2.2. Nudos domados y salvajes

Un nudo poligonal es aquel que es la unión de un número finito de segmentos de línea recta cerrados llamados bordes, cuyos puntos finales son los vértices del nudo. Un nudo es domado si es equivalente a un nudo poligonal; en otro caso, es salvaje. Esta distinción es de fundamental importancia, ya que los principales invariantes de tipo de nudo, a saber, los ideales elementales y los polinomios de nudo, no están necesariamente definidos para un nudo salvaje.

Es natural preguntarse qué tipos de nudos más allá de los poligonales son domados. Una respuesta parcial viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Si un nudo parametrizado por la longitud de arco es de clase C^1 (esto es, es continuamente diferenciable), entonces es domado.*

Más explícitamente, las asunciones sobre K son que es rectificable y viene dado como la imagen de una función vectorial $p(s) = (x(s), y(s), z(s))$ de la longitud de arco s con primeras derivadas continuas. Por tanto, todo nudo suficientemente suave es domado.

2.3. Tipo de isotopías. Nudos anfiquirales e invertibles

La definición de equivalencia de nudos representa una simplificación de la situación física que la motivó (es decir, el ejemplo de una cuerda en movimiento desde una posición en el espacio a otra), en la que no se tiene en cuenta el movimiento durante la transición desde la posición inicial a la final. Una construcción más elaborada, que modela el movimiento, está descrita en la definición del tipo de isotopía de un nudo.

Definición 2.3 (Deformación isotópica). *Una deformación isotópica de un espacio topológico X es una familia de homeomorfismos $h_t, 0 \leq t \leq 1$, de X sobre sí mismo tal que h_0 es la identidad, es decir, $h_0(p) = p$ para todo p en X , y la función H definida como $H(t, p) = h_t(p)$ es simultáneamente continua en t y p .*

Éste es un caso especial de la definición general de deformación.

Definición 2.4 (Tipo de isotopía). *Se dice que los nudos K_1 y K_2 pertenecen al mismo tipo de isotopía si existe una deformación isotópica $\{h_t\}$ de \mathbb{R}^3 tal que $h_1 K_1 = K_2$.*

Por tanto, para un punto fijo $p \in \mathbb{R}^3$, el punto $h_t(p)$ traza, por así decirlo, el camino de la molécula originalmente en p durante el movimiento de la cuerda desde su posición inicial en K_1 a K_2 . Si los nudos K_1 y K_2 pertenecen al mismo tipo de isotopía, son equivalentes. Lo contrario, sin embargo, es falso.

Todo homeomorfismo h de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo preserva o invierte la orientación. Aunque un tratamiento riguroso de este concepto suele venir dado por la teoría de homología², la idea intuitiva es simple. El homeomorfismo h preserva la orientación si la imagen de toda hélice hacia la izquierda

¹Todo nudo que yace en un plano es necesariamente trivial. Éste es un teorema de topología plana bien conocido y profundo.

²Un homeomorfismo k de la n -esfera $S^n, n \geq 1$, sobre sí misma preserva o invierte la orientación de acuerdo con que el homeomorfismo $k_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ sea o no la identidad. Sea $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compactificación de un punto del n -espacio real cartesiano \mathbb{R}^n . Cualquier homeomorfismo h de \mathbb{R}^n sobre sí mismo tiene una única extensión a un homeomorfismo k de $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ sobre sí mismo definido como $k|_{\mathbb{R}^n} = h$ y $k(\infty) = \infty$. Entonces, h preserva o invierte la orientación si k preserva o invierte la orientación.

(derecha) es una hélice hacia la izquierda (derecha). La razón de que no exista otra posibilidad es que, debido a la continuidad de h , el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 en los que el giro de una hélice es preservado por h es un conjunto abierto y lo mismo ocurre con el conjunto de puntos en los que el giro se invierte. Puesto que h es un homeomorfismo, todo punto de \mathbb{R}^3 pertenece a uno de estos conjuntos disjuntos; y puesto que \mathbb{R}^3 es conexo, uno de estos dos conjuntos debe ser vacío. La composición de homeomorfismos sigue la siguiente regla de paridad:

h_1	h_2	$h_1 h_2$
preserva	preserva	preserva
invierte	preserva	invierte
preserva	invierte	invierte
invierte	invierte	preserva

Obviamente, la identidad preserva la orientación. Por otro lado, la reflexión $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ invierte la orientación. Si h es una transformación lineal, preserva o invierte la orientación dependiendo de si su determinante es positivo o negativo. De forma similar, si tanto h como su inversa son diferenciables de clase C^1 en todo punto de \mathbb{R}^3 , entonces h preserva o invierte la orientación si su jacobiano es positivo o negativo en todo el espacio.

Considérese una deformación isotópica $\{h_t\}$ de \mathbb{R}^3 . El hecho de que la identidad preserve la orientación combinado con la continuidad de $H(t, p) = h_t(p)$, sugiere³ que h_t preserve la orientación para todo t en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Como resultado, una condición necesaria para que dos nudos pertenezcan al mismo tipo de isotopía es que exista un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que preserve la orientación, y que mapee uno de los nudos sobre el otro.

Definición 2.5 (Nudo anfiquiral). *Un nudo K se dice que es anfiquiral si existe un homeomorfismo h de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que invierta la orientación tal que $h(K) = K$.*

Una formulación equivalente de esta definición, que es más geoméricamente sugerente, viene dada por el siguiente lema.

Lema 2.1. *Un nudo K es anfiquiral si y sólo si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que preserve la orientación y que mapea K sobre su imagen espejo.*

De donde se sigue la siguiente definición.

Definición 2.6 (Imagen espejo). *Se dice que la imagen espejo de un nudo K es la imagen de K bajo la reflexión \mathcal{R} definida como $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.*

Como resultado de este procedimiento, podemos estudiar el ejemplo del nudo de hoja de trébol (*clover-leaf knot*) y su imagen espejo, que son equivalentes pero no pertenecen al mismo tipo de isotopía.

Es natural preguntarse si todo homeomorfismo f de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que preserve la orientación puede ser realizable mediante una deformación isotópica, esto es, dado f , queremos saber si existe un $\{h_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, tal que $f = h_1$. Si la respuesta fuese negativa, tendríamos otra clase de tipo de nudos. Sin embargo, es positiva.

Puesto que todo homeomorfismo de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo o preserva o invierte la orientación, entonces todo homeomorfismo f de un nudo K sobre sí mismo también preserva o invierte la orientación. La interpretación geométrica es análoga, y más simple, a la situación en espacio tridimensional. Habiendo prescrito una dirección sobre el nudo, f preserva o invierte la orientación dependiendo de si el orden de puntos de K se preserva o se invierte bajo f .

³En efecto, una deformación isotópica $\{h_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, del n -espacio cartesiano \mathbb{R}^n posee una única extensión hacia una deformación isotópica $\{k_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, de la n -esfera S^n , esto es, $k_t|_{\mathbb{R}^n} = h_t$, y $k_t(\infty) = \infty$. Para cada t , el homeomorfismo k_t es homotópico a la identidad, y entonces el isomorfismo inducido $(k_t)_*$ en $H_n(S^n)$ es la identidad. Se sigue, por tanto, que h_t preserva la orientación para todo t en $0 \leq t \leq 1$.



Figura 1: (a) Nudo de hoja de trébol y (b) su imagen espejo.

Definición 2.7 (Nudo invertible). *Un nudo K se dice que es invertible si existe un homeomorfismo h de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que preserva la orientación tal que la restricción $h|_K$ es un homeomorfismo de K sobre sí mismo que invierte la orientación.*

Por ejemplo, tanto el nudo de hoja de trébol como el nudo en forma de ocho (*figure-eight knot*, véase fig. 2) son invertibles.

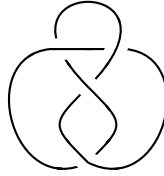


Figura 2: Nudo en forma de ocho. Al marcar sobre él una dirección de recorrido, sólo es necesaria una rotación sobre el eje vertical de la figura para que dicha dirección se presente invertida.

3. PROYECCIONES Y MOVIMIENTOS DE REIDEMEISTER

3.1. Proyecciones de nudos

Un nudo K viene normalmente especificado por una proyección. Considérese la proyección paralela

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

definida como $\mathcal{P}(x, y, z) = (x, y, 0)$. Un punto p de la imagen $\mathcal{P}(K)$ se denomina punto múltiple si la imagen inversa $\mathcal{P}^{-1}(p)$ contiene más de un punto de K . El orden de $p \in \mathcal{P}(K)$ es la cardinalidad de $\mathcal{P}^{-1}(p) \cap K$. Por tanto, un punto doble es un punto múltiple de orden 2, y así sucesivamente. En general, la imagen $\mathcal{P}(K)$ puede ser complicada en el número y clase de puntos múltiples presentes. Es posible, sin embargo, que K sea equivalente a otro nudo cuya imagen proyectada es bastante simple. Para un nudo poligonal, el criterio de ser bastante simple es que el nudo esté en la denominada posición regular.

Definición 3.1 (Posición regular). *Un nudo poligonal K está en posición regular si: (i) los únicos puntos múltiples de K son puntos dobles, y existe solamente un número finito de ellos; (ii) ningún punto doble es la imagen de un vértice de K .*

La segunda condición asegura que todo punto doble represente un cruce genuino, como se representa en la fig. 3a. El tipo de punto doble que aparece en la fig. 3b está prohibido.

Cada punto doble de la imagen proyectada de un nudo poligonal en posición regular es la imagen de dos puntos del nudo. Aquel con la coordenada z mayor se denomina sobre-cruce (*overcrossing*), y el otro es el correspondiente sub-cruce (*undercrossing*).

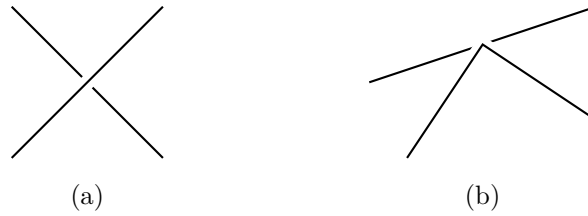


Figura 3: Dos tipos de puntos dobles en nudos.

Teorema 3.1. *Cualquier nudo poligonal K es equivalente bajo una relación arbitrariamente pequeña de \mathbb{R}^3 a un nudo poligonal en posición regular.*

Por tanto, todo nudo domado es equivalente a un nudo poligonal en posición regular. Este hecho es el punto de partida para calcular los invariantes básicos por los que los diferentes tipos de nudos se distinguen.

3.2. Movimientos de Reidemeister

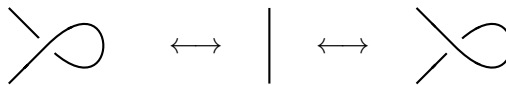
Con la introducción del concepto de proyección regular, podemos pasar de hablar en términos de deformaciones isotópicas (ambientales) a deformaciones isotópicas planas.

Definición 3.2 (Isotopía plana). *Por isotopía plana de una proyección de nudo entendemos un difeomorfismo del plano de proyección sobre sí mismo que no cambia la estructura combinatoria de la proyección.*

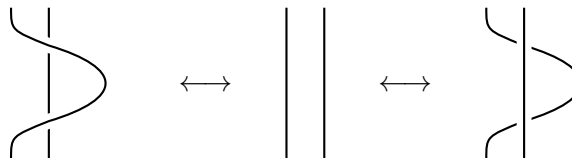
Obviamente, una isotopía plana es una isotopía, esto es, no cambia el tipo de isotopía en \mathbb{R}^3 . En otras palabras, sólo consideraremos aquellos movimientos que preserven a los nudos en una forma plana contra su plano de proyección, esto es, movimientos de sus proyecciones.

Bajo esta restricción, los movimientos de Reidemeister son los únicos movimientos no isotópicos que está permitido realizar sobre proyecciones de nudos. Se catalogan como sigue.

- Primer movimiento de Reidemeister (**RI**): enroscar y desenroscar un segmento de cuerda en cualquier dirección.

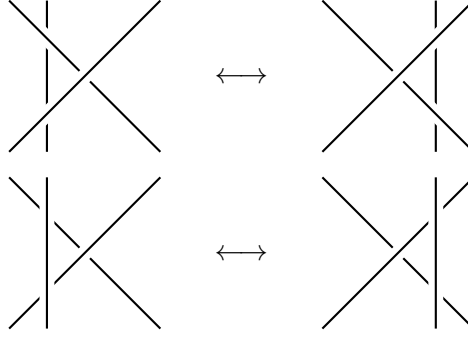


- Segundo movimiento de Reidemeister (**RII**): añadir o quitar dos cruces.



- Tercer movimiento de Reidemeister (**RIII**): deslizar un segmento de cuerda de un lado de un

cruce al otro.



Se puede demostrar que cada uno de estos tres movimientos (RI, RII, RIII) es necesario para establecer una isotopía de nudos. En efecto, para cada movimiento de Reidemeister existen dos proyecciones diferentes que no pueden ser transformadas la una en la otra usando los dos movimientos restantes. Esto prueba la independencia y universalidad de los movimientos de Reidemeister.

Puesto que estos movimientos sólo afectan a las relaciones entre los cruces que intencionalmente modificamos, y cada movimiento de Reidemeister puede ser realizado por medio de una deformación isotópica ambiental del nudo, la proyección resultante de la aplicación de estos movimientos será equivalente a la original. Podemos, por tanto, dar una definición formal de equivalencia entre proyecciones de nudos.

Definición 3.3 (Equivalencia de proyecciones). *Se dice que dos proyecciones de nudos son equivalentes si están conectadas por medio de una secuencia finita de isotopías planas y movimientos de Reidemeister.*

Esta relación entre los movimientos de Reidemeister y las isotopías ambientales de un nudo da cuenta de que la equivalencia entre proyecciones implica la equivalencia de los nudos que representan, tal y como enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si y sólo si todas sus proyecciones son equivalentes.*

Si bien estos resultados parecen dar un criterio sencillo para la clasificación de nudos, esto sigue resultando un problema no trivial. En efecto, uno podría aplicar cientos de movimientos de Reidemeister sin haber conseguido desanudar un nudo, pero un par de movimientos más podrían hacerlo sin que esto sea predecible. Por el mismo razonamiento, no se puede probar mediante este método que el nudo de hoja de trébol no se puede desanudar.

4. INVARIANTES DE NUDOS

Un invariante es una función definida sobre nudos que es invariante bajo deformaciones isotópicas, esto es, a cada nudo le asigna una cantidad que es siempre la misma para nudos equivalentes. Nótese, sin embargo, que no es necesariamente verdadero que si una cantidad es la misma para dos nudos, éstos sean equivalentes entre sí.

De acuerdo con el teorema de Reidemeister (3.2), para probar la invariancia de cierta función sobre nudos, será suficiente con constatar su invariancia bajo los tres movimientos de Reidemeister.

5. TEORÍA DE TRENZAS

La teoría de trenzas tiene una trascendencia singular puesto que, a parte de ofrecer una visión diferente de la teoría de nudos, tiene algunas propiedades intrínsecas interesantes.

Una trenza es un embebimiento de una colección de cuerdas cuyos extremos se posicionan en dos filas de puntos, una encima de la otra. Las cuerdas no están individualmente anudadas y son disjuntas unas de otras. La ilustración más simple de una trenza se puede apreciar en la fig. 4.



Figura 4: Ejemplo simple de trenza.

Los grupos de trenzas pueden ser definidos formalmente desde diferentes puntos de vista (geométrico, topológico, álgebra-geométrico, algebraico), cada uno de ellos ofreciendo una conexión con diferentes teorías. En el presente estudio, nos centraremos en su definición puramente algebraica para futuros desarrollos.

Definición 5.1. El grupo de trenzas $Br(m)$ de m cuerdas es aquél que viene dado por un conjunto de $(m - 1)$ generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & , & \quad |i - j| > 1 , \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & , & \quad 1 \leq i \leq m - 2 , \end{aligned} \quad (2)$$

denominadas relaciones de Artin.

Nótese que los generadores σ_i representan diagramáticamente el cruce de la i -ésima cuerda con la $(i + 1)$ -ésima (véase fig. 5), mientras que el producto de generadores corresponde a la consecución, de abajo a arriba, de dichos generadores; por ejemplo, el diagrama de la fig. 4 se puede escribir como $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2$.

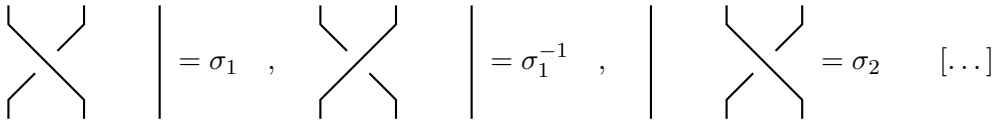


Figura 5: Representación diagramática de los generadores del grupo de trenzas.

5.1. Nudos y trenzas

A cada diagrama de trenza se le puede asociar un diagrama de nudo (o, en general, enlace) como sigue.

Definición 5.2. La clausura de una trenza B es el enlace $Cl(B)$ obtenido de B al conectar los extremos inferiores de la trenza con los superiores (en orden y sin cruces), guardando una orientación de abajo a arriba.

De hecho, podemos realizar una afirmación fuerte sobre esta relación mediante el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Alexander). *Todo nudo o enlace es isotópico a la clausura de una trenza.*

Por ejemplo, el nudo de hoja de trébol (véase fig. 1a) se puede expresar como la clausura de la trenza $\sigma_1\sigma_1\sigma_1$, cuyo diagrama aparece en la fig. 6.



Figura 6: Diagrama de trenza del nudo de hoja de trébol.

6. DE LA TEORÍA DE TRENZAS A LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLÓGICA

La computación cuántica puede ser entendida como un estudio de la estructura de la preparación, evolución y medida de sistemas cuánticos. En este sentido, una evolución es la composición de transformaciones unitarias aplicadas a un estado inicial que ha sido preparado para dicho proceso.

Para entender el verdadero potencial de la computación cuántica, es necesario conocer que cualquier transformación arbitraria, unitaria y de dimensión finita puede ser construida a partir de un pequeño conjunto de transformaciones primitivas, a saber, transformaciones unitarias en dos dimensiones, junto con una transformación de cuatridimensional suficientemente robusta. Estas transformaciones se conocen como puertas cuánticas universales, y están íntimamente ligadas al entrelazamiento cuántico de los estados.

Esta no localidad inherente de los estados entrelazados nos lleva a preguntarnos sobre la relación entre el entrelazamiento cuántico y el entrelazamiento topológico, trazando una correspondencia directa entre enlaces topológicos y estados cuánticos entrelazados.

Un método profundo de este estudio se basa en la consideración de las puertas unitarias R , denominadas operadores de Yang–Baxter, que son universales para computación cuántica y, asimismo, son soluciones de la condición de trenzado topológico.

6.1. Fermiones de Majorana

Recordamos que los fermiones siguen un álgebra de Grassmann. En efecto, los operadores de creación y destrucción, \hat{c}^\dagger y \hat{c} , satisfacen las relaciones

$$\hat{c}_i\hat{c}_j = -\hat{c}_j\hat{c}_i \quad , \quad \hat{c}_i^2 = (\hat{c}_i^\dagger)^2 = 0 \quad , \quad \hat{c}_i\hat{c}_i^\dagger + \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i = 1 \quad . \quad (3)$$

En particular, los fermiones de Majorana cumplen la condición de ser sus propias antipartículas, por lo que pueden interactuar consigo mismos para producirse o aniquilarse. Esta propiedad de conjugación de carga les dota de un gran interés como cuasipartículas en materiales cuánticos. Asimismo, permite la implementación de un álgebra de Clifford a partir de una colección de estos fermiones, ya que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{a}^\dagger \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}^\dagger \\ \hat{a}^2 &= \hat{b}^2 = 1 \quad , \quad \hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} \end{aligned} \quad (4)$$

Nótese que podemos construir un fermión estándar \hat{c} a partir de dos fermiones de Majorana \hat{a}, \hat{b} , tal que

$$\hat{c} = \frac{1}{2}(\hat{a} + i\hat{b}) \quad , \quad \hat{c}^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{a} - i\hat{b}) . \quad (5)$$

Esta simple relación entre el álgebra fermiónica y la subyacente álgebra de Clifford de las partículas de Majorana tiene grandes expectativas físicas de interés.

6.2. Operadores de trenzado y el álgebra de Clifford

Si tomamos una colección de fermiones de Majorana $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}$ como base de un espacio vectorial, entonces existen unos operadores de trenzado naturales que actúan sobre dicho espacio,

$$T_k : \text{Span}\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\} \rightarrow \text{Span}\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\} , \quad (6)$$

definidos como

$$T_k(x) = \tau_k x \tau_k^{-1} \quad , \quad \begin{cases} T_k(\hat{a}_k) = \hat{a}_{k+1} \\ T_k(\hat{a}_{k+1}) = -\hat{a}_k \end{cases} \quad (7)$$

donde

$$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_{k+1}\hat{a}_k) \quad , \quad \tau_k^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \hat{a}_{k+1}\hat{a}_k) \quad (8)$$

son los elementos del álgebra⁴ de los operadores T_k . Es fácil de demostrar que estos elementos cumplen las siguientes propiedades:

- I) $\tau_k \tau_{k+1} \tau_k = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} \quad \forall k$,
- II) $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ cuando $|i - j| > 1$.

Por tanto, los operadores τ_k forman una representación unitaria del grupo de trenzas de Artin $Br(n)$ circular ($\tau_n = (1 + \hat{a}_1\hat{a}_n)/\sqrt{2}$), lo que nos lleva a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 6.1 (Trenzado de Clifford). *Sea \mathfrak{C} el álgebra de Clifford sobre los números reales, generada por una colección de elementos linealmente independientes $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}$, con $\hat{a}_k^2 = 1 \quad \forall k$ y $\hat{a}_k \hat{a}_l = -\hat{a}_l \hat{a}_k$ para $k \neq l$. Entonces los elementos del álgebra $\tau_k = (1 + \hat{a}_{k+1}\hat{a}_k)/\sqrt{2}$ forman una representación del grupo de trenzas de Artin circular.*

Sin duda, esta representación del grupo de trenzas de Artin toma un papel muy importante en la física topológica de los fermiones de Majorana. Estos operadores de trenzado poseen la propiedad de ser entrelazantes y podemos servirnos de ellos para configurar una computación cuántica universal. Sin embargo, por sí solos no proporcionan una computación cuántica topológica completa sino parcial, puesto que los operadores de un solo qubit no pueden ser generados a partir de éstos.

Para mostrar una interpretación topológica del trenzado de dos fermiones de Majorana, es conveniente imaginarlos unidos por una cuerda flexible (véase fig. 7). Al intercambiar ambos fermiones, la cuerda se ve retorcida en un ángulo 2π , correspondiente a un cambio de fase igual a -1 , si bien la topología por sí sola no distingue cuál de los fermiones recibe dicho cambio; el álgebra de Clifford de los fermiones de Majorana nos ofrecerá, sin embargo, una elección específica que fijará la representación del trenzado.

⁴Nótese que podemos escribir formalmente estos elementos como $\tau_k = \exp(\frac{\pi}{4}\hat{a}_{k+1}\hat{a}_k)$.

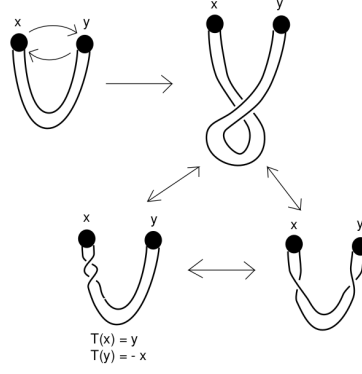


Figura 7: Acción de trenzado sobre un par de fermiones de Majorana [5].

6.3. Fermiones de Majorana y puertas cuánticas universales

6.3.1. Puertas universales

Una puerta G de dos qubits es un mapa lineal unitario $G : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, donde V es un espacio vectorial complejo bidimensional. Se dice que la puerta G es universal para computación cuántica, o simplemente universal, si G junto a transformaciones locales unitarias de V en V genera todas las transformaciones unitarias del espacio vectorial complejo de dimensión 2^n sobre sí mismo.

Una puerta G se dice entrelazante si existe un vector

$$|\alpha\beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \in V \otimes V \quad (9)$$

tal que $G|\alpha\beta\rangle$ no es descomponible como producto tensorial de dos qubits⁵. Se puede demostrar [8] que una puerta G de dos qubits es universal si y sólo si es entrelazante.

6.3.2. El operador de Yang–Baxter y las puertas universales de trenzado

Un concepto clave en la construcción de invariantes de nudos cuánticos es la asociación del operador de Yang–Baxter con cada cruce elemental de un diagrama de nudos. Este operador es un mapa lineal $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ que es solución de la ecuación de Yang–Baxter,

$$(R \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes R)(R \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I} \otimes R)(R \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes R), \quad (10)$$

y generaliza la permutación de los espacios vectoriales donde actúa. Si se restringe a ser unitario, este operador funciona como una representación unitaria del grupo de trenzas de Artin (véase fig. 8). Un breve vistazo a las ecuaciones (2) y (10) bastará para dar cuenta de su completa similitud.

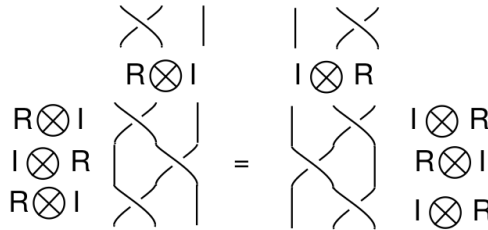


Figura 8: Ecuación de Yang–Baxter y su representación como diagrama de trenzas [5].

Atendiendo a la acción de los operadores de trenzado (7), podemos ver que, operando sobre el espacio vectorial de dos qubits ($n = 4$, con n el número de fermiones de Majorana), los operadores

⁵Un estado $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ está entrelazado y, por tanto, no es descomponible como producto tensorial de dos qubits si se cumple la desigualdad $ad - bc \neq 0$.

$T_k : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ son entrelazantes y, además, satisfacen la ecuación de Yang–Baxter, por lo que pueden actuar como puertas universales para fermiones de Majorana (salvo transformaciones locales unitarias).

Referencias

- [1] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*. Springer–Verlag, 1963.
- [2] L. H. Kauffman, *Knots and physics*. World Scientific, 1991.
- [3] T. Alsätra, *Knots, Reidemeister moves and knot invariants*. Uppsala University, 2019.
- [4] V. Manturov, *Knot theory*. CRC Press, 2004.
- [5] L. H. Kauffman and S. J. Lomonaco, “Braiding with majorana fermions,” *Proc. ISOP*, vol. 9873, pp. 81–95, 2016.
- [6] L. H. Kauffman, “Majorana fermions and representations of the braid group,” *Int. Journal of Mod. Phys. A*, vol. 33, no. 23, p. 1830023, 2018.
- [7] E. Artin, “Theorie der zöpfe,” *Abh. Math. Univ. Hambg.*, vol. 4, pp. 47–72, 1925.
- [8] J.-L. Brylinski and R. Brylinski, “Universal quantum gates,” *arXiv*, 2001.