Notas de aula de Matemática Finita
Professora Márcia – Janeiro de 2021
UFRJ - 2020/1

Princípio da Inclusão-Exclusão

Este texto contém duas provas distintas do Princípio da Inclusão-Exclusão, a primeira, por indução e a segunda, poderá ser melhor apreciada após o estudo do Teorema Binomial, no último encontro deste período de 12 semanas. É um texto complementar as aulas e ao material do livro.

Além disso, apresenta uma pequena lista de exercícios que poderão ser feitos ao longo dos estudos das configurações, alguns também estão no livro.

O Princípio da Inclusão-Exclusão

Teorema Se A_i, $1 \leq i \leq n$, são subconjuntos de um conjunto universo finito A, então

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \;=\; & \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ & - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ & + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & + \ldots + \\ & (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{1}$$

onde a soma $\sum_{i,j} |A_i \cap A_j|$ é tomada sobre todas os subconjuntos de dois elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, a soma $\sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ é tomada sobre todos os subconjuntos de três elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e assim por diante, até todo o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ ser considerado.

Prova por indução no número de subconjuntos

O teorema é claramente verdadeiro para $n = 1$ e, vimos em aula que é verdadeiro para $n = 2$ e, inclusive, para $n = 3$.

Assuma, como hipótese de indução, que o teorema é verdadeiro para quaisquer k, $1 \leq k \leq n$, subconjuntos de A.

Suponha, que temos $n+1$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, tais que $A_i \subset A$, $1 \leq i \leq n+1$ e $n \geq 3$. Vamos mostrar que a fórmula (1) é verdadeira quando substituímos n por $n + 1$.

Considere $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}$ como a união dos conjuntos $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e A_{n+1}. Então, como a fórmula (1) é verdadeira para dois conjuntos, temos:

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| \\ &\quad - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}|. \end{aligned}$$

Usando o fato que a interseção distribui sobre a união, temos que

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| \\ &\quad - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|. \end{aligned} \tag{2}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ &\quad - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{3}$$

e também temos que

$$\begin{aligned} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| &= \\ \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| & \\ - \sum_{i,j} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| & \\ + \ldots + & \\ (-1)^{n-1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})|. & \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo as equações (3) e (4) em (2) e fazendo simplificações do tipo

$$(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1}) = A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1},$$

temos

$$
\begin{aligned}
|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \;=\; & (\sum_{i=1}^{n} |A_i| \\
& - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\
& + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& + \ldots + \\
& (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \;) \\
& + |A_{n+1}| \\
& - (\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| \\
& - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \\
& + \ldots + \\
& (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| \;)
\end{aligned}
$$

e, reagrupando nos somatórios os conjuntos que são interseção de $1, 2, \ldots, n, n+1$ conjuntos, temos

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| \;=\; & \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \\
& - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\
& + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& + \ldots + \\
& (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

que é exatamente a equação (1) substituindo-se n por $n+1$. ■

A forma de apresentação mais comum do PIE é obtida utilizando a Lei de De Morgan:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \ldots A_n}.$$

Assim temos:

Corolário Se A_i, $1 \le i \le n$, são subconjuntos de um conjunto universo finito A, então

$$\begin{array}{rcl} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| & = & |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \\ & & |A| \\ & & -\sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ & & +\sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ & & -\sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & & + \ldots + \\ & & (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{array}$$

Prova utilizando o Teorema Binomial

Esta prova segue a mesma ideia que usamos para os casos $n = 2$ e $n = 3$, mostrando que todo elemento de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é contado exatamente uma vez em

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \quad (*)$$

Suponha que um elemento $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ está em exatamente m $(m > 0)$ dos conjuntos. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x \in A_1$, $x \in A_2, \ldots, x \in A_m$, e $x \notin A_{m+1}, \ldots, x \notin A_n$. Então x será contado exatamente uma vez em cada um dos termos $|A_i|$ para $i = 1, \ldots, m$, em outras palavras, x será contado $\binom{m}{1}$ vezes em $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

Mais ainda, x será contado $\binom{m}{2}$ vezes em $\sum_{i,j} |A_i \cap A_j|$ pois existem $\binom{m}{2}$ pares de conjuntos A_i, A_j onde x está tanto em A_i quanto em A_j.

Da mesma forma, x é contado $\binom{m}{3}$ vezes em $\sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ pois existem $\binom{m}{3}$ combinações A_i, A_j, A_k onde $x \in A_i, x \in A_j$ e $x \in A_k$. Contando desta maneira, temos que x é contado $k = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{n}$ vezes em $(*)$.

Agora, vamos mostrar que $k = 1$. Expandindo $(1-1)^m$ pelo Teorema Binomial, temos

$$0 = (1-1)^m = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{n}$$

ou seja,

$$0 = \binom{m}{0} - k$$

Usando o fato que $\binom{m}{0} = 1$, temos que $k = 1$. ■

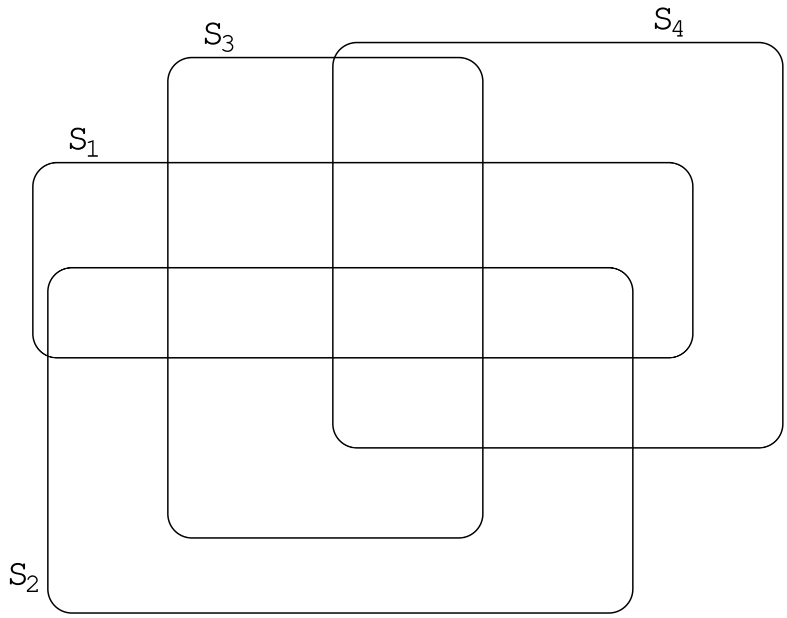
Exercícios

1. Conhecendo o diagrama de Venn para 4 conjuntos, abaixo:

   (a) observe que ele tem exatamente 16 regioões

   (b) prove, utilizando a ideia dada em aula, o PIE para quatro conjuntos.

   (c) visualize a ideia da prova por indução sendo aplicada para $n + 1 = 4$.



2. Detemine a quantidade de números naturais menores que 4212 que não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5.

3. Encontre o número de soluções em inteiros não-negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23 \qquad \text{com } x_1 \leq 10, \;\; x_2 \leq 8, \;\; x_3 \leq 2 \text{ e } x_4 \leq 20.$$

   Não esqueça de descrever os conjuntos S, S_1, S_2, S_3 e S_4.

   Determine quais regiões no diagrama dado são vazias e, nas outras, exiba um elemento que pertence a exatamente aquela região.