PTC 3213 - ELETROMAGNETISMO

2o. Exercício Computacional - 24/10/2016

(entrega até 17/11/2016)

Nomes	NUSP
1.	
2.	
3.	

Turma do Prof. : □ Viviane □ Leb □ Juan

Entregue as respostas aos itens abaixo junto com a listagem do código Matlab utilizado

1. **(2,0)** Determinar, utilizando o método descrito na apostila anexa (Introdução ao Método dos Momentos), a matriz de capacitâncias *C'* para a geometria lá descrita (matriz de dimensão 3 × 3). Os valores dos parâmetros estão mostrados na tabela abaixo e deverão ser escolhidos de acordo com: a sua turma de PTC-3213, e os três últimos algarismos do seu número USP (nusp7 é o último algarismo). Este trabalho poderá ser realizado em grupos de no máximo 3 alunos (todos de uma mesma turma de PTC-3213) e, neste caso, o número USP do primeiro aluno, em ordem alfabética, deverá ser o utilizado para a escolha dos parâmetros.

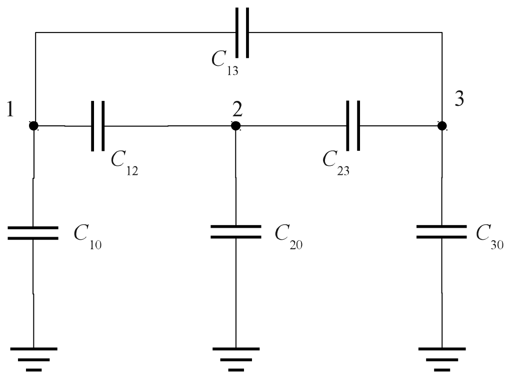
h_1 (m)	h_2 (m)		h_3 (m)		R_1 (cm)		R_3 (cm)		d
		turma		nusp7		nusp6		nusp5	
9,26	9,35	Viviane	10	0,1,2	1	0,1,2	1	0,1,2	20 cm
	9,37	Leb	11	3,4,5,6	2	3,4,5,6	2	3,4,5,6	
	9,39	Juan	12	7,8,9	3	7,8,9	3	7,8,9	

R. h_2 = ______m h_3 = ______m R_1 = ______cm R_3 = ______cm

$$C_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \text{pF/m}$$

2. **(2,0)** Desenhe o modelo completo de capacitores equivalente à geometria anterior, para um comprimento de 1 km, explicitando os valores dos capacitores.

R.:

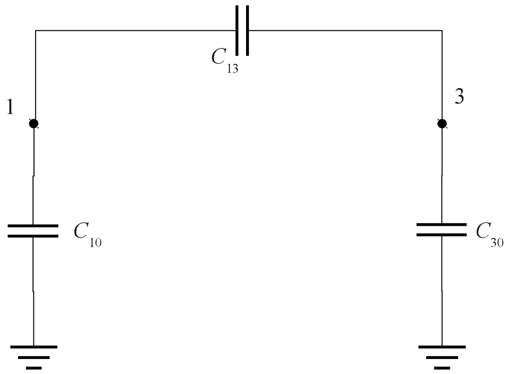


C_{10}= __________ nF C_{20}= __________ nF C_{30}= __________ nF

C_{12}= __________ nF C_{13}= __________ nF C_{23}= __________ nF

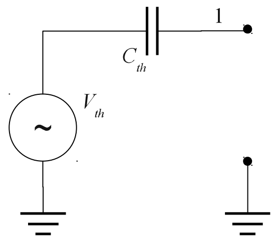
3. **(2,0)** Repita os itens 1 e 2 eliminando a placa condutora (agora a matriz terá dimensão 2 × 2). Compare a matriz obtida com a do item 1 e comente.
R.:

$$C_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \text{pF/m}$$



C_{10}=_______ nF C_{30}=_______ nF C_{13}=_______ nF

4. **(2,0)** Considerando-se o comprimento dos condutores igual a 1 km, determine o gerador de Thevenin equivalente, visto entre o condutor 1 e a terra, quando o condutor 3 for excitado por um gerador senoidal de 14 kV na frequência de 60 Hz, nas seguintes condições:



   a. Placa condutora (2) aterrada.
      R.: V_{th} =____________ V C_{th} =____________ nF

   b. Placa condutora flutuando.
      R.: V_{th} =____________ V C_{th} =____________ nF

   c. Placa condutora ausente.
      R.: V_{th} =____________ V C_{th} =____________ nF

   Compare os resultados.

5. **(2,0)** Considerando apenas o cilindro 1 (cilindro 3 e placa 2 ausentes), determine a força (explicite a direção e o sentido) que age sobre esse cilindro para um comprimento de 1 km e uma tensão contínua de 1 kV aplicada. Para tal, utilize os dois procedimentos a seguir:
   a. Utilize o método numérico para o problema de um único cilindro na posição desejada e calcule a força que a totalidade das cargas imagem (abaixo do plano) exercem sobre as cargas reais.

      R.: F =________________ N

   b. Com as cargas determinadas no item anterior, calcule a energia armazenada na configuração desejada. Depois, desloque o cilindro de 1 mm de sua posição original e recalcule essa energia. Utilize esses valores para calcular a força (como?).

      R.: F =________________ N

Dicas:

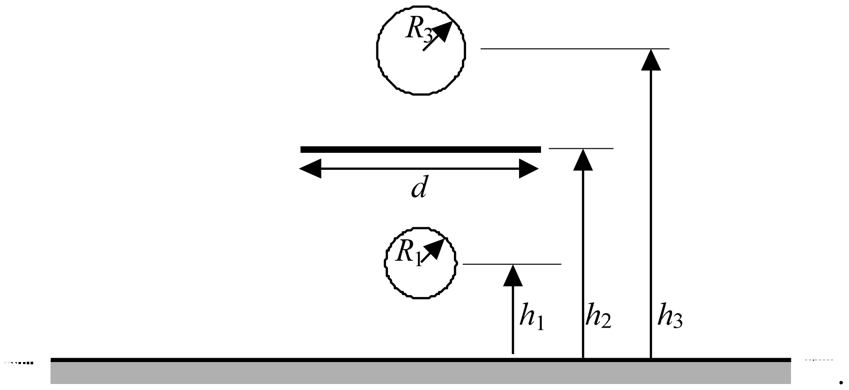
1. Rode o programa inicialmente com apenas o cilindro 1 e vá diminuindo o valor de *a* até que o erro entre o *C* obtido e o teórico seja inferior a 0,1 %, para ter certeza que o programa está funcionando corretamente.
2. Rode o programa com os dois cilindros, e compare o resultado obtido com o calculado através das aproximações (como no exercício 19 da pág. 334 da apostila).
3. Ao rodar o programa com os cilindros e a placa, "plote" as posições das linhas de carga no plano *xy* para ter certeza de que tudo está correto. O comando abaixo, por exemplo, deve mostrar o cilindro inferior e a placa, quando inserido no código de Matlab anexo.
   ```
   figure(1), plot(x,y,'.'); axis equal;
   axis([-0.3 0.3 8.7 9.3]);
   ```
4. Diminua o valor de *a* para se assegurar da convergência dos valores de capacitâncias obtidos.

Modifique o seguinte código – Matlab script – para a solução do problema.
Ajuste o valor de `a` para obter uma solução com erro na capacitância inferior a 0,5 %.

```
% permissividade do meio:
eps0=8.854e-12;
% distancia do eixo do cilindro 1 ao plano condutor:
h1=9;
%raio do cilindro
R1=3e-2;
% define raio dos cilindros de carga uniforme (discretizaçao):
a=1e-3;
% calcula numero de cilindros necessarios para representar o(s) corpos:
N1=round(2*pi*R1/2/a);
% distribui os cilindros uniformemente sobre o(s) corpo(s)
% determinando as coordenadas dos seus eixos - x e y :
i=1:N1;
phi=(i-1)*(2*pi/N1);
x=R1*cos(phi); y=R1*sin(phi)+h1;
N=N1;
% caso haja M corpos (cilindro ou plano ou qualquer outra coisa) calcular
% as coordenadas dos cilindros de carga para cada um deles e incluir
% nos vetores x e y acima sendo entao N=N1+N2+...+NM

% cria matriz de indices i e j, de dimensao NxN :
i=1:N; j=i; [i,j]=meshgrid(i,j);

% calcula os valores de r1 e r2 para cada para i,j.
% Note que, para i==j, r1 tem que ser = a.
r1=sqrt((x(i)-x(j)).^2+(y(i)-y(j)).^2);
% acha os elementos da matriz onde i==j:
ind=find(i==j);
% redefine r1=a nesses indices:
r1(ind)=a*ones(size(ind));

r2=sqrt((x(i)-x(j)).^2+(y(i)+y(j)).^2);

% calcula matriz S (por metro de comprimento):
S=log(r2./r1)/2/pi/eps0;

% define potencial dos condutores. Caso haja mais de um corpo, V tera´ valores
% diferentes dependendo de em qual corpo se encontra o cilindro i.
V1=1; % potencial do condutor 1 = 1 V.
V=ones(N1,1)*V1;

% resolve o sistema, calculando o vetor de cargas (por metro):
lambda=S\V;

% calcula a carga total em cada corpo (no caso so´ ha´ um). Caso haja mais de um,
% somar os elementos correspondentes a cada um deles:
Q11=sum(lambda(1:N1));
% calcula Cij' :
C11=Q11/V1;

% este e´ o valor teorico para um unico cilindro paralelo a um plano condutor:
Cteo=2*pi*eps0/log(h1/R1+sqrt(h1^2/R1^2-1))

% Caso haja mais de um corpo, deve-se escolher V1=1, V2=V3=...=0 e calcular
% C11', C21', ... e depois repetir para V2=1, V1=V3=...=0 => C12', C22', ...;
% e assim por diante.
```

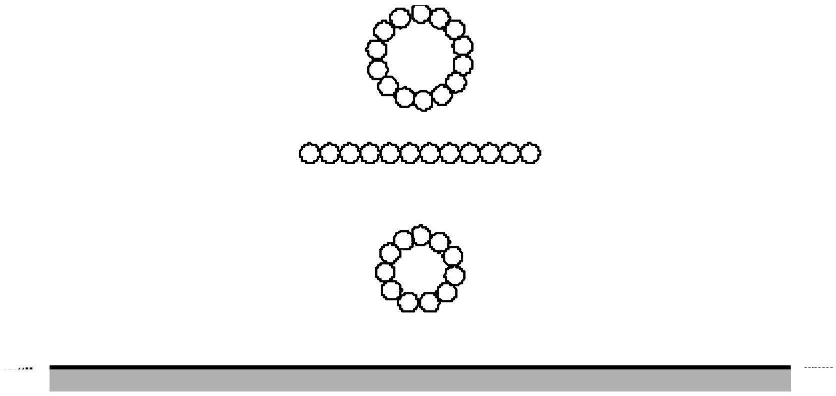
Introdução ao Método dos Momentos[1]

No escopo deste curso o Método dos Momentos será apresentado através de um exemplo.
Considere a seguinte geometria, onde os três corpos condutores estão verticalmente alinhados:



Deseja-se determinar a matriz de capacitâncias parciais para o sistema acima, através do método numérico descrito a seguir. Inicialmente, vamos considerar V_1= 1 V e V_2= V_3=0 V, e depois repetir para os outros dois casos.

Dados, então, os potenciais dos condutores, deseja-se descobrir o valor de suas cargas totais para determinar os elementos da matriz de capacitâncias. Para tal, vamos aproximar a superfície de todos os condutores por um número *n*, suficientemente grande, de cargas cilíndricas bem finas, de raio = *a*, cada uma com uma carga elétrica por metro λ_i a ser determinada, como esboçado na figura abaixo. Note que essa carga está distribuída uniformemente na superfície desses pequenos cilindros.



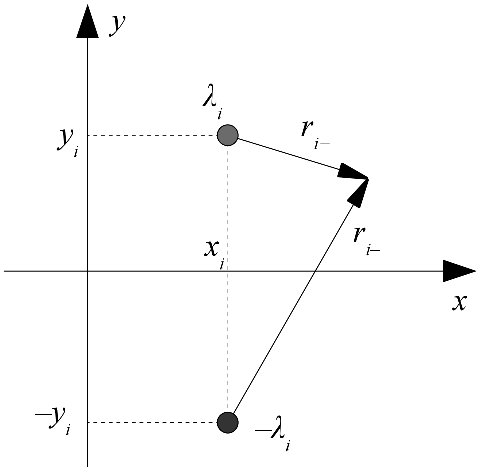
Os eixos desses cilindros deverão coincidir com a superfície dos corpos condutores, e o seu espaçamento deve garantir o total "preenchimento" das superfícies condutoras (os cilindros devem se tocar mas não devem se perfurar).

Pelo método das imagens, a cada carga cilíndrica λ_i vamos associar uma outra carga cilíndrica, abaixo do plano condutor, com carga $-\lambda_i$, de forma a impor-se, automaticamente, potencial nulo sobre o plano condutor, e o potencial produzido por esse par de cargas cilíndricas será dado, por:

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i}{2\pi\,\varepsilon} \ln\left(\frac{r_{i-}}{r_{i+}}\right) \text{, (1)}$$

como mostra a figura a seguir.

[1] Para uma apresentação mais detalhada e geral desse método veja, por exemplo: *Field computation by moment methods*, Roger F. Harrington, 1968.



Note que a expressão anterior só é válida no semi-espaço superior ($y > 0$) e apenas para os pontos onde $r_{i+} \geq a$. Para $r_{i+} < a$ (dentro do cilindro), o potencial será dado por:

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_{i-}}{a}\right) \text{ , (2)}$$

pois a carga desse cilindro i, está uniformemente distribuída em sua superfície.
O potencial devido a todos os cilindros será dado, assim, por (substituir r_{i+} por a quando $r_{i+}<a$):

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_{i-}}{r_{i+}}\right) \text{ . (3)}$$

Vamos, então, impor que o potencial na posição correspondente ao eixo de cada cilindro seja igual ao potencial do respectivo corpo condutor (V_1, V_2 ou V_3) e obteremos, dessa forma, um sistema de equações de ordem N, com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(n) \end{bmatrix} \text{ , (4)}$$

onde

$$s_{i,j} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_{i,j-}}{r_{i,j+}}\right);$$

$$r_{i,j+} = \begin{cases} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} & i \neq j \\ a & i = j \end{cases} \text{ , (5)}$$

$$r_{i,j-} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}$$

e $\varphi(i) = 1$ se o cilindro i estiver sobre o corpo número 1, e $\varphi(i) = 0$ se o cilindro i estiver sobre os corpos 2 ou 3.
Resolvendo-se o sistema acima, obteremos os valores λ_i e, somando-os sobre cada um dos corpos, obteremos a carga total por metro de cada um dos 3 corpos e, portanto, os valores da primeira coluna da matriz de capacitâncias parciais C' (por metro). Obviamente, resultados mais precisos serão obtidos para valores de a cada vez menores.
Para se obter a segunda coluna, repete-se o procedimento, ou seja, resolve-se novamente o sistema (4), agora impondo-se 1 V no corpo 2 e 0 V nos corpos 1 e 3, obtendo-se em seguida as cargas e, portanto, as capacitâncias. O processo é análogo para a terceira coluna.
Não confunda a matriz de capacitância parciais que pode ser obtida através da inversão da matriz em (4), e que tem dimensão n x n, com a matriz de capacitâncias desejada (dos 3 corpos) e que tem dimensão (3×3). Porém, note que está última pode ser obtida da anterior somando-se os seus respectivos elementos.

Cálculo de forças e energia

A força que uma linha de carga com densidade linear λ_i exerce sobre outra linha de carga com densidade λ_j, é dada por:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{2\pi\varepsilon r_{ij}} \hat{u}_{r_{ij}} \quad \text{N/m.}$$

A energia acumulada num corpo condutor a um potencial V_0, sobre um plano de terra é dada por:

$$W = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} C V_0^2$$ sendo C a capacitância entre esse corpo e o plano de terra.