

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа аэрокосмических технологий

Построение трёхмерной сетки для задачи обтекания

Авторы:
студенты группы Б03-906
Петров Дмитрий
Пыряев Евгений
Чусовитин Николай

Долгопрудный 2021

Аннотация

Рассматривается решение задачи $\Delta\varphi = 0$ на сетке произвольного вида, дающее распределение потенциала в области с заданными граничными условиями. На основе метода конечных разностей строится схема численного решения уравнения. Для построения итоговой сетки вокруг объекта производится интегрирование движения граничных точек в поле $\nabla\varphi$, рассматриваемого в качестве поля скоростей.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных объёмов, вычислительная газодинамика

1 Введение

Задачей вычислительной газовой динамики является решение системы уравнений в частных производных, которые непосредственно описывают гидродинамику. Одним из наиболее важных этапов при моделировании различных гидродинамических процессов является построение сетки, во многом определяющее успех моделирования. Это обусловлено тем, что при численном решении задач происходит переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим, зачастую линейным, свойства которых определяются сеткой.

В данной работе рассматривается построение сетки для моделирования обтекания объекта сложной геометрии (космического корабля). Входными данными является произвольная сетка, построенная в некоторой области вокруг исследуемого тела. На ней решается уравнение $\Delta\varphi = 0$, с такими начальными условиями, чтобы $\nabla\varphi$ был ортогонален поверхности исследуемого объекта и направлен от него. Непосредственное построение сетки происходит методом “выдавливания”: выбирается набор точек на поверхности тела, затем они сдвигаются вдоль $\nabla\varphi$. Таким образом добавляется следующий слой сетки. Финальная сетка формируется при повторении этого алгоритма необходимое число раз.

2 Математическая модель

Как было указано ранее, газовая динамика описывается тремя основными уравнениями: уравнением неразрывности (представляет собой закон сохранения массы), уравнением Эйлера (закон сохранения импульса) и законом сохранения энергии.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \rho\vec{f} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s\vec{v}) = 0 \quad (3)$$

Для построения сетки необходимо решить задачу $\Delta\varphi = 0$ (уравнение Лапласа), то есть найти скалярное поле $\varphi(x, y, z, y)$, удовлетворяющее этом уравнению. Здесь Δ – оператор лапласа:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (4)$$

а $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – векторный оператор набла.

3 Постановка численного эксперимента

3.1 Решение уравнения Лапласа

С точки зрения вычислительной математики решение уравнения Лапласа представляет собой эллиптическую задачу с граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial\Omega_{int}} = 1 \\ \varphi|_{\partial\Omega_{ext}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где $\partial\Omega_{int}$ – внутренняя граница исследуемой области, а $\partial\Omega_{ext}$ – внешняя граница.

Ввиду того, что решение задачи производится на произвольной сетке, для расчёта φ использован метод конечных объёмов. Каждому элементарному объёму имеющейся сетки сопоставляется значение потенциала и его градиента в геометрическом центре ячейки. Установившееся распределение потенциала позволяет найти уравнение, схожее с уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (6)$$

Данное уравнение, записанное в дифференциальной форме, интегрируется по всему объёму. Интеграл от $\Delta\varphi$ переносится в правую часть, после чего по теореме Гаусса-Остроградского осуществляется переход от дивергенции градиента к его потоку через грани элементарного объёма:

$$\iiint_{cell} \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV = \iiint_{cell} \nabla \cdot \nabla\varphi dV = \oint_{face} \nabla\varphi d\vec{S} = \sum_i \Delta\vec{S}_i \nabla\varphi_i \quad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} V_{cell} = \sum_{face} \Delta\vec{S}_{face} \nabla\varphi_{face} \quad (8)$$

В численной реализации метода элементарный объём в левой части уравнения превращается в объём ячейки, где производится расчёт потенциала, а в правой части считается сумма потоков $\nabla\varphi$ через грани ячейки. При этом значение частной производной потенциала по времени определяется в центре ячейки, а значение градиента на грани ячейки (поток которого мы ищем) вычисляется интерполяцией значений градиента в ячейках, соседних с данной. Итоговое выражение, осуществляющее переход от n -ой итерации к $n + 1$ -ой, выглядит так:

$$\frac{\varphi_p^{n+1} - \varphi_p^n}{\Delta t} = \sum_{face} \frac{\Delta\vec{S}_{face}}{V_{cell}} \cdot (d^T d)^{-1} d^T (\vec{\varphi}_N - \vec{\varphi}_P), \quad (9)$$

где d – матрица, составленная из радиус-векторов центров ячеек, соседних с данной, относительно центра данной ячейки, $\vec{\varphi}_N$ – вектор значений потенциала в центрах соседних ячеек, $\vec{\varphi}_P$ – вектор, все компоненты которого равны значению φ в данной точке.

Мы ищем стационарное распределение потенциала на сетке, поэтому итерационный процесс работает до тех пор, пока производная потенциала по времени не подойдет сколь угодно близко к нулю.

В конце концов мы получаем значения потенциала в центрах ячеек исходной сетки, которые будут использованы далее.

3.2 Построение итоговой сетки

Итоговая сетка строится послойно, начиная с внешней границы обтекаемого объекта, задаваемой пользователем самостоятельно. В узлы этого граничного слоя помещаются положительные заряды, которые за время dt смещаются вдоль $\nabla\varphi$. Новое положение каждой частицы фиксируется, и их совокупность образует следующий слой расчётной сетки (рис. 1).

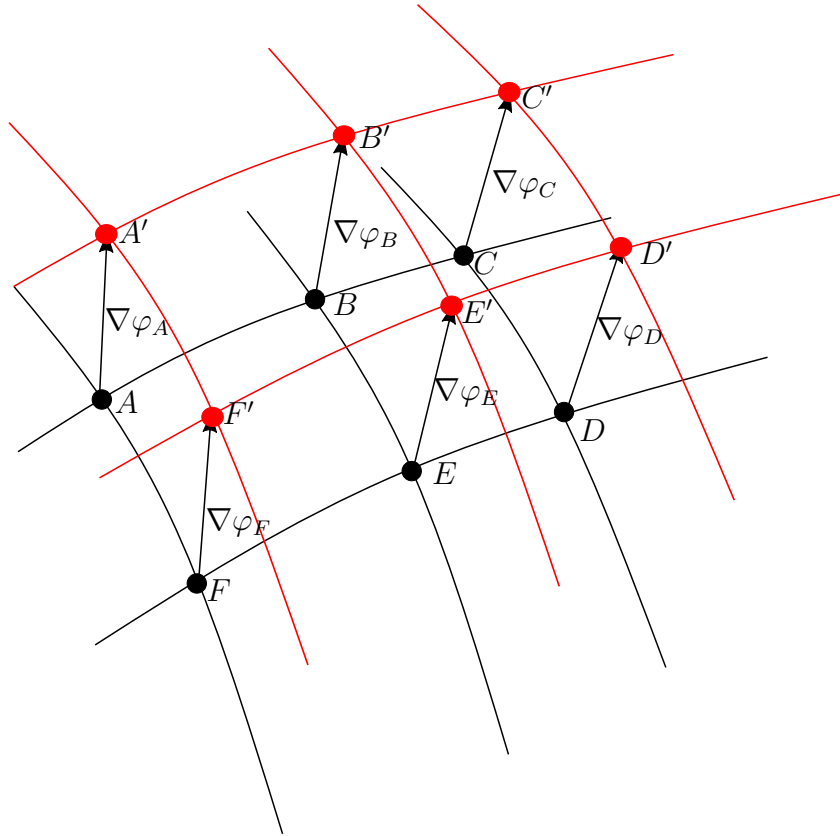


Рис. 1: Схема построения сетки

Итоговая сетка получается посредством выполнения определённого количества шагов интегрирования. Достаточное для получения “хорошей” сетки количество шагов предполагается определять эмпирически (предполагается, что необходимое условие “хорошей” сетки состоит в том, что её размеры превосходят размеры обтекаемого тела на порядок).

Отметим преимущества такого способа построения сетки. Во-первых, потенциал φ , являющийся решением уравнения Лапласа, имеет непересекающиеся силовые линии, что позволяет строить на них сетку, сдвигая вдоль линий узлы. Во-вторых, при заданных начальных условиях эти силовые линии будут нормальны к поверхности исследуемого тела, а сетка будет иметь хорошую ортогональность. Это её свойство обеспечит более удобные для решения алгебраические уравнения, получаемые из уравнений газовой динамики.

4 Реализация эксперимента

Непосредственно для решения уравнения теплопроводности и построения новой сетки было решено использовать C++. Исходная сетка, на которой решается уравнение Лапласа, строится в области вокруг исследуемого тела с помощью пакета численного моделирования SALOME. Используется алгоритм триангуляции Делоне, исходная сетка является нерегулярной.

На момент написания актуальной версии статьи реализован парсер сетки расчётной сетки формата .shv, вспомогательные модули для решения уравнения Лапласа и последующего интегрирования движения частиц. С исходным кодом можно ознакомиться в [соответствующем репозитории GitHub](#).

5 Выводы

В работе рассмотрен алгоритм построения сетки для решения задач CFD на основе решения уравнения Лапласа на сетке произвольного вида. Получено распределение потенциала электрического поля в расчётной области на основе метода конечных объёмов. Показан способ перехода от распределения скалярного поля потенциала к полю его градиента, которое впоследствии используется как поле скоростей частиц.

В работе рассмотрен алгоритм интегрирования уравнений движения частиц с положительным зарядом, находящихся в начальный момент времени на границе обтекаемого объекта и движущихся впоследствии вдоль силовых линий электрического поля. Результаты построения сетки при помощи данного алгоритма и их сравнение с сетками, получаемыми традиционными методами, предполагается привести в следующих статьях.

Список литературы

- [1] Кудрявцев Л. Д. *Краткий курс математического анализа. Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ. Учебное пособие.* Физматлит, 2010.
- [2] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. В 10 т. Том 6. Гидродинамика.* Физматлит, 2001.