УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 января 2023 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Вероятностное пространство.** Теоретико-множественная модель событий. Способы определения вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрические вероятности. Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Свойства вероятности.
2. **Условная вероятность.** Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Независимость. Независимые испытания. Лемма Бореля–Кантелли.
3. **Дискретные случайные величины.** Индикаторы и их свойства. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Независимость случайных величин и мультипликативное свойство математического ожидания. Совместное распределение и ковариация. Свойства ковариации и коэффициента корреляции. Ковариационная матрица. Целочисленные случайные величины и производящие функции.
4. **Случайные величины (общий случай).** Распределения вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия. Характеристические функции и их свойства. Характеристические функции некоторых распределений. Совместное распределение и независимость.
5. **Законы больших чисел и центральная предельная теорема.** Неравенства Маркова, Чебышева. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Закон больших чисел Чебышёва. Усиленный закон больших чисел. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел Хинчина.
6. **Цепи Маркова.** Условия марковости и однородности в терминах переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова — Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
7. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона — Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией процесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.
8. **Задача линейного оценивания и уравнение регрессии.**

## Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
2. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
3. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
4. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.

5. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.
6. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
7. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. — Москва : КДУ, 2009.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

## I. Вероятностное пространство. Свойства вероятности

**Т.1.** Пусть $A$, $B$, $C$ — три события. Найти выражения для событий:

а) произошло только $A$;

б) произошли $A$ и $B$, а $C$ не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из них;

д) произошло только одно из них;

е) ни одно из них не произошло;

ж) произошло не более двух из них.

**Т.2.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

**Т.3.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что $AX = AB$.

**Т.4.** Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

**Т.5.** Пусть

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathscr{A}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \quad \mathscr{A}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}.$$

Являются ли $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ алгебрами? Является ли алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$?

**Т.6.** Пусть $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \ldots$ — последовательность алгебр подмножеств $\Omega$. Является ли алгеброй их объединение $\mathscr{A} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$?

**Т.7.** Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Покажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \le \mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

## II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрические вероятности

**T.8.** Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

**T.9.** Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

**T.10.** Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет подряд два раза одной стороной. Описать пространство элементарных исходов. Используя соображения симметрии, найти:

а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до шестого бросания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

**T.11.** Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

**T.12.** $2n$ команд разбиваются на 2 равные подгруппы. Какова вероятность того, что 2 сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах?

**T.13.** Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

**T.14.** В $n$ конвертов разложено по одному письму $n$ адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из $n$ адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

**T.15.** Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

**T.16.** На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

**T.17.** На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми $L$, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

**T.18.** У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100–рублевые купюры, а вторая половина — 50–рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета — 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

## III. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Независимость

**Т.19.** Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

**Т.20.** Пусть $A$, $B$ и $A$, $C$ образуют пары независимых событий и $C \subset B$. Покажите, что $A$ и $B \setminus C$ также независимы.

**Т.21.** В семье двое детей. Найти вероятность того, что оба ребёнка — мальчики, если

а) старший ребёнок — мальчик;

б) известно, что хотя бы один ребёнок — мальчик.

**Т.22.** В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

**Т.23.** Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

**Т.24.** Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

**Т.25.** Из урны, содержащей $M$ белых и $N$ черных шаров, утеряно $r$ шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

**Т.26.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

**Т.27.** Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой $n$ торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью $p$. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из $m$ отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

**Т.28.** Пусть в схеме Бернулли вероятность успеха в отдельном испытании равна $p$, $0 < p < 1$. Какова вероятность того, что цепочки из десяти подряд успехов появятся бесконечное число раз?

**Т.29*.** При посадке в автобус выстроилась очередь из $n$ пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из $n$ мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Найти вероятность того, что последний пассажир займет свое место.

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

## I. Случайные величины и их характеристики

**Т.1.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы; $\xi$ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

**Т.2.** Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть $\xi$ — число бросаний. Найти распределение вероятностей $\xi$, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leqslant 5$?

**Т.3.** В $N$ ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются $n$ частиц. Пусть $\xi$ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

**Т.4.** Подбрасываются две игральные кости. Пусть $\xi_1$ — число очков, выпавших на первой игральной кости, а $\xi_2$ — на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$.

**Т.5.** Игральная кость подбрасывается $n$ раз. Пусть $\xi$ — число появлений единицы, а $\eta$ — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

**T.6.** Пусть $\xi_k$, $k = 1,\ 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение $\xi_1$, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

**T.7.** Совместное распределение случайных величин $\xi$ и $\eta$ определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

**T.8.** Привести примеры трех случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, удовлетворяющих условиям:

$$\text{(a)}\quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j, \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 \neq \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3;$$

$$\text{(b)}\quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3, \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j \neq \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j.$$

**T.9.** Пусть $\xi$ — номер $r$-го успеха в последовательности независимых испытаний Бернулли. Найти $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$.

**T.10.** В квадрат $\{(x_1,\ x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,\ 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

**T.11.** Точка $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

**T.12.** Точка $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi,\ \eta\}$.

**T.13.** Случайная величина $\xi$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Придумать такие функции $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$, чтобы случайные величины $f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi)$ были независимыми и имели распределение Бернулли с параметром $\frac{1}{2}$.

**T.14.** Известно, что случайная величина $\xi$ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

## II. Характеристические функции. Неравенство Чебышёва

**T.15.** Случайная величина $\xi$ имеет распределение, которое определяется плотностью
$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$
Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \geq 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

**T.16.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху
$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

**T.17.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать $n$ так, чтобы
$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,1.$$

**T.18.** Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:
$$\cos t; \quad \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

**T.19.** Какие из функций
$$\sin t; \quad \left(\frac{1}{2 - e^{-it}}\right)^3; \quad \frac{1}{1+t^4}$$
являются характеристическими?

**T.20.** Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x), \quad \alpha > 0.$$

## III. Последовательности случайных величин. Предельные теоремы

**Т.21.** Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин такая, что $\mathsf{E}\xi_k = a$, $\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\mathsf{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v$, $i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

**Т.22.** Случайная величина $\xi_\lambda$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda$. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$.

**Т.23.** Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

**Т.24.** Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

## IV. Цепи Маркова. Ветвящиеся процессы

**Т.25.** Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-й подгруппе было 20% населения, во 2-й подгруппе — 30%, и в 3-й подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

**Т.26.** В биологических приложениях процессов Гальтона — Ватсона используется производящая функция

$$f(x) = px^2 + (1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Найти

а) при каких значениях параметра $p$ процесс является докритическим, критическим, надкритическим;

б) математическое ожидание и дисперсию $n$-го поколения;

в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

**Т.27*.** Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за $n$ шагов и финальные вероятности.

---

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов
к. ф.-м. н., ст.преподаватель М. П. Савелов