УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 января 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
к. ф.-м. н., доцент Г. Б. Сизых
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
к. ф.-м. н., доцент Н. Г. Павлова
к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Точечное n–мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.

3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

6. Мера Жордана в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференци-

руемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
2. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. — Москва : МФТИ, 2017.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
4. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : МЦНМО, 2012.

Дополнительная

5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
8. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
10. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
11. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2012. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 01–07 марта)

I. Неопределённый интеграл

С2, §1: 2(4); 2(15); 13(10); 8(8); 12(4); 21(4); 23(5); 24(3); $18(2)^*$; 10(7).

С2, §2: 1(5); 3(3); 5(1); 7(4); $8(5)^*$.

С2, §3: 2(1); $2(7)^*$; 4(3); 18(3); 5(2); 8(1); 9(1); $14(2)^*$; $19(3)^*$.

С2, §4: 1(3); 4(2); 10(1); 16(1); 18(4); 21(2); $40(2)^*$.

С2, §5: 105; 144; 131^*; 176; 182.

II. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах.

Т.1. Для множества $E = [1;2) \cup \{3\} \cup \big((4,5] \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$ найдите все: а) изолированные точки; б) граничные точки; в) внутренние точки; г) предельные точки; д) точки прикосновения.

С3, §2: 9(2, 3) (а, б, г, е^*); $20(6)^*$.

С3, §1: 14; 15; 18; 36; 39(4); 24^*.

Т.2. Является ли множество

$$A = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 + x_4^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$: а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Б) Предел и непрерывность.

Т.3. Для функции “плитка” исследовать наличие двойного и обоих повторных пределов в нуле

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Т.4. Для функции “круговой забор” исследовать наличие двойного предела в нуле, а также пределов по каждому лучу в нуле

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 0, & x^2 + (y-1)^2 \neq 1. \end{cases}$$

С3, §2: 37(2, 7); 48(4, 6); 54; 62(5); 77(3).

В) Частные производные, дифференциал.

С3, §3: 3(6); 12; 15(1); $19(1^*, 5)$; 20(3, 6); 21(9); 39(1); $40(4)^*$.

С3, §4: 4; 7(2); 15(5); 39(6).

Г) Формула Тейлора.

С3, §4: 71(2); 74(5); $70(1)^*$.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §1:** 2(4); 2(15); 13(10); 8(8); 12(4); $\underline{21(4)}$; 23(5); 24(3); 18(2)*; $\underline{10(7)}$. **С2, §2:** 1(5); 3(3); 5(1); 7(4); 8(5)*. **С2, §3:** 2(1); 2(7)*; 4(3); $\underline{18(3)}$; 5(2); 8(1); 9(1); 14(2)*; 19(3)*.
2 неделя	**С2, §4:** 1(3); 4(2); 10(1); 16(1); 18(4); 21(2); 40(2)*. **С2, §5:** 105; 144; 131*; 176; 182; Т.1. **С3, §2:** 9(2, $\underline{3}$) (а, б, г, е*); 20(6)*.
3 неделя	**С3, §1:** $\underline{14}$; 15; 18; 36; 39(4); 24*. **С3, §2:** Т2; Т3; Т4; 37(2, $\underline{7}$); 48(4, 6); 54; 62(5); 77(3).
4 неделя	**С3, §3:** 3(6); 12; $\underline{15(1)}$; 19(1*, $\underline{5}$); 20($\underline{3}$, 6); 21(9); 39(1); 40(4)*. **С3, §4:** 4; 7(2); $\underline{15(5)}$; 39(6). **С3, §4:** $\underline{71(2)}$; 74(5); 70(1)*.

$\boxed{60 + 12^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 05–11 апреля)

I. Мера Жордана

С3, §7: 21; $\underline{22}$; 24; 40.

Т.1. а) Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на отрезке функции равна нулю.

б) Доказать, что для неотрицательной непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ подграфик $\mathrm{hyp} f = \{(x, y) : 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ измерим по Жордану.

в*) Пусть f неотрицательна на $[a, b]$. Верно ли, что если множество $\mathrm{hyp} f$ измеримо, то график f измерим и имеет нулевую меру? Верно ли обратное?

Т.2. Измеримо ли множество нулей функции

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

в круге $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ радиуса $R > 0$?

II. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление.

С2, §6: 4(2); $\underline{24}$; 11; 30; 32*; 54(5); 96; 112(1); 117; 153; 193*.

<u>Т.3</u>. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

Т.4*. а) Пусть точки a, x принадлежат промежутку I. Пусть $f \in C^{n+1}(I)$. Доказать формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

б) Вывести из предыдущего соотношения формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, т.е. показать, что $\exists \xi \in (a, x)$ т.ч. $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$.

<u>Т.5</u>. а) Функция f имеет первообразную F на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что f интегрируема на отрезке $[a,\, b]$?

б) Функция f интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на отрезке $[a,\, b]$?

в) Пусть функция f интегрируема на $[a,\, b]$ и имеет первообразную F на отрезке $[a,\, b]$. Доказать, что верно равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Т.6*. Докажите, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

С2, §10: <u>50(3)</u>.

Б) Геометрические приложения определенного интеграла.

С2, §7: 4(2); 26; <u>33(5)</u>; 69(7); 72(3); <u>82(2)</u>.

С2, §8: 12(1); 10(5); 82(3).

Т.7*. Вычислить

$$\int\limits_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/2}} \sin(x^2)dx + \int\limits_{1/2}^{1} \sqrt{\arcsin(x)}dx.$$

III. Криволинейный интеграл

С3, §10: 4*; 9; 19(3); 34(1); 28(2); <u>43</u>, 45, 81*.

IV. Несобственный интеграл

С2, §11: 76 (верхний предел интегрирования $\frac{1}{2}$); 85; 94; <u>98</u>; 63.

С2, §12: 92; 87; <u>91</u>; <u>104</u>; 131; <u>139</u>; <u>185</u>; 141; <u>120</u>; 121; 227; 232 (можно ли всю функцию заменить на эквивалентную $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$?).

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С3, §7:** 21; $\underline{22}$; 24; 40; Т.1; Т.2. **С2, §6:** 4(2); $\underline{24}$; 11; 30; 32^*; 54(5); 96; 112(1); 117; 153; 193^*; $\underline{\text{Т.3}}$; $\underline{\text{Т.4}}$; $\underline{\text{Т.5}}$; Т.6^*.
2 неделя	**С2, §10:** $\underline{50(3)}$. **С2, §7:** 4(2); 26; $\underline{33(5)}$; 69(7); 72(3); $\underline{82(2)}$. **С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(3); Т7^*.
3 неделя	**С3, §10:** 4^*; 9; 19(3); 34(1); 28(2); $\underline{43}$, 45, 81^*. **С2, §11:** 76; 85; 94; $\underline{98}$; 63.
4 неделя	**С2, §12:** 92; 87; $\underline{91}$; $\underline{104}$; 131; $\underline{139}$; $\underline{185}$; 141; $\underline{120}$; 121; 227; 232.

$\boxed{51+7^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10—16 мая)

I. Числовые ряды

А) Ряды с неотрицательными членами.

С2, §13: 1(4); 3(1); $\underline{10}$; 11(6); $\underline{13(2)}$; 14(3).

С2, §14: $\underline{25(9)}$; 2(3); 5(4); 14(6); $\underline{9(8)}$; 12(2); 18(4); 19(9); $\underline{21(12)}$; 38^*.

Т.1. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если для любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

Б) Знакопеременные ряды.

С2, §15: 3(2, $\underline{5}$); $4(5)^*$; 8($\underline{3}$, 4); $\underline{9(2)}$.

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

С2, §16: 26^*, 33^*.

Т.2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что сходятся ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Т.3. Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится?

II. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 5(3); $\underline{7(5)}$; 11(6); $\underline{9(10)}$; 12(5); 8(5); 13(7).

Т.4. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0,\ 1]$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;   б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

С2, §18: 20(4); <u>33(5)</u>; 36(12)*; 22(1,3); <u>36(5)</u>;.

Т.5. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,\ 1)$ и $E_2 = (1,\ +\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если

а) $f_n(x) = x \sin \frac{1}{(xn)^2}$;   б)$f_n(x) = \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$.

С2, §19: 2; 5; <u>14</u>; 18; 22.

III. Степенные ряды

С2, §20: 1(6); 3(1); <u>5(2)</u>; 9(5).

С2, §21: 6(4); 9(3); 11(4); 19(3); <u>30(4)</u>; 56(2); <u>80</u>; 31(2)*.

Т.6. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2^n}}{n^3}$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §13:** 1(4); 3(1); <u>10</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3). **С2, §14:** <u>25(9)</u>; 2(3); 5(4); 14(6); <u>9(8)</u>; 12(2); 18(4); 19(9); <u>21(12)</u>; 38*; Т.1.
2 неделя	**С2, §15:** 3(2, <u>5</u>); 4(5)*; 8(<u>3</u>, 4); <u>9(2)</u>; Т.2; Т.3. **С2, §16:** 26*, 33*. **С2, §17:** 5(3); <u>7(5)</u>; 11(6); <u>9(10)</u>; 12(5); 8(5); 13(7); Т.5.
3 неделя	**С2, §18:** 20(4); <u>33(5)</u>; 36(12)*; 22(1,3);; <u>36(5)</u>; Т.6. **С2, §19:** 2; 5; <u>14</u>; 18; 22.
4 неделя	**С2, §20:** 1(6); 3(1); <u>5(2)</u>; 9(5). **С2, §21:** 6(4); 9(3); 11(4); 19(3); <u>30(4)</u>; 56(2); <u>80</u>; 31(2)*; Т.7.

$\boxed{54 + 5^*}$

Составитель задания   к. ф.-м. н., ст.преподаватель О. А. Загрядский