

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 января 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. Е. Орёл
к. ф.-м. н., доцент О. Г. Подлипская
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., доцент Д. А. Степанов
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.
5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.
6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.
10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортogonalный базис. Второе сопряженное пространство¹.
11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

¹Для потока И.А. Чубарова и Д.А. Степанова

12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями².
13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования³.
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение⁴.
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной. Применение к классификации поверхностей второго порядка⁵.
- 21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.
- 22* *Поток И.А. Чубарова*: основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

²Кроме потока И.А. Чубарова и Д.А. Степанова

³Для потока И.А. Чубарова.

⁴Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова.

⁵Для потока И.А. Чубарова и Д.А. Степанова

Литература

Основная

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Матрицы

1. Обратная матрица.

С: 15.48; 15.54(8, 13); 15.65(12, 16).

2. Ранг матрицы.

С: 16.15; 16.18(24, 28); 16.19(5); 16.26*; 16.39*.

II. Системы линейных уравнений

С: 18.1(7); 18.16*, 18.17(3); 19.1(5, 9); 19.6(23); 19.7(3); 19.12; 19.18(2); 19.19(1).

III. Линейные пространства

С: 20.3; 20.7(2, 5); 20.14(6); 20.21; 20.22(5); 20.23(6); 20.26; 20.28*; 20.29; 21.5(3); 21.6(4); 21.7(7); 21.9; 21.11.

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения и её свойства.

С: 23.5; 23.8(3, 5); 23.9(2); 23.16; 23.24; 23.29(5); 23.30(2); 23.34; 23.40; 23.62(5); 23.67(1)*; 23.69; 23.82*; 23.84.

2. Линейные функции

С: 31.5; 31.8; 31.14*; 31.19(2); 31.23*; 31.29; 31.31(3).

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 15.48; 15.54(<u>8</u> , 13); 15.65(12, <u>16</u>); 16.15; 16.18(24, <u>28</u>); 16.19(<u>5</u>); 16.26 [*] ; 16.39 [*] .
2 неделя	С: 18.1(7); 18.16 [*] , <u>18.17(3)</u> ; 19.1(5, <u>9</u>); 19.6(23); 19.7(3); 19.12; 19.18(2); <u>19.19(1)</u> .
3 неделя	С: 20.3; 20.7(2, 5); 20.14(6); 20.21; 20.22(5); 20.23(6); <u>20.26</u> ; 20.28 [*] .
4 неделя	С: <u>20.29</u> ; 21.5(3); 21.6(4); 21.7(7); <u>21.9</u> ; 21.11.
5 неделя	С: 23.5; 23.8(3, 5); <u>23.9(2)</u> ; <u>23.16</u> ; 23.24; 23.29(5); 23.30(2); 23.34; 23.40; 23.62(5); 23.67(1) [*] ; <u>23.69</u> .
6 неделя	С: 23.82 [*] ; 23.84; <u>31.5</u> ; 31.8; 31.14 [*] ; <u>31.19(2)</u> ; 31.23 [*] ; 31.29; 31.31(3).

50+8 [*]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы и собственные значения. Диагонализированность.

С: 24.16^{*}; 24.23; 24.26(1, 2)^{*}; 24.28; 24.30(23, 30); 24.44(2); 24.51^{*}; 24.57(1, 26)^{*}; 24.63(2).

2. Инвариантные подпространства.

С: 24.70; 24.75^{*}; 24.81(2); 24.85(1).

II. Билинейные и квадратичные функции

С: 32.2(3); 32.4^{*}; 32.5; 32.7(3); 15.34; 32.8(10, 15); 32.9(10, 15); 32.12(3); 32.15; 32.18(3); 32.19; 32.20.

III. Геометрия евклидова пространства

С: 25.1; 25.3^{*}; 25.13; 25.17; 25.25(2); 25.26(5); 25.32^{*}; 25.35; 26.13(4); 26.14(4); 26.15(2); 26.16(3); 26.17(2)^{*}; 26.27(5); 26.42(2, 5); 26.44(4).

IV. Линейные преобразования евклидовых пространств

С: 28.5(4); 28.21(1); 29.14(1, 4); 29.17^{*}; 29.19(8); 29.40; 29.42; 29.45; 29.47(1); 29.53(3)^{*}.

V. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

С: 32.27(1, 14); 11.22(19); 32.36(2, 6).

**Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям**

1 неделя	С: 24.16 [*] ; <u>24.23</u> ; 24.26(1, 2) [*] ; 24.28; 24.30(23, 30); 24.44(2); 24.51 [*] ; 24.57(1, 26) [*] .
2 неделя	С: <u>24.63(2)</u> ; <u>24.70</u> ; 24.75 [*] ; 24.81(2); 24.85(1); 32.2(3); 32.4 [*] ; <u>32.5</u> .
3 неделя	С: 32.7(3); <u>15.34</u> ; 32.8(10, <u>15</u>); 32.9(10, 15); 32.12(3); <u>32.15</u> ; 32.18(3); 32.19; 32.20.
4 неделя	С: <u>25.1</u> ; 25.3 [*] ; 25.13; 25.17; 25.25(2); 25.26(5); 25.32 [*] ; 25.35; 26.13(4); 26.14(4); <u>26.15(2)</u> .
5 неделя	С: 26.16(3); 26.17(2) [*] ; 26.27(5); 26.42(2, 5); 26.44(4); 28.5(4); 28.21(1); <u>29.14(1, 4)</u> ; 29.17 [*] ; 29.19(8); 29.40; 29.42.
6 неделя	С: 29.45; 29.47(1); 29.53(3) [*] ; 32.27(1, <u>14</u>); 11.22(19); 32.36(<u>2</u> , 6).
50+12 [*]	

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий