

Работа 4.3.1

Изучение дифракции света

Московский физико-технический институт
Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий

19 февраля 2024 г.



Содержание работы

- 1 Цели работы
- 2 Оборудование
- 3 Дифракция Френеля
- 4 Дифракция Фраунгофера на щели
- 5 Дифракция Фраунгофера на двух щелях
- 6 Влияние на разрешающую способность оптического инструмента
- 7 Заключение. Выводы

Цели работы

- исследовать явления дифракции Френеля и Фраунгофера на щели
- изучить влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов

Оборудование

- оптическая скамья
- ртутная лампа
- светофильтр
- щели с регулируемой шириной
- рамка с вертикальной нитью
- экран с двойной щелью
- микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом
- зрительная труба

Теория. Основные понятия

Дифракция – отклонения в распространении волн от законов геометрической оптики.

Основные параметры дифракции: λ – длина волны, b – размер отверстия, z – расстояние до плоскости наблюдения.

Характер дифракционных явлений определяется значением **волнового параметра**

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}. \quad (1)$$

- если $p \gg 1$ – область дифракции Фраунгофера (*дальняя волновая зона*)
- если $p \sim 1$ – область дифракции Френеля (*ближняя волновая зона*)

Теория. Граничное поле

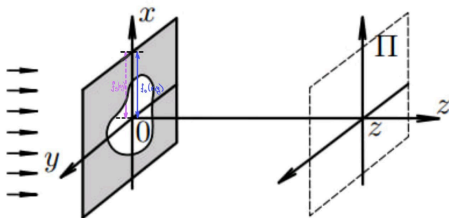


Рисунок: Произвольный тонкий экран

Для произвольного тонкого экрана определим **комплексную амплитуду волны** как

$$f_0(x, y) = f_s(x, y)t(x, y), \quad (2)$$

где $f_s(x, y)$ – падающее поле, $t(x, y)$ – **комплексная пропускность**:

$$t(x, y) = a(x, y)e^{i\varphi(x, y)}, \quad (3)$$

где $a(x, y)$ – функция изменения амплитуды колебаний, $\varphi(x, y)$ – набег фазы.

Теория. Принцип Гюйгенса-Френеля

Комплексная амплитуда в плоскости $z = 0$ есть

$$f_0(x, y) = a_0(x, y)e^{i\varphi_0(x, y)}, \quad (4)$$

где $a_0(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ – распределение амплитуд и фаз колебаний в плоскости $z = 0$.

Принцип Гюйгенса-Френеля:

- каждая точка волнового фронта \approx вторичный источник волн
- световое колебание в любой точке в области $z \geq 0$ – результат интерференции вторичных волн

Теория. Принцип Гюйгенса-Френеля

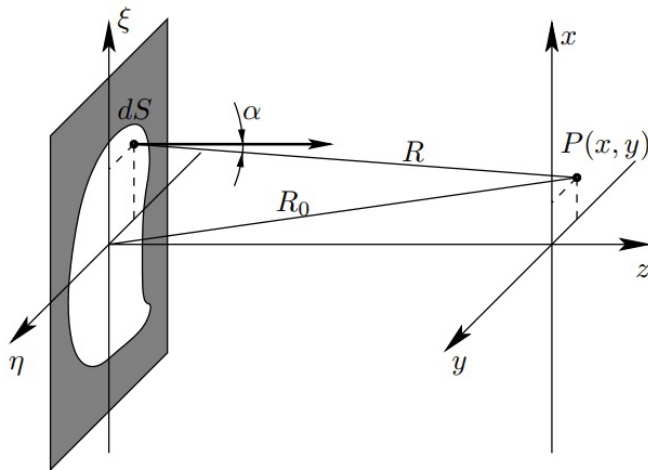


Рисунок: Полное световое колебание в точке Р

Теория. Принцип Гюйгенса-Френеля

Полное световое колебание $g(x, y)$ в некоторой точке Р:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos(\alpha) d\xi d\eta \quad (5)$$

- амплитуда и фаза излучения вторичного источника \sim амплитуде и фазе $a_0(\xi, \eta)$ и $\varphi_0(\xi, \eta)$ реальной волны
- затенённые участки не переизлучают
- в области отверстия волна не искажается
- площадка ds переизлучает сферическую волну $\Rightarrow t(x, y) = \frac{1}{R} e^{ikR}$
- амплитуда колебания \sim видимой площади ds , т.е. $ds \cdot \cos\alpha$
- $\frac{1}{i\lambda}$ – нормировочный коэффициент

Теория. Френелевское приближение

Если предположить, что

- $b \ll R_0$, где R_0 – расстояние до точки наблюдения
- $\cos \alpha \approx 1$

принцип Гюйгенса-Френеля запишется в виде:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda R_0} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{ikR} d\xi d\eta \quad (6)$$

Точное значение $R = z\sqrt{1 + \frac{(x-\xi)^2}{z^2} + \frac{(y-\eta)^2}{z^2}}$. Во **френелевском приближении** ошибка при вычислении фазы колебаний $\Delta(kR) \ll \pi \Rightarrow \Delta R \ll \frac{\lambda}{2}$. Значит

$$R \approx z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z} \quad (7)$$

Теория. Френелевское приближение

Таким образом, получим

$$g(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint f_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta \quad (8)$$

Если отверстие освещается плоской волной амплитуды A_0 :

$f_0(\xi, \eta) \equiv A_0$, а точка наблюдения лежит на оси z ($x = 0, y = 0$), то

$$g(x, y) = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \quad (9)$$

Теория. Дифракция Френеля на щели

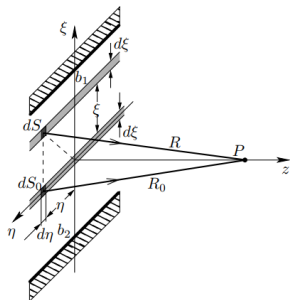


Рисунок: К расчёту дифракции на щели

Световое колебание плоской волны амплитуды A_0 равно

$$g = A_0 \int_{b_1}^{b_2} e^{\frac{ik}{2z}\xi^2} d\xi \quad (10)$$

Воспользуемся методом векторных диаграмм для расчёта светового поля.

Вклад полоски шириной $d\xi$ в колебание в точке P обозначим вектором длины $d\xi$ с углом наклона $\varphi = \frac{k}{2z}\xi^2$. Разность фаз между полосками на расстоянии ξ и $\xi + d\xi$ равен

$$d\varphi = \frac{k}{z}\xi d\xi \quad (11)$$

Теория. Дифракция Френеля на щели

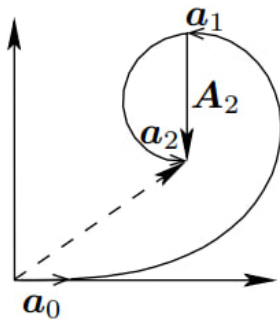


Рисунок: Две зоны Шустера

Зона Френеля - зона кольцевой формы

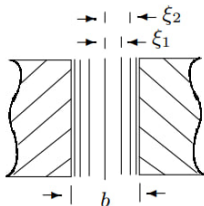
Зона Шустера - зона в виде полос

- первый вектор \vec{a}_0 горизонтален
- вектор, отстоящий на π ,
противоположен \vec{a}_0 . А значит фаза
 $\frac{k}{2z}\xi_1^2 = \pi \Rightarrow \xi_1 = \sqrt{\lambda z}$
- вектор, отстоящий на 2π , сонаправлен
с a_0 , аналогично $\xi_2 = \sqrt{2\lambda z}$
- внешний край m -й зоны Шустера
отстоит от оси η на расстояние
 $\xi_m = \sqrt{m\lambda z}$
- $|A_2|$ – вклад в амплитуду колебаний
2-й зоны шустера.

Теория. Дифракция Френеля на щели

Вид наблюдаемой дифракционной картины на щели b определяется *волновым параметром*:

$$p = \frac{\sqrt{z\lambda}}{b} \quad (12)$$



Также используют **число Френеля**: $C = \frac{b^2}{z\lambda} = \frac{1}{p^2}$, равное полному числу открытых зон Френеля на всей ширине щели.

- если $p \sim 1$ – область дифракции Френеля (*ближняя волновая зона*)
- если число зон Френеля, укладываемых на полуширине щели $b/2$, равно m , то наблюдается $n = m - 1$ тёмных полос.

Рисунок: Зоны Шустера в плоскости щели

Экспериментальная установка

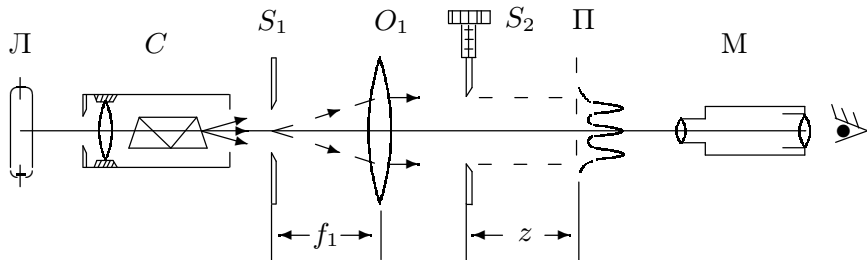
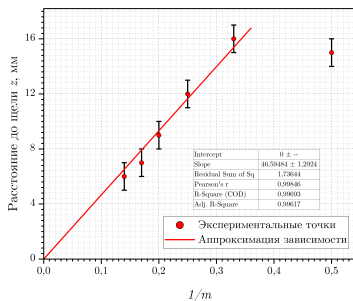


Рисунок: Схема установки для наблюдения дифракции Френеля

Измерения и обработка результатов



- $2\xi = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \cdot \sqrt{\lambda} =$
 (0.326 ± 0.003) мм – ширина щели, полученная из графика
- $b = (0.321 \pm 0.001)$ мм – ширина щели, измеренная с помощью микрометрического винта

Рисунок: Зависимость расстояния до щели z от $1/m$

Теория. Дифракция Фраунгофера на щели

Рассмотрим дифракцию на отверстии, находящемся в плоскости $z = 0$.

- $R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{R_0 - (2x\xi + 2y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)}$
- $R \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0}$
- пусть максимальный размер отверстия $b^2 \geq \eta^2 + \xi^2$
- точка Р удалена настолько, что выполняется $\frac{b^2}{R_0} \ll \lambda$

Тогда $R \approx R_0 - \frac{x\xi}{R_0} - \frac{y\eta}{R_0}$ и введём $u = \frac{kx}{R_0}$, $v = \frac{ky}{R_0}$. В этом приближении принцип Гюйгенса-Френеля имеет вид

$$g(u, v) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad (13)$$

$g(u, v)$ - **двумерное преобразование Фурье** граничного поля $f_0(x, y)$ в плоскости наблюдения.

Теория. Дифракция Фраунгофера на щели

В одномерном случае (щель)

$$g(u) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik\xi \sin\theta} d\xi \sim \frac{\sin(\frac{kb}{2} \sin\theta)}{\frac{kb}{2} \sin\theta}, \quad (14)$$

где $\sin\theta = \frac{x}{R_0}$. Вторичные волны, приходящие в точку наблюдения, можно считать параллельными.

Интенсивность $I(\theta) = |g(\theta)|^2$ обращается в 0 (тёмные полосы) при $\frac{kb}{2} \sin\theta = m\pi$ откуда

$$\sin\theta = m \frac{\lambda}{b} \quad (15)$$

Расстояние от тёмной полосы до оптической оси объектива $x_m = m \frac{\lambda}{b} f_2$, где f_2 - фокусное расстояние объектива O_2

Экспериментальная установка

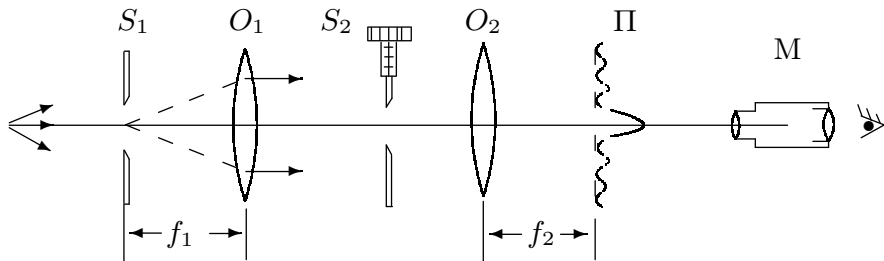


Рисунок: Схема установки для наблюдения дифракции Фраунгофера на щели

Измерения и обработка результатов

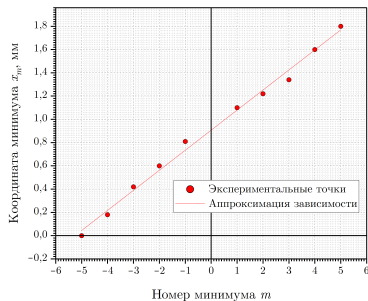


Рисунок: Зависимость положений экстремумов дифракционной картины от их номера

- $\Delta X = (0.17 \pm 0.01)$ мм – расстояние между полосами (угол наклона);
- $b = \frac{\lambda}{\Delta X} f_2 = (0.34 \pm 0.01)$ мм – измерение ширины щели по наклону прямой;
- $b = (0.363 \pm 0.001)$ мм – измерение ширины щели с помощью микрометрического винта.

Теория. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

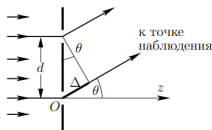


Рисунок: Разность хода при двух щелях

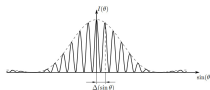


Рисунок: Разность хода при двух щелях

- $\Delta = d \sin \theta$
- фаза отличается на величину
 $\alpha = -k\Delta = -kd \sin \theta$
- функция колебательного процесса от второй щели $g(\theta)e^{i\alpha}$
- амплитуда суммарного колебательного процесса $g(\theta) + g(\theta)e^{i\alpha}$
- угловая координата интерференционного максимума m -ого порядка $\theta_m = m \frac{\lambda}{d}$
- линейное расстояние между соседними интерференционными полосами $\delta x = f_2 \frac{\lambda}{d}$
- число интерференционных полос в центральной области $n = \frac{2\lambda f_2}{b} \frac{1}{\delta x} = \frac{2d}{b}$

Экспериментальная установка

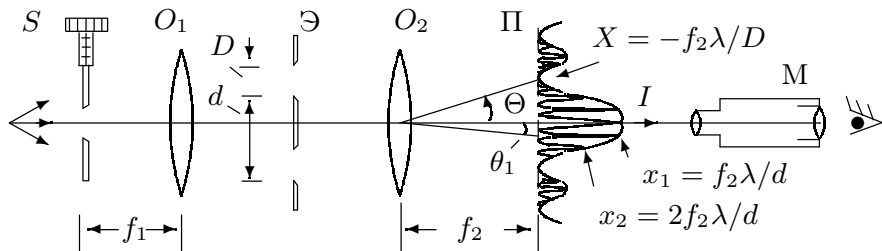
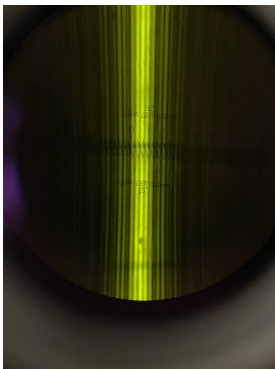


Рисунок: Схема для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях

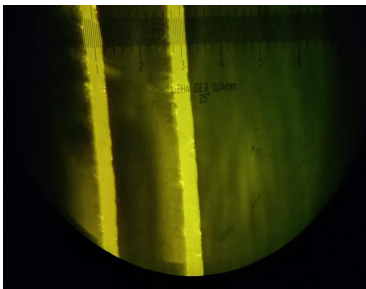
Измерения и обработка результатов



- $\delta x = \frac{(0.38 \pm 0.02) \text{ мм}}{6} = (0.063 \pm 0.003) \text{ мм}$ – измеренное расстояние между дифракционными минимумами
- $d = f_2 \frac{\lambda}{\delta x} = (0.94 \pm 0.04) \text{ мм}$ – расстояние между щелями
- $b = \frac{2d}{n} = (0.31 \pm 0.01) \text{ мм}$ – ширина входной щели

Рисунок:
Дифракционная
картина на двух щелях

Измерение размеров двойной щели



- $d = (0.94 \pm 0.02)$ мм – расстояние между щелями
- $D_1 = (0.18 \pm 0.02)$ мм – длина первой щели
- $D_2 = (0.20 \pm 0.02)$ мм – длина первой щели

Рисунок: Изображение щелей в микроскопе

Теория. Влияние дифракции на оптические приборы

- расстояние между изображениями щелей в плоскости Π равно
$$l = \varphi f_2 = d \frac{f_2}{f_1}$$
- ширина каждого изображения $\delta x \approx \frac{\lambda}{b} f_2$ определяется дифракцией света на щели S_2 .
- когда $\frac{\delta x}{2} \geq l$, то по виду двойная \approx одиночная щель
- **критерий Рэля**: когда $\delta x \sim l$ или $\frac{\lambda}{b} \sim \frac{d}{f_1}$, то изображения различны

Экспериментальная установка

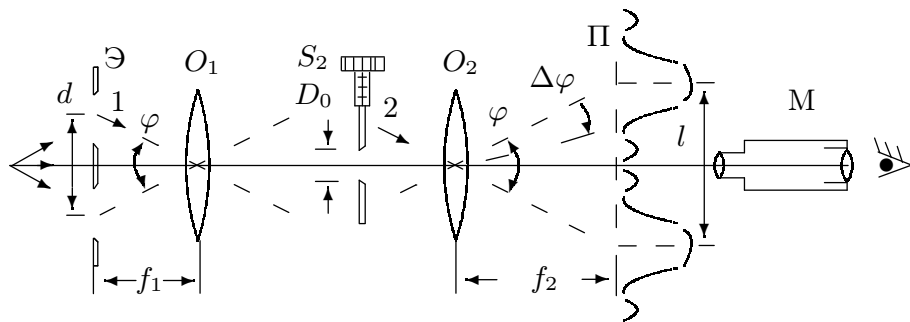


Рисунок: Схема для исследования разрешающей способности оптического инструмента

Измерения и обработка результатов

Для проверки справедливости критерия Рэля сравнили измеренную ширину b_0 щели S_2 , при которой изображение двух щелей сливается, но все ещё различимо, с расчётом по формуле, приведённой на предыдущем слайде.

- $b_0^{exp} = (0.181 \pm 0.001)$ мм – измеренная ширина щели
- $b_0^{theor} > 0.077$ мм – критическая ширина щели, при которой пятна от двух щелей сольются в одно

Заклучение

- при рассмотрении *дифракции Френеля* было измерено значение ширины щели двумя способами. Результаты измерений различаются на 1.5%
- при исследовании *дифракции Френеля* на тонкой вертикальной нити, при удалении микроскопа от нити, на её фоне всегда наблюдается чётное число тёмных дифракционных полос
- при рассмотрении *дифракции Фраунгофера на щели* значения ширины щели, измеренные по формуле и по микроскопическому винту, различаются не более, чем на 5%
- при рассмотрении *дифракции Фраунгофера на двух щелях* непосредственное расстояние между щелями d совпадают с вычислениями
- при изучении *влияния дифракции на разрешающую способность оптического инструмента* получили, что $b_0 > \lambda f_1/d$, что означает разрешимость изображений по Рэлею