

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы 3.2.5
Свободные и вынужденные колебания в электрическом
контуре

Автор:
Тихонов Дмитрий Романович,
студент группы Б01-206

Долгопрудный, 2023

1 Введение

Цель работы: исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивления МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

2 Теоретические сведения

2.1 Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , резистора R и катушки индуктивности L (рис. 1).

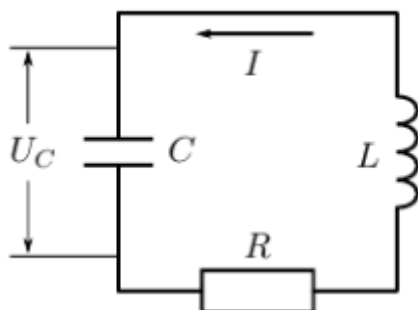


Рис. 1: Последовательный колебательный контур

Сумма падений напряжения на элементах цепи в отсутствие внешней ЭДС равна нулю:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) выражение для $I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$, получим:

$$CL \frac{d^2 U_C}{dt^2} + CR \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \quad (2)$$

Разделим это уравнение на CL и введём обозначения

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (3)$$

где γ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная круговая частота колебательного контура. В итоге получим:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0 \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) введём вспомогательную переменную $U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}$:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (5)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (6)$$

В зависимости от соотношения между коэффициентом затухания γ и собственной частотой ω_0 возможны затухающие колебания ($0 < \gamma < \omega_0$), критический режим ($\gamma = \omega_0$) и аperiodический режим ($\gamma > \omega_0$). Будем рассматривать первый случай, тогда можно записать:

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{cr}, \quad \rho = \frac{1}{2}R_{cr}, \quad (7)$$

где R_{cr} – критическое сопротивление, ρ – волновое сопротивление.

Можно записать решение исходного уравнения (5) в виде

$$U_C(t) = U_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t) \quad (8)$$

Из начальных условий можно получить:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\gamma/\omega_1, \quad I_0 = \frac{U_0}{\rho} \quad (9)$$

Из (9) видно, что волновое сопротивление контура ρ есть отношение «амплитуд» затухающих колебаний напряжения на конденсаторе и тока в контуре.

Выразив a и b из уравнения (8), можно получить:

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \quad I(t) = C \dot{U}_C \quad (10)$$

Из формул (10) следует параметрическое представление траектории системы на фазовой плоскости переменных (U_C, I) . Задание этих двух величин полностью определяет состояние системы в момент времени t .

На рис. 2а показаны в безразмерных переменных зависимости (10) напряжения и тока в контуре от времени в режиме свободных затухающих колебаний. На рис. 2б показана фазовая траектория этих колебаний на плоскости переменных (u, j) , представляющая собой скручивающуюся к точке $(0, 0)$ спираль.

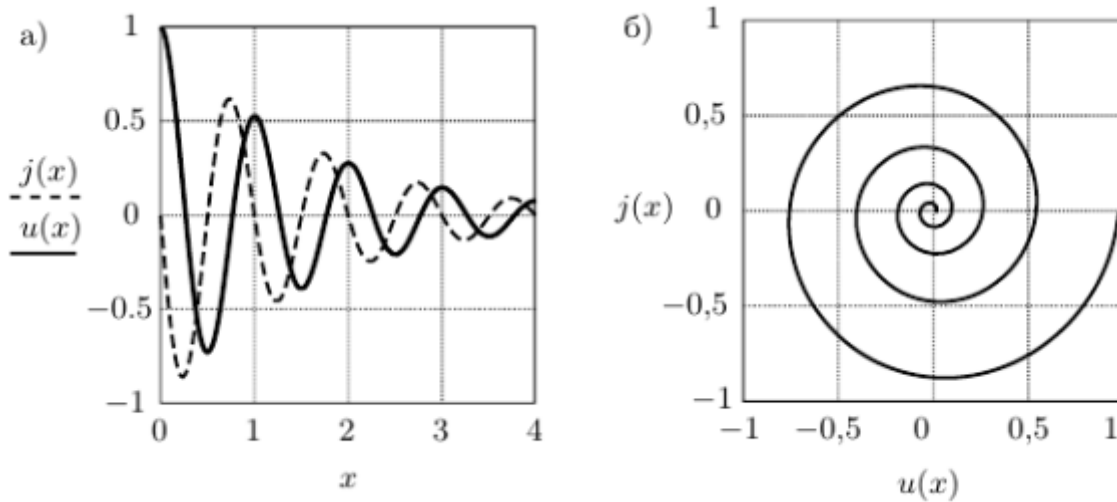


Рис. 2: Затухающие колебания при $\gamma/\omega_0 = 0.1$: а) ток в контуре $j(x)$ и напряжение на конденсаторе $u(x)$, б) траектория системы на фазовой плоскости $j(u)$

В качестве характеристик процесса затухания колебаний помимо коэффициента затухания γ используют *время затухания*:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (11)$$

то есть время, за которое амплитуда колебаний убывает в e раз, а также *логарифмический декремент*, который равен обратному числу N_τ периодов $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} \quad (12)$$

С логарифмическим декрементом связана ещё одна характеристика колебательного контура — его *добротность* Q :

$$Q \equiv \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\gamma T_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{cr}^2}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{1}{4}} \quad (13)$$

Рассмотрим колебательный контур со *слабым* затуханием, то есть такой, что $Q \gg 1$, тогда $0 < \gamma \ll \omega_0$. Отсюда,

$$Q \approx \frac{\pi}{\gamma T_0} = \frac{\tau \omega_0}{2} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \quad (14)$$

2.2 Вынужденные колебания

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Соответствующая схема представлена на рис. 3.

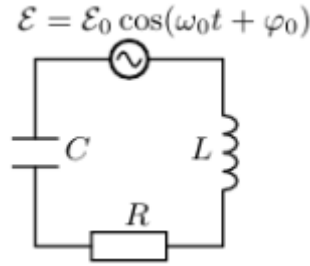


Рис. 3: Последовательный контур с внешней ЭДС

Для напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ вместо (4) получим теперь уравнение

$$\ddot{U}_C + 2\gamma \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (15)$$

Запишем уравнение (15) в комплексной форме, обозначая комплексные величины как «*векторы*»:

$$U_C = \text{Re} \mathbf{U}_C, \quad \mathbf{U}_C = \text{Re} \mathbf{U}_C + i \text{Im} \mathbf{U}_C, \quad (16)$$

$$\mathcal{E} = \text{Re} \mathbf{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (17)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_C + 2\gamma \dot{\mathbf{U}}_C + \omega_0^2 \mathbf{U}_C = \omega_0^2 \mathbf{\mathcal{E}} \quad (18)$$

Решив уравнение (18), мы получим комплексное выражение для напряжения на конденсаторе. Вещественная часть этого решения $\text{Re} \mathbf{U}_C$ и является решением исходного уравнения (15). Будем искать решение уравнения (18) в виде

$$\mathbf{U}_C(t) = \mathbf{U}_{C0} e^{i\omega t} \quad (19)$$

где U_{C0} — комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе, не зависящая от времени. Подставляя (19) в (18), находим U_{C0} , комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на сопротивлении и индуктивности:

$$U_{C0} = \frac{\mathcal{E}_0}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (20)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{R0} = \frac{R\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{L0} = i\omega L \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \quad (21)$$

Комплексная величина Z называется *импедансом* последовательного контура, которая может быть представлена в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi}, \quad (22)$$

где $Z_0 = |Z|$ — модуль комплексного числа, $\psi = \arg Z$ — его аргумент (фаза). Для импеданса рассматриваемого последовательного контура при этом находим

$$Z_0 = \sqrt{(ReZ)^2 + (ImZ)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{R}{\cos \psi_I}, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} \psi_I = \frac{ImZ}{ReZ} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (24)$$

2.3 Резонанс

Из уравнения (23) получим

$$Z_0 = \frac{1}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \gamma^2}}. \quad (25)$$

Отсюда, находим резонансную частоту, учитывая, что $\gamma \ll \omega_0$

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0. \quad (26)$$

Рассмотрим резонансную кривую (рис. 4), уравнение которой имеет вид

$$U_0 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \gamma^2}} \mathcal{E}_0, \quad U_{max} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \mathcal{E}_0. \quad (27)$$

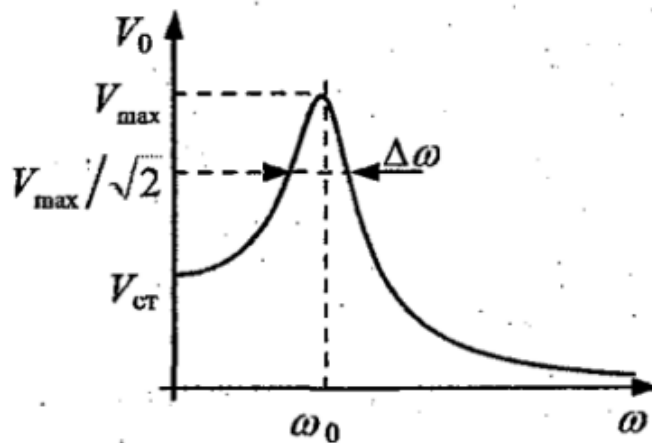


Рис. 4: Резонансная кривая

Нетрудно показать, что

$$\frac{U_{max}}{U_{ст}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}, Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (28)$$

2.4 Процесс установления вынужденных колебаний

Рассмотрим процесс установления вынужденных колебаний. Для начала рассмотрим контур без затухания. После замыкания ключа в момент времени $t = 0$ в контуре благодаря ЭДС появляется ток. Уравнение для напряжения на конденсаторе имеет вид

$$\dot{U} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (29)$$

Решение этого уравнения запишем в виде суммы двух слагаемых, отвечающих соответственно свободным и вынужденным колебаниям

$$U(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (30)$$

Из начальных условий $U(0) = 0$ и $\dot{U}(0) = 0$, находим константы a и b , в итоге получим

$$U(t) = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{-2\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) \quad (31)$$

Найденное решение представляет собой быстро меняющийся гармонический сигнал (рис. 5), амплитуда которого медленно меняется по гармоническому закону. Такие колебания называются *биениями*.

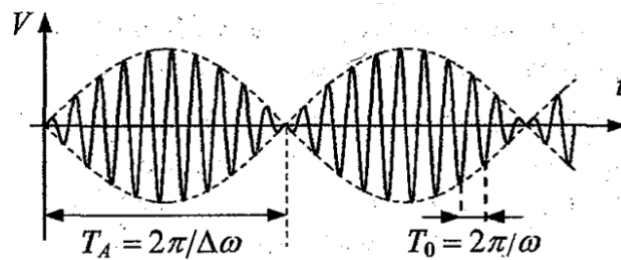


Рис. 5: Биения до установления колебаний

Если коэффициент затухания ненулевой, то свободные колебания со временем затухнут, и в контуре установятся гармонические вынужденные колебания (рис. 6).

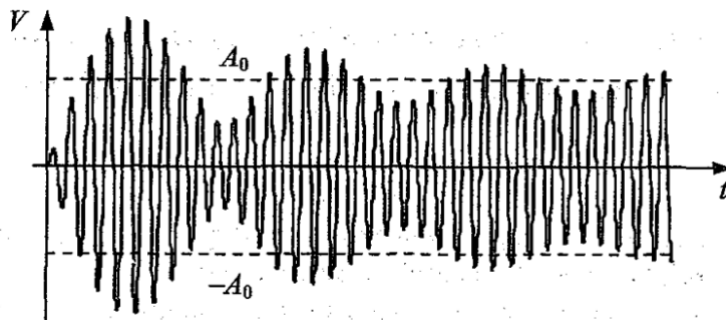


Рис. 6: Биения при установлении колебаний

Если на разряженный контур начать подавать внешнее напряжение с резонансной частотой, то амплитуда колебаний будет меняться по закону

$$U(t) = U_{\infty} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (32)$$

Аналогично, если выключить внешнее напряжение, то останутся только затухающие колебания, и амплитуда будет меняться по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t}. \quad (33)$$

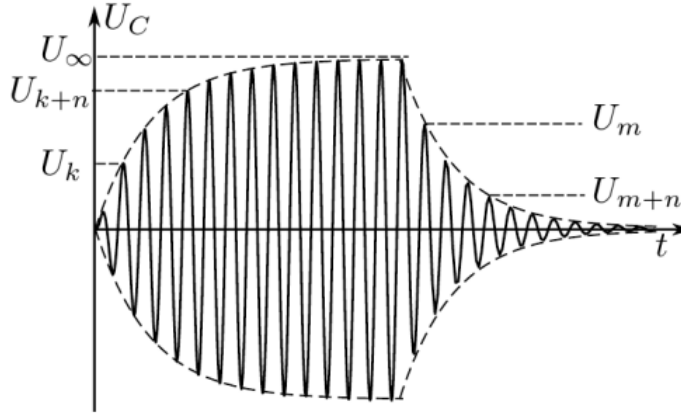


Рис. 7: Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Таким образом, измеряя зависимость амплитуды от времени можно получить добротность Q :

$$Q = \pi \left(\frac{1}{n} \ln \frac{U_{\infty} - U_k}{U_{\infty} - U_{k+n}} \right)^{-1}. \quad (34)$$

3 Методика измерений и используемое оборудование

Схема установки для исследования колебаний приведена на рисунке 8. Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением R_L , переменной емкости C и сопротивления R . Картина колебаний напряжения на ёмкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

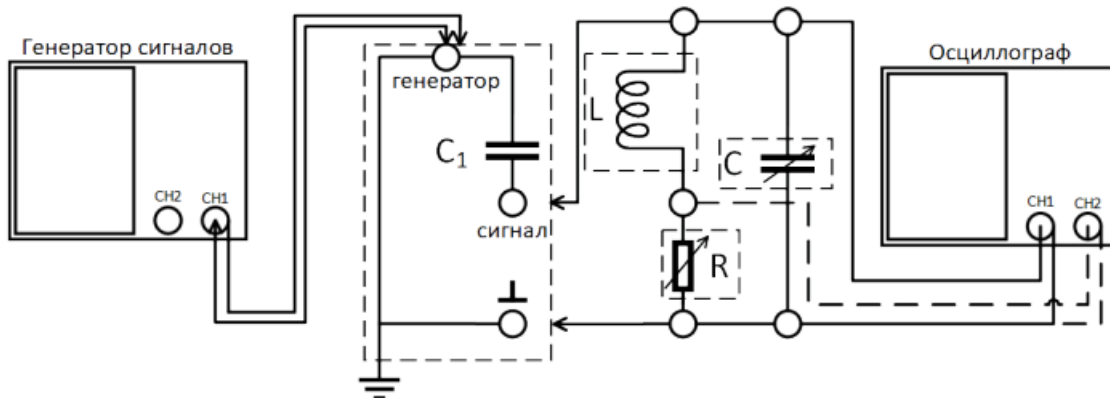


Рис. 8: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе U_c поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току I .

При изучении возбужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды возбужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчета добротности контура является определение декремента затухания по картине установления возбужденных колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи цугов синусоидальной формы.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Измерение периода свободных колебаний

Для проведения эксперимента установили на магазине сопротивлений величину $R = 0$ Ом, на магазине индуктивностей $L = 100$ мГн, на магазине емкостей величину $C = 0$ мкФ. Несмотря на то, что на курбелях магазина емкостей стоит нулевое значение, контур сам по себе обладает некоторым минимальным значением ёмкости $C_0 = \frac{T}{4\pi^2 L} = 0.001$ мкФ, благодаря которому в контуре реализуются свободные колебания. При этом затухание обеспечивалось наличием активного сопротивления в магазине индуктивностей R_L . Изменяя ёмкость (по курбелям), были проведены измерения периодов (табл. 1).

C , мкФ	C_0 , мкФ	C_Σ , мкФ	T_{exp} , мкс	T_{theor} , мкс
0,000	0,001	0,001	69	63
0,001		0,002	94	89
0,002		0,003	113	109
0,003		0,004	128	126
0,004		0,005	144	140
0,005		0,006	157	154
0,007		0,008	181	178
0,009		0,010	202	199

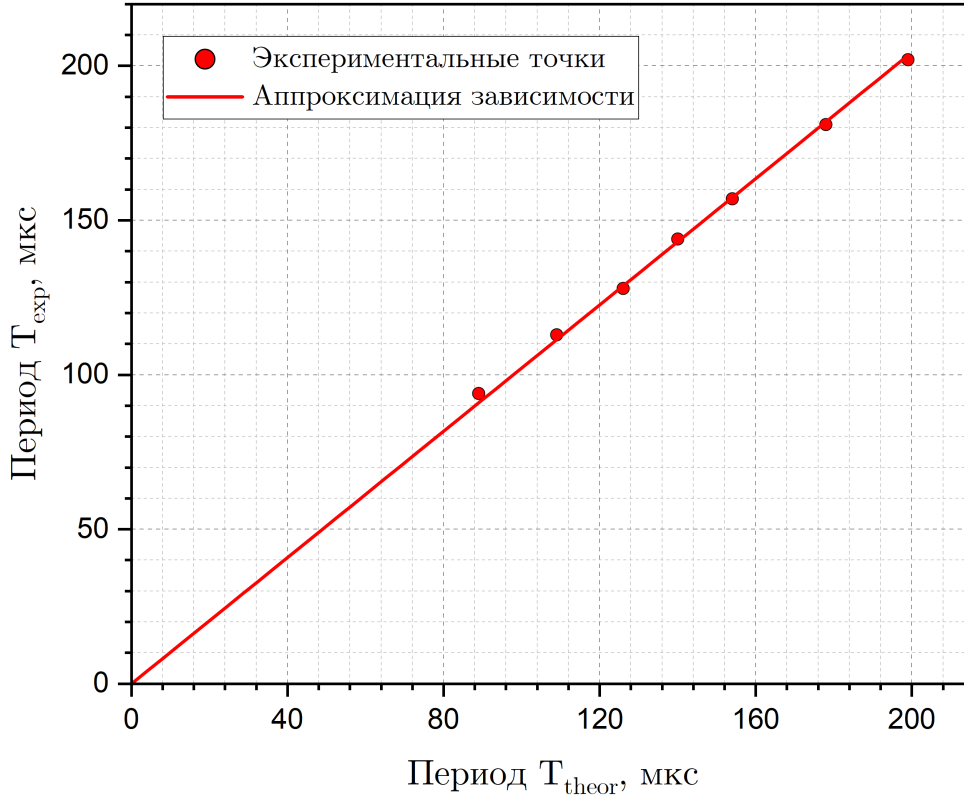
Таблица 1: Результаты измерений периода свободных колебаний

Формулы, которые использовались при расчётах:

$$C_\Sigma = C_0 + C \quad (35)$$

$$T_{theor} = 2\pi\sqrt{LC_\Sigma} \quad (36)$$

По результатам измерений периода свободных колебаний, был построен график зависимости $T_{exp} = f(T_{theor})$. График изображён на рис. 9.

Рис. 9: График зависимости T_{exp} от T_{theor}

Аппроксимируя полученную зависимость в программе *Origin Pro 2023*, получим коэффициент угла наклона:

$$k = (1.006 \pm 0.004)$$

Вследствие того, что $k \approx 1$ с учётом погрешности можно сказать, что изложенная теория находится в согласии с экспериментом.

4.2 Измерение логарифмического декремента затухания и критического сопротивления

Приняв $L = 100$ мГн, была рассчитана ёмкость $C^* = 6$ нФ, при которой собственная частота колебаний $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 6.5$ кГц, и критическое сопротивление контура $R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C^*}} = 8165$ Ом.

Установив на магазине ёмкость, равную $C^* = 6$ нФ, и сопротивление $R \approx 0.05R_{cr} \approx 408$ Ом, получили на экране осциллографа картину затухающих колебаний. Измеряя амплитуды колебаний, разделённых целым числом периодов n , были найдены логарифмические декременты затуханий $\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_m}{U_{m+n}}$ для различных значений R :

$$\Theta_{0.05R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{6.28}{3.12} = 0.35$$

$$\Theta_{0.08R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{5.52}{1.72} = 0.58$$

$$\Theta_{0.11R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{6.68}{1.42} = 0.77$$

$$\Theta_{0.14R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{6.32}{0.90} = 0.97$$

$$\Theta_{0.17R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{6.04}{0.59} = 1.16$$

$$\Theta_{0.20R_{cr}} = \frac{1}{2} \ln \frac{5.92}{0.37} = 1.39$$

Полученные данные представлены в таблице 2.

$R, \text{ Ом}$	Θ	$1/R^2, 10^{-6} \cdot \text{ Ом}^{-2}$	$1/\Theta^2$
408	0,35	6,00	8,16
653	0,58	2,34	2,97
898	0,77	1,24	1,69
1143	0,97	0,77	1,06
1388	1,16	0,52	0,74
1633	1,39	0,37	0,52

Таблица 2: Результаты измерения зависимости $1/\Theta^2 = f(1/R^2)$

По таблице 2 был построен график зависимости $1/\Theta^2$ от $1/R^2$ (рис. 10).

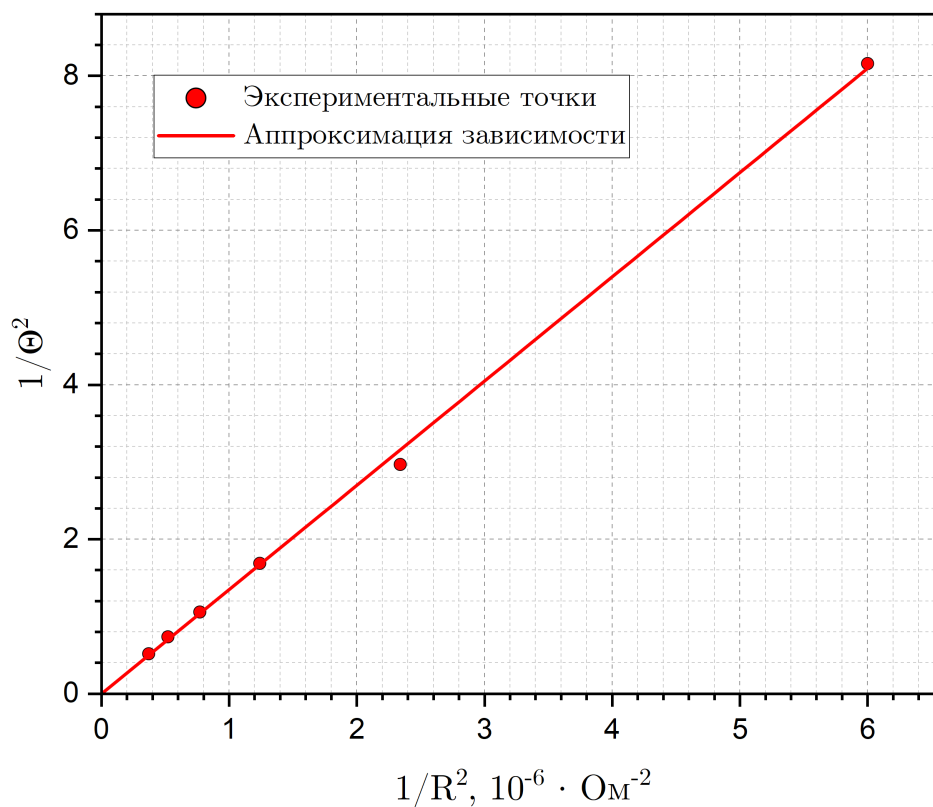


Рис. 10: График зависимости $1/\Theta^2$ от $1/R^2$

Аппроксимируя полученную зависимость в программе *Origin Pro 2023*, получим коэффициент угла наклона:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = (1.35 \pm 0.01) \cdot 10^6 \cdot \text{Ом}^2,$$

где $Y = 1/\Theta^2$, а $X = 1/R^2$. Отсюда, можно вычислить $R_{cr} = 2\pi\sqrt{\Delta Y/\Delta X} = 7300 \text{ Ом}$ и $\Delta R_{cr} = 30 \text{ Ом}$.

Окончательно получим:

$$R_{cr} = (7300 \pm 30) \text{ Ом}$$

Заметим, что экспериментальное значение R_{cr} немного отличается от теоретического. Это можно объяснить тем, что в работе не учитывалось сопротивление остальной части цепи.

4.3 Измерение добротности контура

В начале определим добротность контура $Q = \pi/\Theta$, воспользовавшись результатами предыдущего пункта. Полученные значения приведены в таблице 3.

$R, \text{Ом}$	408	653	898	1143	1388	1633
Θ	0,35	0,58	0,77	0,97	1,16	1,39
Q	8,98	5,42	4,08	3,24	2,71	2,26

Таблица 3: Результаты вычисления добротности первым способом

Теперь определим добротность контура другим способом, наблюдая затухающие колебания на фазовой плоскости. Для определения декремента затухания измерим координаты пересечения витков спирали с одной из осью координат (рис. 11), разделенные целым числом периодов n . Полученные значения приведены в таблице 4.

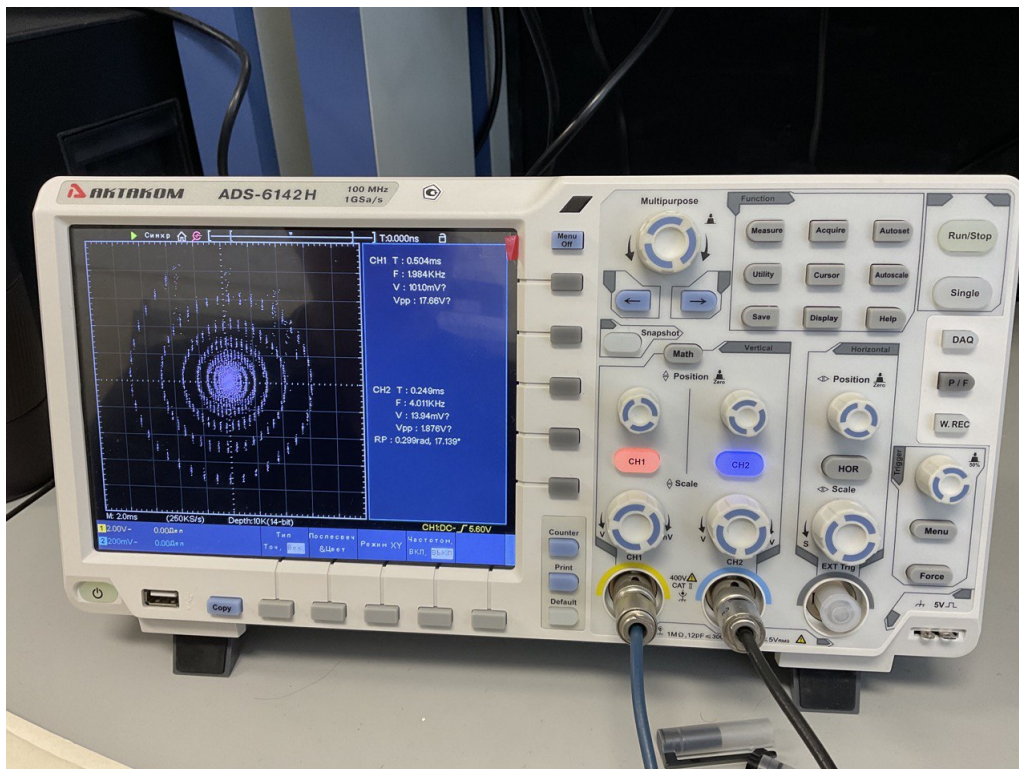


Рис. 11: Фазовая плоскость затухающих колебаний на осциллографе

R , Ом	408	653	898	1143	1388	1633
Θ	0,31	0,59	0,79	0,92	1,22	1,32
Q	10,13	5,33	3,98	3,43	2,57	2,38

Таблица 4: Результаты вычисления добротности вторым способом

Наконец, рассчитаем теоретическое значение добротности через параметры контура $L = 100$ мГн, $C = 6$ нФ и R по формуле $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Полученные значения приведены в таблице 5.

R , Ом	408	653	898	1143	1388	1633
Q	10,00	6,25	4,55	3,57	2,94	2,50

Таблица 5: Результаты вычисления добротности вторым способом

5 Заключение

Результаты работы (измерения добротности контура различными способами) приведены в таблице 6.

R , Ом	Свободные колебания		
	$f(L, C, R)$	$f(\Theta)$	Спираль
408	10,00	8,98	10,13
653	6,25	5,42	5,33
898	4,55	4,08	3,98
1143	3,57	3,24	3,43
1388	2,94	2,71	2,57
1633	2,50	2,26	2,38

Таблица 6: Результаты лабораторной работы

Исходя из данных таблицы 6 можно сказать, что значения, полученные всеми способами определения добротности колебательной системы, предложенными для проверки, согласуются с теоретическими значениями добротности в различных конфигурациях.