

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Автор:
Тихонов Дмитрий Романович,
студент группы Б01-206

Долгопрудный, 2023

1 Введение

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

2 Теоретические сведения

2.1 Ряд Фурье и спектральный анализ

Согласно теореме Фурье, любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда гармонических функций с кратными частотами — *ряда Фурье*. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом T имеет вид

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi\nu_n t) + B_n \sin(2\pi\nu_n t), \quad (1)$$

где $\nu_n = n\nu_0$, $\nu_0 = \frac{1}{T}$, $n = 1, 2, \dots$ — частоты фурье-гармоник, A_n и B_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье. Коэффициенты находятся как

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2\pi\nu_n t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(2\pi\nu_n t) dt. \quad (2)$$

Удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в *представлении амплитуд и фаз*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\nu_n t + \varphi_n), \quad (3)$$

где $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ — амплитуда гармоники, а $\operatorname{tg} \varphi_n = B_n/A_n$ — фаза.

Совокупность всех частот ν_n и соответствующих им амплитуд a_n и фаз φ_n называют *спектром функции* $f(t)$. Спектр периодической функции *дискретен* (число гармоник счётно). Если функция не периодическая, но ограниченная во времени, её можно представить как предел периодической функции с очень большим периодом $T \rightarrow \infty$. Тогда частотное расстояние между соседними гармониками $\delta\nu = 1/T$ стремится к нулю, то есть спектр становится *непрерывным*. Разложение в ряд Фурье при этом переходит в *интеграл Фурье*.

Формулу (4), в которой функции $f(t)$ ставится в соответствие функция $F(\omega)$ называют *преобразованием Фурье*. Это преобразование является взаимно-однозначным, а восстановление исходной функции по её спектру называется *обратным преобразованием Фурье*. Оно представлено формулой (5).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

Однако при спектральном анализе электрических сигналов, как правило, измеряются именно амплитуды $|a_n|$ спектральных компонент, а информация об их фазах φ_n теряется. Это приводит к тому, что пропадает взаимно-однозначное соответствие между сигналом и спектром, и весьма разные сигналы могут иметь один и тот же амплитудный спектр.

2.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Найдём спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности τ с периодом следования импульсов $T > \tau$ (рис. 1).

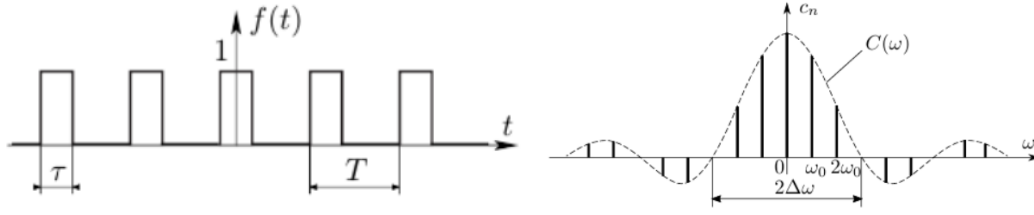


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов (слева) и её спектр (справа)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{\sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(\pi\nu_n\tau)}{\pi\nu_n\tau}. \quad (6)$$

Спектр $\{c_n\}$ показан на рис. 1. Пунктирной кривой изображена огибающая функция

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (7)$$

Полуширина $\Delta\omega$ главного максимума этой функции определяется условием $\sin \omega\tau/2 = 0$:

$$\Delta\omega \cdot \frac{\tau}{2} = \pi \quad \text{или} \quad \Delta\omega \cdot \tau = 2\pi.$$

2.3 Периодическая последовательность цугов

Найдём спектр обрывка синусоиды с частотой ω_0 длительностью τ (такой сигнал называют *цугом*). Сигнал может быть представлен как

$$f(t) = f_0(t) \cos(\omega_0 t), \quad (8)$$

где $f_0(t)$ - единичный прямоугольный импульс длительностью τ (рис. 2).

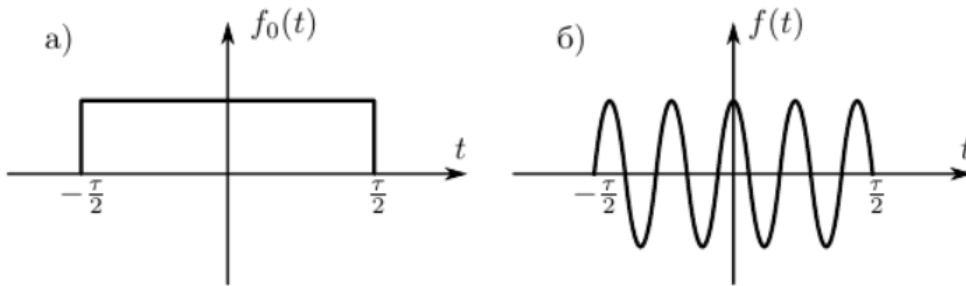


Рис. 2: Прямоугольный (а) и синусоидальный (б) импульсы

Найдём спектр прямоугольного импульса длительности τ единичной амплитуды:

$$F_0(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (9)$$

Соотношение для смещения спектра:

$$F(\omega) = \frac{1}{2} F_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F_0(\omega + \omega_0). \quad (10)$$

Отсюда, получим

$$F(\omega) = \frac{\tau}{2} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau/2}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau/2}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right]. \quad (11)$$

Спектры $F_0(\omega)$ и $F(\omega)$ представлены на рис. 3.

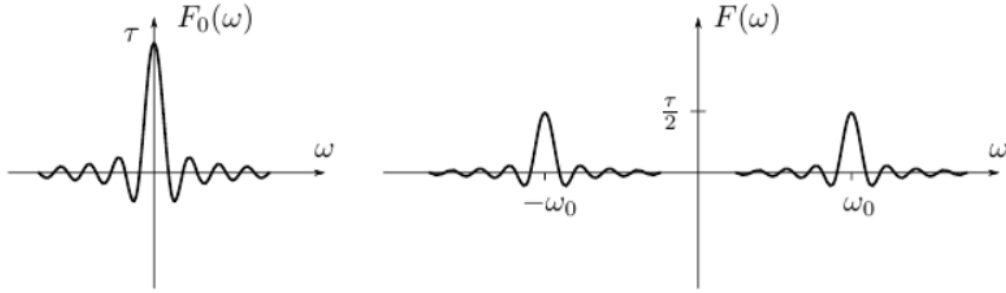


Рис. 3: Спектры прямоугольного импульса и синусоидального цуга

Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

2.4 Соотношения неопределённостей

Если у сигнала $f(t)$ есть какое характерное время Δt , то в спектре $a(\nu)$ будет наблюдаться характерный масштаб $\Delta \nu \sim 1/\Delta t$. Соотношения вида

$$\Delta \nu \cdot \Delta t \sim 1 \quad (12)$$

принято называть *соотношениями неопределённостей*.

Например, если $\Delta t = \tau$ — характерная *длительность* импульса, то характерная *ширина* спектра по порядку величины будет равна $\Delta \nu \sim 1/\tau$. Конкретное числовое значение зависит, во-первых, от детальной формы сигнала, и, во-вторых, от того, что именно мы называем *характерным* временем и что — *шириной* спектра.

Другой пример, для любого сигнала с периодом T в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии $\delta \nu = 1/T$ друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит.

2.5 Амплитудная модуляция

Рассмотрим простейшее амплитудно-модулированное колебание, в котором амплитуда модуляции является гармонической функцией:

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t) = a_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (13)$$

Итак, амплитудно-модулированное колебание представляется в виде суммы трёх гармонических колебаний:

$$f_0(t) = a_0 \cos \omega_0 t, \quad f_1(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad f_2(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \quad (14)$$

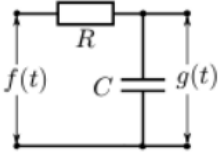
с частотами соответственно ω_0 , $\omega_0 + \Omega$, $\omega_0 - \Omega$ и амплитудами a_0 , $ma_0/2$, $ma_0/2$. Колебание $f_0(t)$ называется *несущим колебанием*, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — *боковыми гармониками*.

Константа $0 < m \leq 1$ называется *глубиной модуляции*. Глубину модуляции можно выразить через максимальную a_{max} и минимальную a_{min} амплитуды сигнала:

$$m = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}}. \quad (15)$$

2.6 Интегрирующая RC -цепочка

Частотная характеристика RC -цепочки (рис. 4) равна



$$\lambda(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_{RC}}. \quad (16)$$

Отсюда, амплитудный коэффициент фильтрации равен

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2}} \quad (17)$$

Рис. 4: Интегрирующая RC -цепочка

При $2\pi\nu \gg 1/\tau_{RC}$ имеем $K \approx \frac{1}{2\pi\nu RC} \rightarrow 0$, то есть RC -цепочка подавляет все компоненты сигнала с достаточно высокой частотой, а низкочастотные компоненты пропускает без искажения ($K \rightarrow 1$ при $2\pi\nu \ll 1/\tau_{RC}$). Такие устройства называют *фильтрами низких частот*.

3 Методика измерений и используемое оборудование

Вследствие того, что частота исследуемого сигнала не слишком велика (заведомо меньше тактовой частоты процессоров), в данной работе применяется цифровой спектральный анализ, который имеет две отличительные особенности.

Во-первых, при цифровом анализе возникает *частота дискретизации* $\nu_{\text{дискр}}$, то есть частота, с которой считываются значения напряжения, подаваемого на входной канал анализатора. Дискретизация не позволит исследовать спектр частот, превышающих частоту $\nu_{\text{дискр}}$, и исказит спектр вблизи неё, поэтому надёжно получать спектр можно лишь на достаточно низких частотах $\nu \ll \nu_{\text{дискр}}$. Внутренняя частота дискретизации осциллографов обычно велика (типичное значение — 1 ГГц), однако для преобразования Фурье в целях оптимизации скорости работы она может существенно урезаться. В настройках цифровых осциллографов часто используется параметр *количество точек на интервал времени*. Например, если сигнал записывался в течение 1 с, то при стандартных для многих осциллографов 4096 точках дискретизации, спектр будет заведомо ограничен лишь частотой ~ 2 кГц.

Во-вторых, интервал времени Δt , в течение которого регистрируется сигнал, всегда ограничен. Для анализа сигнала вырезается его участок — *окно* $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$. Такое преобразование Фурье часто называют *оконным*. Из-за ограниченности размеров *окна* неизбежно возникают дополнительные искажения спектра. Чтобы компенсировать эти искажения, значениям регистрируемой функции в пределах *окна* придают разный вес. В таком случае говорят об *оконной* функции преобразования Фурье. На практике применяются различные оконные функции, каждая из которых обладает своими достоинствами и недостатками (одни уменьшают шумы, другие уменьшают ширину пиков и погрешность частоты, третьи погрешность измерения амплитуд и т.д.). В нашей работе важно аккуратное измерения амплитуд, для чего лучше всего подходят окна *окна с плоской вершиной*.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

Настроив генерацию прямоугольных импульсов с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс, получили на экране спектр сигнала. Изменяя на генераторе параметры сигнала, зафиксировали, как изменялся спектр (рис. 5).

При фиксированных параметрах $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц и $\tau = 50$ мкс, были измерены амплитуды a_n и частоты ν_n нескольких спектральных компонент (*гармоник*). Результаты измерений представлены в таблице 1.

n	ν_n^{exp} , Гц	ν_n^{theor} , Гц	$ a_n ^{exp}$, усл. ед.	$ a_n/a_1 ^{exp}$	$ a_n/a_1 ^{theor}$
1	1021	1000	284,6	1,000	1,000
2	2045	2000	280,3	0,985	0,988
3	2994	3000	273,7	0,962	0,967
4	4056	4000	266,5	0,936	0,939
5	5042	5000	256,4	0,901	0,904
6	6028	6000	244,0	0,857	0,862
7	7014	7000	231,0	0,812	0,814
8	8001	8000	214,4	0,753	0,760
9	9025	9000	199,1	0,700	0,702
10	10001	10000	180,3	0,634	0,639
11	11040	11000	161,5	0,567	0,574
12	12020	12000	143,4	0,504	0,507

Таблица 1: Результаты исследования амплитуд и частот гармоник

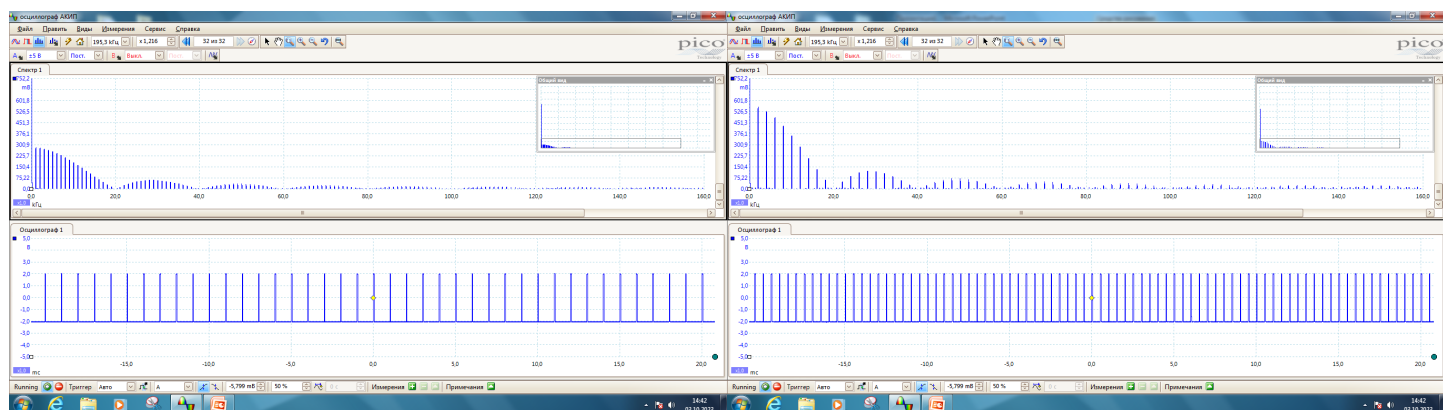
При составлении таблицы были использованы соотношения 6.

Зафиксировав период повторения $T = 1$ мс прямоугольного сигнала, исследуем зависимость полной ширины спектра сигнала $\Delta\nu$ от длительности импульса τ . Результаты измерений представлены в таблице 2.

По этим данным построим график зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$ (рис. 6).

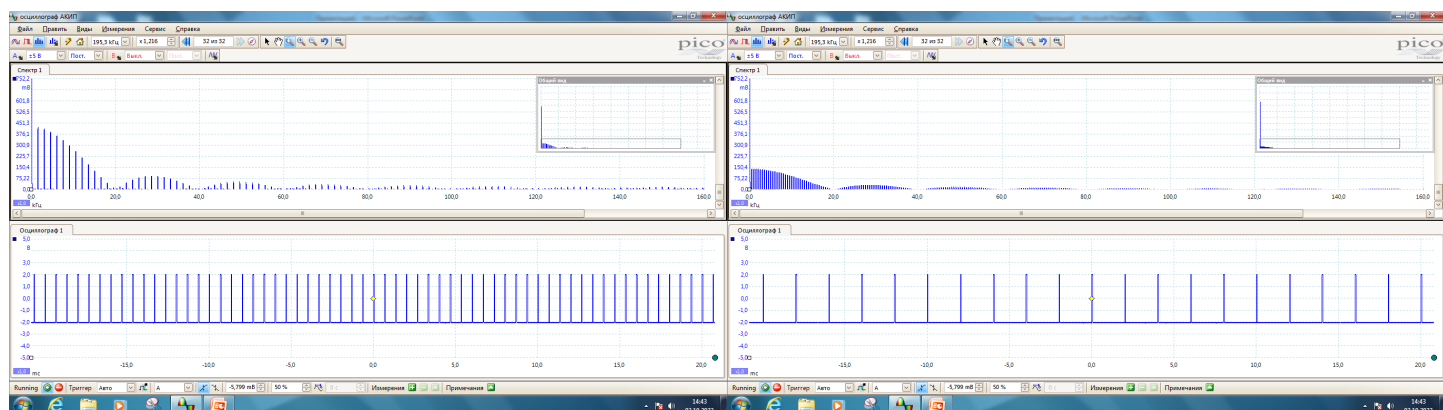
τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$1/\tau$, $10^3 \cdot \text{с}^{-1}$
50	19,6	20
75	13,4	13
100	9,8	10
125	8,0	8
150	6,5	7
175	5,5	6
200	4,5	5

Таблица 2: Результаты измерения зависимости $\Delta\nu$ от τ



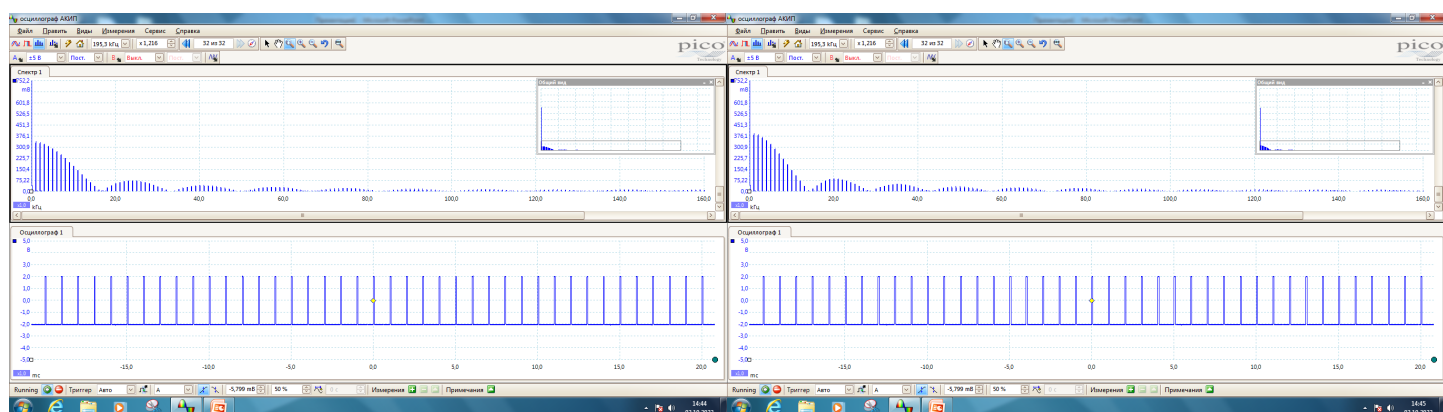
(a) $\nu_{\text{повт}} = 1,0 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$

(b) $\nu_{\text{повт}} = 2,0 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$



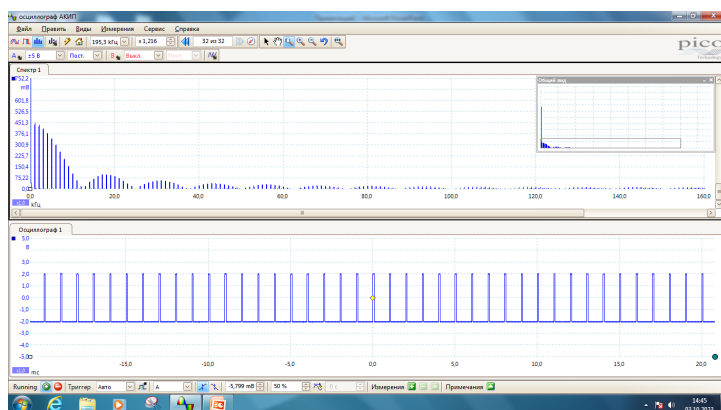
(c) $\nu_{\text{повт}} = 1,5 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$

(d) $\nu_{\text{повт}} = 0,5 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$



(e) $\nu_{\text{повт}} = 1,0 \text{ кГц}$, $\tau = 60 \text{ мкс}$

(f) $\nu_{\text{повт}} = 1,0 \text{ кГц}$, $\tau = 70 \text{ мкс}$



(g) $\nu_{\text{повт}} = 1,0 \text{ кГц}$, $\tau = 90 \text{ мкс}$

Рис. 5: Изменение спектра прямоугольных импульсов при варьировании параметров

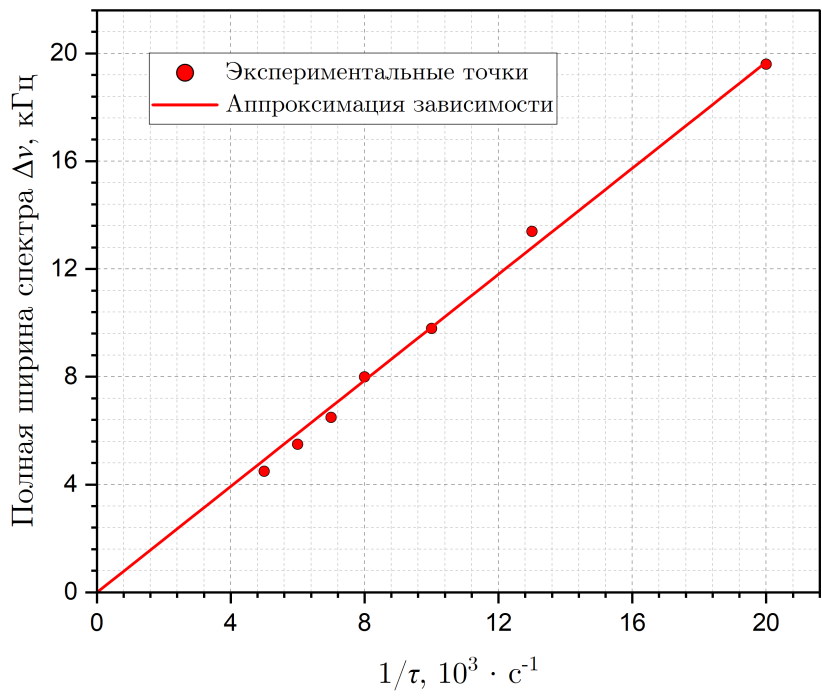


Рис. 6: График зависимости полной ширины спектра $\Delta\nu$ от $1/\tau$

Аппроксимируя полученные данные при помощи программы *OriginPro 2023b*, получим

$$\Delta\nu \cdot \tau = 0,99 \pm 0,01 \sim 1,$$

что согласуется с соотношением неопределённости (см. пункт 2.4).

Зафиксировав период повторения $\tau = 100$ мкс прямоугольного сигнала, исследуем зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними гармониками спектра от периода повторения T . Результаты измерений представлены в таблице 3.

$T, \text{мс}$	$\delta\nu, \text{кГц}$	$1/T, 10^3 \cdot \text{с}^{-1}$
0,2	5,000	5,000
1,0	1,014	1,000
1,8	0,554	0,556
2,6	0,374	0,385
3,4	0,307	0,294
4,2	0,241	0,238
5,0	0,203	0,200

Таблица 3: Результаты измерения зависимости $\delta\nu$ от T

По этим данным построим график зависимости $\delta\nu (1/T)$ (рис. 7).

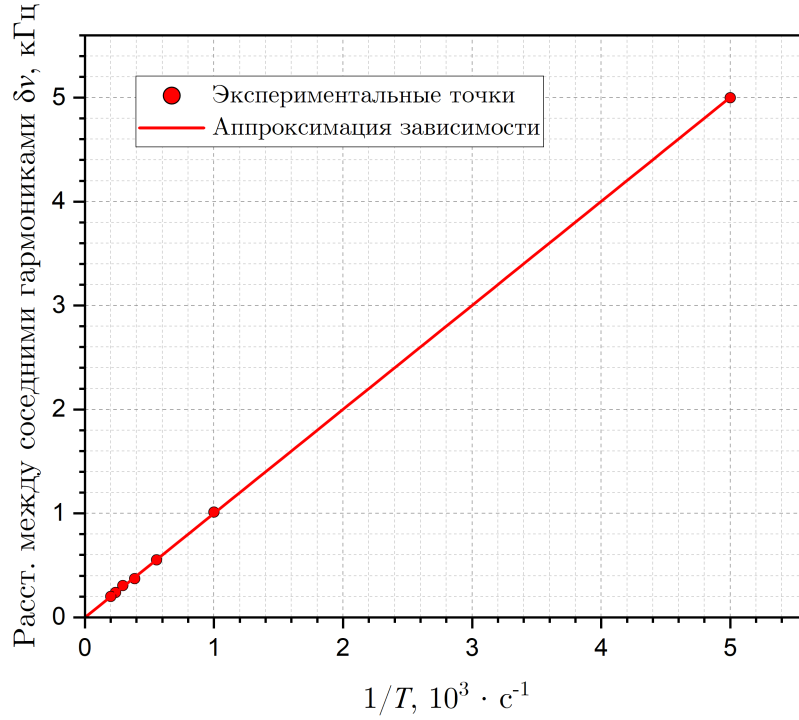


Рис. 7: График зависимости расстояния между соседними гармониками $\delta\nu$ от $1/T$

Аппроксимируя полученные данные при помощи программы *OriginPro 2023b*, получим

$$\delta\nu \cdot T = 1,000 \pm 0,001,$$

что согласуется с соотношением неопределённости (см. пункт 2.4).

4.2 Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

Настроив генерацию периодических импульсов синусоидальной формы (*цугов*) с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, периодом повторения $T = 1$ мс ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц) и числом периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$, получили на экране осциллографа устойчивую картину сигнала. Изменяя на генераторе параметры сигнала, зафиксировали, как изменялся спектр (рис. 8).

Теперь установим на генераторе следующие параметры: $\nu_0 = 50$ кГц, $N = 5$, для них измерим, меняя T , зависимость $\delta\nu$ от $1/T$. Полученные результаты исследования зависимости приведены в таблице 4.

T , мс	$\Delta\nu$, кГц	$\delta\nu$, кГц	$1/T$, $10^3 \cdot \text{с}^{-1}$
4,00	10	0,25	0,25
2,00	10	0,55	0,50
1,00	10	0,97	1,00
0,50	10	1,94	2,00
0,25	10	4,00	4,00
0,20	10	5,00	5,00

Таблица 4: Результаты измерения зависимости $\delta\nu$ от $1/T$

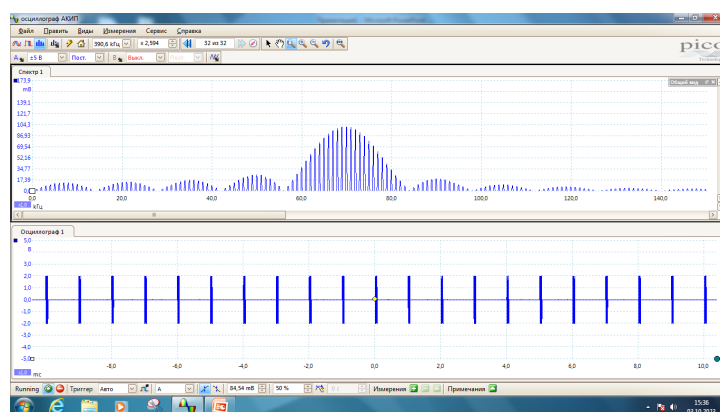
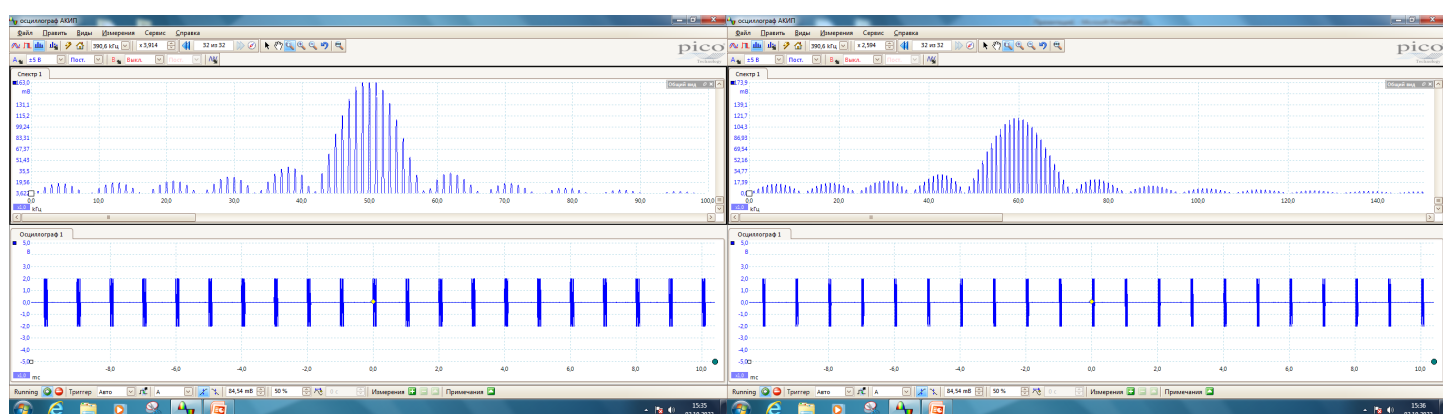
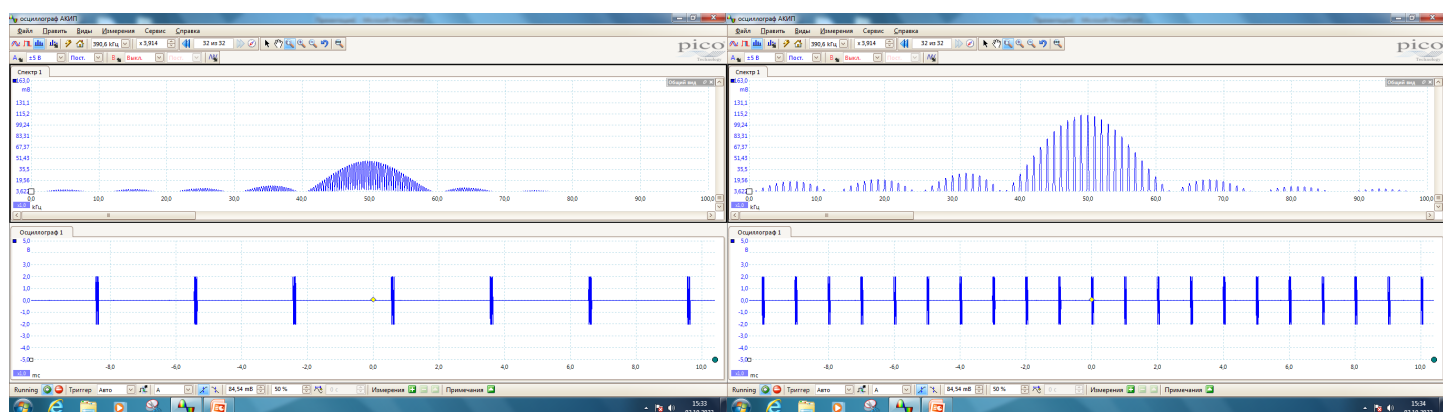
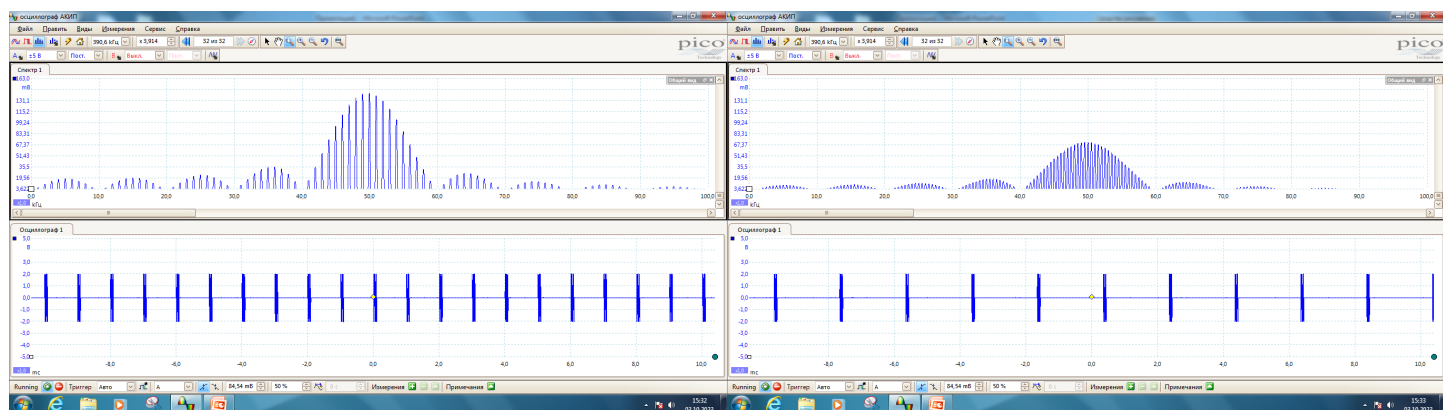


Рис. 8: Изменение спектра синусоидальных импульсов при варьировании параметров

По данным таблицы 4 построим график зависимости $\delta\nu(1/T)$ (рис. 9).

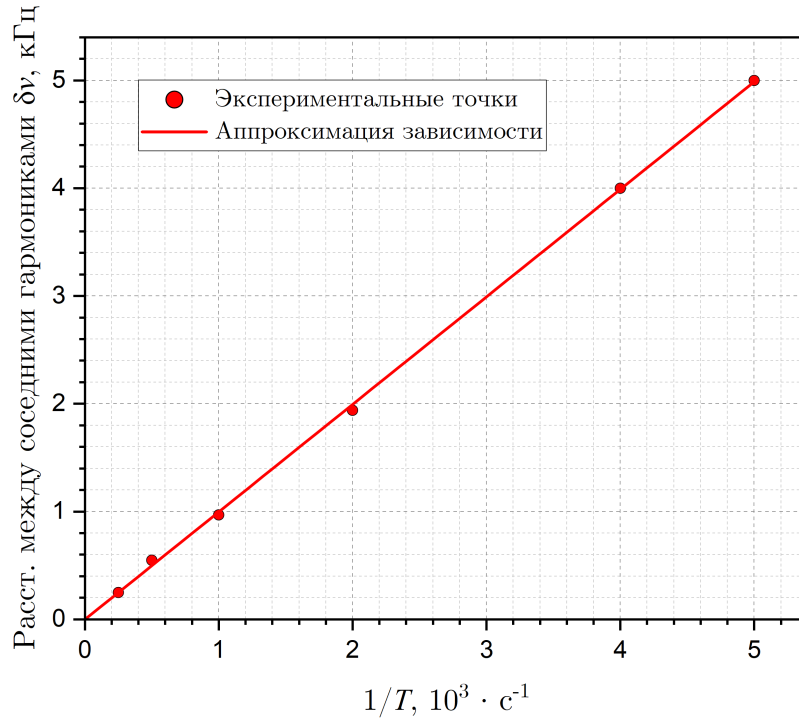


Рис. 9: График зависимости расстояния между соседними гармониками $\delta\nu$ от $1/T$

Аппроксимируя полученные данные при помощи программы *OriginPro 2023b*, получим

$$\delta\nu \cdot T = 0,997 \pm 0,005,$$

что согласуется с соотношением неопределённости (см. пункт 2.4).

4.3 Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

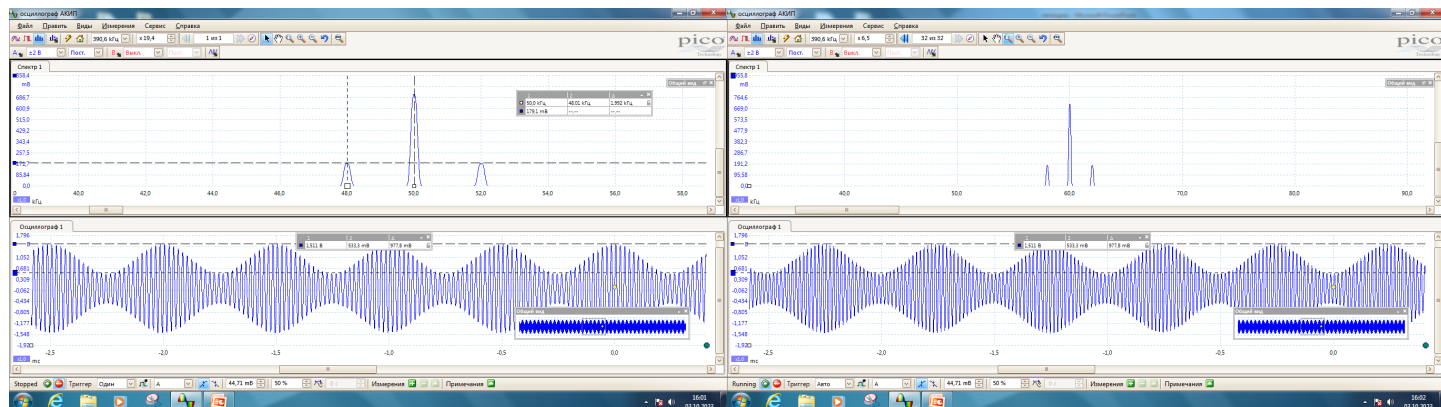
Установив на генераторе режим *модулированного по амплитуде* синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц и глубиной модуляции 50% ($m = 0,5$), получили на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

Измерим максимальную A_{max} и минимальную A_{min} амплитуды сигнала, чтобы вычислить значение m , получим

$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}} = \frac{1,504 \text{ В} - 0,499 \text{ В}}{1,504 \text{ В} + 0,499 \text{ В}} \approx 0,5.$$

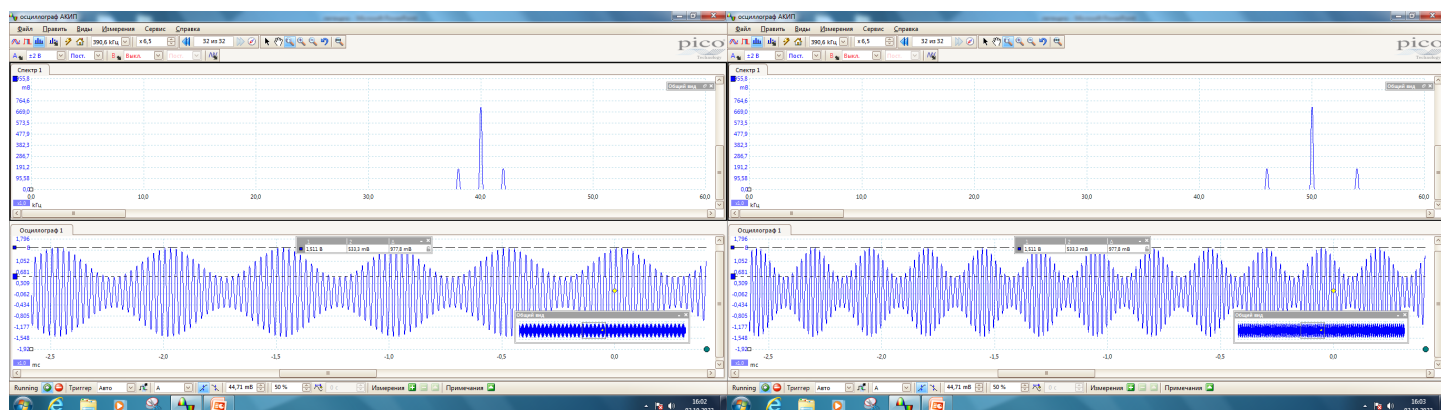
Полученное значение эквивалентно тому, что установлено на генераторе.

Изменяя на генераторе несущую частоту ν_0 и частоту модуляции $\nu_{\text{мод}}$, зафиксировали, как изменялось положение спектральных линий (рис. 10).



(а) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц

(б) $\nu_0 = 60$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц



(с) $\nu_0 = 40$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц

(д) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 4$ кГц

Рис. 10: Изменение спектральных линий при варьировании параметров

Изменяя на генераторе глубину модуляции m , измерим отношение амплитуд боковой $a_{\text{бок}}$ и основной $a_{\text{осн}}$ спектральных линий. Полученные результаты приведены в таблице 5.

$m, \%$	$a_{\text{бок}}, \text{В}$	$a_{\text{осн}}, \text{В}$	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$
10	37,2	712,7	0,0522
20	70,2		0,0986
30	105,4		0,1479
40	142,5		0,1999
50	177,7		0,2493
60	212,8		0,2986
70	250,0		0,3508
80	285,1		0,4000
90	320,2		0,4493
100	356,4		0,5001

Таблица 5: Результаты измерения зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

По этим данным построим график зависимости отношения амплитуд $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от глубины модуляции m (рис. 11).

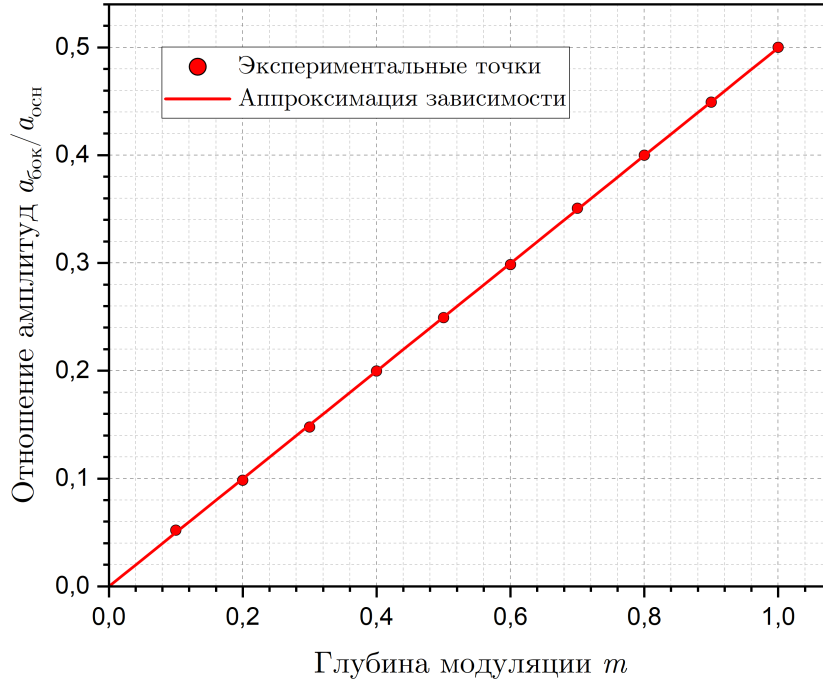


Рис. 11: График зависимости $a_{бок}/a_{осн}$ от m

Аппроксимируя полученные данные при помощи программы *OriginPro 2023b*, получим, что коэффициент наклона графика равен

$$k_{exp} = (0,4995 \pm 0,0006).$$

Полученное значение k_{exp} эквивалентно теоретическому $k_{theor} = 0,5$ в пределах погрешности.

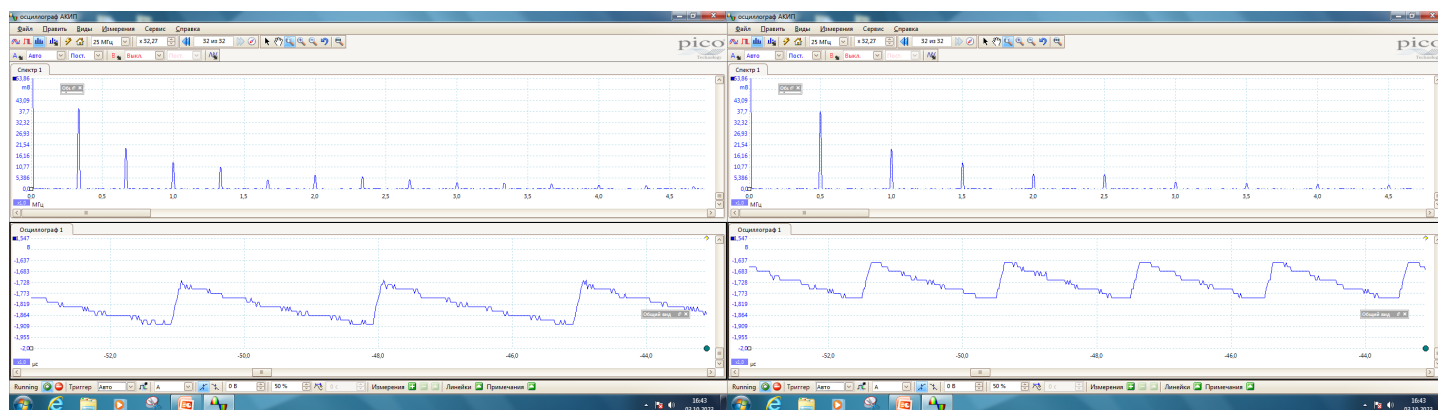
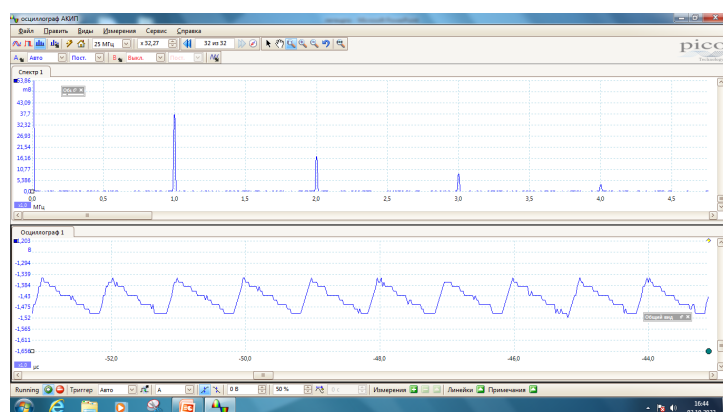
4.4 Изучение фильтрации сигналов

Собрав схему с RC -фильтром низких частот с сопротивлением $R = 3$ кОм и ёмкостью $C = 10^{-9}$ Ф ($\tau_{RC} = 3 \cdot 10^{-6}$ с, $\nu_{RC} = 333$ кГц), наблюдали форму сигнала и его спектр при различных значениях периода повторения T (рис. 12).

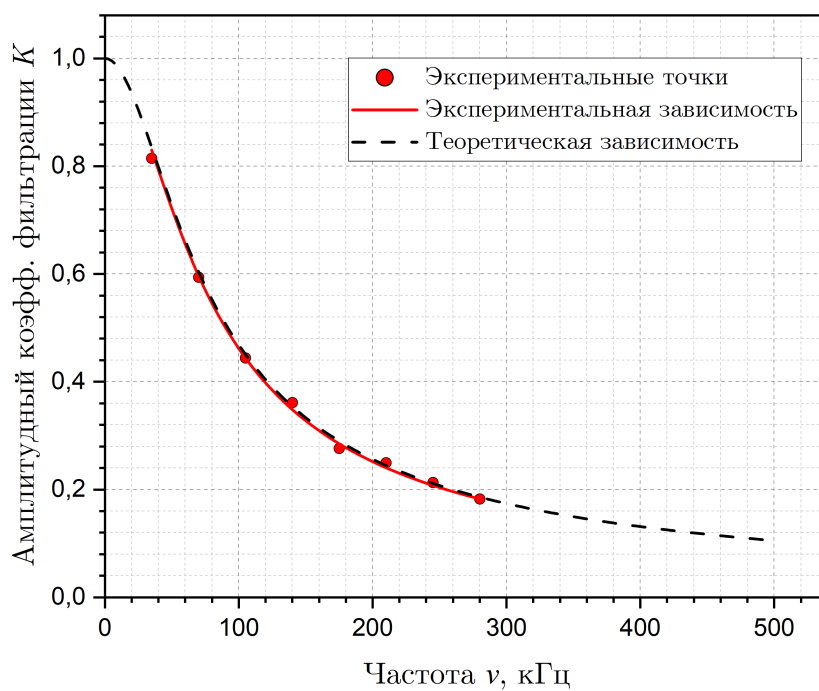
Далее, при некотором фиксированном периоде T провели измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов: $K_n = |a_n^\phi|/|a_n^0|$. Результаты приведены в таблице 6.

n	ν_0 , кГц	ν , кГц	$ a_n^\phi $, мВ	$ a_n^0 $, мВ	$K_n = a_n^\phi / a_n^0 $
1	35	35	233	286	0,8147
2		70	164	276	0,5942
3		105	120	270	0,4444
4		140	94	260	0,3615
5		175	70	253	0,2767
6		210	60	240	0,2500
7		245	48	225	0,2133
8		280	38	208	0,1827

Таблица 6: Результаты измерения зависимости $|a_n^\phi|/|a_n^0|$ от ν

(a) $T = 3$ мкс, $\tau = 0,15$ мкс(b) $T = 2$ мкс, $\tau = 0,15$ мкс(c) $T = 1$ мкс, $\tau = 0,15$ мксРис. 12: Изменение спектра RC -цепочки при варьировании T

По данным таблицы 6 построим график зависимости $K(\nu)$ (рис. 13).

Рис. 13: График зависимости амплитудного коэффициента фильтрации K от частоты $\nu = n\nu_0$

Аппроксимируя полученные данные зависимостью вида $K(\nu) = 1/\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 \nu^2}$ при помощи программы *OriginPro 2023b*, получим, что

$$4\pi^2 R^2 C^2 = (3,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ с}^2 \Rightarrow \tau_{RC}^{exp} = (3,05 \pm 0,05) \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Полученное значение τ_{RC}^{exp} совпадает с $\tau_{RC}^{theor} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ в пределах погрешности.

5 Заключение

В данной работе были изучены спектры периодических электрических сигналов.

В первой части работы было проверено и экспериментально подтверждено соотношение неопределённостей $\Delta\nu \cdot \tau = 1$ для прямоугольных импульсов.

Во второй части работы были исследованы спектры цугов гармонических колебаний, экспериментально подтверждён тот факт, что при стремлении частоты повторения цугов к нулю спектр переходит в непрерывный.

В последней части работы были исследованы спектры гармонических сигналов, модулированных по амплитуде. Экспериментально подтверждено соотношение $\frac{a_{бок}}{a_{осн}} = \frac{m}{2}$.

Результаты оценки погрешностей говорят о хорошей точности использованных методов и корректном проведении эксперимента.