

Einführung in L^AT_EX

Daniel Renschler

17. Juli 2023

1 LaTeX?

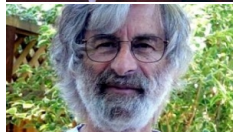
2 Beispiele

3 Syntax & etc.

4 Anderes

Was ist L^AT_EX?

- Knuth hat T_EXgemacht
- Lamport hat dann L^AT_EXdaraus gemacht



Warum L^AT_EX?

- Ist sehr intuitiv.
- Unendlich extensiv mit packages.
- Kümmert sich um viel von alleine
- Man muss sich nicht mit Typografie und Vergleichbarem vertraut machen¹.
- Macht spaß

¹Es funktioniert einfach und sieht gut aus.

Warum nicht Word? (oder andere WYSIWYG² software)

- Word macht es schwerer Änderungen an großen Dokumenten vorzunehmen.
- Bibliografien werden nicht automatisch gemacht, auch Zitierstil nachträglich änderbar.
- Seitenzahlen, Referenzen, etc. werden nicht automatisch erzeugt.
- *kann man nicht in Vim benutzen.*

²WYSIWYG = What you see is what you get

Nutzzwecke

- Ausarbeitungen/Laborberichte
- Präsentationen
- Dokumente
- Lebenslauf
- Bücher

Berichte

■ Laborberichte

Das Gravitationsgesetz
André Kimmel, David Renschler
13. Juni 2021

Fragestellung

Berechnen Sie, dass die Gravitation g auf der Erde ist.

$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$

Berechnen Sie, dass die Gravitation g auf der Erde ist. G ist die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde.

Versuch 1

Abbildung 1: Messung der Gravitationskonstante G mit dem Cavendish-Experiment.

Durchführung

- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.
- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.
- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.

Auswertung

- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Abbildung 1: Messung der Gravitationskonstante G mit dem Cavendish-Experiment.

Wie erhalten

$m_1 = F_G$

Versuch 2

Durchführung

Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Auswertung

- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Versuch 3

Abbildung 3: Messung der Gravitationskonstante G mit dem Cavendish-Experiment.

Durchführung

- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.
- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.
- Ein Pendel aus einem dünnen Draht wird an einem Punkt befestigt.

Auswertung

- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Abbildung 3: Messung der Gravitationskonstante G mit dem Cavendish-Experiment.

Wie erhalten

$m_1 = F_G$

Versuch 4

Durchführung

Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Auswertung

- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante G aus den Messungen.

Abbildung 4: Messung der Gravitationskonstante G mit dem Cavendish-Experiment.

Wie erhalten

$m_1 = F_G$

Abbildung: Laborprotokoll Gravitationsgesetz

Paper



Figure 1.3: Example of a Morse function on the torus. At each critical point, the index is the number of downward directions indicated.



Figure 1.4: Two Morse functions on S^2 with a different number of critical points.



Figure 1.5: An example of an embedding where the height function is not Morse.



Figure 1.6: An example of a function that is not Morse. $f(x,y,z) = x + x^2$. Small perturbations of f are Morse.

CHAPTER 1. MORSE THEORY

Intuitively, the index of a critical point p is “the number of downward directions”. Let us give some examples of Morse functions.

Example 1.3. Let M be the torus T^2 embedded in \mathbb{R}^3 as illustrated in Figure 1.3. Then the height function $h: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ which is the projection on the z -axis is a Morse function with four critical points. We have a minimum, two saddle points and a maximum, whose indices are 0, 1, 1, 2 respectively.

Example 1.4. In Figure 1.2, we have illustrated two embeddings of S^2 in \mathbb{R}^3 , and considering the corresponding height functions, we get the Morse functions $f^1, f^2: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. The first one has only two critical points: a maximum and a minimum. The second one has two maxima, a saddle point and a minimum. Later on we will prove that any manifold admitting a Morse function with only two critical points is homeomorphic to the sphere.

Nonexample 1.5. Let $M = \mathbb{R}^2$ and $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2$. Then all points (x,y) with $x = 0$ are critical points of this function. In particular, $(0,0)$ is a critical point. As it is impossible to find local coordinates (u,v) for which f can be written as $u^2 + v^2$, we conclude that f is not Morse. For $t < 0$, f has two critical points: one of index 1 and one of index 0. If $t > 0$, f has no critical points.

Note that this last case where f has no critical points cannot happen if M is compact. Indeed, any function attains its maximum and minimum on a compact manifold, so we have at least two critical points. On the other hand, the number of critical points is at most finite. This is because of the definition of a Morse function. It implies that critical points are isolated, which on a compact manifold implies that there are only a finite number of them. This also immediately rules out the situation we had in the other example, where the set of critical points was a straight line.

1.2 Coordinate-free definition

The attentive reader will have noticed that the notion of the index of a critical point could possibly be coordinate dependent and hence ill-defined. In order to show that it is not, we will give an equivalent coordinate-free definition. For this, let us first define the Hessian.

Definition 1.7 (Hessian). Let M be a manifold and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a function. Let p be a critical point of f . Then we define the Hessian H_p to be the bilinear form

$$H_p(T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \\ (X,Y) \mapsto X(\nabla Y)f|_p,$$

where ∇ is a local extension of f around p .

1.2. COORDINATE-FREE DEFINITION

Because we are only considering the Hessian H_p at critical points, this is a well defined symmetric bilinear form.¹² In case of a Morse function given locally by $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, the Hessian at p is

$$H_p = 2x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + 2x_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + \dots + 2x_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}.$$

where $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Note in particular that H_p is non-degenerate and its signature is $(\underbrace{1, \dots, 1}_n) = (n, 0 = 0)$, as we have n positive eigenvalues and $n = 0$ negative eigenvalues. As the signature of a symmetric bilinear form is coordinate independent, this shows that the index of a critical point is as well.

Interestingly, the converse is also true: if H_p is non-degenerate for all critical points p of f , then f is a Morse function. Many authors take this to be the definition of a Morse function, and then prove the so-called Morse lemma stating that there always exist local coordinates such that f is given by

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

which is our definition of a Morse function. With our choice, the Morse lemma takes on the following form:

Lemma 1.8 (Morse Lemma). Let M be a manifold and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function. If for all $p \in \text{Crit } f$, the Hessian H_p is non-degenerate, then f is Morse.

Proof. We follow the proof of Milnor¹³. We may assume that $M = \mathbb{R}^n$, p is the origin and $f(p) = 0$. Then by a version of Taylor’s theorem, we can write

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) + \dots$$

where g are smooth functions. Now, as $g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, we can put this for each g , giving us the following

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$$

Because the sum is symmetric in i and j , we may assume that h_{ij} is symmetric as well.¹⁴ Note that

$$h_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0),$$

which is non-degenerate by assumption.

Now we restrict the proof of diagonalization of a non-degenerate quadratic form. We do this by induction. Suppose we have coordinates u_1, \dots, u_{k-1} a neighborhood of 0 such that

$$f = \sum_{i=1}^{k-1} u_i^2 + \dots + u_{k-1}^2 + \sum_{i,j=k}^n u_i u_j h_{ij}(u).$$

¹² The difference between $H_p(X,Y)$ and $H_p(Y,X)$ is given by $H_p(X,Y) - H_p(Y,X) = X(Yf) - Y(Xf) = [X,Y]f = 0$.

The value of H_p also does not depend on the choice of the coordinate system. Indeed, suppose f and \tilde{f} are two different extensions of f . Then by symmetry $H_p = \tilde{H}_p$ as well.

$X(Yf) = Y(Xf) = X(Y\tilde{f})$. This also shows linearity of the second argument.

¹³ John Milnor, *Morse Theory* (AMS-50), Vol. XI, Princeton university press, 2010, p. 6.

¹⁴ If h_{ij} is not symmetric, we can replace it by $h_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. Then h_{ij} is symmetric and we still have $\sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ji}(x)$.

Abbildung: Auszug einer Masterarbeit über Morse Theory

Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

- Analysis Aufgabe:

$$\lim_{x \rightarrow \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)} \right)'' \right).$$

Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Physik Beispiel

Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases.[2]

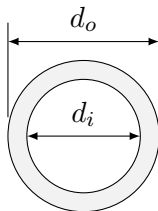
$$\frac{1}{|G|} \sum_g X_i^g \rightarrow \sum_h T_{i-1}^h T_i^h, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_g X_1^g \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{h,h'} e^{-\frac{2\pi i}{|G|}(h'-h)g} T_1^h T_N^{h'} \prod_{i=1}^N X_i^g,$$

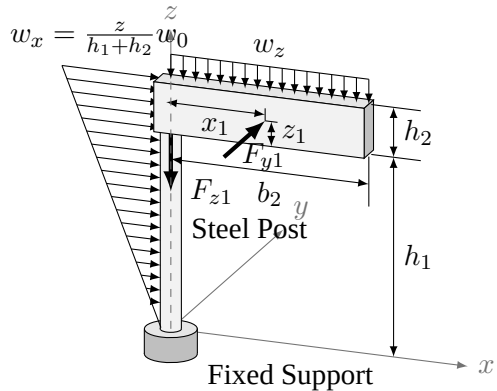
$$\sum_h T_i^h T_{i+1}^h \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_g X_i^g, i = 2, \dots, N$$

$$\sum_h T_1^h T_2^h \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_g X_1^g \prod_{i=1}^N X_i^g.$$

Abbildungen



Signpost Cross Section



Syntax

- Commands beginnen mit `\`, nicht zu verwechseln mit `/`
- Umgebungen (environments) beginnen und enden immer gleich, man kann/muss nesten.

Documentclasses

Gibt viele, die wichtigsten sind:

- `article`: “normale Klasse” Titel ist auf erster Seite
- `report`: Titel hat eigene Seitenzahlen
- `beamer`: Für Präsentationen (diese z.B.)
- Andere sind: `book`, `letter`, etc.

Sections

Es gibt verschiedene an Sections.

- section
- subsection
- subsubsection

Diese werden dann z.B. in Inhaltsverzeichnissen angezeigt und sich untergeordnet.

- Section
 - subsection
 - subsubsection

Wie man es benutzt

- Arch-basiert: `pacman -S texlive-basic`
- Debian-basiert: `apt-get install texlive-full`
- MacOS: MiKTeX
- Windows: MacTeX

Wie Ich es benutze

1 2 3 4 5 6 7 8 9 Desktop | br:45 Stats-1 | End in 2:02 hours, after this Calculus 1 after a break of 45 min / 43% | v 40% | 100% | 100% | 17-06 09:14

32 CHAPTER 5. DISCRETE PROBABILITIES

5.2 Histogram from Probability Distribution.

Horizontal	Values of random variable
Vertical	Probability
Example	
Weighted die	
x	$P(x)$
1	.05
2	.15
3	.35
4	.30
5	.10
6	.05

Notice

$$0 \leq P(x) \leq 1.$$

$$\sum P(x) = 1.$$

Figure 5.1: Prob. distribution of the weighted die

5.2.1 Mean, Variance, Standard Deviation

Mean:

$$\mu = \frac{\sum (x \cdot f)}{N}$$

$$\mu = \sum \left[x \cdot \frac{f}{N} \right]$$

$$\mu = \sum [x \cdot P(x)] \leftarrow \text{mean, expected value}$$

```

31 Values are unusual if they lie outside of:
32 \begin{itemize}
33   \item $\mu + 2\sigma$
34   \item $\mu - 2\sigma$
35 \end{itemize}
36
37 \begin{figure}[ht]
38   \centering
39   \includegraphics[width=0.6\textwidth]{lec_05_01}
40   \caption{Prob. distribution of the weighted die}
41   \label{fig:05-01}
42 \end{figure}
43
44 Here we took the dice example, and 1.08 as 5.72 mark our range of $\pm 2$
45 standard deviations, whatever's outside is considered unusual. So we get 1 \&
46 to be unusual.
47
48 If $P(A) \leq .05$ ``A'' is considered unusual.
49
50 \text{Flip a coin 1000 times} \{
51   P(\text{exactly 501 heads})=0.0252 \leq .05 \implies \text{unusual}
52 \}
53
54 \{
55   P(\text{501 or more heads})=0.487 \implies \text{usual}
56 \}
57
58 \}
59
60

```

notes/jl/statistics-1/lec_05.tex 179, 0-1 Bot

Weitere Ressourcen

- L^AT_EX Tutorials, von Luke Smith
- Overleaf Tutorials
- “The T_EXbook”, von Donald E. Knuth

Literatur

- [1] Marcin Baranek u. a. *On the randomized Euler algorithm under inexact information*. 2023. [arXiv: 2307.04718 \[math.NA\]](#).
- [2] Xie Chen u. a. *Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases*. 2023. [arXiv: 2307.01267 \[cond-mat.str-el\]](#).