

Einführung in L^AT_EX

Daniel Renschler

18. Juli 2023

- 1 L^AT_EX?
- 2 Beispiele
- 3 Beispiele
- 4 Anderes

Geschichte

- Donald Knuth hat 1977-1986 T_EXgemacht, da er die typografische Qualität seiner Bücher nicht gut fand. (The Art of Computer Programming)



Was ist L^AT_EX?

- Textsatzsystem.
- Ermöglicht Erstellen von Dokumenten.
- Beliebt im Akademischen Bereich/Wissenschaft.
- Erstellt hochwertige PDF Ausgabe.

Warum L^AT_EX?

- Ist sehr intuitiv.
- Sehr extensiv mit packages.
- Kümmert sich um viel von alleine
- Man muss sich nicht mit Typografie und Vergleichbarem vertraut machen¹.
- Macht Spaß

¹Es funktioniert einfach und sieht gut aus.

Warum nicht Word? (oder andere WYSIWYG² software)

- Word macht es schwerer Änderungen an großen Dokumenten vorzunehmen.
- Bibliografien werden nicht automatisch gemacht, auch Zitierstil nachträglich änderbar.
- Seitenzahlen, Referenzen, etc. werden nicht automatisch erzeugt.
- *kann man nicht in Vim benutzen.*

²WYSIWYG = What you see is what you get

Nutzzwecke

- Ausarbeitungen/Laborberichte
- Präsentationen
- Dokumente
- Lebenslauf
- Bücher

■ Laborberichte

Abbildung: Laborprotokoll Gravitationsgesetz

Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

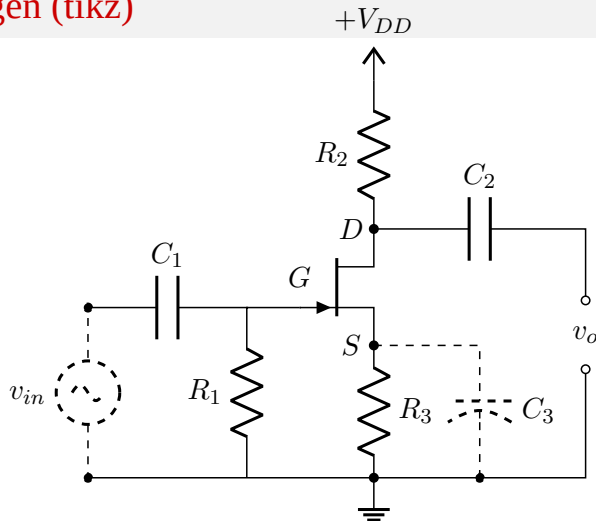
- Analysis Aufgabe:

$$\lim_{x \rightarrow \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)} \right)'' \right).$$

Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Abbildungen (tikz)



Berichte

■ Laborberichte

Das Gravitationsgesetz
Ando Kinnel, David Renschler
13. Juni 2021

Fragestellung

Begründe Sie, dass die Gravitation g unabhängig von der Masse ist.

$g = G \frac{M}{R^2}$

Berechnen Sie den Wert von g an der Oberfläche der Erde. Achten Sie auf Einheiten! Geben Sie g in der Einheit m/s^2 an.

Versuch 1

Abbildung 1: Messung der Fallzeit t für verschiedene Höhen h .

Durchführung

1. Halten Sie das Messgerät h über dem Boden. Lassen Sie es fallen und messen Sie die Zeit t bis es auf dem Boden aufschlägt.

2. Wiederholen Sie das Experiment für verschiedene Höhen h . Notieren Sie die Werte von h und t .

Auswertung

- Berechnen Sie die Fallzeit t für verschiedene Höhen h .
- Zeichnen Sie die Fallzeit t gegen die Höhe h in ein Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie die Steigung k der Fallzeit t gegen die Höhe h .
- Bestimmen Sie die Fallzeit t für $h = 0$.

Ergebnisse

h [m]	t [s]
0.1	0.14
0.2	0.20
0.3	0.25
0.4	0.29
0.5	0.33
0.6	0.37
0.7	0.41
0.8	0.45
0.9	0.49
1.0	0.53

Abbildung 1: Fallzeit t gegen die Höhe h .

Die Fallzeit t nimmt mit der Höhe h zu. Die Steigung k ist positiv.

Versuch 2

Durchführung

1. Halten Sie das Messgerät h über dem Boden. Lassen Sie es fallen und messen Sie die Zeit t bis es auf dem Boden aufschlägt.

2. Wiederholen Sie das Experiment für verschiedene Höhen h . Notieren Sie die Werte von h und t .

Auswertung

- Berechnen Sie die Fallzeit t für verschiedene Höhen h .
- Zeichnen Sie die Fallzeit t gegen die Höhe h in ein Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie die Steigung k der Fallzeit t gegen die Höhe h .
- Bestimmen Sie die Fallzeit t für $h = 0$.

Ergebnisse

h [m]	t [s]
0.1	0.14
0.2	0.20
0.3	0.25
0.4	0.29
0.5	0.33
0.6	0.37
0.7	0.41
0.8	0.45
0.9	0.49
1.0	0.53

Abbildung 2: Fallzeit t gegen die Höhe h .

Die Fallzeit t nimmt mit der Höhe h zu. Die Steigung k ist positiv.

Versuch 3

Durchführung

1. Halten Sie das Messgerät h über dem Boden. Lassen Sie es fallen und messen Sie die Zeit t bis es auf dem Boden aufschlägt.

2. Wiederholen Sie das Experiment für verschiedene Höhen h . Notieren Sie die Werte von h und t .

Auswertung

- Berechnen Sie die Fallzeit t für verschiedene Höhen h .
- Zeichnen Sie die Fallzeit t gegen die Höhe h in ein Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie die Steigung k der Fallzeit t gegen die Höhe h .
- Bestimmen Sie die Fallzeit t für $h = 0$.

Ergebnisse

h [m]	t [s]
0.1	0.14
0.2	0.20
0.3	0.25
0.4	0.29
0.5	0.33
0.6	0.37
0.7	0.41
0.8	0.45
0.9	0.49
1.0	0.53

Abbildung 3: Fallzeit t gegen die Höhe h .

Die Fallzeit t nimmt mit der Höhe h zu. Die Steigung k ist positiv.

Abbildung 3: Laborprotokoll Gravitationsgesetz

Paper



Figure 1.3: Examples of Morse functions on the torus. h_0 has four critical points, the index i of the number of downward directions is indicated.



Figure 1.4: Two Morse functions on S^2 with a different number of critical points.



Figure 1.5: An example of an embedding where the height function is not Morse.



Figure 1.6: An example of a function that is not Morse. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Small perturbations of f are Morse.

CHAPTER 1. MORSE THEORY

Intuitively, the index of a critical point p is “the number of downward directions”. Let us give some examples of Morse functions.

Example 1.3. Let M be the torus T^2 embedded in \mathbb{R}^3 as illustrated in Figure 1.3. Then the height function $h: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ which is the projection on the z -axis is a Morse function with four critical points. We have a minimum, two saddle points and a maximum, whose indices are 0, 1, 1, 2 respectively.

Example 1.4. In Figure 1.2, we have illustrated two embeddings of S^2 in \mathbb{R}^3 , and considering the corresponding height functions, we get two Morse functions $S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. The first one has only two critical points: a maximum and a minimum. The second one has two maxima, a saddle point and a minimum. Later on we will prove that any manifold admitting a Morse function with only two critical points is homeomorphic to the sphere.

Nonexample 1.5. Let $M = \mathbb{R}^2$ and $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2$. Then all points (x, y) for $x = 0$ are critical points of this function. In particular, $(0, 0)$ is a critical point. As it is impossible to find local coordinates (u, v) for which f can be written as $u^2 + v^2$, we conclude that f is not Morse. For $f(x, y) = x^2 + y^2$, we conclude that f is not Morse. For $f(x, y) = x^2 + y^2$, we conclude that f is not Morse. For $f(x, y) = x^2 + y^2$, we conclude that f is not Morse.

Note that this last case where f has no critical points cannot happen if M is compact. Indeed, any function attains its maximum and minimum on a compact manifold, so we have at least two critical points. On the other hand, the number of critical points is at most finite. This is because of the definition of a Morse function. It implies that critical points are isolated, which on a compact manifold implies that there are only a finite number of them. This also immediately rules out the situation we had in the other example, where the set of critical points was a straight line.

1.2 Coordinate-free definition

The attentive reader will have noticed that the notion of the index of a critical point could possibly be coordinate dependent and hence ill-defined. In order to show that is not, we will give an equivalent coordinate-free definition. For this, let us first define the Hessian.

Definition 1.7 (Hessian). Let M be a manifold and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a function. Let p be a critical point of f . Then we define the Hessian H_p to be the bilinear form

$$H_p(T_p M, T_p M) \rightarrow \mathbb{R}, \\ (X, Y) \mapsto X(Yf)|_p,$$

where ∇_p is a local extension of p around p .

1.2. COORDINATE-FREE DEFINITION

Because we are only considering the Hessian H_p at critical points, this is a well defined symmetric bilinear form.¹² In case of a Morse function given locally by $f(x) = f(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2$, the Hessian at p is

$$H_p = 2x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \dots - 2x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + \dots + 2x_{k+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k+1}^2} - \dots + 2x_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

where $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Note in particular that H_p is non-degenerate and its signature is $(k, n-k) = (n, n-k)$, as we have k positive eigenvalues and $n-k$ negative eigenvalues. As the signature of a symmetric bilinear form is coordinate independent, this shows that the index of a critical point is as well.

Interestingly, the converse is also true: if H_p is non-degenerate for all critical points p of f , then f is a Morse function. Many authors take this to be the definition of a Morse function, and then prove the so-called Morse lemma stating that there always exist local coordinates such that f is given by

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

which is our definition of a Morse function. With our choice, the Morse lemma takes on the following form:

Lemma 1.8 (Morse Lemma). Let M be a manifold and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function. If for all $p \in \text{Crit } f$, the Hessian H_p is non-degenerate, then f is Morse.

Proof. We follow the proof of Milnor¹³. We may assume that $M = \mathbb{R}^n$, p is the origin and $f(p) = 0$. Then by a version of Taylor’s theorem, we can write

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j + \dots$$

where g are smooth functions. Now, as $g(x) = \partial f / \partial x_i(p) = 0$, we can put this for each g , giving us the following

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j + \dots$$

Because the sum is symmetric in i and j , we may assume that H_p is symmetric as well.¹⁴ Note that

$$H_p(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j,$$

which is non-degenerate by assumption.

Now we obtain the proof of diagonalization of a non-degenerate quadratic form. We do this by induction. Suppose we have coordinates u_1, \dots, u_{k-1} a neighborhood of 0 such that

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 + \sum_{i,j=k}^n a_{ij} u_i u_j,$$

¹² The difference between $H_p(X, Y)$ and $H_p(Y, X)$ is given by $H_p(X, Y) - H_p(Y, X) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = 0$.

The value of H_p also does not depend on the choice of the coordinate system. Indeed, suppose f and \tilde{f} are two different versions of f . Then by symmetry of H_p , we have

$$X(Y\tilde{f}) = Y(X\tilde{f}) = X(Yf).$$

This also shows linearity of the second argument.

¹³ John Milnor, *Morse Theory* (AMS-55), Vol. 16, Princeton University press, 1968, p. 6.

¹⁴ If A_{ij} is not symmetric, we can replace it by $A_{ij} + A_{ji} = 2A_{(ij)}$. Then A_{ij} is symmetric and we still have $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n A_{(ij)} x_i x_j$.

Abbildung: Auszug einer Masterarbeit über Morse Theory

Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

- Analysis Aufgabe:

$$\lim_{x \rightarrow \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)} \right)'' \right).$$

Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Physik Beispiel

Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases.[2]

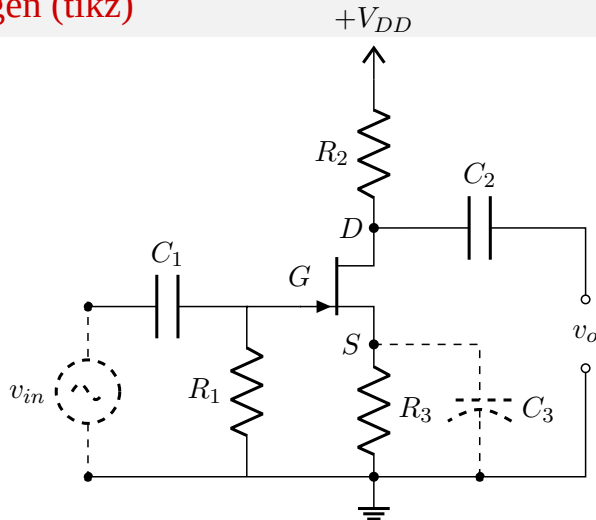
$$\frac{1}{|G|} \sum_g X_i^g \rightarrow \sum_h T_{i-1}^h T_i^h, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_g X_1^g \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{h,h'} e^{-\frac{2\pi i}{|G|}(h'-h)g} T_1^h T_N^{h'} \prod_{i=1}^N X_i^g,$$

$$\sum_h T_i^h T_{i+1}^h \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_g X_i^g, \quad i = 2, \dots, N$$

$$\sum_h T_1^h T_2^h \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_g X_1^g \prod_{i=1}^N X_i^g.$$

Abbildungen (tikz)



Wie man es benutzt

- Arch-basiert: `pacman -S texlive-basic`
- Debian-basiert: `apt-get install texlive-full`
- MacOS: MacTeX
- Windows: MiKTeX
- Online: Overleaf

Weitere Ressourcen

- diese Präsentation:
<https://github.com/d-rems/LaTeX-Einfuehrung/>
- L^AT_EX Tutorials, von Luke Smith
- Overleaf Tutorials
- “The T_EXbook”, von Donald E. Knuth

Literatur

- [1] Marcin Baranek u. a. *On the randomized Euler algorithm under inexact information*. 2023. [arXiv: 2307.04718 \[math.NA\]](#).
- [2] Xie Chen u. a. *Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases*. 2023. [arXiv: 2307.01267 \[cond-mat.str-el\]](#).