

# Einführung in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Daniel Renschler

17. Juli 2023



# Geschichte

- Donald Knuth hat 1977-1986 T<sub>E</sub>Xgemacht, da er die typografische Qualität seiner Bücher nicht gut fand. (The Art of Computer Programming)



# Was ist L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X?

- Textsatzsystem.
- Ermöglicht Erstellen von Dokumenten.
- Beliebt im Akademischen Bereich/Wissenschaft.
- Erstellt hochwertige PDF Ausgabe.

# Warum L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X?

- Ist sehr intuitiv.
- Sehr extensiv mit packages.
- Kümmert sich um viel von alleine
- Man muss sich nicht mit Typografie und Vergleichbarem vertraut machen<sup>1</sup>.
- Macht spaß

---

<sup>1</sup>Es funktioniert einfach und sieht gut aus.

# Warum nicht Word? (oder andere WYSIWYG<sup>2</sup> software)

- Word macht es schwerer Änderungen an großen Dokumenten vorzunehmen.
- Bibliografien werden nicht automatisch gemacht, auch Zitierstil nachträglich änderbar.
- Seitenzahlen, Referenzen, etc. werden nicht automatisch erzeugt.
- *kann man nicht in Vim benutzen.*

---

<sup>2</sup>WYSIWYG = What you see is what you get

# Nutzzwecke

- Ausarbeitungen/Laborberichte
- Präsentationen
- Dokumente
- Lebenslauf
- Bücher

# Berichte

## ■ Laborberichte

Das Gravitationsgesetz  
Ando Kinnel, David Renschler  
13. Juni 2021

**Fragestellung**

Berechnen Sie, dass die Gravitation  $g$  auf der Erde ist.

$g = G \frac{M}{R^2}$

Berechnen Sie, dass die Gravitation  $g$  auf der Erde ist. Die Masse der Erde ist  $M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und der Radius der Erde ist  $R = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

**Versuch 1**

Abbildung 1: Messung der Gravitationskonstante  $G$  mit der Federwaage.

**Durchführung**

Bestimmen Sie die Masse  $m$  der Federwaage mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Federkonstante  $k$  mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Gravitationskonstante  $G$  mit dem Federstempel und dem Federstempel.

$m$ in kg	$F_G$ in N
0.01	0.098
0.02	0.196
0.03	0.294
0.04	0.392
0.05	0.490
0.06	0.588
0.07	0.686
0.08	0.784
0.09	0.882
0.10	0.980
0.11	1.078
0.12	1.176
0.13	1.274
0.14	1.372
0.15	1.470
0.16	1.568
0.17	1.666
0.18	1.764
0.19	1.862
0.20	1.960

**Ergebnisse**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Auswertung**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Abbildung 1**

Abbildung 1: Messung der Gravitationskonstante  $G$  mit der Federwaage.

Versuch 2

**Durchführung**

Bestimmen Sie die Masse  $m$  der Federwaage mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Federkonstante  $k$  mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Gravitationskonstante  $G$  mit dem Federstempel und dem Federstempel.

$m$ in kg	$F_G$ in N
0.01	0.098
0.02	0.196
0.03	0.294
0.04	0.392
0.05	0.490
0.06	0.588
0.07	0.686
0.08	0.784
0.09	0.882
0.10	0.980
0.11	1.078
0.12	1.176
0.13	1.274
0.14	1.372
0.15	1.470
0.16	1.568
0.17	1.666
0.18	1.764
0.19	1.862
0.20	1.960

**Ergebnisse**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Auswertung**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Abbildung 2**

Abbildung 2: Messung der Gravitationskonstante  $G$  mit der Federwaage.

Versuch 3

**Durchführung**

Bestimmen Sie die Masse  $m$  der Federwaage mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Federkonstante  $k$  mit dem Federstempel und dem Federstempel. Berechnen Sie die Gravitationskonstante  $G$  mit dem Federstempel und dem Federstempel.

$m$ in kg	$F_G$ in N
0.01	0.098
0.02	0.196
0.03	0.294
0.04	0.392
0.05	0.490
0.06	0.588
0.07	0.686
0.08	0.784
0.09	0.882
0.10	0.980
0.11	1.078
0.12	1.176
0.13	1.274
0.14	1.372
0.15	1.470
0.16	1.568
0.17	1.666
0.18	1.764
0.19	1.862
0.20	1.960

**Ergebnisse**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Auswertung**

Die Federkonstante  $k$  beträgt  $9.8 \text{ N/m}$ . Die Gravitationskonstante  $G$  beträgt  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

**Abbildung 3**

Abbildung 3: Messung der Gravitationskonstante  $G$  mit der Federwaage.

# Abbildung: Laborprotokoll Gravitationsgesetz



# Paper



Figure 1.3: Examples of Morse functions on the torus. (a) has two critical points, the index 1, the number of downward directions is indicated.



Figure 1.4: Two Morse functions on  $S^2$  with a different number of critical points.



Figure 1.5: An example of an embedding where the height function is not Morse.



Figure 1.6: An example of a function that is not Morse.  $f(x, y) = x + y^2$ . Small perturbations of  $f$  are Morse.

## CHAPTER 1. MORSE THEORY

Intuitively, the index of a critical point  $p$  is “the number of downward directions”. Let us give some examples of Morse functions.

**Example 1.3.** Let  $M$  be the torus  $T^2$  embedded in  $\mathbb{R}^3$  as illustrated in Figure 1.3. Then the height function  $h: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  which is the projection on the  $z$ -axis is a Morse function with four critical points. We have a minimum, two saddle points and a maximum, whose indices are 0, 1, 1, 2 respectively.

**Example 1.4.** In Figure 1.2, we have illustrated two embeddings of  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$ , and considering the corresponding height functions, we get the Morse functions  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . The first one has only two critical points: a maximum and a minimum. The second one has two maxima, a saddle point and a minimum. Later on we will prove that any manifold admitting a Morse function with only two critical points is homeomorphic to the sphere.

**Nonexample 1.5.** Let  $M = \mathbb{R}^2$  and  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2$ . Then all points  $(x, y)$  for  $y \in \mathbb{R}$  are critical points of this function. In particular,  $(0, 0)$  is a critical point. As it is impossible to find local coordinates  $(u, v)$  for which  $f$  can be written as  $u^2 + v^2$ , we conclude that  $f$  is not Morse.

**Nonexample 1.6.** Let  $M = \mathbb{R}$  and  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Then  $x = 0$  is a critical point, but  $f$  is not Morse. Note however that if we add a small perturbation to  $f$ , say  $g(x) = x^3 + x$ , then  $g$  is a Morse function.

For  $t < 0$ ,  $g$  has two critical points: one of index 1 and one of index 0. If  $t > 0$ ,  $g$  has no critical points.

## 1.2 Coordinate-free definition

The attentive reader will have noticed that the notion of the index of a critical point could possibly be coordinate dependent and hence ill-defined. In order to show that it is not, we will give an equivalent coordinate-free definition. For this, let us first define the Hessian.

**Definition 1.7 (Hessian).** Let  $M$  be a manifold and  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  a function. Let  $p$  be a critical point of  $f$ . Then we define the Hessian  $H_p$  to be the bilinear form

$$H_p(T_p M, T_p M) \rightarrow \mathbb{R}, \\ (X, Y) \mapsto X(Y)f|_p,$$

where  $\nabla_p$  is a local extension of  $p$  around  $p$ .

## 1.2. COORDINATE-FREE DEFINITION

Because we are only considering the Hessian  $H_p$  at critical points, this is a well defined symmetric bilinear form.<sup>12</sup> In case of a Morse function given locally by  $f(x) = f(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2$ , the Hessian at  $p$  is

$$H_p = 2x_1^2 - 2x_2^2 - \dots - 2x_k^2 + 2x_{k+1}^2 - \dots + 2x_n^2,$$

where  $dx_i = dx_i$ . Note in particular that  $H_p$  is non-degenerate and its signature is  $(k, n-k) = (n, n-k)$ , as we have  $k$  negative eigenvalues and  $n-k$  positive eigenvalues. As the signature of a symmetric bilinear form is coordinate independent, this shows that the index of a critical point is as well.

Interestingly, the converse is also true: if  $H_p$  is non-degenerate for all critical points  $p$  of  $f$ , then  $f$  is a Morse function. Many authors take this to be the definition of a Morse function, and then prove the so-called Morse lemma stating that there always exist local coordinates such that  $f$  is given by

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

which is our definition of a Morse function. With our choice, the Morse lemma takes on the following form:

**Lemma 1.8 (Morse Lemma).** Let  $M$  be a manifold and  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  a smooth function. If for all  $p \in \text{Crit } f$ , the Hessian  $H_p$  is non-degenerate, then  $f$  is Morse.

**Proof.** We follow the proof of Milnor<sup>13</sup>. We may assume that  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p$  is the origin and  $f(p) = 0$ . Then by a version of Taylor’s theorem, we can write

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j + \dots$$

where  $g$  are smooth functions. Now, as  $g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j$  is the origin and  $f(p) = 0$ . Then by a version of Taylor’s theorem, we can write this for each  $g$ , giving us the following:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j + \dots$$

Because the sum is symmetric in  $i$  and  $j$ , we may assume that  $H_p$  is symmetric as well.<sup>14</sup> Note that

$$H_p(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j,$$

which is non-degenerate by assumption.

Now we obtain the proof of diagonalization of a non-degenerate quadratic form. We do this by induction. Suppose we have coordinates  $u_1, \dots, u_{k-1}$  a neighborhood of  $0$  such that

$$f = \lambda_1^2 u_1^2 - \dots - \lambda_{k-1}^2 u_{k-1}^2 + \sum_{i=k}^n u_i^2.$$

<sup>12</sup> The difference between  $H_p(X, Y)$  and  $H_p(Y, X)$  is given by  $H_p(X, Y) - H_p(Y, X) = X(Y)f - Y(X)f = [X, Y]f = 0$ .

The value of  $H_p$  also does not depend on the choice of the coordinate system. Indeed, suppose  $f$  and  $\tilde{f}$  are two different versions of  $f$ . Then by symmetry of  $H_p$ , we have

$$X(Y)\tilde{f} = Y(X)\tilde{f} = X(Y)f.$$

This also shows linearity of the second argument.

<sup>13</sup> John Milnor, *Morse Theory* (AMS-55), Vol. 16, Princeton university press, 2010, p. 6.

<sup>14</sup> If  $H_p$  is not symmetric, we can replace it by  $H_p + H_p^T$ . Then  $H_p + H_p^T$  is symmetric and we still have  $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j$ .

# Abbildung: Auszug einer Masterarbeit über Morse Theory

# Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

- Analysis Aufgabe:

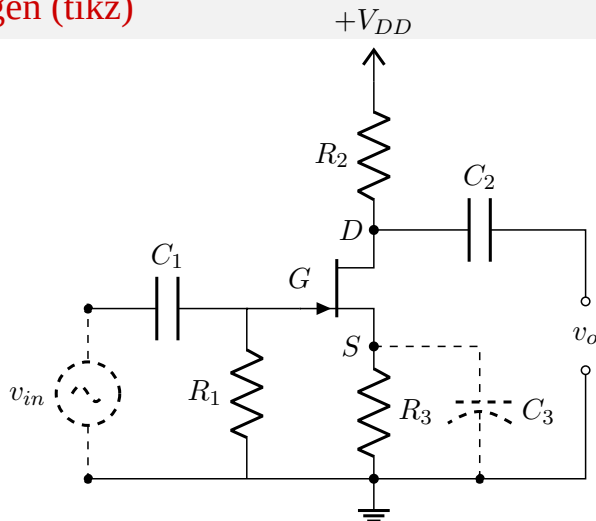
$$\lim_{x \rightarrow \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt} \left( \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)} \right)'' \right).$$

# Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$



# Abbildungen (tikz)



# Syntax

- Commands beginnen mit `\`, nicht zu verwechseln mit `/`
- Umgebungen (environments) beginnen und enden immer gleich, man kann/muss nesten.

# Struktur

Struktur die in jedem Dokument eingehalten werden muss:

```
\documentclass{article}  
\usepackage{tikz} % Fuer Zeichnungen  
\usepackage{amsmath} % Fuer mathematische Symbole  
  
\begin{document}  
  
\end{document}
```

# Documentclasses

Gibt viele, die wichtigsten sind:

- `article`: “normale Klasse” Titel ist auf erster Seite
- `report`: Titel hat eigene Seitenzahlen
- `beamer`: Für Präsentationen (diese z.B.)
- Andere sind: `book`, `letter`, etc.



# Sections

Es gibt verschiedene an Sections.

- section
- subsection
- subsubsection

Diese werden dann z.B. in Inhaltsverzeichnissen angezeigt und sich untergeordnet.

- Section
  - subsection
    - subsubsection

# Fußnoten und Bibliografien

Eine Fußnote macht man:

```
\footnote{Fußnoteninhalt}
```

Eine Zitat macht man:

```
\cite{Zitat}
```

Eine Bibliografie macht man:

```
\printbibliography
```

Fußnote<sup>3</sup>

Zitat [3]

---

<sup>3</sup>Fußnoteninhalt

# Math environments

Mathe wird in math-environments geschrieben.

- inline math, z.B.  $f(x) = x^2$ : \$ \dots \$
- display-math, z.b.

$$\frac{1}{|G|} \sum_g X_i^g$$

mit:  $\backslash[ \dots \backslash]$

- Gleichungen, mit einem align environment.

# Mathe 1

- superscript: ^, bzw. ^{\}
- $e^x$ : e^x
- subscript: \_, bzw. \_{\}
- $e_x$ : e\_x
- Brüche: \frac{\}{\}
- $\frac{a}{b}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}2}2}.$$



# Aus gestalterischer Sicht

## Im Vergleich zu Affinity Publisher

Publisher	L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X
Wird unübersichtlich, wenn man nicht genau weiß, was man macht.	Wird auf größeres Dokument nicht unübersichtlich.
Man muss alles grafisch anordnen.	Sachen sind da, wo sie hingehören.

# Wie man es benutzt

- Arch-basiert: `pacman -S texlive-basic`
- Debian-basiert: `apt-get install texlive-full`
- MacOS: MacTeX
- Windows: MiKTeX
- Online: Overleaf

## Weitere Ressourcen

- diese Präsentation:  
<https://github.com/d-rems/LaTeX-Einfuehrung/>
- LaTeX Tutorials, von Luke Smith
- Overleaf Tutorials
- “The TeXbook”, von Donald E. Knuth



