

Mathe

Daniel Renschler

June 27, 2023

Contents

1	“x-” und “h-” Methode	3
1.1	Unterricht	3
1.2	Hausaufgaben	3
1.2.1	Aufgabe 1, berechnen sie $f'(x_0)$	3
1.2.2	Aufgabe 2, berechnen sie $f'(x_0)$	3
1.2.3	Aufgabe 3	3
2	Pascalsches Dreieck und Binomischer Lehrsatz, 16.1.2023	4
2.1	Unterricht	4
3	“h-Methode”	5
3.1	Unterricht	5
4	Arbeit Verbesserung	6
5	“h-Methode”	7
5.1	Unterricht	7
6	Unterricht 06.02.2023	7
6.1	Die Ableitungsfunktion	7
7	Produktregel, 10.02.2023	9
7.1	Unterricht	9
7.2	paar aufgeben	11
8	5a	11
9	Mathe Unterricht, 10.03.2023	14
10	Zusammenfassung für die Arbeit (KA 1, J1-2)	15
10.0.1	Mittlere Änderungsrate, x-Methode	15
10.0.2	Änderungsrate, h-Methode	15
10.1	Vokabeln	16
10.2	Wie man Extrema findet	16
11	Calculus 3.3, The First Derivative Test for Increasing and Decreasing	16
12	Calculus 3.4, The Second Derivative Test for Concavity of Functions	17
13	mathe 2023-03-14	17
14	Unterricht 17.03.2023, Krümmung	18

15 Mathe Unterricht 2023-03-24	18
15.1 Hausaufgaben	19
16 Unterricht, Sicherung einer Rennstrecke.	19
17 Arbeitsverbesserung	20
18	21
18.1	21
18.2	21
18.3	21
18.4	21
19	21
19.1	21
20	21
20.1	21
20.2	21
21 Integralrechnung, Rekonstruktion	22
21.1 Hausaufgaben	22
22 Indefinite Integrals (Calc Book Part 9)	23
23 Und hier eine “ganze” Integralerkl��rung	24
23.1 Erst die einfachen Regeln	24
24 nochmal integral einfuehrung	24
25 Fläche zwischen zwei Integralen	25
25.1 ... die sich nicht scheiden	25
25.2 ... die sich scheiden	25

1 “x-” und “h-” Methode

1.1 Unterricht

Berechnung der Ableitung mithilfe der “x-Methode” Beispiel: $f(x) = x^3; x_0 = -2$

$$\text{mit: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - (-2)^3}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) \\ &= -2^2 - 2 \cdot -2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.2 Hausaufgaben

1.2.1 Aufgabe 1, berechnen sie $f'(x_0)$

- (a) $f(x) = x; x_0 = 3 \Rightarrow 1$
- (b) $f(x) = x^2; x_0 = 3 \Rightarrow 6$
- (c) $f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \Rightarrow r : x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow, 25$
- (d) $f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = -1 \Rightarrow x^{-1} = -1^{-2} = -1$

1.2.2 Aufgabe 2, berechnen sie $f'(x_0)$

- (a) $f(x) = x; x_0 = 1 \Rightarrow 1$
- (b) $f(x) = x^2; x_0 = -4 \Rightarrow -8$
- (c) $f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \Rightarrow r : x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow, 125$
- (d) $f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 3 \Rightarrow x^{-1} = -1x^{-2} = -3^{-2} = -\frac{1}{9}$

1.2.3 Aufgabe 3

Für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus der Ruhe gilt für den zurückgelegten Weg s (in m) in Abhängigkeit von Zeit t (in s) die Formel

$$s(x) = \frac{1}{2}at^2.$$

Dabei ist a (in $\frac{m}{s^2}$) die Beschleunigung.

- (a) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg nach 3s bzw. 6s.

$$s'(t) = at \Rightarrow 3a \text{ und } 6a$$

- (b) Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ist definiert als

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

2 Pascalsches Dreieck und Binomischer Lehrsatz, 16.1.2023

2.1 Unterricht

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel: $f(x) = x^4; x_0 = 3$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^4 - 5^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5^4 + 4 \cdot 5^3 h + 6 \cdot 5^2 \cdot h^2 + 4 \cdot 5 \cdot h^3 + h^4 - 5^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 \cdot h + 4 \cdot 5 \cdot h^2 + h^3 = 4 \cdot 5^3 = 500 \end{aligned}$$

Pascalsches Dreieck:														
$n = 0$									1					
$n = 1$								1	1					
$n = 2$							1	2	1					
$n = 3$					1		3	3	1					
$n = 4$				1		4		6		4		1		
$n = 5$			1		5		10		10		5		1	
$n = 6$		1		6		15		20		15		6		1

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^0 = 1,$$

$$(x+y)^1 = x+y,$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6,$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7,$$

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

3 “h-Methode”

3.1 Unterricht

Bis jetzt nur “h-Methode” gemacht. Deswegen hier private Aufgaben, dass es nicht leer ist.

Chapter 2 Exercises - Part A, 4

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{3-2x^2}{4-3x^2} \right] &= \frac{(4-3x^2) \left(\frac{d}{dx} [4-3x^2] \right) - (3-2x^2) \frac{d}{dx} [4-3x^2]}{(4-3x^2)^2} \\ &= \frac{(4-3x^2)(-4x) - (3-2x^2)(-6x)}{16-12x^2-12x^2+9x^4} = \frac{2x}{16-24x^2+9x^4}\end{aligned}$$

Buch, Aufgabe 13

a) Man kann hier zwar $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ und $\lim_{h \rightarrow 0^-}$, wo es von links -1 ergibt und rechts 1. Hier gibt es zwar links und rechts eine Tangente der Steigung, aber da die nicht gleich sind gibt es kein limit generell.

$$\text{Wenn } \lim_{h \rightarrow 0^+} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \text{ D.N.E.}$$

b) $x = 3$

4 Arbeit Verbesserung

Taschenrechnerfrei

Aufgabe 1

$$(u \circ v)(x) = e^{\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}}; (v \circ u)(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Aufgabe 2.1 Ist wahr, da:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - x \rightarrow \\ y &= 1 - x \\ y + x &= 1 \\ x &= 1 - y \\ f^{-1}(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 Ist Wahr, da im Nenner immer in x mehr ist als im Zähler, dies verhindert das $y = 1$ wird.

Aufgabe 3

Taschenrechner Teil

Aufgabe 1.1 Hier stelle man sich den Plot $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ vor weil pgfplots keine lust hat.

Aufgabe 1.2 $x \in] - \infty - \infty [$

Aufgabe 1.3

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^3 + 1 \\ y - 1 &= (x - 2)^3 \\ \sqrt[3]{y - 1} &= x - 2 \\ x &= \sqrt[3]{y - 1} + 2 \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x - 1} + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; Wertebereich: $(-\infty; +\infty)$

Aufgabe 2.1 A: Weiterer Extrempunkt für g ist (-2,-1) und für f ist es (-2,1).

Aufgabe 2.2

$$x(-x) = f(-x) \cdot (g(-x))^3 = f(x) \cdot (-g(x))^3 = -f(x)(g(x))^3 = -h(x)$$

$\Rightarrow h$ ist symmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs

5 “h-Methode”

5.1 Unterricht

Buch Seite 72, Aufgabe 10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl x_0 der Differenzquotient von f im Intervall $[x_0; x_0 + 2]$ mit $\frac{3}{2} \cdot f(x_0)$ übereinstimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x_0+h} - 2^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x_0} \cdot 2^h - 2^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x_0} \cdot (2^h - 1)}{h} \\ &= 2^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \end{aligned}$$

6 Unterricht 06.02.2023

6.1 Die Ableitungsfunktion

Beispiel: $f(x) = x^2$

Ableitung an der Stelle $x_0 = 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{x - 3}} \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 .

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1(\cancel{x - x_0})(x + x_0)}{1\cancel{x - x_0}} \\ &= x_0 + x_0 = 2x_0 \end{aligned}$$

Das ist dann die Ableitungsfunktion

Aufgabe Die Funktion $x \rightarrow f'(x)$, die jedem x aus der Definitionsmenge von f die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion f'** oder **Ableitung von f** . Der Wert $f'(x)$ gibt die Steigung des Graphen K_f im Punkt $P(x|f(x))$ bzw. die Steigung der Tangente an K_f an dieser Stelle an.

Weitere Beispiele: $f(x) = 1$; $f(x) = x$; $f(x) = x^3$.

Ableitung von $f(x) = 1$ ist 0, Ableitung von $f(x) = x$ ist 1, Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $3x^2$.

Nebenrechnung für $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2) \\ &= x_0^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2 \\ &= 3x_0^2 \end{aligned}$$

Notiz:

Nebenrechnung (soll eine Polynomdivision darstellen):

$$\begin{array}{r} (x^3 - x_0^3) : (x - x_0) = x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2 \\ -f(x^3 - x_0 \cdot x^2) \\ \hline x_0 \cdot x^2 - x_0^3 \\ -(x_0 \cdot x^2 - x_0^2 \cdot x) \\ \hline x_0^2 \cdot x - x_0^3 \\ -(x_0^2 \cdot x - x_0^3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2 \cdot x$
x^3	$3 \cdot x^2$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Table 1: Herleitung zur Kettenregel

Ausrichtung von oben links im Uhrzeigersinn: 1a, 1c, 2, 1b. Begründung aufgabe 2 $K_f \Rightarrow B$ weil bei K_f 's äußeren Steigungen sehr steil sind wie bei einer Parabel in B .

$K_g \Rightarrow C$ weil es übereinstimmt.
 $K_h \Rightarrow A$ weil es übereinstimmt.

7 Produktregel, 10.02.2023

7.1 Unterricht

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot x^2 (= x^3) \\ f(x) &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \cdot \ln(x)) &= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \cdot e^x \\ g'(x) &= 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= (2x + x^2) \cdot e^x \end{aligned}$$

bisschen schwerere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^4 \cdot \sin(x^2)) &= \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \frac{d}{dx} [\sin(x^2)] \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \frac{df}{du} [\sin(u)] \cdot \frac{du}{dx} [x^2] \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + 2x^5 \cdot \cos(x^2) \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\frac{df}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2)$$

ein paar test aufgaben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \cdot x^3) &= \frac{d}{dx} [x^2] \cdot x^3 + x^2 \cdot \frac{d}{dx} [x^3] \\ &= 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 \\ &= 2x^4 + 3x^4 \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{2x} \cdot x^3) &= 2e^{2x} \cdot x^3 + e^{2x} \cdot 3x^2 \\ &= 3e^{2x} \cdot x^3 + 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 \cdot e^x) &= \frac{d}{dx} [x^3] \cdot e^x + x^3 \cdot \frac{d}{dx} [e^x] \\ &= 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot e^{x^2}) = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot 2e^x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x \cdot \sin(x)) &= \frac{d}{dx} [x] \cdot \sin(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\sin(x)] \\ &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) \\ &= \sin(x) + x \cos(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x^3)) = 1 \cdot \ln(x^3) + x \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x \cdot \cos(x)) &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot -\cos(x) \\ \frac{d}{dx}(e^x \cdot \sin(x^3)) &= e^x \cdot \sin(x^3) + e^x \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 2e^x \cdot \sin(x^3) + \cos(x^3) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [3x^2] &= 6x \\ \frac{d}{dx} [-7x^4] &= -28x^3 \\ \frac{d}{dx} [5x] &= 5 \\ \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{5}x^{10} \right] &= -2x^9 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{4}{x} \right] &= \frac{4}{x^2} \\ \frac{d}{dx} \left[-\frac{2}{5}x^{-5} \right] &= -x^{-6} \\ \frac{d}{dx} [4\sqrt{x}] &= \frac{2}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Steigung rausfinden an Punkt A(2—f(2))

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{3}{2}x^2 \right] &= 2x \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ &= m=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 \right] &= t^3 - 5t^2 \\ &= 2^2 - 5 \cdot 2^2 \\ &= 4 - 20 \\ &= m = -16\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [2x^3 + 5x^2] &= 6x^2 + 10x \\ \frac{d}{dx} [4x^5 - 3x] &= 20x^4 - 3 \\ \frac{d}{dx} [2x^7 - 3x^4] &= 14x^6 - 12x^3 \\ \frac{d}{dx} [-2x^3 + x^2 + 4] &= -6x^2 + 2x \\ \frac{d}{dx} [2x^3(x^2 + x - 1)] &= 6x^2 \cdot 3x + (x^2 + x - 1) \cdot 2x^3 \\ \frac{d}{du} [u(u+3)^2] &=? \text{zu verkettet?}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left[\frac{3}{4}z^2 - 3x^{-1} \right] &= 1,5z + 3z^{-2} \\ &= m = 3,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [-x - 2x^4] &= -1 + 8x \\ &= m = 15\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Aufgabe 3 (f'(x)-f'''(x))

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 2 \\ f'(x) &= -2x + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [e^{\sin(2x)}] &= \\ &= \frac{du}{dx} [e^x] \frac{df}{du} [\sin(2x)] \\ &= e^{\sin(2x)} * 2 \cos(2x)\end{aligned}$$

kubische Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} - \frac{b}{3a}$$

wobei $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ und $q = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$. Wenn man zuviel zeit hat könnte man damit folgendes ausrechnen:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9.$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 15 - 7^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{6}{3} = 2 \\ q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 15 + 27 \cdot 1^2 \cdot 9}{27 \cdot 1^3} = \frac{-27}{27} = -1 \\ \alpha &= \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\ \beta &= \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\ \gamma &= -\frac{b}{3a} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Daher sind die Nullstellen von $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta + \gamma \approx 4 \\ x_2 &= -\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i(\alpha - \beta) + \gamma \approx 1 \\ x_3 &= -\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i(\alpha - \beta) + \gamma \approx 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 15 - 7^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{6}{3} = 2 \\ q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 15 + 27 \cdot 1^2 \cdot 9}{27 \cdot 1^3} = \frac{-27}{27} = -1 \\ \alpha &= \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\ \beta &= \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} \end{aligned}$$

7.2 paar aufgaben

8 5a

Bestimmung der Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

Zunächst müssen wir die erste und zweite Ableitungen der Funktion berechnen:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

$$f''(x) = 6x + 3$$

Als nächstes finden wir die Nullstellen von $f'(x)$, indem wir $f'(x) = 0$ setzen und nach x auflösen:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

Daraus ergibt sich $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Diese Werte entsprechen den möglichen Extrempunkten der Funktion.

Nun bestimmen wir die Vorzeichen von $f''(x)$ für die Intervalle $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ und $(1, \infty)$:

$$f''(-3) = -15 < 0$$

$$f''(0) = 3 > 0$$

$$f''(2) = 15 > 0$$

Da $f''(x)$ für $x < -2$ negativ ist, haben wir einen Hochpunkt bei $x = -2$. Da $f''(x)$ für $x > -2$ positiv ist, haben wir ein Minimum bei $x = -2$.

Ähnlich haben wir einen Tiefpunkt bei $x = 1$, da $f''(x)$ für $x < 1$ positiv und für $x > 1$ negativ ist.

Um nun die entsprechenden Funktionswerte zu berechnen, setzen wir $x = -2$ und $x = 1$ in die Funktion $f(x)$ ein:

$$f(-2) = (-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - 6(-2) = -8 - 6 + 12 = -2$$

$$f(1) = 1^3 + \frac{3}{2}(1)^2 - 6(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

Daher sind die Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$ bei $(-2, -2)$ und $(1, -\frac{7}{2})$.

5b

Die gegebene Funktion lautet: $f(x) = x^4 e^x$

Um die Extrempunkte der Funktion zu finden, müssen wir zuerst die Ableitungen berechnen:

$$f'(x) = e^x x^4 + 4e^x x^3$$

$$f''(x) = e^x x^4 + 8e^x x^3 + 12e^x x^2$$

Um die kritischen Punkte zu finden, setzen wir die erste Ableitung gleich null und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
e^x x^4 + 4e^x x^3 &= 0 \\
e^x x^3(x+4) &= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $x = 0$ oder $x = -4$ oder $f'(x)$ existiert nicht.

Nun überprüfen wir das Vorzeichen der zweiten Ableitung an den kritischen Punkten:

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 12e^0(0)^2 = 0 \\
f''(-4) &= e^{-4}(-4)^4 + 8e^{-4}(-4)^3 + 12e^{-4}(-4)^2 \\
&= e^{-4}(256 - 768 + 576) \\
&= -32e^{-4} < 0
\end{aligned}$$

Da $f''(-4)$ negativ ist, handelt es sich bei $x = -4$ um ein lokales Maximum. Da $f''(0) = 0$ ist, können wir die Art des Punktes bei $x = 0$ nicht bestimmen. Wir können jedoch eine zweite Ableitungsprobe durchführen, um zu sehen, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt:

$$\begin{aligned}
f''(1) &= e^1(1)^4 + 8e^1(1)^3 + 12e^1(1)^2 \\
&= 21e
\end{aligned}$$

Da $f''(1)$ positiv ist, handelt es sich bei $x = 0$ um ein lokales Minimum.

Zusammenfassend haben wir:

Der kritische Punkt $x = -4$ ist ein lokales Maximum. Der kritische Punkt $x = 0$ ist ein lokales Minimum.

Plot:

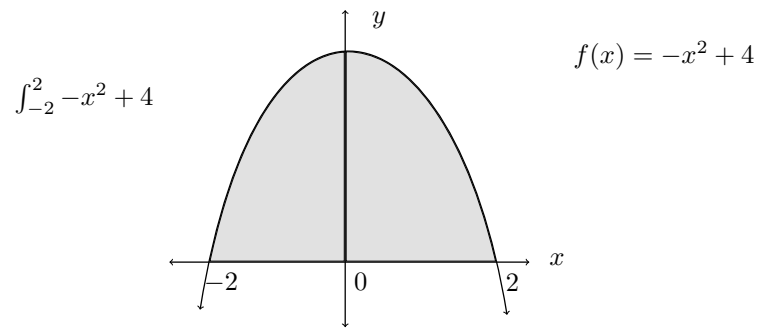
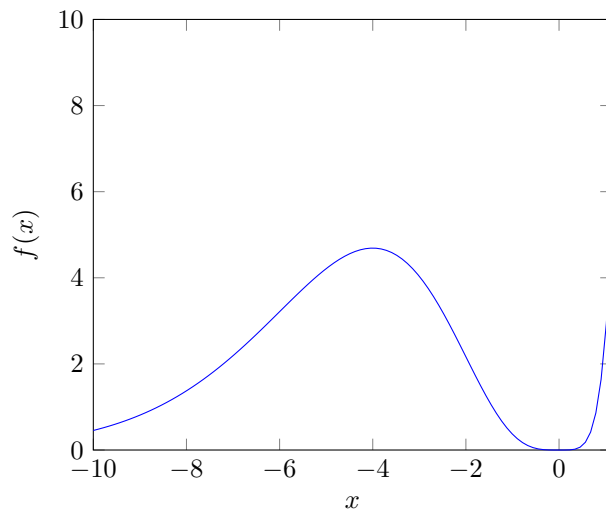


Figure 1: defeniter integral



9 Mathe Unterricht, 10.03.2023

Heute machen wir in der einzelnen Stunde glaub nur eine Prüfungsaufgabe und/oder so, auch ist es im allgemeinfall falsch, dass für Ganzrationale Funktionen die Extrempunkte immer zwischen ihren Nullstellen sind.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (x-1)(3-x) \\
&= x \cdot (-x^2 + 4x - 3) \\
&= -x^3 + 3x^2 - 3x \\
\Rightarrow f'(x) &= -3x^2 + 8x - 3 \\
\Rightarrow f''(x) &= -6x + 8 \\
f'(x) = 0 &\Rightarrow -3x^2 + 8x - 3 \\
x_{1/2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3)}}{-6} \\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{-6} \\
&= \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{-6} \\
x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \\
x_2 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}
\end{aligned}$$

beides sind einfache nullstellen \Rightarrow Vorzeichen wechsel

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{4}{3}\right) &= -3x^2 + 8x - 3 \\
&= \frac{-16}{3} + \frac{32}{3} - \frac{9}{3} > 0 \\
f''\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) &= < 0 \Rightarrow H
\end{aligned}$$

hier wär so ein strahl praktisch, des könnt man evtl. als tikz template machen.

10 Zusammenfassung für die Arbeit (KA 1, J1-2)

10.0.1 Mittlere Änderungsrate, x-Methode

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Änderung gibt an, wie schnell sie die Funktionswerte von x_1 nach x_2 ändern. Man nennt diesen Quotienten auch **Differenzquotienten**.

10.0.2 Änderungsrate, h-Methode

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Hier Sieht man die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^3$, sowie ihre Ableitungen $f'(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = x^2$. Die Ableitungsfunktionen zeigen je die steigung die die Tangente an der Stelle hätte, das ist bei dem \sin -1 bis 1, und bei x^3 ist es $-\infty$ bis ∞ .

10.1 Vokabeln

f ist **monoton wachsend** für: $[A,B]$; $[A,F]$; $[A,E]$; $[B,F]$; $[B,E]$; $[F, E]$.

...**streng monoton wachsend** für: $[A,B]$; $[F,E]$.

...**monoton fallend** für: $[B,F]$; $[E,G]$; $[G,H]$.

...**streng monoton fallend** für: $[E,G]$.

- **Lokales Minimum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert kleiner ist als alle benachbarten Funktionswerte.
- **Lokales Maximum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert größer ist als alle benachbarten Funktionswerte.
- **Globales Minimum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert kleiner ist als alle anderen Funktionswerte auf der gesamten Funktion.
- **Globales Maximum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert größer ist als alle anderen Funktionswerte auf der gesamten Funktion.

10.2 Wie man Extrema findet

Einfach übernommen aus Calculus 1, 3.3 und 3.4

11 Calculus 3.3, The First Derivative Test for Increasing and Decreasing

Recall:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Increasing}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreasing}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{Critical Point/Constant}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

How to find relative extrema

1. 1st derivative test
take $f'(x)$
2. set it to $=0$ for critical numbers
3. make the $f'(x)$ table
4. Find the sign of *each interval*,
by plugging into $f'(x)$ (this tells
you increasing/decreasing)

From that we can see that there is a local maxima at $x = -1$ and a local minima at $x = 1$. Then we can just insert that into the main function:

$$\text{Max: } = f(-1) = 3 \Rightarrow (-1, 3)$$

$$\text{Min: } = f(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$$

example

another example

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^{5/3} - 15x^{2/3} & \max: &= f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \\
 f'(x) &= 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} & \min: &= f(2) \approx 14,2866 \Rightarrow (2, 14,2866) \\
 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5x^{-1/3}(x-2) &= 0 \\
 0 &= \frac{f(x-2)}{\sqrt[3]{x}} \\
 \Rightarrow x-2 &= 0 \Rightarrow x=2 \\
 \Rightarrow \sqrt[3]{x} &= 0
 \end{aligned}$$

12 Calculus 3.4, The Second Derivative Test for Concavity of Functions

Recall:

$f''(x) > 0$ concave up
 $f''(x) < 0$ concave down
 $f''(x) = 0$ possible inflection point (P.I.P.)

example

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 3x^2 - 24x + 32 \\
 f'(x) &= 3x^2 - 6x - 24 \\
 3x^2 - 6x - 24 &= 0 \\
 3(x^2 - 2x - 8) &= 0 \\
 3(x-4)(x+2) &= 0 \\
 \Rightarrow x &= 4 \\
 \Rightarrow x &= -2
 \end{aligned}$$

now we have the possible extrema

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 3x - 6 = 0 \\
 \Rightarrow x &= 1
 \end{aligned}$$

How to find Inflection Points with the 2nd Derivative Test

1. find $f''(x)$
2. set $= 0$ for P.I.P.s
3. make table

Solution

max: $f(-2)=60 \Rightarrow (-2,60)$
min: $f(4)=-48 \Rightarrow (4,-48)$
i.p.: $f(1)=6 \Rightarrow (1,6)$

13 mathe 2023-03-14

Buch aufgabe

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\
 f'(x) = 0 &= x^2 - 2x - 3 = 0 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} \\
 \Leftrightarrow x_1 &= -1, x_2 = 3 \text{ einfache Nullstellen}
 \end{aligned}$$

hier dann noch ne tabelle dazu.

f ist streng monoton wachsend fuer $x \in]-\infty, -1[$ und $[3, \infty[$.

f ist streng monoton fallend fuer $[-1, 2]$

14 Unterricht 17.03.2023, Krümmung

$$\begin{aligned}f(t) &= (3t - 6)^4 + 3t \\ \Rightarrow f'(t) &= 4 \cdot (3t - 6)^3 * 3 + 3 \\ \Rightarrow f''(t) &= 36 * (3t - 6)^2 \\ \text{für nullstellen: } f''(0) &= 0 \\ f''(0) &= 36 * (3t - 6)^2 \\ 0 &= (3t - 6)^2 \\ 0 &= |3t - 6| \\ t_{1/2} &= 2 \text{ doppelte nullstelle}\end{aligned}$$

f'' ist größer oder gleich wie 0 für $x \in R$
 \Rightarrow Der Graph von $f(x)$ ist linksgekrümmt.

15 Mathe Unterricht 2023-03-24

Die aufgaben sind von einem Blatt, das nur auf dem iPad ist.

aufgabe 1.2 Was bedeutet das für den Wert der zweiten Ableitung f'' links von der Wendestelle x_w ?

$$\begin{aligned}x < x_w &\Rightarrow f''(x) > 0 \\ x > x_w &\Rightarrow f''(x) < 0\end{aligned}$$

aufgabe 1.4

Die Wendestelle ist der Ort, an dem die Steigung des Graphen von f maximal oder minimal ist. Deswegen hat f' dort eine Extremstelle.

Aufgabe 2 a) einen vorzeichenwechsel hat. b)

15.1 Hausaufgaben

Seite 129 Nummer 6 c)

$$f(x) = (1-x)^2 \cdot e^{-x}$$

Schritte zum Skizzieren

1. Nullstellen finden
für x: x null setzen
für y: y null setzen
2. Asymptoten finden
vertikal: zähler=0 nicht
entfernbar
loch: zähler=0 entfernenbar
horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm$
3. 1. Ableitung test
kritische punkte
zunehmend/abnehmend
4. 2. Ableitung test
Konkavität
Wendepunkte
5. Tabelle
6. Finde alle möglichen Punkte
mit der originalen Funktion
7. Graph

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^2 * e^{-x} \\ f'(x) &= -e^{-x} * (x^2 - 2x + 1) \\ -f'(x) &= e^{-x} * (x^2 - 2x + 1) = 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^2 * e^{-x} \\ f''(x) &= e^{-x} * (x^2 - 4x + 3) \\ f''(x) &= 0 \Rightarrow x = 1, 3 \\ f''(x) &> 0 \text{ für } x < 1 \text{ \& } x > 3, \text{ also konkav nach oben} \\ f''(x) &< 0 \text{ für } 1 < x < 3, \text{ also konkav nach unten} \\ &\Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x = 1, 3 \end{aligned}$$

- 1.1 $(1-x)^2 = \text{doppelte nullstelle auf } x=1$
 1.2 $f(x) = (1-0)^2 \cdot e^{-0} = 1$ y-achsen schnitt
 auf y=1
 2.

Hier fehlt noch der Rest.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^2 * e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)^2}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1-x)}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

16 Unterricht, Sicherung einer Rennstrecke.

Die in der Abbildung rot gezeichnete Ideallinie einer Rennstrecke wird durch die Funktion f mit

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$$

beschrieben. Die Strohballen werden durch die Gerade $y = 6$ beschrieben. Aufgrund eines Fahrfehlers kommt ein Rennwagen im Punkt $(-1|f(-1))$ von der Ideallinie ab und trifft im Punkt Y auf die Strohballen.

Aufgabe 1 Bestimmen sie den Punkt Y zeichnerisch mithilfe der Abbildung. Beschreiben sie ihr vorgehen. Hier zu zeichnen ist offensichtlich unnoetig, man zeichnet die Tangente auf $(-1|f(-1))$, und schaut wo auf $y=6$ eintrifft.

Aufgabe 2 Berechnen Sie den Punkt Y.

1. hoehe von $f(-1)$ finden, also

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4 - \frac{1}{2} - 1^2 \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

hier ist $x = -1$, $y = 3,5$ und steigung $m = 1$. wenn man das einsetzt bekommt man:

$$y - 3,5 = 1(x + 1)$$

2. nun die Ableitung um Steigung der Tangente zu haben.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) &= -x \end{aligned}$$

fuer -1 ist es dann $m = 1$

durch umformen erhaelt man $y = x + 4,5$.

4. um dann zu schauen wann diese $y = 6$ erricht setzt man es in die gleichung ein: $6 = x + 4,5$ und duch loesen erhaelt man $x = 0,5$

3. daraus kann man eine Tangente machen

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Loesung: nun sieht man das der Rennwagen auf $(1, 5|6)$ einschlaegt.

Tangentengleichung

Wir suchen die Gleichung der Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Berührpunkt $B(x_0|f(x_0))$.

$$t : y = mx + c$$

Steigung $f = f'(x_0)$

$$\Rightarrow t : y = f'(x_0)x + c$$

punkprobe mit B:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$\Rightarrow t : y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow t : y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

17 Arbeitsverbesserung

Besprechung der Klausur (Gruppenarbeit)

1. Besprechen Sie alle Aufgaben. Klären und korrigieren Sie dabei die Fehler jeder Schülerin bzw. jeden Schülers der Gruppe.
2. Einigen Sie sich auf eine Musterlösung der Klausur. Achten Sie dabei auf Vollständigkeit, eine saubere Darstellung und korrekte Anwendung der Fachsprache. Die Musterlösung muss abgegeben werden.
3. Jeder Schüler soll in den kommenden Wochen an einer seiner Schwierigkeiten arbeiten. Besprechen Sie in der Gruppe, an welcher Schwierigkeit jede Schülerin bzw. jeder Schüler arbeiten wird.

Reflexion der Klausur (Einzelarbeit) Beantworten Sie ehrlich folgende Fragen.

- Ich bin mit dem Ergebnis der Klausur zufrieden.

Nein, Ja, Ja

- Was haben Sie in der in der Klausur leicht lösen können? Was hat Ihnen Schwierigkeiten bereitet?

Ableitungen waren eine Schwierigkeit, auch extremwerte und punkte

- Wie haben Sie sich zu Hause auf die Klausur vorbereitet?

Die Aufschriebe im Heft noch einmal durchgelesen. *Ja, Ja, Nein*

Grundbegriffe wiederholt. *Nein, nicht so, Ja*

Übungsaufgaben gelöst. *Ja, ne, Nein*

Andersweitig geübt Wie? *Ja, Ne, Ja*

- Wie lange haben Sie für die Klausur gelernt? *10h, 0.5h, 1h*
- Haben Sie aktiv im Unterricht mitgearbeitet? (ständig / häufig / wenig / nie) *Nein, Ja, Nein*

Im Unterrichtsgespräch? *Nö, wenig, ne*

In den Arbeitsphasen? *Joa, Ja schon, ein wenig*

- Was hätten Sie im Vorfeld der Klausur anders machen können, um Ihre Note zu verbessern?

Weis ich nicht, mehr übungsaufgaben, sich überzeugen das es die Zeit wert ist

- An welcher Schwierigkeit werden Sie in den kommenden Wochen arbeiten?

Alles anders, Hausaufgaben machen, weniger Linux mehr rechnen

18

18.4

18.1

$$h(x) = \cos(-x + 6) \cdot \sin(x)$$

$$h'(x) = \sin(-x + 6) \cdot \sin(x) + \cos(-x + 6) \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{5} \cdot x^2 + 9$$

$$f'(x) = 6x^2 - \sqrt{5} \cdot 2x - 1$$

19

19.1

Wendepunkte: 1(0,5;0,5), 2(-0,5;0,5)

18.2

$$u(t) = -3\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

$$u'(t) = -\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}} - t^{-2}$$

20

20.1

Falsch, grafisch kann man pruefen, dass die Ableitung g' bei $x_0 = 1$ ungefaer 1 ist, in dem intervall $[3; 6]$ die mittlere aenderungsrage aber nur $\frac{1}{2}$, also um die haelfte weniger.

18.3

$$g(x) = 4x^2 \cdot e^{3x-2}$$

$$g'(x) = 8xe^{3x-2} + 12x^2 \cdot e^{3x-2}$$

20.2

Wahr, da es in deiesem Bereich keine positive Steigung gibt.

Teil 2, Aufgabe 1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-(x+h)^2 + 4(x+h) + 3) - (-x^2 + 4x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 4x + 4h + 3 + x^2 - 4x - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2 + 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h + 4) \\ &= -2x + 4 \end{aligned}$$

Daher ist die Ableitungsfunktion von $f(x)$ gleich $f'(x) = -2x + 4$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ für $-2 \leq x \leq 2$. Wir sollen zeigen, dass $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ eine Gleichung der ersten Ableitung von h ist.

Zunächst berechnen wir die Ableitung $h'(x)$ von $h(x)$ nach der Produktregel und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^2) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot \frac{d}{dx}(e^{\frac{2}{3}x^3}) \\ &= 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot \frac{2}{3}x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} \\ &= 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 10x^3 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} \end{aligned}$$

Dann faktorisieren wir den Term $h'(x)$ mit $10x$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 10x^3 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} \\ &= 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} \end{aligned}$$

Daher ist $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ eine Gleichung der ersten Ableitung von $h(x)$, wie gefordert.

21 Integralrechnung, Rekonstruktion

Die Gesamtänderung der Größe kann man aus ihrer momentanen Änderungsrate rekonstruieren – man sagt auch integrieren (integrieren \rightarrow wiederherstellen) –, indem man den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen der momentanen Änderungsrate und der x-Achse bestimmt.

21.1 Hausaufgaben

We want to approximate the area under the curve $y = -x^2 + 4$ from $x = -2$ to $x = 2$ using the Riemann sum method.

Let's divide the interval $[-2, 2]$ into n subintervals of equal width Δx , where $\Delta x = \frac{4}{n}$.

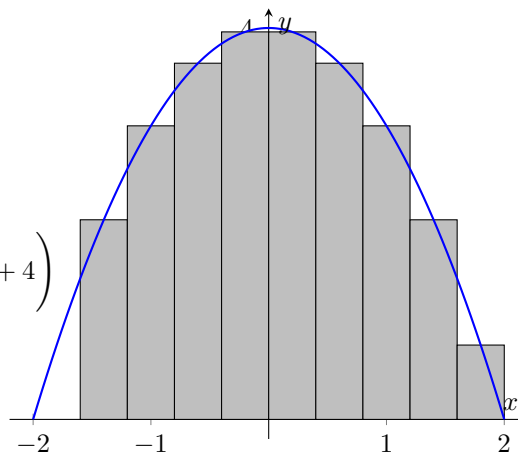
For each subinterval i , where $i = 0, 1, \dots, n-1$, we choose a point x_i in the interval $[x_i, x_{i+1}]$, where $x_i = -2 + i\Delta x$ and $x_{i+1} = x_i + \Delta x$.

$$A_5 = \frac{4}{5} (f(-2) + f(-1.2) + f(-0.4) + f(0.4) + f(1.2)) \approx 8.64$$

The area of each rectangle with base Δx and height $f(x_i) = -x_i^2 + 4$ is given by $\Delta x \cdot f(x_i)$. Thus, the Riemann sum approximation of the area under the curve is

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4}{n} \cdot \left(- \left(-2 + i \frac{4}{n} \right)^2 + 4 \right)$$

We can use this formula to calculate the approximation for any value of n . For example, let's calculate A_5 :



22 Indefinite Integrals (Calc Book Part 9)

$$\begin{aligned} \int 35x^6 dx &= \frac{35^7}{7} + c = 5^7 + c \\ \int \frac{63}{t^8} dt &= \int 63 \cdot t^{-8} dx = \frac{63t^{-8+1}}{-8+1} + c = \frac{63t^{-7}}{-7} + c = -\frac{9}{t^7} + c \\ \int 15x^{2/3} dx &= \frac{15x^{5/3}}{5/3} + c = 9x^{5/3} + c \\ \int 48u^{-5} du &= \frac{48u^{-4}}{-4} + c = -12^{-4u} + c \\ \int t dt &= \frac{t^2}{2} + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c \\ \int 4du &= 4u + c \\ \int \frac{8dx}{x^{1/3}} &= \int 8x^{-1/3} dx = \frac{8x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{8x^{2/3}}{2/3} + c = 12x^{2/3} + c \\ \int (x^2 - 3x + 4) dx &= \frac{x^3}{3} - 1.5x^2 + 4x + c \\ \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{4}{u} \right) dx &= \dots = -\frac{1}{u} - 4 \ln^1 u + c \\ \int (10x^{3/2} + 6x^{1/2}) dx &= \frac{10x^{5/2}}{5/2} + \frac{6x^{3/2}}{3/2} + c = 4x^{5/2} + 4x^{3/2} + c \\ \int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt &= \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{-3/2}}{1/2} + c = \frac{2t^{3/2}}{3} + 2t^{1/2} + c \end{aligned}$$

¹Recall that a power of $b = -1$ is a special case : $\int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln u + c$

23 Und hier eine “ganze” Integralerklärung

23.1 Erst die einfachen Regeln

$$\int ax^b dx = \frac{ax^{b+1}}{b+1} + c, \text{ (wenn } b \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + c$$

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

Example

$$\int 12x^3 dx$$

Hier fängt man an es mit der ersten regel zu integrieren:

$$= \frac{12x^{3+1}}{3+1} = \frac{12x^4}{4}$$

Das kürzt man dann auf $3x^4(+c)$.

Example

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{4}{u} \right) du \\ = -\frac{1}{u} - 4 \ln u - 4 + c \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \\ = \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{t}}{2} + c \end{aligned}$$

Definierte Integrale: diese sind auf der x-Achse definiert, um ihre Fläche zu finden

Lecture 2: Mathe Unterricht 12ter Juni

12-06-2023

24 nochmal integral einfuehrung

Aufgabe 16 a)

$$\begin{aligned} \int_0^t 2 dx &= [2x]_0^t \\ 2 \cdot t - 0 &= 2t \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 -x dx &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1^2}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{3}{2}x \, dx &= \left[\frac{\frac{3}{2}x^2}{2} \right]_0^t \\ &= \frac{\frac{3}{2}t^2}{2}\end{aligned}$$

Lecture 3: Fläche zwischen Integralen

23-06-2023

25 Fläche zwischen zwei Integralen

25.1 ... die sich nicht scheiden

a) Geben Sie den Flächeninhalt zwischen den Flächen:

Example

Zwischen $x^2 + 10$ und $-x^2 + 7$ zwischen -2 und 2.

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^2 x^2 + 10 \, dx - \int_{-2}^2 -x^2 + 7 \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{x^3}{3} + 10x \, dx - \int_{-2}^2 \frac{-x^3}{3} + 7x \, dx \\ &= \frac{1}{3} [x^3 + 10x]^2_{-2} - \frac{1}{3} [x^3 + 7x]^2_{-2} \\ &= \left[\frac{40}{3} \right] - \left[\frac{44}{3} \right] \\ &\quad \text{Ist falsch}\end{aligned}$$

25.2 ... die sich scheiden

Example

zwischen x^2 und $-x^2 + 4$

1. Schnittpunkte finden:
Durch ablesen: $x=-1,37$ & $x=1,37$
2. Flächeninhalt berechnen:

Example

Hier geht es glaube ich darum, dass man aufgeleitete Funktionen wieder ableiten kann um die “normale” Funktion $f(x)$ zu bekommen.

$$f(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int_1^x f(t) \, dt \\ &= \int_1^x (2t - 3) \, dt \\ &= [t^2 - 3t]_1^x = x^2 - 3x - (1^2 - 3 \cdot 1) \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$J_1'(x) = 2x - 3 = f(x)$$

$\Rightarrow J_1$ ist eine Stammfunktion von f .

Frage:

Ist die Stammfunktion F mit

$$F(x) = x^2 - 3x + 3$$

Integralfunktion von f ?

Wäre F Integralfunktion von f , so gäbe es ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) \, dt \\ &= x^2 - 3x - (a^2 - 3a) \\ -a^2 + 3a &= 3 \\ a^2 - 3a + 3 &= 0 \\ a_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3} \\ &\text{NICHT möglich zu rechnen} \end{aligned}$$

Regel

Satz: Jede Integralfunktion J_a von f ist eine Stammfunktion von f .

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, d.h. nicht jede Stammfunktion ist auch Integralfunktion.

Notiz:

Hier noch die Abbildungen für die Integralfunktionen einfügen.