Mathe:
Analysis

Daniel Renschler

Mitte Dezember
↓ bis ↓
18. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

“x-” und “h-” Methode

Unterricht Berechnung der Ableitung mithilfe der “x-Methode” Beispiel: $f(x) = x^3; x_0 = -2$

$$\text{mit: } \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{x^3 - (-2)^3}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2} (x^2 - 2x + 4) \\ &= -2^2 - 2 \cdot -2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.0.1 Hausaufgaben

Aufgabe 1, berechnen sie $f'(x_0)$

(a) $f(x) = x; x_0 = 3 \implies 1$
(b) $f(x) = x^2; x_0 = 3 \implies 6$
(c) $f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \implies r : x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \implies ,25$
(d) $f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = -1 \implies x^{-1} = -1^{-2} = -1$

Aufgabe 2, berechnen sie $f'(x_0)$

(a) $f(x) = x; x_0 = 1 \implies 1$
(b) $f(x) = x^2; x_0 = -4 \implies -8$
(c) $f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \implies r : x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \implies ,125$
(d) $f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 3 \implies x^{-1} = -1x^{-2} = -3^{-2} = -\frac{1}{9}$

Aufgabe 3

Für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus der Ruhe gilt für den zurückgelegten Weg s (in m) in Abhängigkeit von Zeit t (in s) die Formel

$$s(x) = \frac{1}{2}at^2.$$

Dabei ist a (in $\frac{m}{s^2}$) die Beschleunigung.
(a) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg nach 3s bzw. 6s.

$s'(t) = at \implies$ 3a und 6a
(b) Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ist definiert als

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

1.1 Pascalsches Dreieck und Binomischer Lehrsatz, 16.1.2023

1.1.1 Unterricht

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel: $f(x) = x^4; x_0 = 3$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^4 - 5^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5^4 + 4 \cdot 5^3 h + 6 \cdot 5^2 \cdot h^2 + 4 \cdot 5 \cdot h^3 + h^4 - 5^4}{h} = \lim_{h \to 0} 4 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 \cdot h + 4 \cdot 5 \cdot h^2 + h^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$$

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^0 = 1,$$

$$(x+y)^1 = x + y,$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6,$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7,$$

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

1.2 “h-Methode”

1.2.1 Unterricht

Bis jetzt nur “h-Methode” gemacht. Deswegen hier private Aufgaben, dass es nicht leer ist.
Chapter 2 Exercises - Part A, 4

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3-2x^2}{4-3x^2}\right] = \frac{(4-3x^2)\left(\frac{d}{dx}\left[4-3y^2\right]\right)-(3-x^2)\frac{d}{dx}\left[4-3x^2\right]}{(4-3x^2)^2}$$

$$= \frac{(4-3x^2)(-4x)-(3-2x^2)(-6x)}{16-12x^2-12x^2+9x^4} = \frac{2x}{16-24x^2+9x^4}$$

Buch, Aufgabe 13
a) Man kann hier zwar $\lim_{h\to 0^+}$und $\lim_{h\to 0^-}$, wo es von links -1 ergibt und rechts 1. Hier gibt es zwar links und rechts eine Tangente der Steigung, aber da die nicht gleich sind gibt es kein limit generell.

$$\text{Wenn} \lim_{h\to 0^+} \neq \lim_{h\to 0^-} \implies \lim_{h\to 0} \textbf{D.N.E.}$$

b) $x = 3$

1.3 Arbeit Verbesserung

Taschenrechnerfrei

Aufgabe 1

$$(u \circ v)(x) = e^{\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}}; (v \circ u)(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Aufgabe 2.1 Ist wahr, da:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - x \rightarrow \\ y &= 1 - x \\ y + x &= 1 \\ x &= 1 - y \\ f^1 - 1(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 Ist Wahr, da im Nenner immer in x mehr ist als im Zähler, dies verhindert das $y = 1$ wird.
Aufgabe 3

Taschenrechner Teil

Aufgabe 1.1 Hier stelle man sich den Plot $f(x) = (x-2)^3 + 1$ vor weil pgfplots keine lust hat.
Aufgabe 1.2 $x \in]-\infty - \infty[$
Aufgabe 1.3

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^3 + 1 \\ y - 1 &= (x-2)^3 \\ \sqrt[3]{y-1} &= x - 2 \\ x &= \sqrt[3]{y-1} + 2 \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x-1} + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; Wertebereich: $(-\infty; +\infty)$
Aufgabe 2.1 A: Weiterer Extrempunkt für g ist (-2,-1) und für f ist es (-2,1).
Aufgabe 2.2

$$x(-x) = f(-x) \cdot (g(-x))^3 = f(x) \cdot (-g(x))^3 = -f(x)(g(x))^3 = -h(x)$$

$\Longrightarrow$ h ist symmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs

1.4 "h-Methode"

1.4.1 Unterricht

Buch Seite 72, Aufgabe 10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl x_0 der Differenzquotient von f im Intervall $[x_0; x_0 + 2]$ mit $\frac{3}{2} \cdot f(x_0)$ übereinstimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2^{x_0+h} - 2^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2^{x_0} \cdot 2^h - 2^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2^{x_0} \cdot (2^h - 1)}{h} \\ &= 2^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = f(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \end{aligned}$$

1.5 Unterricht 06.02.2023

1.5.1 Die Ableitungsfunktion

Beispiel:$f(x) = x^2$
Ableitung an der stelle $x_0 = 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{1\cancel{x-x_0}} \\ &= x_0 + x_0 = 2x_0 \end{aligned}$$

Das ist dann die Ableitungsfunktion
Aufgabe Die Funktion $x \to f'(x)$, die jedem x aus der Definitionsmenge von f die Ableitung f'(x) an der Stelle x zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion f'** oder **Ableitung von f.** Der

Wert f'(x) gibt die Steigung des Graphen K_f im Punkt P(x—f(x)) bzw. die Steigung der Tangente an K_f an dieser Stelle an.

Weitere Beispiele: $f(x) = 1; f(x) = x; f(x) = x^3$.
Ableitung von $f(x) = 1$ ist 0, Ableitung von $f(x) = x$ ist 1, Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $3x^2$.
Nebenrechnung für $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to 0} (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2) \\ &= x_0^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2 \\ &= 3x_0^2 \end{aligned}$$

Notitz:

Nebennebenrechnung (soll eine Polynomdivision darstellen):

$$\begin{aligned} (x^3 - x_0^3) : (x - x_0) &= x^2 + x_0 \cdot x \cdot x_0^2 \\ -f(x^3 - x_0 \cdot x^2) \\ -----\\ x_0 \cdot x^2 - x_0^3 \\ -(x_0 \cdot x^2 - x_0^2 \cdot x) \\ ----\\ x_0^2 \cdot x - x_0^3 \\ -(x_0^2 \cdot x - x_0^3) \\ ---\\ 0 \end{aligned}$$

f(x)	f'(x)
1	0
x	1
x^2	$2 \cdot x$
x^3	$3 \cdot x^2$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Tabelle 1.1: Herleitung zur Kettenregel

Ausrichtung von oben links im Uhrzeigersinn: 1a, 1c, 2, 1b. Begründung aufgabe 2 $K_f \implies B$ weil bei K_f's äußeren Steigungen sehr steil sind wie bei einer Parabel in B.
$K_g \implies C$ weil es übereinstimmt.
$K_h \implies A$ weil es übereinstimmt.

1.6 Produktregel, 10.02.2023

1.6.1 Unterricht

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot x^2 (= x^3) \\ f(x) &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \cdot e^x \\ g'(x) &= 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= (2x + x^2) \cdot e^x \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\frac{df}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \cdot ln(x)) &= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \end{aligned}$$

bisschen schwerere

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^4 \cdot sin(x^2)) = \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \frac{d}{dx}\left[\sin(x^2)\right] \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \frac{df}{du}\left[\sin(u)\right] \cdot \frac{du}{dx}\left[x^2\right] \\ &= 4x^3 \cdot \sin(x^2) + x^4 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 4x^3 \cdot sin(x^2) + 2x^5 \cdot \cos(x^2) \end{aligned}$$

ein paar test aufgaben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \cdot x^3) &= \frac{d}{dx}\left[x^2\right] \cdot x^3 + x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[x^3\right] \\ &= 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 \\ &= 2x^4 + 3x^4 \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{2x} \cdot x^3) &= 2e^{2x} \cdot x^3 + e^{2x} \cdot 3x^2 \\ &= 3e^{2x} \cdot x^3 + 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 \cdot e^x) &= \frac{d}{dx}\left[x^3\right] \cdot e^x + x^3 \cdot \frac{d}{dx}\left[e^x\right] \\ &= 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot e^{x^2}) = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot 2e^x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x \cdot \sin(x)) &= \frac{d}{dx}\left[x\right] \cdot \sin(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left[\sin(x)\right] \\ &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) \\ &= \sin(x) + x \cos(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot ln(x^3)) = 1 \cdot ln(x^3) + x\frac{3}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x \cdot cos(x)) = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot -\cos(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x \cdot \sin(x^3)) &= e^x \cdot \sin(x^3) + e^x \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 2e^x \cdot sin(x^3) + \cos(x^3) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

Schulbuch Aufgaben, Seite 79, Nr. 1-4

Aufgabe 1

$$\frac{d}{dx}\left[3x^2\right] = 6x$$
$$\frac{d}{dx}\left[-7x^4\right] = -28x^3$$
$$\frac{d}{dx}[5x] = 5$$
$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{5}x^{10}\right] = -2x^9$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4}{x}\right] = \frac{4}{x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{5}x^{-5}\right] = -x^{-6}$$
$$\frac{d}{dx}\left[4\sqrt{x}\right] = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 2

$$\frac{d}{dx}\left[2x^3+5x^2\right] = 6x^2+10x$$
$$\frac{d}{dx}\left[4x^5-3x\right] = 20x^4-3$$
$$\frac{d}{dx}\left[2x^7-3x^4\right] = 14x^6-12x^3$$
$$\frac{d}{dx}\left[-2x^3+x^2+4\right] = -6x^2+2x$$
$$\frac{d}{dx}\left[2x^3(x^2+x-1)\right] = 6x^2\cdot 3x+(x^2+x-1)\cdot 2x^3$$
$$\frac{d}{du}\left[u(u+3)^2\right] = ?\text{zu verkettet?}$$

Aufgabe 3 (f'(x)-f"'(x))

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x+2$$
$$f'(x) = -2x+...$$

Aufgabe 4 Steigung rausfinden an Punkt A(2—f(2))

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}x^2\right] = 2x$$
$$2\cdot 2 = 4$$
$$= \text{m=4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{5}{3}t^3\right] = t^3-5t^2$$
$$= 2^2-5\cdot 2^2$$
$$= 4-20$$
$$= m = -16$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{3}{4}z^2-3x^{-1}\right] = 1,5z+3z^{-2}$$
$$= m = 3,75$$

$$\frac{d}{dx}\left[-x-2x^4\right] = -1+8x$$
$$= m = 15$$

Aufgabe 10

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\sin(2x)}\right] =$$
$$= \frac{du}{dx}\left[e^x\right]\frac{df}{du}[\sin(2x)]$$
$$= e^{\sin(2x)} * 2\cos(2x)$$

kubische Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} - \frac{b}{3a}$$

wobei $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ und $q = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$. Wenn man zuviel zeit hat könnte man damit folgendes ausrechnen:

$x^3 - 7x^2 + 15x - 9$.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 15 - 7^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{6}{3} = 2 \\
q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 15 + 27 \cdot 1^2 \cdot 9}{27 \cdot 1^3} = \frac{-27}{27} = -1 \\
\alpha &= \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\
\beta &= \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\
\gamma &= -\frac{b}{3a} = -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Daher sind die Nullstellen von $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha + \beta + \gamma \approx 4 \\
x_2 &= -\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i(\alpha - \beta) + \gamma \approx 1 \\
x_3 &= -\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i(\alpha - \beta) + \gamma \approx 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 15 - 7^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{6}{3} = 2 \\
q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 15 + 27 \cdot 1^2 \cdot 9}{27 \cdot 1^3} = \frac{-27}{27} = -1 \\
\alpha &= \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27}}}{2}} \approx 1.5 \\
\beta &= \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}
\end{aligned}$$

1.7 Winterferien

csc, sec and cot

The cosecant, secant, and cotangent functions are defined as follows:

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

where θ is an angle measured in radians or degrees.
The cosecant of an angle θ is defined as the reciprocal of the sine of θ. That is, if x is the length of the side opposite to θ and h is the length of the hypotenuse of a right triangle that contains θ, then:

$$\csc(\theta) = \frac{h}{x}$$

The secant of an angle θ is defined as the reciprocal of the cosine of θ. That is, if y is the length of the side adjacent to θ and h is the length of the hypotenuse of a right triangle that contains θ, then:

$$\sec(\theta) = \frac{h}{y}$$

The cotangent of an angle θ is defined as the reciprocal of the tangent of θ. That is, if x is the length of the side adjacent to θ and y is the length of the side opposite to θ, then:

$$\cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

does this mean they are basically the same as $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ and $\tan^{-1}$? No, the cosecant, secant, and cotangent functions are not the same as the inverse trigonometric functions, which are commonly denoted as $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, and $\tan^{-1}$.
The inverse trigonometric functions are used to find the angle that produces a given ratio of sides in a right triangle. For example, if we know the length of two sides of a right triangle, we can use the inverse trigonometric functions to find the measure of the angle opposite to the known sides. The output of an inverse trigonometric function is an angle, whereas the output of the cosecant, secant, and cotangent functions is a ratio of sides.
The inverse trigonometric functions are defined as follows:

$$\sin^{-1}(x) = \theta \qquad \text{if} \qquad \sin(\theta) = x \qquad \text{and} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}(x) = \theta \qquad \text{if} \qquad \cos(\theta) = x \qquad \text{and} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\tan^{-1}(x) = \theta \qquad \text{if} \qquad \tan(\theta) = x \qquad \text{and} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Note that the inverse trigonometric functions are also commonly denoted as arcsin, arccos, and arctan.
In summary, the cosecant, secant, and cotangent functions are reciprocals of the sine, cosine, and tangent functions, respectively, and are used to find the ratios of sides in a right triangle. The inverse trigonometric functions, on the other hand, are used to find the angles that produce a given ratio of sides in a right triangle.

Ableitungen To take the derivatives of the cosecant, secant, and cotangent functions, we can use the quotient rule of differentiation along with the chain rule. Here are the formulas for finding the derivatives:

$$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$$

where x is the independent variable (usually an angle) with respect to which we are differentiating.
To derive these formulas, we start with the definitions of the cosecant, secant, and cotangent functions in terms of the sine, cosine, and tangent functions:

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Then, we use the quotient rule of differentiation:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

where f and g are functions and f' and g' are their derivatives.
Applying the quotient rule and simplifying, we get:

$$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$$

Therefore, the derivative of the cosecant function is equal to minus the cosecant function times the cotangent function, the derivative of the secant function is equal to the secant function times the tangent function, and the derivative of the cotangent function is equal to minus the cosecant squared function.

$$\sum_{n}^{\infty}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \tan x$$

1.7.1 paar aufgben

1.8 5a

Bestimmung der Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$.
Zunächst müssen wir die erste und zweite Ableitungen der Funktion berechnen:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

$$f''(x) = 6x + 3$$

Als nächstes finden wir die Nullstellen von $f'(x)$, indem wir $f'(x) = 0$ setzen und nach x auflösen:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

Daraus ergibt sich $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Diese Werte entsprechen den möglichen Extrempunkten der Funktion.
Nun bestimmen wir die Vorzeichen von $f''(x)$ für die Intervalle $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ und $(1, \infty)$:

$$f''(-3) = -15 < 0$$
$$f''(0) = 3 > 0$$
$$f''(2) = 15 > 0$$

Da $f''(x)$ für $x < -2$ negativ ist, haben wir einen Hochpunkt bei $x = -2$. Da $f''(x)$ für $x > -2$ positiv ist, haben wir ein Minimum bei $x = -2$.
Ähnlich haben wir einen Tiefpunkt bei $x = 1$, da $f''(x)$ für $x < 1$ positiv und für $x > 1$ negativ ist.
Um nun die entsprechenden Funktionswerte zu berechnen, setzen wir $x = -2$ und $x = 1$ in die Funktion $f(x)$ ein:

$$f(-2) = (-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - 6(-2) = -8 - 6 + 12 = -2$$

$$f(1) = 1^3 + \frac{3}{2}(1)^2 - 6(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

Daher sind die Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$ bei $(-2, -2)$ und $(1, -\frac{7}{2})$.

5b

Die gegebene Funktion lautet: $f(x) = x^4 e^x$
Um die Extrempunkte der Funktion zu finden, müssen wir zuerst die Ableitungen berechnen:

$$f'(x) = e^x x^4 + 4e^x x^3$$
$$f''(x) = e^x x^4 + 8e^x x^3 + 12e^x x^2$$

Um die kritischen Punkte zu finden, setzen wir die erste Ableitung gleich null und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^x x^4 + 4e^x x^3 &= 0 \\ e^x x^3(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

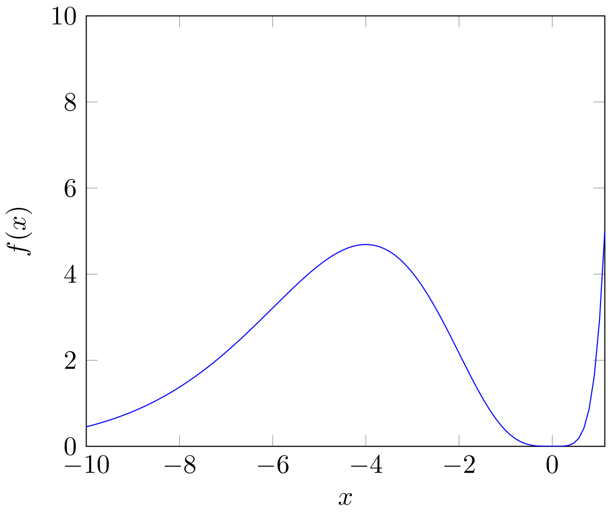
Daraus folgt, dass $x = 0$ oder $x = -4$ oder $f'(x)$ existiert nicht.
Nun überprüfen wir das Vorzeichen der zweiten Ableitung an den kritischen Punkten:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12e^0(0)^2 = 0 \\ f''(-4) &= e^{-4}(-4)^4 + 8e^{-4}(-4)^3 + 12e^{-4}(-4)^2 \\ &= e^{-4}(256 - 768 + 576) \\ &= -32e^{-4} < 0 \end{aligned}$$

Da $f''(-4)$ negativ ist, handelt es sich bei $x = -4$ um ein lokales Maximum. Da $f''(0) = 0$ ist, können wir die Art des Punktes bei $x = 0$ nicht bestimmen. Wir können jedoch eine zweite Ableitungsprobe durchführen, um zu sehen, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt:

$$\begin{aligned} f''(1) &= e^1(1)^4 + 8e^1(1)^3 + 12e^1(1)^2 \\ &= 21e \end{aligned}$$

Da $f''(1)$ positiv ist, handelt es sich bei $x = 0$ um ein lokales Minimum.
Zusammenfassend haben wir:
Der kritische Punkt $x = -4$ ist ein lokales Maximum. Der kritische Punkt $x = 0$ ist ein lokales Minimum.
Plot:



clearpage wegen neuer stunde

1.9 Mathe Unterricht, 10.03.2023

Heute machen wir in der einzelnen Stunde glaub nur eine Prüfungsaufgabe und/oder so, auch ist es im allgmeinfall falsch, dass für Ganzrationale Funktionen die Extrempunkte immer zwischen ihrenNullstellen sind.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (x-1)(3-x) \\
&= x \cdot (-x^2 + 4x - 3) \\
&= -x^3 + 3x^3 - 3x \\
\implies f'(x) &= -3x^2 + 8x - 3 \\
\implies f''(x) &= -6x + 8 \\
f'(x) = 0 &\implies -3x^2 + 8x - 3 \\
x_{1/2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 * (-3) + (-3)}}{-6} \\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{-6} \\
&= \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{-6} \\
x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \\
x_2 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \\
&\text{beides sind einfache nullstellen} \implies \text{Vorzeichen wechsel} \\
f'(\frac{4}{3}) &= -3x^2 + 8x - 3 \\
&= \frac{-16}{3} + \frac{32}{3} - \frac{9}{3} > 0 \\
f''(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}) &=< 0 \implies H
\end{aligned}
$$

hier wär so ein strahl praktisch, des könnt man evtl. als tikz template machen.

1.10 Zusammenfassung für die Arbeit (KA 1, J1-2)

Mittere Änderungsrate, x-Methode

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Änderung gibt an, wie schnell sie die Funktionswerte von x_1 nach x_2 ändern. Man nennt diesen Quotienten auch **Differenzquotienten**.

Änderungsrate, h-Methode

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Hier Sieht man die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^3$, sowie ihre Ableitungen $f'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x^2$. Die Ableitungsfunktionen zeigen je die steiung die die Tangente an der Stelle hätte, das ist bei dem sin -1 bis 1, und bei x^3 ist es $-\infty$ bis ∞.

Regeln:

in general

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

product rule

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) * g(x)\right] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

quotient rule

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

trig derivatives to remember

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec(x)\tan(x)$$
$$\frac{d}{dx}[-\csc x] = \csc(x)\cot(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\cot x] = \csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{where}|x| < 1$$
$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\right] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\text{where}|x| < 1$$
$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\right] = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}\right] = \frac{-1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}\right] = \frac{1}{|x|\sqrt{x_2-1}}\text{where}|x| > 1$$
$$\frac{d}{dx}\left[\csc^{-1}\right] = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\text{where}|x| > 1$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{ax}\right] = ae^{ax}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\ln(ax)\right] = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\log_b x\right] = \frac{1}{x\ln b}$$
$$\frac{d}{dx}\left[b^x\right] = b^x \ln b$$
$$\frac{d}{dx}\left[\sin h\right] = \cos h$$
$$\frac{d}{dx}\left[\cos h\right] = \sin h$$
$$\frac{d}{dx}\left[\tan h\right] = \sec h^2 = \frac{1}{\cos h^2}$$

1.10.1 Vokabeln

f ist **monomon wachsend** für: [A,B]; [A,F]; [A,E]; [B,F]; [B,E]; [F, E].
...**streng monoton wachsend** für: [A,B]; [F,E].
...**monoton fallend** für: [B,F]; [E,G]; [G,H].
...**streng monoton fallend** für: [E,G].

- **Lokales Minimum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert kleiner ist als alle benachbarten Funktionswerte.

- **Lokales Maximum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert größer ist als alle benachbarten Funktionswerte.

- **Globales Minimum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert kleiner ist als alle anderen Funktionswerte auf der gesamten Funktion.

- **Globales Maximum:** Ein Punkt auf einer Funktion, bei dem der Funktionswert größer ist als alle anderen Funktionswerte auf der gesamten Funktion.

1.10.2 Wie man Extrema findet

Einfach übernommen aus Calculus 1, 3.3 und 3.4

1.11 Calculus 3.3, The First Derivative Test for Increasing and Decreasing

Recall:

$$f'(x) > \implies \text{Increasing}$$
$$f'(x) < \implies \text{Decreasing}$$
$$f'(x) = \implies \text{Critical Point/Constant}$$

How to find relative extrema

1. 1st derivative test

   take $f'(x)$

2. set it to =0 for critical numbers
3. make the f'(x) table
4. Find the sign of *each interval*, by plugging into $f'(x)$ (this tells you increasing/decreasing)

example

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$3^2 - 3 = 0$$
$$\implies x^2 - 1 = 0$$
$$\implies x = \pm 1$$

From that we can see that there is a local maxima at $x = -1$ and a local minima at $x = 1$. Then we can just insert that into the main function:

$$\text{Max:} = f(-1) = 3 \implies (-1, 3)$$
$$\text{Min:} = f(1) = -1 \implies (1, -1)$$

another example

$$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$
$$f'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-1/3}$$
$$5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 0$$

$$5x^{-1/3}(x-2) = 0$$
$$0 = \frac{f(x-2)}{\sqrt[3]{x}}$$
$$\implies x - 2 = 0 \implies x = 2$$
$$\implies \sqrt[3]{x} = 0$$

$$\text{max:} = f(0) = 0 \implies (0, 0)$$
$$\text{min:} = f(2) = \approx 14,2866 \implies (2, 14, 2866)$$

1.12 Calculus 3.4, The Second Derivative Test for Concavity of Functions

Recall:

$f''(x) > 0$concave up
$f''(x) < 0$concave down
$f''(x) = 0$possible inflection point (P.I.P.)

How to find Inflection Points with the 2nd Derivative Test

1. find $f''(x)$
2. set =0 for P.I.P.s
3. make table

example

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$
$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$
$$3(x^2 - 6x - 8) = 0$$
$$3(x-4)(x+2) = 0$$
$$\implies x = 4$$
$$\implies x = -2$$

now we have the possible extrema

$$f''(x) = 3x - 6 = 0$$
$$\implies x = 1$$

Solution

max:f(-2)=60 $\implies$ (-2,60)
min:f(4)=-48 $\implies$ (4,-48)
i.p.:f(1)=6 $\implies$ (1,6)

1.13 mathe 2023-03-14

Buch aufgabe

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ f'(x) &= 0 = x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\implies x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3 \text{ einfache Nullstellen} \end{aligned}$$

hier dann noch ne tabelle dazu.

f ist streng monoton wachsend fuer $x \in]-\infty, -1[$ und $[3, \infty[$.
f ist streng monoton fallend fuer $[-1, 2]$

1.14 Unterricht 17.03.2023, Krümmung

$$\begin{aligned} f(t) &= (3t-6)^4 + 3t \\ \implies f'(t) &= 4 \cdot (3t-6)^3 * 3 + 3 \\ \implies f''(t) &= 36 * (3t-6)^2 \\ \text{für nullstellen:} f''(0) &= 0 \\ f''(0) &= 36 * (3t-6)^2 \\ 0 &= (3t-6)^2 \\ 0 &= |3t-6| \\ t_{1/2} &= 2 \text{ doppelte nullstelle} \end{aligned}$$

f'' ist größer oder gleich wie 0 für $x \in R$
$\implies$ Der Graph von f(x) ist linksgekrümmt.

1.15 Mathe Unterricht 2023-03-24

Die aufgaben sind von einem Blatt, das nur auf dem iPad ist.

aufgabe 1.2 Was bedutet das für den Wert der zweiten Ableitung f'' links von der Wendestelle x_w?

$$\begin{aligned} x < x_w &\implies f''(x) > 0 \\ x > x_w &\implies f''(x) < 0 \end{aligned}$$

aufgabe 1.4
Die Wendestelle ist der Ort, an dem die Steigung des Graphen von f maximal oder minimal ist. Deswegen hat f' dort eine Extremstelle.
Aufgabe 2 a) einen vorzwichenwechsel hat. b)

1.15.1 Hausaufgaben

Seite 129 Nummer 6 c)

$$f(x) = (1-x)^2 \cdot e^{-x}$$

Schritte zum Skizzieren

1. Nullstellen finden
   für x: x null setzen
   für y: y null setzen
2. Asymptoten finden
   vertikal: zähler=0 nicht entfernbar
   loch: zähler=0 entfernbar
   horizontal: $\lim_{x\to\infty\pm}$
3. 1. Ableitung test
   kritische punkte
   zunehmend/abnehmend
4. 2. Ableitung test
   Konkavität
   Wendepunkte
5. Tabelle
6. Finde alle möglichen Punkte mit der originalen Funktion
7. Graph

1.1 $(1-x)^2$ = doppelte nullstelle auf x=1
1.2 $f(x) = (1-0)^2 \cdot e^{-0} = 1$ y-achsen schnitt auf y=1

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(1-x)^2 * e^{-x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)^2}{e^x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2(1-x)}{e^x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^2 * e^{-x}\\
f'(x) &= -e^{-x} * (x^2-2x+1)\\
-f'(x) &= e^{-x} * (x^2-2x+1) = 0\\
x^2-2x+1 &= 0\\
(x-1)^2 &= 0\\
\Rightarrow x &= 1
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^2 * e^{-x}\\
f''(x) &= e^{-x} * (x^2-4x+3)\\
f''(x) &= 0 \Rightarrow x = 1,3\\
f''(x) &> 0 \text{ für } x < 1 \;\&\; x > 3, \text{ also konkav nach oben}\\
f''(x) &< 0 \text{ für } 1 < x < 3, \text{ also konkav nach unten}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 1,3$

Hier fehlt noch der Rest.

1.16 Unterricht, Sicherung einer Rennstrecke.

Die in der Abbildung rot gezeichnete Ideallinie einer Rennstrecke wird durch die Funktion f mit

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$$

beschrieben. Die Strohballen werden durch die Gerade $y = 6$ beschrieben. Aufgrund eines Fahrfehlers kommt ein Rennwagen im Punkt $(-1|f(-1))$ von der Ideallinie ab und trifft im Punkt Y auf die Strohballen.

Aufgabe 1 *Bestimmen sie den Punkt Y zeichnerisch mithilfe der Abblidung. Beschreiben sie ihr vorgehen.* Hier zu zeichnen ist offensichtlich unnoetig, man zeichnet die Tangente auf (-1—f(-1)), und schaut wo auf y=6 eintrifft.

Aufgabe 2 *Berechnen Sie den Punkt Y.*

1. hoehe von f(-1) finden, also
$$f(-1) = 4 - \frac{1}{2} - 1^2$$
$$= 3,5$$

2. nun die Ableitung um Steigung der Tangente zu haben.
$$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$$
$$f'(x) = -x$$
fuer -1 ist es dann $m = 1$

3. daraus kann man eine Tangente machen
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
hier ist $x = -1$, $y = 3,5$ und steigung $m = 1$. wenn man das einsetzt bekommt man:
$$y - 3,5 = 1(x + 1)$$
durch umformen erhaelt man $y = x + 4,5$.

4. um dann zu schauen wann diese $y = 6$ erricht setzt man es in die gleichung ein: $6 = x{+}4.5$ und duch loesen erhaelt man $x = 0,5$

Loesung: nun sieht man das der Rennwagen auf $(1,5|6)$ einschlaegt.

Tangentengleichung

Wir suchen die Gleichung der Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Berührpunkt $B(x_0|f(x_0))$.
$$t : y = mx + c$$
Steigung $f = f'(x_0)$
$$\implies t : y = f'(x_0)x + c$$
punkprobe mit B:
$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + c$$
$$\Leftrightarrow c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$
$$\implies t : y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$
$$\Leftrightarrow t : y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

1.17 Arbeitsverbesserung

Besprechung der Klausur (Gruppenarbeit)

1. Besprechen Sie alle Aufgaben. Klären und korrigieren Sie dabei die Fehler jeder Schülerin bzw. jeden Schülers der Gruppe.

2. Einigen Sie sich auf eine Musterlösung der Klausur. Achten Sie dabei auf Vollständigkeit, eine saubere Darstellung und korrekte Anwendung der Fachsprache. Die Musterlösung muss abgeben werden.

3. Jeder Schüler soll in den kommenden Wochen an einer seiner Schwierigkeiten arbeiten. Besprechen Sie in der Gruppe, an welcher Schwierigkeit jede Schülerinbzw. jeder Schüler arbeiten wird.

Reflexion der Klausur (Einzelarbeit)Beantworten Sie ehrlich folgende Fragen.

- Ich bin mit dem Ergebnis der Klausur zufrieden.

  Nein, Joa, Ja

- Was haben Sie in der in der Klausur leicht lösen können? Was hat Ihnen Schwierigkeiten bereitet?

  Ableitungen waren eine Schwierigkeit, auch extremwerte und punkte

- Wie haben Sie sich zu Hause auf die Klausur vorbereitet?

  Die Aufschriebe im Heft noch einmal durchgelesen. *Ja, Joa, Nein*

  Grundbegriffe wiederholt. *Nein, nicht so, Ja*

  Übungsaufgaben gelöst. *Ja, ne, Nein*

  Andersweitig geübt Wie? *Ja, Ne, Ja*

- Wie lange haben Sie für die Klausur gelernt? *10h, 0.5h, 1h*

- Haben Sie aktiv im Unterricht mitgearbeitet? (ständig / häufig / wenig / nie) *Nein, Ja, Nein*

  Im Unterrichtsgespräch? *Nö, wenig, ne*

  In den Arbeitsphasen? *Joa, Ja schon, ein wenig*

- Was hätten Sie im Vorfeld der Klausur anders machen können, um Ihre Note zu verbessern?

  Weis ich nicht, mehr übungsaufgaben, sich überzeugen das es die Zeit wert ist

- An welcher Schwierigkeit werden Sie in den kommenden Wochen arbeiten?

  Alles anders, Hausaufgaben machen, weniger Linux mehr rechnen

1.18

1.18.1

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{5} \cdot x^2 + 9$$
$$f'(x) = 6x^2 - \sqrt{5} \cdot 2x - 1$$

1.18.2

$$u(t) = -3\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$
$$u'(t) = -\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}} - t^{-2}$$

1.18.3

$$g(x) = 4x^2 \cdot e^{3x-2}$$
$$g'(x) = 8xe^{3x-2} + 12x^2 \cdot e^{3x-2}$$

1.18.4

$$h(x) = cos(-x+6) \cdot sin(x)$$
$$h'(x) = \sin(-x+6) \cdot \sin(x) + \cos(-x+6) \cdot \cos(x)$$

1.19

1.19.1

Wendepunkte: 1(0,5;0,5), 2(-0,5;0,5)

1.20

1.20.1

Falsch, grafisch kann man pruefen, dass die Ableitung g' bei $x_0 = 1$ ungefaer 1 ist, in dem intervall $[3;6]$ die mittlere aenderungsrate aber nur $\frac{1}{2}$, also um die haelfte weniger.

1.20.2

Wahr, da es in deiesem Bereich keine positive Steigung gibt.

Teil 2, Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(-(x+h)^2+4(x+h)+3)-(-x^2+4x+3)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2xh-h^2+4x+4h+3+x^2-4x-3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+4h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(-2x-h+4)\\
&= -2x+4
\end{aligned}$$

Daher ist die Ableitungsfunktion von $f(x)$ gleich $f'(x) = -2x + 4$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ für $-2 \leq x \leq 2$. Wir sollen zeigen, dass $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ eine Gleichung der ersten Ableitung von h ist.
Zunächst berechnen wir die Ableitung $h'(x)$ von $h(x)$ nach der Produktregel und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^2)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2\cdot\frac{d}{dx}(e^{\frac{2}{3}x^3})\\
&= 10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2\cdot\frac{2}{3}x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}\\
&= 10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 10x^3\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}
\end{aligned}$$

Dann faktorisieren wir den Term $h'(x)$ mit $10x$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 10x^3\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}\\
&= 10x\cdot(1+x^3)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}
\end{aligned}$$

Daher ist $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ eine Gleichung der ersten Ableitung von $h(x)$, wie gefordert.

1.21 Integralrechnung, Rekonstruktion

Die Gesamtänderung der gröse kann man auis ihrem momnetaner Änderungsrate rekonstruieren – man sagt auch integrieren (integrare → wiederherstellen) –, indem man den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen der momentanen Änderungsrate und der x-Achse bestimmt.

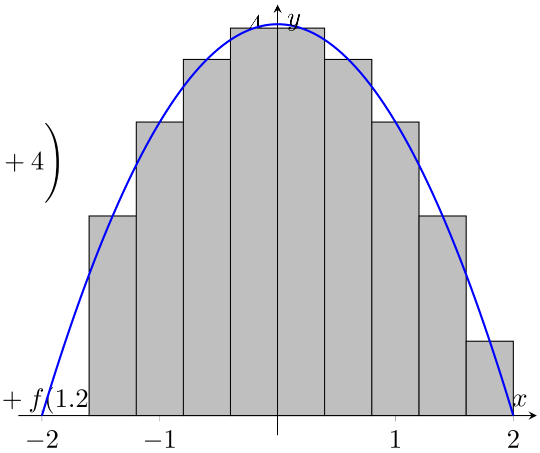
1.21.1 Hausaufgaben

We want to approximate the area under the curve $y = -x^2 + 4$ from $x = -2$ to $x = 2$ using the Riemann sum method.
Let's divide the interval $[-2, 2]$ into n subintervals of equal width Δx, where $\Delta x = \frac{4}{n}$.
For each subinterval i, where $i = 0, 1, \ldots, n-1$, we choose a point x_i in the interval $[x_i, x_{i+1}]$, where $x_i = -2 + i\Delta x$ and $x_{i+1} = x_i + \Delta x$.
The area of each rectangle with base Δx and height $f(x_i) = -x_i^2 + 4$ is given by $\Delta x \cdot f(x_i)$.

Thus, the Riemann sum approximation of the area under the curve is

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4}{n} \cdot \left(- \left(-2 + i\frac{4}{n} \right)^2 + 4 \right)$$

We can use this formula to calculate the approximation for any value of n. For example, let's calculate A_5:



$$A_5 = \frac{4}{5}\left(f(-2) + f(-1.2) + f(-0.4) + f(0.4) + f(1.2\right.$$

1.22 Indefinite Integrals (Calc Book Part 9)

$$\int 35x^6 dx = \frac{35^7}{7} + c = 5^7 + c$$

$$\int \frac{63}{t^8} dt = \int 63 \cdot t^{-8} dx = \frac{63t^{-8+1}}{-8+1} + c = \frac{63t^{-7}}{-7} + c = -\frac{9}{t^7} + c$$

$$\int 15x^{2/3} dx = \frac{15x^{5/3}}{5/3} + c = 9x^{5/3} + c$$

$$\int 48u^{-5} du = \frac{48u^{-4}}{-4} + c = -12^{-4u} + c$$

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int 4du = 4u + c$$

$$\int \frac{8dx}{x^{1/3}} = \int 8x^{-1/3} dx = \frac{8x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{8x^{2/3}}{2/3} + c = 12x^{2/3} + c$$

$$\int (x^2 - 3x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 + 4x + c$$

$$\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{4}{u} \right) dx = \cdots = -\frac{1}{u} - 4\ln{}^{1} u + c$$

$$\int \left(10x^{3/2} + 6x^{1/2}\right) dx = \frac{10x^{5/2}}{5/2} + \frac{6x^{3/2}}{3/2} + c = 4x^{5/2} + 4x^{3/2} + c$$

$$\int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{-3/2}}{1/2} + c = \frac{2t^{3/2}}{3} + 2t^{1/2} + c$$

[1] Recall that a power of $b = -1$ is a special case : $\int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln u + c$

1.23 Und hier eine “ganze” Integralerklaerung

1.23.1 Erst die einfachen Regeln

$$\int ax^b\ dx = \frac{ax^{b+1}}{b+1} + c, \text{(wenn b} \neq \text{-1)}$$

$$\int x^{-1}\ dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int \sin\theta\ d\theta = -\cos\theta + c$$

$$\int \cos\theta\ d\theta = \sin\theta + c$$

$$\int e^{ax}\ dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int b^x\ dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

Beispiel:

$$\int 12x^3\ dx$$

Hier fängt man an es mit der ersten regel zu integrieren:

$$= \frac{12x^{3+1}}{3+1} = \frac{12x^4}{4}$$

Das kürzt man dann auf $3x^4(+c)$.

Beispiel:

$$\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{4}{u}\right)\ du$$

$$= -\frac{1}{u} - 4 \to -\ln u - 4 + c$$

Beispiel:

$$\int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}\ dt}\right)$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{t}}{2} + c$$

Definierte Integrale: diese sind auf der x-Achse definiert, um ihre Fläche zu finden