Einführung in LaTeX

Daniel Renschler

18. Juli 2023

Geschichte

- Donald Knuth hat 1977-1986 TEXgemacht, da er die typografische Qualität seiner Bücher nicht gut fand. (The Art of Computer Programming)

Was ist LaTeX?

- Textsatzystem.
- Ermöglicht Erstellen von Dokumenten.
- Beliebt im Akademischen Bereich/Wissenschaft.
- Erstellt hochwertige PDF Ausgabe.

Warum LaTeX?

- Ist sehr intuitiv.
- Sehr extensiv mit packages.
- Kümmert sich um viel von alleine
- Man muss sich nicht mit Typografie und Vergleichbarem vertraut machen[1].
- Macht spaß

[1] Es funktioniert einfach und sieht gut aus.

Warum nicht Word? (oder andere WYSIWYG[2] software)

- Word macht es schwerer Änderungen an großen Dokumenten vorzunehmen.
- Bibliografien werden nicht automatisch gemacht, auch Zitierstil nachträglich änderbar.
- Seitenzahlen, Referenzen, etc. werden nicht automatisch erzeugt.
- *kann man nicht in Vim benutzen.*

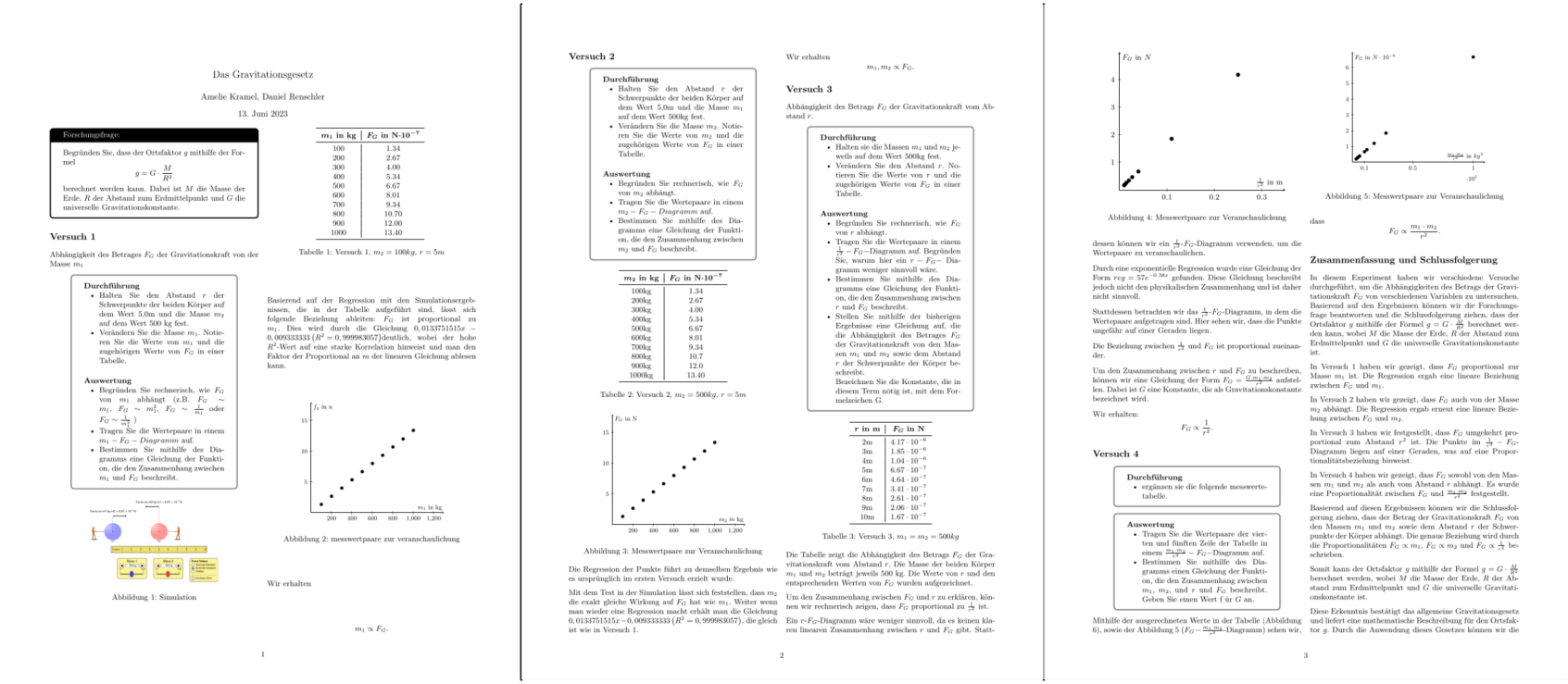
[2] WYSIWYG = What you see is what you get

Nutzzwecke

- Ausarbeitungen/Laborberichte
- Präsentationen
- Dokumente
- Lebenslauf
- Bücher

Berichte

- Laborberichte



Das Gravitationsgesetz

Amelie Kramel, Daniel Renschler

13. Juni 2023

Forschungsfrage:

Begründen Sie, dass der Ortsfaktor g mithilfe der Formel

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

berechnet werden kann. Dabei ist M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante.

Versuch 1

Abhängigkeit des Betrages F_G der Gravitationskraft von der Masse m_1

Durchführung
- Halten Sie den Abstand r der Schwerpunkte der beiden Körper auf dem Wert 5,0m und die Masse m_2 auf dem Wert 500 kg fest.
- Verändern Sie die Masse m_1. Notieren Sie die Werte von m_1 und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von m_1 abhängt (z.B. $F_G \sim m_1$, $F_G \sim m_1^2$, $F_G \sim \frac{1}{m_1}$ oder $F_G \sim \frac{1}{m_1^2}$)
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $m_1 - F_G - Diagramm$ auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_1 und F_G beschreibt.

m_1 in kg	F_G in N·10^{-7}
100	1.34
200	2.67
300	4.00
400	5.34
500	6.67
600	8.01
700	9.34
800	10.70
900	12.00
1000	13.40

Tabelle 1: Versuch 1, $m_2 = 100kg$, $r = 5m$

Basierend auf der Regression mit den Simulationsergebnissen, die in der Tabelle aufgeführt sind, lässt sich folgende Beziehung ableiten: F_G ist proportional zu m_1. Dies wird durch die Gleichung $0,0133751515x - 0,009333333$ ($R^2 = 0,999983057$)deutlich, wobei der hohe R^2-Wert auf eine starke Korrelation hinweist und man den Faktor der Proportional an m der linearen Gleichung ablesen kann.

Abbildung 1: Simulation

Abbildung 2: messwertpaare zur veranschaulichung

Wir erhalten

$$m_1 \propto F_G.$$

1

Versuch 2

Durchführung
- Halten Sie den Abstand r der Schwerpunkte der beiden Körper auf dem Wert 5,0m und die Masse m_1 auf dem Wert 500kg fest.
- Verändern Sie die Masse m_2. Notieren Sie die Werte von m_2 und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von m_2 abhängt.
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $m_2 - F_G - Diagramm$ auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_2 und F_G beschreibt.

m_2 in kg	F_G in N·10^{-7}
100kg	1.34
200kg	2.67
300kg	4.00
400kg	5.34
500kg	6.67
600kg	8.01
700kg	9.34
800kg	10.7
900kg	12.0
1000kg	13.40

Tabelle 2: Versuch 2, $m_2 = 500kg$, $r = 5m$

Abbildung 3: Messwertpaare zur Veranschaulichung

Die Regression der Punkte führt zu demselben Ergebnis wie es ursprünglich im ersten Versuch erzielt wurde.

Mit dem Test in der Simulation lässt sich feststellen, dass m_2 die exakt gleiche Wirkung auf F_G hat wie m_1. Weiter wenn man wieder eine Regression macht erhält man die Gleichung $0,0133751515x - 0,009333333$ ($R^2 = 0,999983057$), die gleich ist wie in Versuch 1.

Wir erhalten

$$m_1, m_2 \propto F_G.$$

Versuch 3

Abhängigkeit des Betrags F_G der Gravitationskraft vom Abstand r.

Durchführung
- Halten sie die Massen m_1 und m_2 jeweils auf dem Wert 500kg fest.
- Verändern Sie den Abstand r. Notieren Sie die Werte von r und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von r abhängt.
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $\frac{1}{r^2} - F_G-$Diagramm auf. Begründen Sie, warum hier ein $r - F_G-$ Diagramm weniger sinnvoll wäre.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen r und F_G beschreibt.
- Stellen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse eine Gleichung auf, die die Abhängigkeit des Betrages F_G der Gravitationskraft von den Massen m_1 und m_2 sowie dem Abstand r der Schwerpunkte der Körper beschreibt.
  Bezeichnen Sie die Konstante, die in diesem Term nötig ist, mit dem Formelzeichen G.

r in m	F_G in N
2m	$4.17 \cdot 10^{-6}$
3m	$1.85 \cdot 10^{-6}$
4m	$1.04 \cdot 10^{-6}$
5m	$6.67 \cdot 10^{-7}$
6m	$4.64 \cdot 10^{-7}$
7m	$3.41 \cdot 10^{-7}$
8m	$2.61 \cdot 10^{-7}$
9m	$2.06 \cdot 10^{-7}$
10m	$1.67 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 3: Versuch 3, $m_1 = m_2 = 500kg$

Die Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Betrags F_G der Gravitationskraft vom Abstand r. Die Masse der beiden Körper m_1 und m_2 beträgt jeweils 500 kg. Die Werte von r und den entsprechenden Werten von F_G wurden aufgezeichnet.

Um den Zusammenhang zwischen F_G und r zu erklären, können wir rechnerisch zeigen, dass F_G proportional zu $\frac{1}{r^2}$ ist.

Ein r-F_G-Diagramm wäre weniger sinnvoll, da es keinen klaren linearen Zusammenhang zwischen r und F_G gibt. Stattdessen können wir ein $\frac{1}{r^2}$-F_G-Diagramm verwenden, um die Wertepaare zu veranschaulichen.

2

Abbildung 4: Messwertpaare zur Veranschaulichung

Abbildung 5: Messwertpaare zur Veranschaulichung

Durch eine exponentielle Regression wurde eine Gleichung der Form $reg = 57e^{-0.38x}$ gefunden. Diese Gleichung beschreibt jedoch nicht den physikalischen Zusammenhang und ist daher nicht sinnvoll.

Stattdessen betrachten wir das $\frac{1}{r^2}$-F_G-Diagramm, in dem die Wertepaare aufgetragen sind. Hier sehen wir, dass die Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen.

Die Beziehung zwischen $\frac{1}{r^2}$ und F_G ist proportional zueinander.

Um den Zusammenhang zwischen r und F_G zu beschreiben, können wir eine Gleichung der Form $F_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$ aufstellen. Dabei ist G eine Konstante, die als Gravitationskonstante bezeichnet wird.

Wir erhalten:

$$F_G \propto \frac{1}{r^2}.$$

Versuch 4

Durchführung
- ergänzen sie die folgende messwertetabelle.

Auswertung
- Tragen Sie die Wertepaare der vierten und fünften Zeile der Tabelle in einem $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = F_G-$Diagramm auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms einen Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_1, m_2, und r und F_G beschreibt. Geben Sie einen Wert f für G an.

Mithilfe der ausgerechneten Werte in der Tabelle (Abbildung 6), sowie der Abbildung 5 ($F_G - \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$-Diagramm) sehen wir, dass

$$F_G \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In diesem Experiment haben wir verschiedene Versuche durchgeführt, um die Abhängigkeiten des Betrags der Gravitationskraft F_G von verschiedenen Variablen zu untersuchen. Basierend auf den Ergebnissen können wir die Forschungsfrage beantworten und die Schlussfolgerung ziehen, dass der Ortsfaktor g mithilfe der Formel $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$ berechnet werden kann, wobei M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante ist.

In Versuch 1 haben wir gezeigt, dass F_G proportional zur Masse m_1 ist. Die Regression ergab eine lineare Beziehung zwischen F_G und m_1.

In Versuch 2 haben wir gezeigt, dass F_G auch von der Masse m_2 abhängt. Die Regression ergab erneut eine lineare Beziehung zwischen F_G und m_2.

In Versuch 3 haben wir festgestellt, dass F_G umgekehrt proportional zum Abstand r^2 ist. Die Punkte im $\frac{1}{r^2} - F_G$-Diagramm liegen auf einer Geraden, was auf eine Proportionalitätsbeziehung hinweist.

In Versuch 4 haben wir gezeigt, dass F_G sowohl von den Massen m_1 und m_2 als auch vom Abstand r abhängt. Es wurde eine Proportionalität zwischen F_G und $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ festgestellt.

Basierend auf diesen Ergebnissen können wir die Schlussfolgerung ziehen, dass der Betrag der Gravitationskraft F_G von den Massen m_1 und m_2 sowie dem Abstand r der Schwerpunkte der Körper abhängt. Die genaue Beziehung wird durch die Proportionalitäten $F_G \propto m_1$, $F_G \propto m_2$ und $F_G \propto \frac{1}{r^2}$ beschrieben.

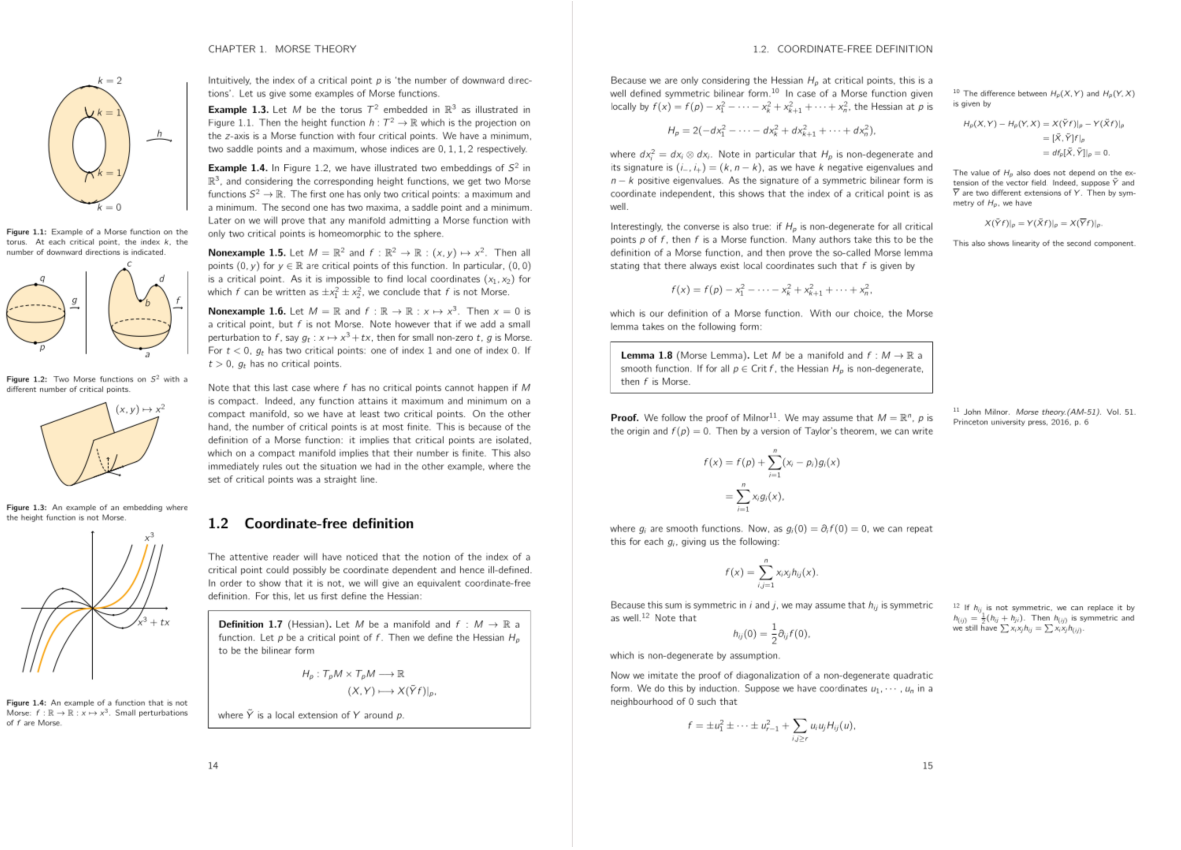
Somit kann der Ortsfaktor g mithilfe der Formel $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$ berechnet werden, wobei M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante ist.

Diese Erkenntnis bestätigt das allgemeine Gravitationsgesetz und liefert eine mathematische Beschreibung für den Ortsfaktor g. Durch die Anwendung dieses Gesetzes können wir die

3

Abbildung: Laborprotokoll Gravitationsgesetz

Paper



CHAPTER 1. MORSE THEORY

Figure 1.1: Example of a Morse function on the torus. At each critical point, the index k, the number of downward directions is indicated.

Figure 1.2: Two Morse functions on S^2 with a different number of critical points.

Figure 1.3: An example of an embedding where the height function is not Morse.

Figure 1.4: An example of a function that is not Morse: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Small perturbations of f are Morse.

Intuitively, the index of a critical point p is 'the number of downward directions'. Let us give some examples of Morse functions.

Example 1.3. Let M be the torus T^2 embedded in $\mathbb{R}^3$ as illustrated in Figure 1.1. Then the height function $h : T^2 \to \mathbb{R}$ which is the projection on the z-axis is a Morse function with four critical points. We have a minimum, two saddle points and a maximum, whose indices are $0, 1, 1, 2$ respectively.

Example 1.4. In Figure 1.2, we have illustrated two embeddings of S^2 in $\mathbb{R}^3$, and considering the corresponding height functions, we get two Morse functions $S^2 \to \mathbb{R}$. The first one has only two critical points: a maximum and a minimum. The second one has two maxima, a saddle point and a minimum. Later on we will prove that any manifold admitting a Morse function with only two critical points is homeomorphic to the sphere.

Nonexample 1.5. Let $M = \mathbb{R}^2$ and $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2$. Then all points $(0, y)$ for $y \in \mathbb{R}$ are critical points of this function. In particular, $(0, 0)$ is a critical point. As it is impossible to find local coordinates (x_1, x_2) for which f can be written as $\pm x_1^2 \pm x_2^2$, we conclude that f is not Morse.

Nonexample 1.6. Let $M = \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Then $x = 0$ is a critical point, but f is not Morse. Note however that if we add a small perturbation to f, say $g_t : x \mapsto x^3 + tx$, then for small non-zero t, g is Morse. For $t < 0$, g_t has two critical points: one of index 1 and one of index 0. If $t > 0$, g_t has no critical points.

Note that this last case where f has no critical points cannot happen if M is compact. Indeed, any function attains it maximum and minimum on a compact manifold, so we have at least two critical points. On the other hand, the number of critical points is at most finite. This is because of the definition of a Morse function: it implies that critical points are isolated, which on a compact manifold implies that their number is finite. This also immediately rules out the situation we had in the other example, where the set of critical points was a straight line.

1.2 Coordinate-free definition

The attentive reader will have noticed that the notion of the index of a critical point could possibly be coordinate dependent and hence ill-defined. In order to show that it is not, we will give an equivalent coordinate-free definition. For this, let us first define the Hessian:

Definition 1.7 (Hessian)**.** Let M be a manifold and $f : M \to \mathbb{R}$ a function. Let p be a critical point of f. Then we define the Hessian H_p to be the bilinear form

$$\begin{aligned} H_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto X(\tilde{Y} f)|_p, \end{aligned}$$

where $\tilde{Y}$ is a local extension of Y around p.

14

1.2. COORDINATE-FREE DEFINITION

Because we are only considering the Hessian H_p at critical points, this is a well defined symmetric bilinear form.[10] In case of a Morse function given locally by $f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$, the Hessian at p is

$$H_p = 2(-dx_1^2 - \cdots - dx_k^2 + dx_{k+1}^2 + \cdots + dx_n^2),$$

where $dx_i^2 = dx_i \otimes dx_i$. Note in particular that H_p is non-degenerate and its signature is $(i_-, i_+) = (k, n-k)$, as we have k negative eigenvalues and $n-k$ positive eigenvalues. As the signature of a symmetric bilinear form is coordinate independent, this shows that the index of a critical point is as well.

Interestingly, the converse is also true: if H_p is non-degenerate for all critical points p of f, then f is a Morse function. Many authors take this to be the definition of a Morse function, and then prove the so-called Morse lemma stating that there always exist local coordinates such that f is given by

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

which is our definition of a Morse function. With our choice, the Morse lemma takes on the following form:

Lemma 1.8 (Morse Lemma)**.** Let M be a manifold and $f : M \to \mathbb{R}$ a smooth function. If for all $p \in \operatorname{Crit} f$, the Hessian H_p is non-degenerate, then f is Morse.

Proof. We follow the proof of Milnor[11]. We may assume that $M = \mathbb{R}^n$, p is the origin and $f(p) = 0$. Then by a version of Taylor's theorem, we can write

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) g_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x), \end{aligned}$$

where g_i are smooth functions. Now, as $g_i(0) = \partial_i f(0) = 0$, we can repeat this for each g_i, giving us the following:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x).$$

Because this sum is symmetric in i and j, we may assume that h_{ij} is symmetric as well.[12] Note that

$$h_{ij}(0) = \frac{1}{2} \partial_{ij} f(0),$$

which is non-degenerate by assumption.

Now we imitate the proof of diagonalization of a non-degenerate quadratic form. We do this by induction. Suppose we have coordinates $u_1, \cdots, u_n$ in a neighbourhood of 0 such that

$$f = \pm u_1^2 \pm \cdots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u),$$

[10] The difference between $H_p(X, Y)$ and $H_p(Y, X)$ is given by

$$\begin{aligned} H_p(X, Y) - H_p(Y, X) &= X(\tilde{Y} f)|_p - Y(\tilde{X} f)|_p \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}] f|_p \\ &= df_p[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_p = 0. \end{aligned}$$

The value of H_p also does not depend on the extension of the vector field. Indeed, suppose $\tilde{Y}$ and $\overline{Y}$ are two different extensions of Y. Then by symmetry of H_p, we have

$$X(\tilde{Y} f)|_p = Y(\tilde{X} f)|_p = X(\overline{Y} f)|_p.$$

This also shows linearity of the second component.

[11] John Milnor. *Morse theory.(AM-51)*. Vol. 51. Princeton university press, 2016, p. 6

[12] If h_{ij} is not symmetric, we can replace it by $h_{(ij)} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. Then $h_{(ij)}$ is symmetric and we still have $\sum x_i x_j h_{ij} = \sum x_i x_j h_{(ij)}$.

15

Abbildung: Auszug einer Masterarbeit über Morse Theory

Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

- Analysis Aufgabe:

$$\lim_{x\to\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)}\right)''\right).$$

Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Physik Beispiel

Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases.[2]

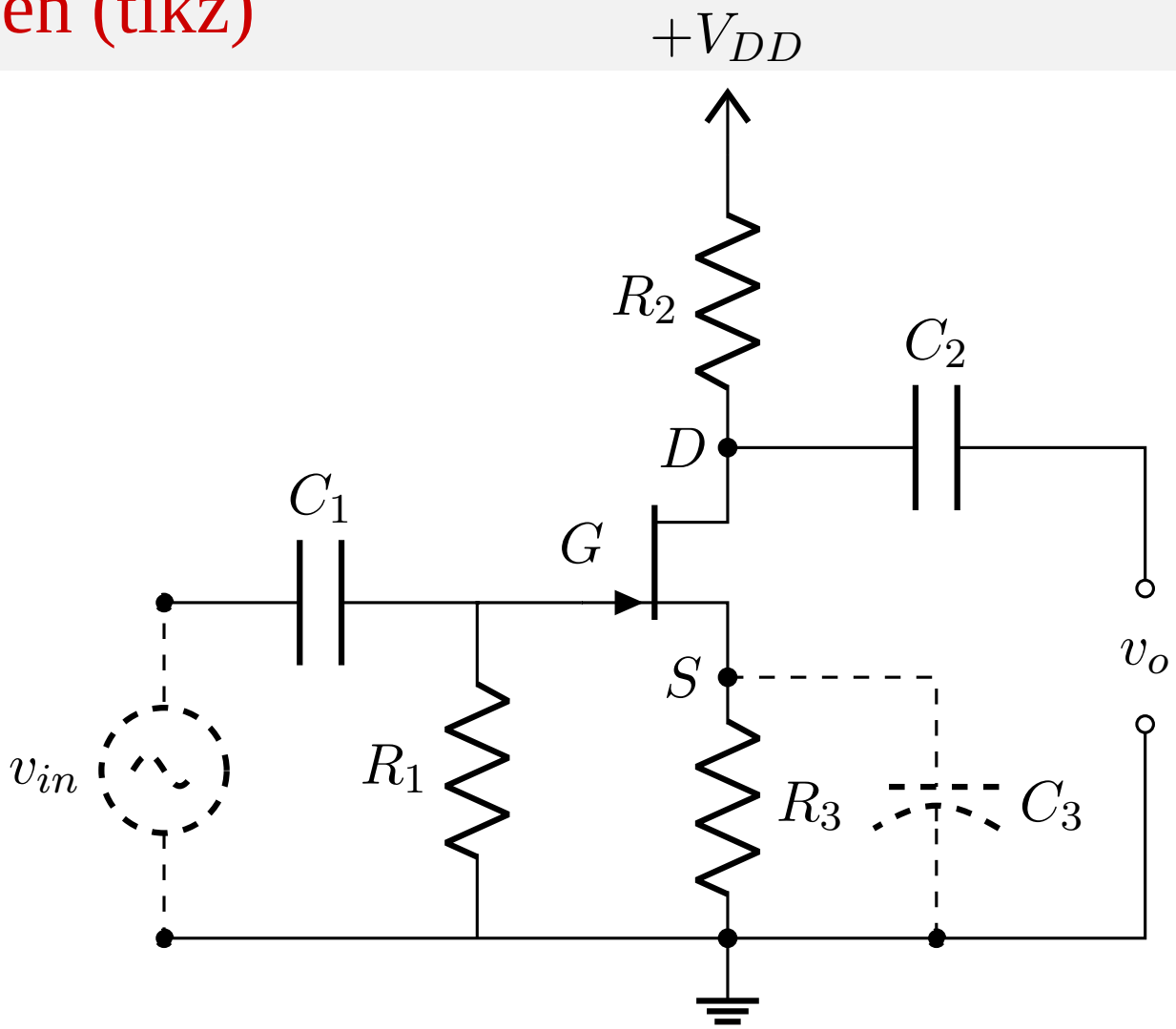
$$\frac{1}{|G|}\sum_g X_i^g \to \sum_h T_{i-1}^h T_i^h, \quad i = 2, \ldots, N,$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_g X_1^g \to \frac{1}{|G|}\sum_{h,h'} e^{-\frac{2\pi i}{|G|}(h'-h)g} T_1^h T_N^{h'} \prod_{i=1}^N X_i^g,$$

$$\sum_h T_i^h T_{i+1}^h \to \frac{1}{|G|}\sum_g X_i^g, i = 2, \ldots, N$$

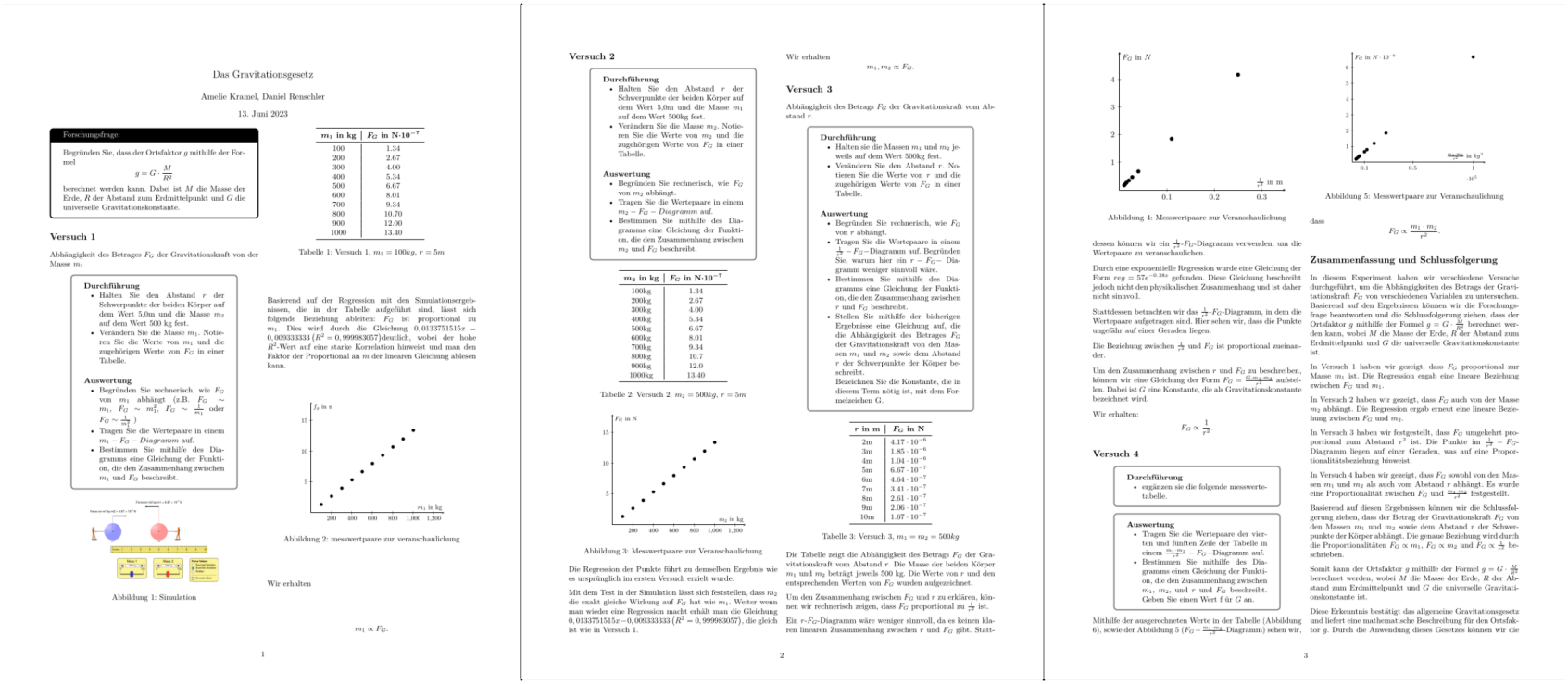
$$\sum_h T_1^h T_2^h \to \frac{1}{|G|}\sum_g X_1^g \prod_{i=1}^N X_i^g.$$

Abbildungen (tikz)



Berichte

- Laborberichte



Das Gravitationsgesetz

Amelie Kramel, Daniel Renschler

13. Juni 2023

Forschungsfrage:

Begründen Sie, dass der Ortsfaktor g mithilfe der Formel

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

berechnet werden kann. Dabei ist M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante.

Versuch 1

Abhängigkeit des Betrages F_G der Gravitationskraft von der Masse m_1

Durchführung
- Halten Sie den Abstand r der Schwerpunkte der beiden Körper auf dem Wert 5,0m und die Masse m_2 auf dem Wert 500 kg fest.
- Verändern Sie die Masse m_1. Notieren Sie die Werte von m_1 und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von m_1 abhängt (z.B. $F_G \sim m_1$, $F_G \sim m_1^2$, $F_G \sim \frac{1}{m_1}$ oder $F_G \sim \frac{1}{m_1^2}$)
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $m_1 - F_G - Diagramm$ auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_1 und F_G beschreibt.

m_1 in kg	F_G in N·10^{-7}
100	1.34
200	2.67
300	4.00
400	5.34
500	6.67
600	8.01
700	9.34
800	10.70
900	12.00
1000	13.40

Tabelle 1: Versuch 1, $m_2 = 100kg$, $r = 5m$

Basierend auf der Regression mit den Simulationsergebnissen, die in der Tabelle aufgeführt sind, lässt sich folgende Beziehung ableiten: F_G ist proportional zu m_1. Dies wird durch die Gleichung $0,0133751515x - 0,009333333$ ($R^2 = 0,999983057$)deutlich, wobei der hohe R^2-Wert auf eine starke Korrelation hinweist und man den Faktor der Proportional an m der linearen Gleichung ablesen kann.

Abbildung 1: Simulation

Abbildung 2: messwertpaare zur veranschaulichung

Wir erhalten

$$m_1 \propto F_G.$$

1

Versuch 2

Durchführung
- Halten Sie den Abstand r der Schwerpunkte der beiden Körper auf dem Wert 5,0m und die Masse m_1 auf dem Wert 500kg fest.
- Verändern Sie die Masse m_2. Notieren Sie die Werte von m_2 und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von m_2 abhängt.
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $m_2 - F_G - Diagramm$ auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_2 und F_G beschreibt.

m_2 in kg	F_G in N·10^{-7}
100kg	1.34
200kg	2.67
300kg	4.00
400kg	5.34
500kg	6.67
600kg	8.01
700kg	9.34
800kg	10.7
900kg	12.0
1000kg	13.40

Tabelle 2: Versuch 2, $m_2 = 500kg$, $r = 5m$

Abbildung 3: Messwertpaare zur Veranschaulichung

Die Regression der Punkte führt zu demselben Ergebnis wie es ursprünglich im ersten Versuch erzielt wurde.

Mit dem Test in der Simulation lässt sich feststellen, dass m_2 die exakt gleiche Wirkung auf F_G hat wie m_1. Weiter wenn man wieder eine Regression macht erhält man die Gleichung $0,0133751515x - 0,009333333$ ($R^2 = 0,999983057$), die gleich ist wie in Versuch 1.

Wir erhalten

$$m_1, m_2 \propto F_G.$$

Versuch 3

Abhängigkeit des Betrags F_G der Gravitationskraft vom Abstand r.

Durchführung
- Halten sie die Massen m_1 und m_2 jeweils auf dem Wert 500kg fest.
- Verändern Sie den Abstand r. Notieren Sie die Werte von r und die zugehörigen Werte von F_G in einer Tabelle.

Auswertung
- Begründen Sie rechnerisch, wie F_G von r abhängt.
- Tragen Sie die Wertepaare in einem $\frac{1}{r^2} - F_G$−Diagramm auf. Begründen Sie, warum hier ein $r - F_G$− Diagramm weniger sinnvoll wäre.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms eine Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen r und F_G beschreibt.
- Stellen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse eine Gleichung auf, die die Abhängigkeit des Betrages F_G der Gravitationskraft von den Massen m_1 und m_2 sowie dem Abstand r der Schwerpunkte der Körper beschreibt.
  Bezeichnen Sie die Konstante, die in diesem Term nötig ist, mit dem Formelzeichen G.

r in m	F_G in N
2m	$4.17 \cdot 10^{-6}$
3m	$1.85 \cdot 10^{-6}$
4m	$1.04 \cdot 10^{-6}$
5m	$6.67 \cdot 10^{-7}$
6m	$4.64 \cdot 10^{-7}$
7m	$3.41 \cdot 10^{-7}$
8m	$2.61 \cdot 10^{-7}$
9m	$2.06 \cdot 10^{-7}$
10m	$1.67 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 3: Versuch 3, $m_1 = m_2 = 500kg$

Die Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Betrags F_G der Gravitationskraft vom Abstand r. Die Masse der beiden Körper m_1 und m_2 beträgt jeweils 500 kg. Die Werte von r und den entsprechenden Werten von F_G wurden aufgezeichnet.

Um den Zusammenhang zwischen F_G und r zu erklären, können wir rechnerisch zeigen, dass F_G proportional zu $\frac{1}{r^2}$ ist.

Ein r-F_G-Diagramm wäre weniger sinnvoll, da es keinen klaren linearen Zusammenhang zwischen r und F_G gibt. Stattdessen können wir ein $\frac{1}{r^2}$-F_G-Diagramm verwenden, um die Wertepaare zu veranschaulichen.

2

Abbildung 4: Messwertpaare zur Veranschaulichung

Durch eine exponentielle Regression wurde eine Gleichung der Form $reg = 57e^{-0.38x}$ gefunden. Diese Gleichung beschreibt jedoch nicht den physikalischen Zusammenhang und ist daher nicht sinnvoll.

Stattdessen betrachten wir das $\frac{1}{r^2}$-F_G-Diagramm, in dem die Wertepaare aufgetragen sind. Hier sehen wir, dass die Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen.

Die Beziehung zwischen $\frac{1}{r^2}$ und F_G ist proportional zueinander.

Um den Zusammenhang zwischen r und F_G zu beschreiben, können wir eine Gleichung der Form $F_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$ aufstellen. Dabei ist G eine Konstante, die als Gravitationskonstante bezeichnet wird.

Wir erhalten:

$$F_G \propto \frac{1}{r^2}.$$

Versuch 4

Durchführung
- ergänzen sie die folgende messwertetabelle.

Auswertung
- Tragen Sie die Wertepaare der vierten und fünften Zeile der Tabelle in einem $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = F_G$−Diagramm auf.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms einen Gleichung der Funktion, die den Zusammenhang zwischen m_1, m_2, und r und F_G beschreibt. Geben Sie einen Wert f für G an.

Mithilfe der ausgerechneten Werte in der Tabelle (Abbildung 6), sowie der Abbildung 5 ($F_G - \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$-Diagramm) sehen wir, dass

Abbildung 5: Messwertpaare zur Veranschaulichung

$$F_G \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In diesem Experiment haben wir verschiedene Versuche durchgeführt, um die Abhängigkeiten des Betrags der Gravitationskraft F_G von verschiedenen Variablen zu untersuchen. Basierend auf den Ergebnissen können wir die Forschungsfrage beantworten und die Schlussfolgerung ziehen, dass der Ortsfaktor g mithilfe der Formel $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$ berechnet werden kann, wobei M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante ist.

In Versuch 1 haben wir gezeigt, dass F_G proportional zur Masse m_1 ist. Die Regression ergab eine lineare Beziehung zwischen F_G und m_1.

In Versuch 2 haben wir gezeigt, dass F_G auch von der Masse m_2 abhängt. Die Regression ergab erneut eine lineare Beziehung zwischen F_G und m_2.

In Versuch 3 haben wir festgestellt, dass F_G umgekehrt proportional zum Abstand r^2 ist. Die Punkte im $\frac{1}{r^2} - F_G$-Diagramm liegen auf einer Geraden, was auf eine Proportionalitätsbeziehung hinweist.

In Versuch 4 haben wir gezeigt, dass F_G sowohl von den Massen m_1 und m_2 als auch vom Abstand r abhängt. Es wurde eine Proportionalität zwischen F_G und $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ festgestellt.

Basierend auf diesen Ergebnissen können wir die Schlussfolgerung ziehen, dass der Betrag der Gravitationskraft F_G von den Massen m_1 und m_2 sowie dem Abstand r der Schwerpunkte der Körper abhängt. Die genaue Beziehung wird durch die Proportionalitäten $F_G \propto m_1$, $F_G \propto m_2$ und $F_G \propto \frac{1}{r^2}$ beschrieben.

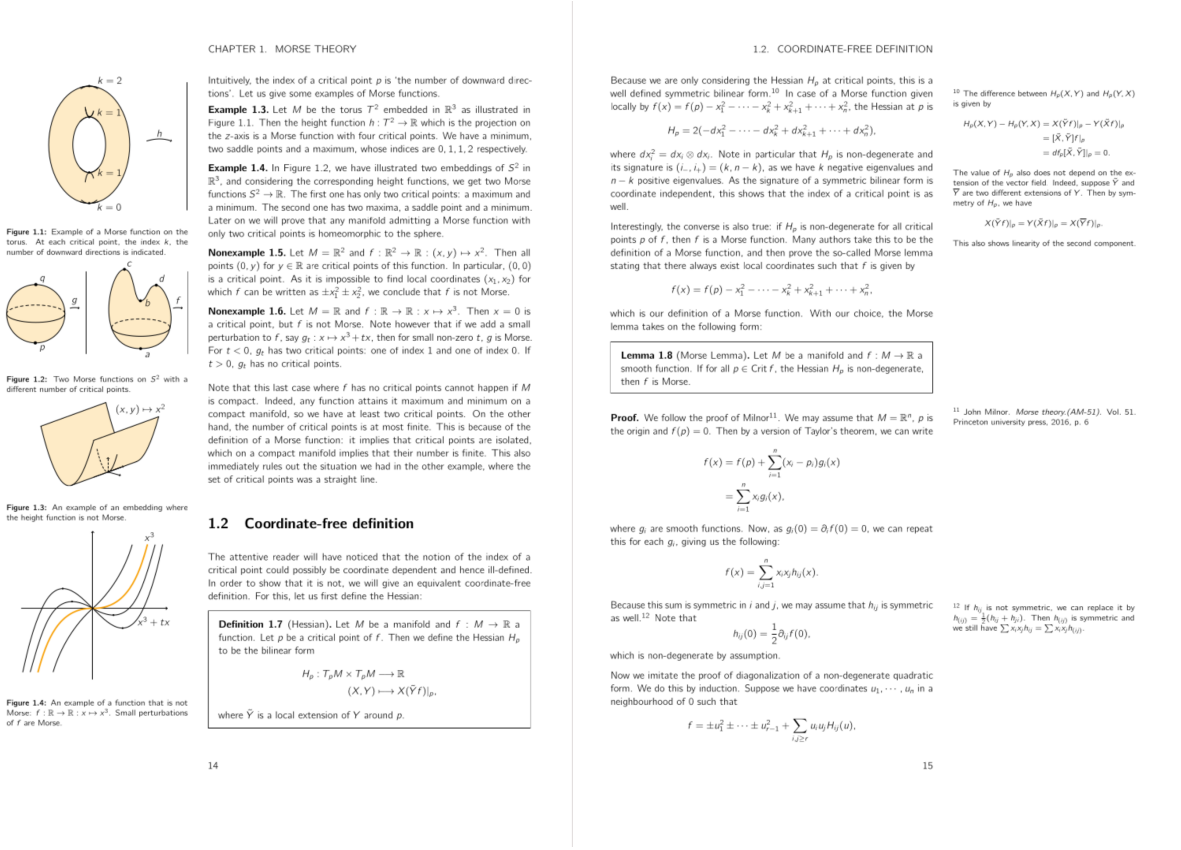
Somit kann der Ortsfaktor g mithilfe der Formel $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$ berechnet werden, wobei M die Masse der Erde, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und G die universelle Gravitationskonstante ist.

Diese Erkenntnis bestätigt das allgemeine Gravitationsgesetz und liefert eine mathematische Beschreibung für den Ortsfaktor g. Durch die Anwendung dieses Gesetzes können wir die

3

Abbildung: Laborprotokoll Gravitationsgesetz

Paper



CHAPTER 1. MORSE THEORY

Figure 1.1: Example of a Morse function on the torus. At each critical point, the index k, the number of downward directions is indicated.

Figure 1.2: Two Morse functions on S^2 with a different number of critical points.

Figure 1.3: An example of an embedding where the height function is not Morse.

Figure 1.4: An example of a function that is not Morse: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Small perturbations of f are Morse.

Intuitively, the index of a critical point p is 'the number of downward directions'. Let us give some examples of Morse functions.

Example 1.3. Let M be the torus T^2 embedded in $\mathbb{R}^3$ as illustrated in Figure 1.1. Then the height function $h : T^2 \to \mathbb{R}$ which is the projection on the z-axis is a Morse function with four critical points. We have a minimum, two saddle points and a maximum, whose indices are $0, 1, 1, 2$ respectively.

Example 1.4. In Figure 1.2, we have illustrated two embeddings of S^2 in $\mathbb{R}^3$, and considering the corresponding height functions, we get two Morse functions $S^2 \to \mathbb{R}$. The first one has only two critical points: a maximum and a minimum. The second one has two maxima, a saddle point and a minimum. Later on we will prove that any manifold admitting a Morse function with only two critical points is homeomorphic to the sphere.

Nonexample 1.5. Let $M = \mathbb{R}^2$ and $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2$. Then all points $(0, y)$ for $y \in \mathbb{R}$ are critical points of this function. In particular, $(0, 0)$ is a critical point. As it is impossible to find local coordinates (x_1, x_2) for which f can be written as $\pm x_1^2 \pm x_2^2$, we conclude that f is not Morse.

Nonexample 1.6. Let $M = \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Then $x = 0$ is a critical point, but f is not Morse. Note however that if we add a small perturbation to f, say $g_t : x \mapsto x^3 + tx$, then for small non-zero t, g is Morse. For $t < 0$, g_t has two critical points: one of index 1 and one of index 0. If $t > 0$, g_t has no critical points.

Note that this last case where f has no critical points cannot happen if M is compact. Indeed, any function attains it maximum and minimum on a compact manifold, so we have at least two critical points. On the other hand, the number of critical points is at most finite. This is because of the definition of a Morse function: it implies that critical points are isolated, which on a compact manifold implies that their number is finite. This also immediately rules out the situation we had in the other example, where the set of critical points was a straight line.

1.2 Coordinate-free definition

The attentive reader will have noticed that the notion of the index of a critical point could possibly be coordinate dependent and hence ill-defined. In order to show that it is not, we will give an equivalent coordinate-free definition. For this, let us first define the Hessian:

Definition 1.7 (Hessian)**.** Let M be a manifold and $f : M \to \mathbb{R}$ a function. Let p be a critical point of f. Then we define the Hessian H_p to be the bilinear form

$$\begin{aligned} H_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto X(\tilde{Y} f)|_p, \end{aligned}$$

where $\tilde{Y}$ is a local extension of Y around p.

14

1.2. COORDINATE-FREE DEFINITION

Because we are only considering the Hessian H_p at critical points, this is a well defined symmetric bilinear form.[10] In case of a Morse function given locally by $f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$, the Hessian at p is

$$H_p = 2(-dx_1^2 - \cdots - dx_k^2 + dx_{k+1}^2 + \cdots + dx_n^2),$$

where $dx_i^2 = dx_i \otimes dx_i$. Note in particular that H_p is non-degenerate and its signature is $(i_-, i_+) = (k, n-k)$, as we have k negative eigenvalues and $n-k$ positive eigenvalues. As the signature of a symmetric bilinear form is coordinate independent, this shows that the index of a critical point is as well.

Interestingly, the converse is also true: if H_p is non-degenerate for all critical points p of f, then f is a Morse function. Many authors take this to be the definition of a Morse function, and then prove the so-called Morse lemma stating that there always exist local coordinates such that f is given by

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

which is our definition of a Morse function. With our choice, the Morse lemma takes on the following form:

Lemma 1.8 (Morse Lemma)**.** Let M be a manifold and $f : M \to \mathbb{R}$ a smooth function. If for all $p \in \operatorname{Crit} f$, the Hessian H_p is non-degenerate, then f is Morse.

Proof. We follow the proof of Milnor[11]. We may assume that $M = \mathbb{R}^n$, p is the origin and $f(p) = 0$. Then by a version of Taylor's theorem, we can write

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) g_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x), \end{aligned}$$

where g_i are smooth functions. Now, as $g_i(0) = \partial_i f(0) = 0$, we can repeat this for each g_i, giving us the following:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x).$$

Because this sum is symmetric in i and j, we may assume that h_{ij} is symmetric as well.[12] Note that

$$h_{ij}(0) = \frac{1}{2} \partial_{ij} f(0),$$

which is non-degenerate by assumption.

Now we imitate the proof of diagonalization of a non-degenerate quadratic form. We do this by induction. Suppose we have coordinates $u_1, \cdots, u_n$ in a neighbourhood of 0 such that

$$f = \pm u_1^2 \pm \cdots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u),$$

[10] The difference between $H_p(X, Y)$ and $H_p(Y, X)$ is given by

$$\begin{aligned} H_p(X, Y) - H_p(Y, X) &= X(\tilde{Y} f)|_p - Y(\tilde{X} f)|_p \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}] f|_p \\ &= df_p[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_p = 0. \end{aligned}$$

The value of H_p also does not depend on the extension of the vector field. Indeed, suppose $\tilde{Y}$ and $\overline{Y}$ are two different extensions of Y. Then by symmetry of H_p, we have

$$X(\tilde{Y} f)|_p = Y(\tilde{X} f)|_p = X(\overline{Y} f)|_p.$$

This also shows linearity of the second component.

[11] John Milnor. *Morse theory.(AM-51)*. Vol. 51. Princeton university press, 2016, p. 6

[12] If h_{ij} is not symmetric, we can replace it by $h_{(ij)} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. Then $h_{(ij)}$ is symmetric and we still have $\sum x_i x_j h_{ij} = \sum x_i x_j h_{(ij)}$.

15

Abbildung: Auszug einer Masterarbeit über Morse Theory

Beispiel 1

Beispiele:

- Irgendwas mit Euler [1]

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

- Analysis Aufgabe:

$$\lim_{x \to \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n_4}}{(2n+1)(4n+3)(4n+4)} \right)'' \right).$$

Toeplitz Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Physik Beispiel

Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases.[2]

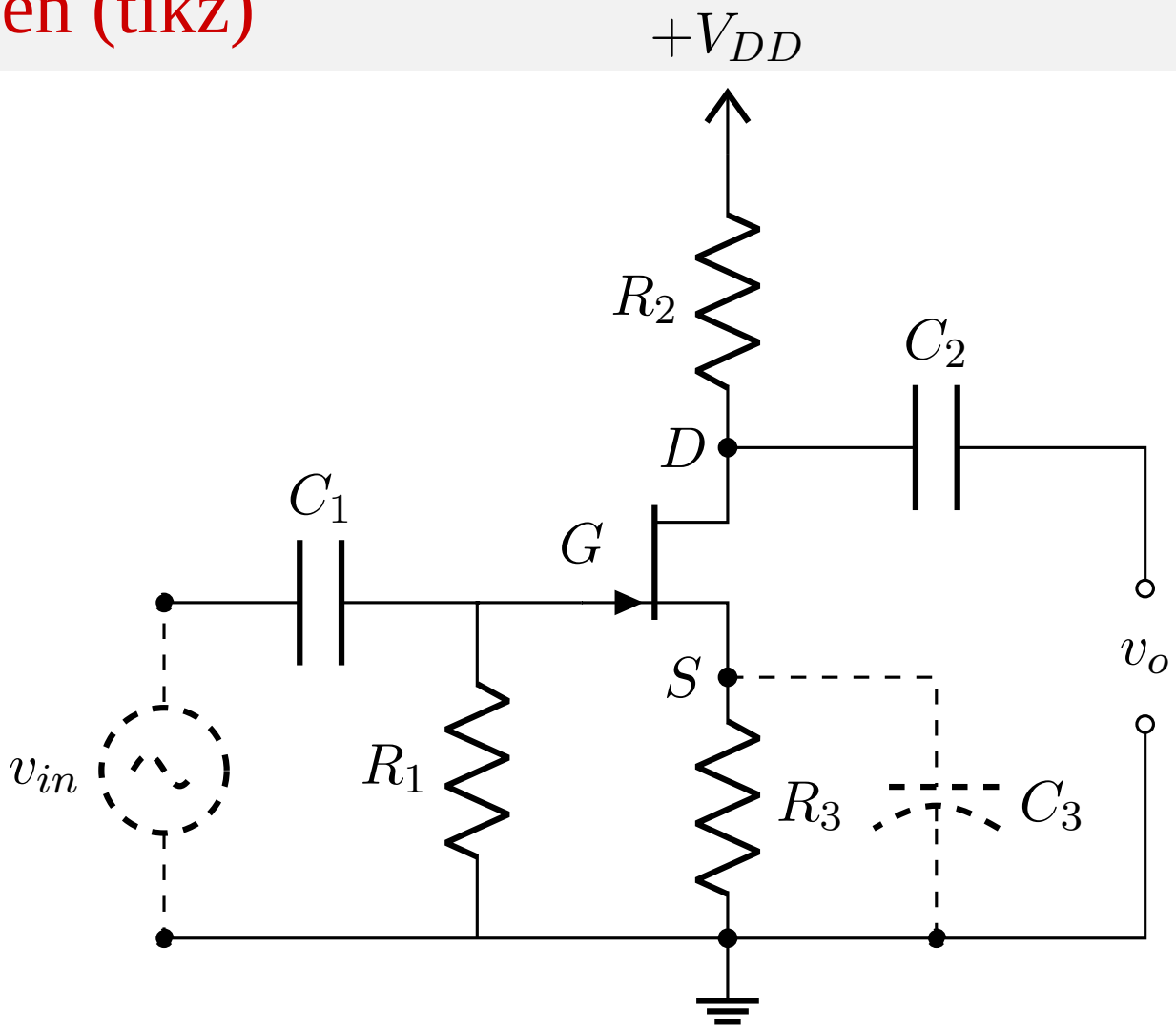
$$\frac{1}{|G|}\sum_g X_i^g \to \sum_h T_{i-1}^h T_i^h, \quad i = 2, \ldots, N,$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_g X_1^g \to \frac{1}{|G|}\sum_{h,h'} e^{-\frac{2\pi i}{|G|}(h'-h)g} T_1^h T_N^{h'} \prod_{i=1}^N X_i^g,$$

$$\sum_h T_i^h T_{i+1}^h \to \frac{1}{|G|}\sum_g X_i^g, i = 2, \ldots, N$$

$$\sum_h T_1^h T_2^h \to \frac{1}{|G|}\sum_g X_1^g \prod_{i=1}^N X_i^g.$$

Abbildungen (tikz)



Aus gestalterischer Sicht

Im Vergleich zu Affinity Publisher

Publisher	LaTeX
Wird unübersichtlich, wenn man nicht genau weiß, was man macht.	Wird auf größeres Dokument nicht unübersichtlich.
Man muss alles grafisch anordnen.	Sachen sind da, wo sie hingehören.

Wie man es benutzt

- Arch-basiert: `pacman -S texlive-basic`
- Debian-basiert: `apt-get install texlive-full`
- MacOS: `MacTeX`
- Windows: `MiKTeX`
- Online: Overleaf

Weitere Resourcen

- diese Präsentation:
  `https://github.com/d-rens/LaTeX-Einfuehrung/`
- LaTeX Tutorials, von Luke Smith
- Overleaf Tutorials
- “The TeXbook”, von Donald E. Knuth

Literatur

[1] Marcin Baranek u. a. *On the randomized Euler algorithm under inexact information*. 2023. arXiv: 2307.04718 [math.NA].

[2] Xie Chen u. a. *Sequential Quantum Circuits as Maps between Gapped Phases*. 2023. arXiv: 2307.01267 [cond-mat.str-el].