

Условие

В данной работе предлагается исследовать механические свойства желеобразных веществ, к которым относятся желе, гели, студни. Встречаются и животные с желеобразными телами, например, медуза Аурелия ушастая (Moon Jelly) с прозрачным студенистым телом.

Желеобразные вещества занимают промежуточное положение между жидкими и твёрдыми веществами. Они характеризуются отсутствием текучести, способностью сохранять форму, прочностью, упругими свойствами. По многим своим механическим свойствам эти вещества уникальны. В данной работе вам предлагается определить модуль Юнга E и скорость звука c в желатине.

В этой работе вам могут помочь следующие теоретические сведения.

Модуль Юнга характеризует упругие свойства вещества, определяя жёсткость различных конструкций. Например, небольшая относительная деформация ε цилиндра сечением S и высотой h под действием растягивающей (или сжимающей) силы F равна (по определению модуля Юнга):

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{F}{ES}.$$

Изгиб цилиндра. Пусть цилиндр закреплён в вертикальном положении. Если к верхнему основанию приложить момент сил M , оно наклонится на угол φ к горизонту. По закону Гука при малых деформациях:

$$M = \kappa \varphi,$$

где κ — *жёсткость цилиндра на изгиб*. Она определяется модулем Юнга и геометрическими параметрами цилиндра по формуле:

$$\kappa = E \frac{\pi R^4}{4h},$$

где R — радиус цилиндра, а h — его высота.

Кручение цилиндра. Верхнее основание цилиндра относительно нижнего, закреплённого, основания можно повернуть на угол φ вокруг оси цилиндра в горизонтальной плоскости. Такая деформация называется кручением. При небольших деформациях по закону Гука момент сил M , необходимый для закручивания цилиндра, также пропорционален углу φ :

$$M = \chi \varphi,$$

где $\chi \approx E\pi R^4/(6h)$ — *крутильная жёсткость* желатинового цилиндра.

Крутильные колебания возникают, если прикреплённый к верхнему основанию цилиндра стержень отклонить в горизонтальной плоскости от положения равновесия на некоторый угол и отпустить (нижнее основание цилиндра закреплено). Период гармонических колебаний такого Т-образного кру-

тильного маятника определяется крутильной жёсткостью цилиндра и моментом инерции I маятника относительно оси вращения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\chi}}.$$

Момент инерции крутильного маятника (подобно массе груза для пружинного маятника) определяет его инерционность. Момент инерции зависит от распределения масс относительно оси вращения маятника. Так, момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m_0 относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, равен:

$$I_{\text{ст}} = \frac{m_0 l^2}{12}.$$

Если же на стержень нацепить небольшой грузик массой m на расстоянии r от оси вращения, то момент инерции маятника увеличится на величину момента инерции грузика $\Delta I = I_m = mr^2$ и станет равным:

$$I = I_{\text{ст}} + mr^2.$$

Это связано с тем, что момент инерции — величина аддитивная.

Модуль Юнга входит в формулу для **скорости звука** в различных материалах. Если, например, по торцу тонкого стержня ударить молотком, то по стержню побежит продольная звуковая волна со скоростью $c = \sqrt{E/\rho}$. Так, для стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7,9$ г/см³ эта скорость составляет $c = \sqrt{E/\rho} \approx 5$ км/с.

Задание

1.1. Изготовьте из желатинового цилиндра диаметром $D = 29$ мм и длинной деревянной линейки Т-образный маятник (при необходимости, если недостаточно собственной «липкости» желатина, линейку можно подклеить к цилиндру, а сам цилиндр к деревянной подставке с помощью «желатинового» клея). Исследуйте желатиновый цилиндр на изгиб статическим методом. Для этого снимите зависимость $\varphi(M)$ — изменения угла φ наклона линейки Т-образного маятника под действием приложенного к линейке момента сил M . Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

1.2. Результаты измерений п. 1.1 представьте графически.

1.3. По результатам эксперимента п. 1.1 получите значение модуля Юнга E желатина. Оцените погрешность измерений.

2.1. Исследуйте желатиновый цилиндр Т-образного маятника на кручение динамическим методом. Для этого исследуйте зависимость изменения периода $T_{\text{крут}}$ крутильных колебаний маятника от изменения момента его инерции. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

2.2. Результаты измерений п. 2.1 представьте графически.

2.3. По результатам измерений п. 2.1 получите значение модуля Юнга E желатина. Оцените погрешность измерений.

3.1. Исследуя поведение тонких ($d = 19,5$ мм) желатиновых цилиндров на вибрирующей подставке, определите скорость продольных звуковых волн c_z в желатине. Желатиновые цилиндры выдавливаются из шприцов с помощью поршня. Для приготовления цилиндров необходимой длины используйте канцелярский нож. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

Внимание: не подавайте на электромоторчик напряжение, превышающее 9,5 В.

Совет: отрезать нужную длину образца лучше по мере выдавливания цилиндра, прижимая нож к торцу шприца.

Подсказка: вибрирующая подставка может быть реализована с помощью линейки с закреплённым на ней электромоторчиком.

3.2. Сравните полученное значение c_z с теоретическим, рассчитанным по формуле $c_t = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга, определённый статическим или динамическим методом. Плотность желатина $\rho = 1,05$ г/см³.

4. С помощью пластиковой ложечки съешьте фруктовое желе. Запишите свои впечатления. Зарисовывать схему установки, описывать методику поедания, определять модуль Юнга и делать оценку погрешности в этом пункте не надо. Ашларыгыз тэмле булсын!

Примечание. Этот пункт можно выполнить в любой момент.

Оборудование. Широкий шприц с внутренним диаметром $D = 29$ мм, деревянная подставка, 3 маленьких шприца с внутренним диаметром $d = 19,5$ мм, электромоторчик постоянного тока с эксцентриком, закреплённый на деревянной линейке, регулируемый источник постоянного тока, стробоскопический тахометр, секундомер, деревянная линейка, канцелярский нож, 2 одинаковые большие гайки массой $m_t = 9,75$ г каждая, канцелярская клипса, фруктовое желе (яблочное, вишнёвое или клубничное), пластиковая (одноразовая) ложечка. Клей (расплавленный желатин) по требованию.

Примечание. Чтобы плавно регулировать напряжение на источнике, поверните ручку пределов напряжения в крайнее правое положение (0-15 В). Остальные положения ручки задают фиксированное значение напряжения.

Примечание. Проверьте, что перед включением два левых тумблера повернуты до конца по часовой стрелке, а два правых тумблера — против часовой стрелки. Для изменения напряжения пользуйтесь двумя правыми тумблерами: «COARSE» для грубого изменения и «FINE» для плавного.

Возможное решение

Статический метод

Отрежем цилиндр желатина высотой $h = 35 \pm 1$ мм из толстого шприца (радиус $R = 14,5$ мм). С помощью клея закрепим его на подставке, а затем приклеим к нему сверху линейку так, чтобы она лежала горизонтально (рис. 1).

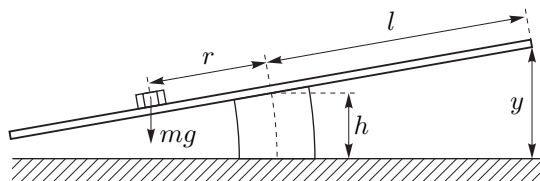


Рис. 1

Для вычисления модуля Юнга снимем зависимость $\varphi(M)$. Угол $\varphi \approx \sin \varphi = \Delta y/l$. Для изменения момента силы M будем использовать гайку. Так как угол φ наклона линейки мал, $M = mgr \cos \varphi \approx mgr$. Если гайка начнет сползать, будем закреплять её желатиновым клеем.

Таблица 1.

r , см	y , см	Δy , см	φ , рад
0	4,4	0,0	0,00
2	6,8	2,4	0,09
3	8,1	3,7	0,14
4	9,2	4,8	0,19
5	10,3	5,9	0,23
6	11,5	7,1	0,27
7	12,6	8,2	0,31
8	13,7	9,3	0,35

Построим график полученной зависимости на рисунке 2 ($\Delta r = 0,1$ см, $\Delta \varphi = \Delta(\Delta y)/l + \Delta l/l \approx 0,2/20 = 0,01$).

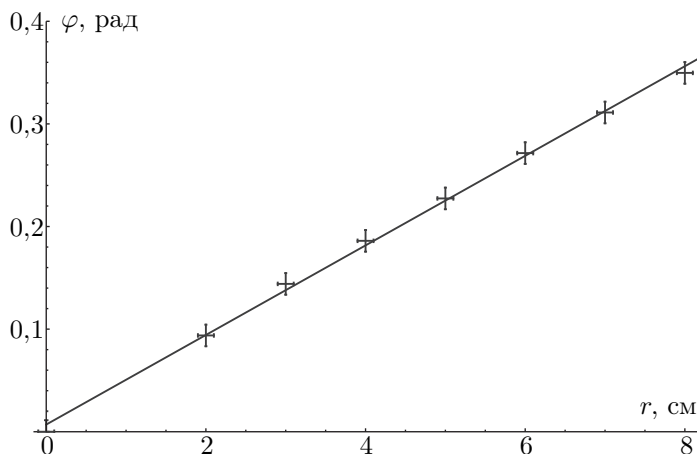


Рис. 2

Угловой коэффициент прямой $s = 4,36 \pm 0,03 \text{ м}^{-1}$ Вычислим модуль Юнга по формуле:

$$E = \frac{4mgh}{\pi s R^4} = 22 \pm 2 \text{ кПа}.$$

Динамический метод

В этой части будем использовать установку из предыдущей части. Теперь положим две гайки на одинаковом расстоянии r от центра (рис. 3).

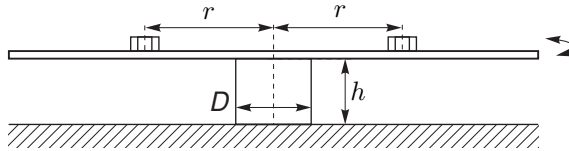


Рис. 3

Аккуратно отклоним линейку на небольшой угол так, чтобы она всё время оставалась горизонтальной (иначе могут возникнуть другие моды колебаний), и отпустим. Возникнут крутильные колебания. Будем измерять время $t = 10T$, за которое система совершает 10 колебаний в зависимости от расстояния до гаек r . Повторим измерения для каждого значения r несколько раз.

Таблица 2.

r , см	$10T_1$, с	$10T_2$, с	$10T_3$, с	$10T_4$, с	$10T_5$, с	r^2 , см ²	T^2 , с ²
0	6,32	6,34	6,35	6,39	6,34	0	0,402
2	6,41	6,41	6,38	6,38	6,47	4	0,410
4	6,87	6,90	6,94	6,84	6,84	16	0,473
6	7,69	7,72	7,62	7,69	7,69	36	0,590
8	8,59	8,66	8,60	8,63	8,66	64	0,744
10	9,68	9,69	9,63	9,68	9,66	100	0,934
12	10,88	10,99	10,91	10,91	10,88	144	1,191
14	12,12	12,15	12,15	12,10	12,09	196	1,469
16	13,37	13,34	13,41	13,34	13,35	256	1,785
18	14,59	14,60	14,63	14,61	14,62	324	2,134
20	15,93	15,91	15,90	15,91	15,92	400	2,532

Момент инерции системы равен $I = I_0 + 2mr^2$, где I_0 — момент инерции линейки. Тогда зависимость квадрата периода колебаний T^2 от r^2 будет линейной:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{\chi} = \frac{8\pi^2 m}{\chi} r^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{\chi}.$$

Построим линеаризованный график $T^2(r^2)$ (рис. 4). Погрешности: $\Delta(r^2) = 2r\Delta r$, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$, $\Delta T \approx 0,2/10 = 0,02$ — время реакции, делённое на количество периодов.

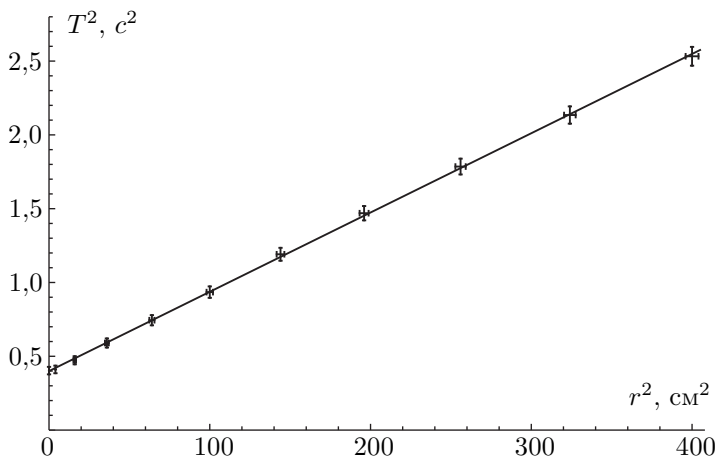


Рис. 4

Угловой коэффициент прямой $a = 8\pi^2 m/\chi = 53,7 \pm 0,3 \text{ с}^2/\text{м}^2$. Отсюда, используя выражение для χ , получаем, что модуль Юнга

$$E = \frac{6\chi h}{\pi R^4} = \frac{48\pi m h}{a R^4} = 22 \pm 2 \text{ кПа}.$$

Резонансный метод

В этой части нам потребуются цилиндры разной высоты, которые мы будем нарезать из образцов в тонких шприцах. Соберем установку (рис. 5).

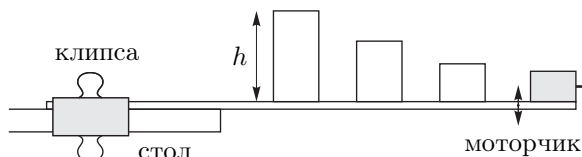


Рис. 5

Линейку с моторчиком закрепим на краю стола с помощью клипсы так, чтобы её конец с двигателем сильно выступал за пределы парты (как минимум, на 10 см). На линейке закрепим несколько желатиновых цилиндров разной высоты. Для каждого цилиндра измерим его резонансную частоту ν_p . Для начала настроим частоту с помощью источника тока так, чтобы амплитуда колебаний выбранного цилиндра высотой H была максимальной. Затем, освещая стробоскопом на вертушку и изменяя частоту вспышек света, найдём положение, когда вертушка моторчика останавливается, и при этом виден

только один винт (если видно несколько винтов, то это кратные частоты). В этом случае частота стробоскопа совпадает с частотой колебаний системы.

В цилиндре возбуждается стоячая волна, при этом, так как амплитуда максимальна на конце цилиндра, то там пучность, значит высота цилиндра — это четверть длины волны, то есть $h = \lambda/4$. При этом скорость звука $c = \lambda\nu_p$, откуда $\nu_p = c/(4h)$. Измерим ν_p для нескольких цилиндров разной высоты.

Таблица 3.

$h, \text{см}$	$\nu_p, \text{об/мин}$	$h^{-1}, \text{м}^{-1}$
4,0	1600	25
3,4	2000	29
2,8	2500	36
2,4	2750	42
2,0	3300	50

Построим график зависимости $4\nu_p(h^{-1})$ (рис. 6).

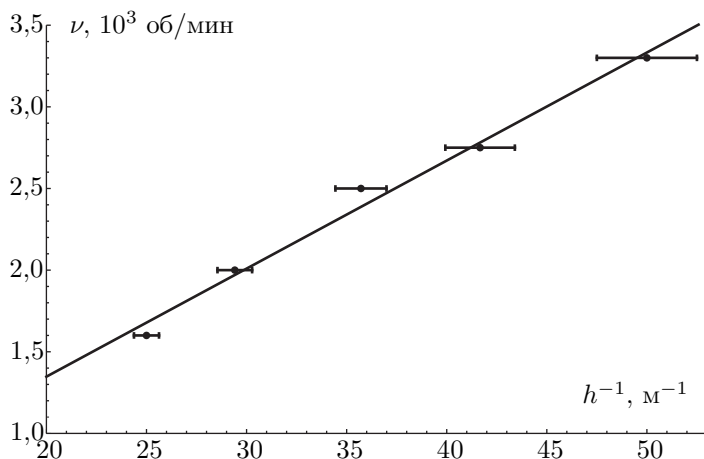


Рис. 6

Угловым коэффициентом проведённой прямой $k = 66 \pm 10 \text{ м} \cdot \text{об/мин}$, откуда скорость звука

$$c_s = \frac{4k}{60} = 4,4 \pm 0,7 \text{ м/с}$$

Посчитаем теоретическое значение $c_t = \sqrt{E/\rho} = 4,6 \pm 0,2 \text{ м/с}$.

4. Приведём один из возможных ответов на этот пункт:

В первую очередь хочется отметить удачный выбор прозрачной упаковки для яблочного желе, которое позволяет насладиться насыщенным цветом красителей «Куркумин» и «Хлорофиллы» ещё до начала выполнения этого пункта. Желе обладает лёгким приятным запахом ароматизатора «Яблоко», что всячески способствует желанию наконец попробовать его. Нельзя обойти стороной нежную, тающую на языке, текстуру желатина и его сладкий (но не приторный) вкус с нотками лимонной кислоты и сорбата калия. Наконец, судя по текучести желе с ложки на ответные листы, разумно предположить, что и модуль Юнга этого желатина значительно меньше результата, полученного в предыдущих пунктах. Можно было бы подтвердить эту догадку измерением, но делать этого мы, конечно же, не будем.

1 Статический метод (3,5)		
1.1	Метод измерений	0,2
	Таблица измерений (7+ точек, диапазон, регулярность)	1,5
	5-6 точек	1
	3-4 точки	0,5
1.2	График	1
	Проведена прямая в области линейности з. Гука	0,4
	Подписаны оси	0,1+0,1
	Выбран хороший масштаб	0,2
	Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,2
1.3	Ответ $E = 12-23$ кПа	0,6
	6-30 кПа	0,3
	Указана погрешность (обосновано)	0,2
2 Динамический метод (5,7)		
2.1	Метод измерений	0,2
	Кол-во периодов при измерении времени 10+	1,2
	5-9	0,8
	3-5	0,4
	Кол-во точек 7+	1,5
	5-6	1,0
	3-4	0,5
2.2	График	1,6
	Линеаризация (величины по осям)	0,6
	Точки ложатся на прямую	0,4
	Подписаны оси	0,1+0,1
	Выбран хороший масштаб	0,1
	Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,3
2.3	Ответ $E = 12-23$ кПа	0,8
	6-30 кПа	0,4
	Указана погрешность (обосновано)	0,4

3 Скорость звука (5,8)		
3.1 Метод измерений		1
Резонанс при $h = \lambda/4$		1,3
Измерения (3+ точек)		1,2
2 точки	0,8	
1 точка	0,5	
График		1
Точки ложатся на прямую	0,4	
Подписаны оси	0,1+0,1	
Выбран хороший масштаб	0,1	
Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,3	
Эксп. скорость звука $c = 3-6$ м/с		0,6
1-9 м/с	0,3	
Указана погрешность обосновано		0,4
3.2 Теор. скорость звука $c = 3-5$ м/с		0,25
2-6 м/с	0,15	
Оценена погрешность		0,05
4 Впечатления		0,01
Сумма		

Условие

Простейший электрический диполь представляет собой систему из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, смещённых друг относительно друга на вектор \vec{l} , проведённый от отрицательного $(-q)$ к положительному заряду $(+q)$. Дипольный момент — это векторная величина, равная:

$$\vec{P} = q\vec{l}.$$

Диполь называют точечным (или элементарным), если его размеры малы по сравнению с расстоянием r до диполя: $l \ll r$.

Эксперимент и теория показывают, что картина силовых линий напряжённости \vec{E} поля электрического точечного диполя \vec{P} не отличается от картины силовых линий магнитной индукции \vec{B} магнитного точечного диполя \vec{P}_m (маленького постоянного магнетика или виточка с током). Это означает, что, получив законы взаимодействия электрических точечных диполей и заменив в формулах \vec{P} на \vec{P}_m , а константу электрического взаимодействия $k_\epsilon = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф — на константу магнитного взаимодействия $k_\mu = \mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$ Гн/м, мы сможем рассчитать поля и законы взаимодействия магнитных диполей. Вектор магнитного момента \vec{P}_m постоянного магнита направлен от южного к северному полюсу (для витка с током это направление соответствует правилу буравчика).

Магнитный шар

Магнитные моменты неодимовых магнитов в нашей работе не меняются под действием внешнего магнитного поля, то есть являются магнитожёсткими.

Поле неодимового шара радиусом R на расстояниях $r \geq R$ совпадает с полем точечного магнитного диполя \vec{P}_m , равного магнитному моменту шара и расположенного в его центре.

Неодимовые шары взаимодействуют как жёсткие точечные диполи, расположенные в центрах шаров.

Железный шар в магнитном поле

Железный шар в нашей работе в отсутствие магнитных полей практически не намагничён и, соответственно, не несёт никакого магнитного момента. В магнитном поле он намагничивается, приобретая магнитный момент пропорциональный индукции магнитного поля B :

$$\vec{P}_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \vec{B} R^3,$$

где R — радиус шара, а μ — магнитная проницаемость железа. В результате возникает взаимодействие между наведённым магнитным моментом шара $\vec{P}_{\text{ш}}$ и магнитным моментом \vec{P}_m постоянного магнита.

Задание

1.1 Снимите зависимость силы $F(\theta)$ взаимодействия двух неодимовых шаров от угла θ между их магнитными моментами с шагом в 10° в двух случаях:

а) магнитный момент \vec{P}_m одного из шаров (неподвижного) направлен вдоль прямой, соединяющей центры шаров.

б) магнитный момент \vec{P}_m одного из шаров (неподвижного) перпендикулярен прямой, соединяющей центры шаров.

Опишите установку и методику измерений.

1.2. Постройте зависимости $F_a(\theta)$ и $F_b(\theta)$ на одном графике.

1.3. Постройте график $\gamma(\theta) = F_a(\theta)/F_b(\theta)$.

2. Получите теоретическое значение отношения $\gamma(\theta)$ для значений $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

3. Определите максимальную силу $F_{\text{сц}}$ сцепления соприкасающихся магнитных шаров.

4. Считая, что неодимовые шары намагничены одинаково, используя экспериментальные данные, рассчитайте их магнитные моменты P_m .

5. Определите индукцию B_n магнитного поля на полюсе неодимового шара.

6. Снимите зависимость силы $F(\theta)$ взаимодействия неодимового шара с железным от угла θ между магнитным моментом \vec{P}_m постоянного магнита и линий, соединяющей центры шаров. Постройте график этой зависимости. Определите отношение $k_z = F_{\text{max}}/F_{\text{min}}$ сил взаимодействия на графике 1.2.

Примечание. Диапазон значений силы для этой зависимости может существенно отличаться от уже выбранного масштаба для графика 1.2. В таком случае вы можете выбрать дополнительную ось ординат (Y), отметив её с правой стороны графика, со своим масштабом и смещением. Укажите, к какой из осей ординат какая зависимость относится.

7. Считая, что железный шар находится в однородном поле, равном внешнему полю в его центре, сделайте теоретическую оценку отношения $k_T = F_{\text{max}}/F_{\text{min}}$ сил взаимодействия магнита с железным шаром. Сравните теоретическую оценку с экспериментальным значением k_z , полученным в предыдущем пункте.

8. Оцените максимальную величину $P_{\text{ш}}$ наведённого магнитного момента железного шара при расстоянии между центрами шаров $r \approx 5$ см.

9. Оцените магнитную проницаемость материала, из которого изготовлен железный шар.

Оборудование. Два одинаковых неодимовых магнитных шара диаметром $d = 20$ мм (один полюс помечен), железный шар диаметром $d = 20$ мм, штатив, устройства для крепления и поворота шаров, шкала для отсчёта угла поворота магнита, электронные весы, деревянная линейка, перманентный маркер по требованию.

Возможное решение

1.1. Закрепим нижний магнит на подставки и положим на весы. Верхний магнит фиксируем в держателе при помощи резинки. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом, показания весов при удалённом расположении магнитов зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда, при сближении магнитов, весы показывают только силу магнитного взаимодействия, причём знаку «+» соответствует отталкивание, а знаку «-» — притяжение магнитов. Важно, чтобы центр магнита находился на оси вращения держателя. Убеждаемся в этом, поворачивая держатель на 180° : сила должна поменяться на противоположную.

а) Магнитный момент нижнего шара ориентируем по вертикали. Верхний шар закрепляем на штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнитов составляла ≈ 10 г. В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают ≈ -10 г). Поворачивая верхний шар (нижний шар неподвижен), снимаем зависимость показаний весов F_{\parallel} от угла θ .

б) Расстояние между шарами не изменяем (сохраняем как в предыдущем пункте). Магнитный момент нижнего шара ориентируем горизонтально и параллельно плоскости вертикальной стойке штатива. Магнитный момент верхнего шара ориентируем параллельно магнитному моменту нижнего шара и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (она оказывается примерно в два раза меньше максимальной силы притяжения в случае $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$). Поворачивая верхний шар в вертикальной плоскости (нижний шар неподвижен) снимаем зависимость показаний весов F_{\perp} от угла θ .

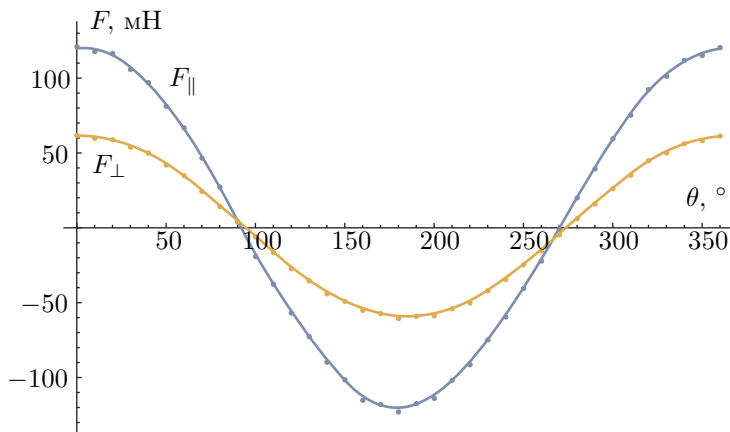


Рис. 1

Результаты измерений при расстоянии между шарами при $r = 96$ мм представлены в Таблице №1.

Таблица 1.

$\theta, ^\circ$	$m_{\parallel}, \text{ г}$	$F_{\parallel}, \text{ мН}$	$m_{\perp}, \text{ г}$	$F_{\perp}, \text{ мН}$	γ
0	12,42	121,7	6,24	61,2	1,99
10	12,08	118,4	6,04	59,2	2,00
20	11,96	117,2	5,95	58,3	2,01
30	10,87	106,5	5,46	53,5	1,99
40	9,97	97,7	5,07	49,7	1,97
50	8,36	81,9	4,27	41,9	1,96
60	6,89	67,5	3,55	34,8	1,94
70	4,83	47,3	2,50	24,5	1,93
80	2,85	27,9	1,50	14,7	1,90
90	0,48	4,7	0,48	4,7	1,00
100	-1,88	-18,4	-0,53	-5,2	3,55
110	-3,77	-37,0	-1,58	-15,5	2,39
120	-5,73	-56,2	-2,66	-26,1	2,15
130	-7,34	-71,9	-3,46	-34,0	2,12
140	-9,08	-89,0	-4,33	-42,4	2,10
150	-10,29	-100,8	-4,84	-47,5	2,12
160	-11,68	-114,5	-5,44	-53,3	2,15
170	-11,97	-117,3	-5,66	-55,5	2,11
180	-12,47	-122,2	-5,98	-58,6	2,09
190	-11,91	-116,7	-5,84	-57,2	2,04
200	-11,55	-113,2	-5,80	-56,8	1,99
210	-10,32	-101,1	-5,33	-52,2	1,94
220	-9,26	-90,8	-4,95	-48,5	1,87
230	-7,56	-74,1	-4,13	-40,5	1,83
240	-6,00	-58,8	-3,38	-33,1	1,78
250	-4,06	-39,8	-2,40	-23,6	1,69
260	-2,19	-21,5	-1,47	-14,4	1,49
270	-0,04	-0,4	-0,40	-3,9	0,10
280	2,11	20,7	0,67	6,6	3,15
290	4,09	40,1	1,67	16,3	2,46
300	6,14	60,2	2,69	26,4	2,28
310	7,75	76,0	3,59	35,2	2,16
320	9,50	93,1	4,55	44,6	2,09
330	10,41	102,0	5,08	49,7	2,05
340	11,49	112,6	5,69	55,8	2,02
350	11,82	115,8	5,89	57,8	2,01
360	12,36	121,1	6,20	60,8	1,99

- 1.2. Графики зависимостей $F_{\parallel}(\theta)$ и $F_{\perp}(\theta)$ представлен на рисунке 1.
 1.3. Построим график $\gamma(\theta) = F_{\parallel}(\theta)/F_{\perp}(\theta)$.

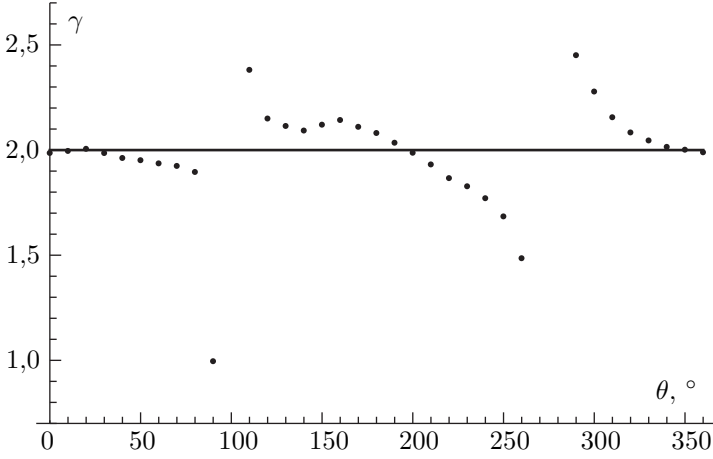


Рис. 2

2. Если второй диполь находится на оси первого ($\vec{r} \parallel \vec{P}_m$), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\parallel}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Если дипольный момент неподвижного шара перпендикулярен прямой, соединяющей их центры ($\vec{r} \perp \vec{P}_m$), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\perp}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Из графиков видно, что эксперимент согласуется с теорией при $\theta = 90^\circ, 270^\circ$. Также из теории следует, что амплитуды колебаний силы в первом и втором случаях различаются в два раза (при $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ обе силы равны нулю и отношение неопределено.):

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = 2.$$

В пределах погрешности это согласуется с экспериментом:

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = \frac{12,42 \text{ г}}{6,24 \text{ г}} = 2,02.$$

3. Снимаем зависимость $F(r)$. Поскольку $F \propto r^{-4}$, график $F^{-1/4}(r)$ — линейная функция (рис. 2).

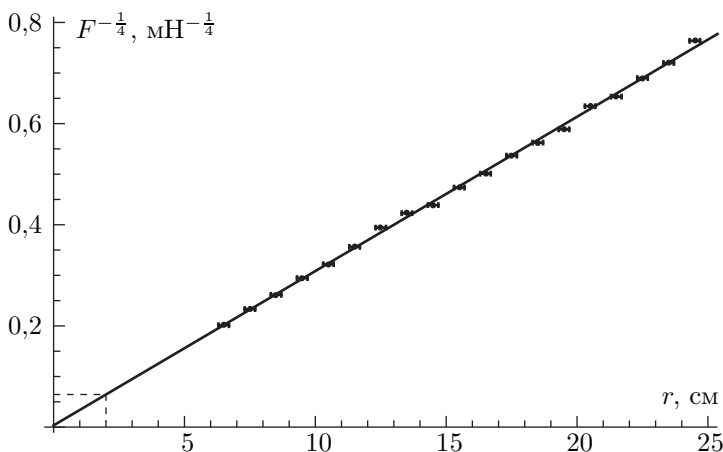


Рис. 3

Угловым коэффициент зависимости $k_{\text{ш}} = 3,10 \pm 0,15 \text{ мН}^{-1/4}\text{м}$. С помощью него определим силу сцепления:

$$F_{\text{сц}} = F(d) = (k_{\text{ш}}d)^{-4} = 69 \pm 15 \text{ Н.}$$

4. Из формулы для максимальной силы находим:

$$P_m = \sqrt{\frac{F_{\text{сц}}(d/2)^4}{6\mu_0/4}} = 4,15 \text{ Дж/Тл.}$$

5. Найдём индукцию магнитного поля на полюсе:

$$B_{\text{п}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{R^3} = 0,83 \text{ Тл.}$$

6. Железный шар закрепим на подставке и разместим на весах. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом, показания весов при удалённом расположении шара и магнита зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда, при сближении шара с магнитом, весы показывают только силу их магнитного взаимодействия: знаку «+» соответствует отталкивание; знаку «-» — притяжение магнитов.

Магнитный шар закрепляем в штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнита с шаром составляла $F_{\text{ш}} \approx 5 \text{ гс}$. В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем

так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают ≈ 5 г). Поворачивая верхний шар (нижний железный шар — неподвижен), снимаем зависимость показаний весов F от угла θ . Результаты измерений при расстоянии между шарами $r_0 = 46$ мм представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$
0	5,40	52,9	120	2,33	22,8	260	1,40	13,7
20	5,12	50,2	140	3,69	36,2	270	1,35	13,2
40	4,00	39,2	160	4,95	48,5	280	1,53	15,0
60	2,60	25,5	180	5,50	53,9	300	2,50	24,5
80	1,55	15,2	200	4,88	47,8	320	3,88	38,0
90	1,39	13,6	220	3,53	34,6	340	4,94	48,4
100	1,51	14,8	240	2,14	21,0	360	5,42	53,1

Построим график $F_{\text{ш}}(\theta)$ на графике вместе с $F_{\parallel}(\theta)$ и $F_{\perp}(\theta)$ (рис. 3). Поскольку диапазон величин $F_{\text{ш}}$ заметно меньше, введём дополнительную ось справа. Отметим, что период полученной косинусоиды в два раза меньше периода графика $F_{\parallel}(\theta)$.

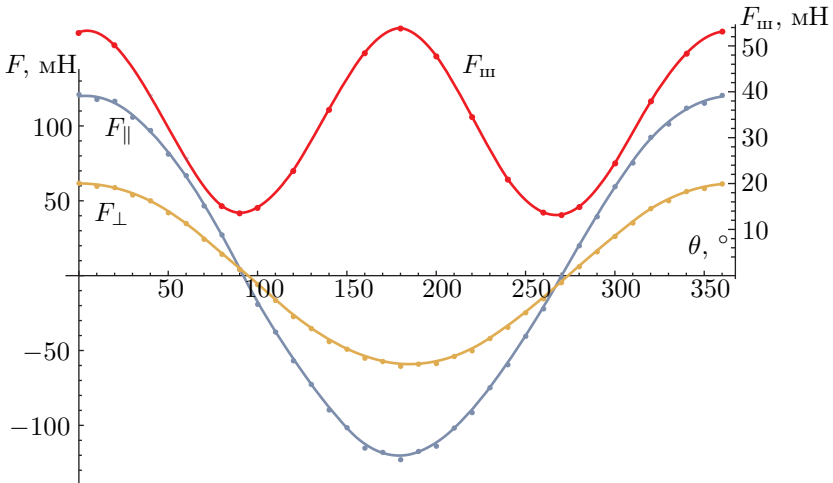


Рис. 4

7. Из законов Кулона, а также электрическо-магнитной аналогии не трудно получить что:

$$F_{\text{max}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m \alpha B_{\parallel}}{r^4},$$

где $\alpha B_{\parallel} = \alpha(2P_m)/r^3$ — наведённый момент шара при $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$.

$$F_{\min} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m \alpha B_{\perp}}{r^4},$$

где $\alpha B_{\perp} = \alpha(P_m)/r^3$ — наведённый момент шара при $\vec{r} \perp \vec{P}_m$.

Таким образом, теоретическая оценка $k_T = F_{\max}/F_{\min} = 4$ — хорошо согласуется с экспериментальным значением: $k_{\text{э}} = 53,1/13,2 = 4,03$.

8. Максимальная сила взаимодействия шара с магнитом на расстоянии между центрами шаров $r_0 = 46$ мм:

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m P_{\text{ш}}}{r_0^4} = 53,1 \text{ мН.}$$

Экспериментально находим, что примерно такая же сила притяжения возникает между магнитными шарами с магнитными моментами, направленными вдоль линии соединяющей центры шаров, на расстоянии $r = 115$ мм:

$$F_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4} = 53,5 \text{ мН.}$$

Теперь можно оценить $P_{\text{ш}}$:

$$\frac{P_{\text{ш}}}{P_m} = \frac{F_{\max}}{F_{\parallel}} \frac{r_0^4}{r^4} \approx 0,024, \quad \text{откуда} \quad P_{\text{ш}} \approx 0,024 P_m \approx 0,1 \text{ Дж/Тл.}$$

9. Оценим μ из формулы для наведённого магнитного момента

$$P_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B R^3 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} 2P_m \frac{R^3}{r_0^3} \approx 0,024 P_m.$$

В пределах погрешности получаем, что отношение

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \approx 1, \quad \text{откуда} \quad \mu \gg 1.$$

Задача E11-2 Магнитное взаимодействие

		Сумма		
1	Таблица измерений, графики для сил, график для отношения		4.0	
	1.1 Таблица измерений			
	Полупериод от минимума до максимума (в таблице есть сила)	1.8+0.2		
	Полупериод от нуля до нуля (в таблице есть сила)	0.9+0.1		
	1.2 Графики для силы	0.9+0.1		
	1.3 График для отношения	1.0		
2	Вывод формул		2.0	
	$F_1 = \frac{6 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) p_1 p_2}{r^4}$	0.6		
	$F_2 = \frac{3 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) p_1 p_2}{r^4}$	1.2		
	$F_3 = 0$	0.2		
3	Определение силы сцепления $F_{\text{сц}} = 57 - 70 \text{ Н}$		2.0	
	Экстраполяция	1.2+0.6+0.2		
	Через пропорцию	0.6+0.3+0.1		
	Экспериментально	0.6+0.3+0.1		
4	Определение $P_m = 3.5 - 4.5 \text{ Дж/Тл}$		1.0	
	Аналогично пункту 3			
5	Определение $B = 0.7 - 0.9 \text{ Тл}$		1.0	
	Аналогично пункту 3			
6	Таблица измерений, графики для сил, отношение		2.0	
	Таблица	1.2		
	График	0.4		
	$k_a < \approx 4$ ($k_a > 3.5$)	0.4		
7	Определено $k_t = 4$		1.0	
8	Определено $P_{\text{ш}} = 0.02 - 0.5 \text{ Дж/Тл}$		1.0	
9	Определение μ		1.0	
	$\frac{\mu-1}{\mu+2} \approx 1$ при условии наличия 8 пункта	1.0		

