

## CH. 1

## 學習重點

不確定度  
簡要處理

- 量測結果之表示
- 不確定度的分類及其組合
- 導出量的不確定度評估

物理量  
的因次

- 基本單位與導出單位
- 物理量的因次
- 因次分析



以最小讀數為1 mm的直尺量測  
10元硬幣直徑3次的結果分別：  
26.5、26.1、26.2 (以mm為單位)

計算平均值  $\bar{x}_{av}$

$$\frac{26.5 + 26.1 + 26.2}{3} = 26.266\cdots \approx 26.27$$

計算標準差  $s$

$$\sqrt{\frac{(26.5 - 26.27)^2 + (26.1 - 26.27)^2 + (26.2 - 26.27)^2}{3 - 1}} = 0.20820\cdots \approx 0.2082$$

計算A類不確定度  $u_A$

$$\frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0.2082}{\sqrt{3}} = 0.12020\cdots \approx 0.1202$$

計算B類不確定度  $u_B$

$$\frac{LC}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.28867\cdots \approx 0.2887$$

計算組合不確定度  $u_C$   
原則上無條件進位至多保留兩位不確定度

$$\sqrt{0.1202^2 + 0.2887^2} = 0.31272\cdots \approx 0.32$$

記錄量測結果  
平均值四捨五入使位數與不確定度對齊

$$(26.27 \pm 0.32) \text{ mm}$$

## 1-1 不確定度的簡要處理

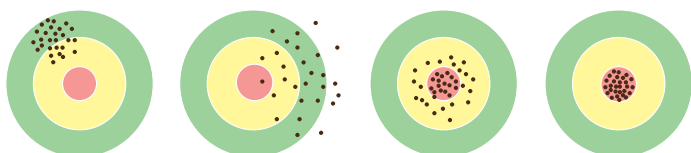
## 學習概念

## 1

## 量測結果之表示

配合課本 7 頁

物理是一門以實驗為基礎的科學，所以實驗結果的正確與否，不僅取決於實驗數據的測量是否正確，還需要配合正確的**數據處理**和**分析**，才可增加實驗結果的**準確度**與**精密度**，讓實驗結果更**貼近事實**。



精密但不準確 不精密也不準確 準確但不精密 既準確又精密

註 準確度：實驗值與待測物理量的真值之差。

精密度：重複多次測量，各結果的差異程度，差異越小，精密度越高（集中度）。

1. 測量誤差  $E$ ：

(1) 意義：實驗結果得到測量值與真值（理論值）的差距，用來描述量測是否準確。

→ 測量誤差  $E = \text{測量值} - \text{真值}$

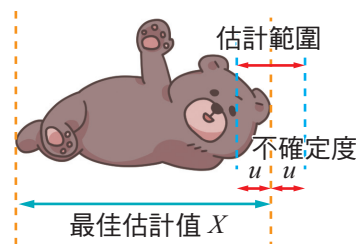
註 真值（理論值）：量測結果的準確值，現廣義解釋為通過做無限多次實驗，測量到的平均物理量。

(2) 疑慮：經由測量所得之**真值**有時**無法準確獲得**，又因**誤差**來自**真值**，常造成誤差無法被有效估算，故國際標準化組織提出以不確定度取代誤差。

2. 不確定度  $u$ ：

(1) 歷史：1993 年國際標準化組織（International Organization for Standard，簡稱 ISO）制定不確定度取代舊有的誤差概念，並建立量測不確定度的評估與表示規則，最終版本於 2008 年修訂，成為現今量測結果的標準。

(2) 意義：用於描述一組測量數據的**分散程度（離散度）**。由於測量的真值難以確定，因此測量結果應該是一個估計範圍，才可合理用來判定測量結果。量測**不確定度愈小**，代表真值可能散佈範圍愈小，也顯示**量測品質愈精密**。



## 3. 量測結果表示式：

測量結果 = 最佳估計值  $X \pm$  不確定度  $u$

註 最佳估計值：根據統計學理論，若測量次數夠多，所有測量值的**算術平均值**將會非常**接近真值**，此值即為最佳估計值，記為  $X$ 。

例 一物體由某高處靜止釋放，測量由釋放至落地時間，結果落在 3.550 s ~ 3.610 s 的範圍內，則此測量結果記為： $(3.580 \pm 0.030)$  s

(3) 誤差和不確定度性質比較：

名稱	誤差	不確定度
意義	測量值與真值的差	測量值的分散程度
量值	正負值皆有可能	恆為 <b>正值</b>
符號	無規定	以 $u$ 表示
與數據分布	無關	<b>有關</b>
與真值	有關	<b>無關</b>
操作性	真值未知，誤差無法確認	可用 <b>統計方法</b> ，評定不確定性
種類	系統誤差（來自公式近似，儀器設備，生理，心理…）、隨機誤差（環境震動，電磁干擾……）	<b>A 類</b> 、 <b>B 類</b> 、組合

4. 計算不確定度的先備公式：

(1) 測量  $N$  次的平均值  $x_{av}$ ：

若對某物理量測得  $N$  個數據  $x_1、x_2、x_3、\cdots、x_N$ ，則**平均值**  $x_{av} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$

**註** 若測量的次數  $N$  夠多時，其**平均值**  $x_{av}$  會趨近於**真值**。

(2) 樣本標準差  $s$ （簡稱標準差）：

用於表示測量數據與平均值間的分散程度，**標準差愈小離散程度愈小**。

$$s = \sqrt{\frac{(x_1-x_{av})^2 + (x_2-x_{av})^2 + (x_3-x_{av})^2 + \cdots + (x_N-x_{av})^2}{N-1}}$$

**註** 現實中，若樣本數量太多，為了增加效率或節省時間與經費，有時只能從實驗數據中進行抽樣而不是以完整母體資料分析，所以要將高一數學學過的母體標準差公式稍微修正。

學習概念 **2** 不確定度的分類及其組合

配合課本 8 頁

1. A 類不確定度及測量結果表示法：

(1) A 類不確定度  $u_A$ （隨機不確定度）

① 來源：由**多次量測**的隨機因素所產生，**機率性**是它的主要特徵，表示這組測量數值**穩定度**。

② A 類不確定度  $u_A$  與標準差  $s$  的關係： $u_A = \frac{s}{\sqrt{N}}$

**註** 如何降低 A 類不確定度：完備實驗方法，降低測量數據的標準差  $s$ 、增加測量次數  $N$

③ 有效位數取值規則：**以無條件進位法，至多保留兩位有效數字**。

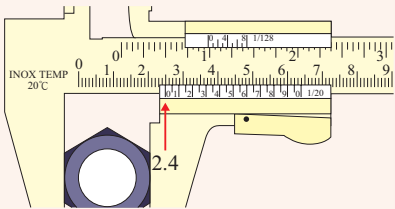
**註** 若一數為 0.00108，其取後有效數字為 0.0011。

(2) 測量結果表示法：**測量結果＝最佳估計值  $X \pm$  A 類不確定度  $u_A$**

**註** 最佳估計值  $X$ ：將平均值  $x_{av}$  以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。

範例 1 A 類不確定度的計算流程

小南同學設計實驗為探討分析 A 類不確定度評估意義，利用精密已校正歸零的游標尺測量硬幣直徑 5 次，所得測量值如下表所示。試完成下方步驟表並求出測量結果。  
( $\sqrt{58} \approx 7.62$ 、 $\sqrt{5} \approx 2.24$ )



次數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
測量值(mm)	24.85	24.90	24.80	24.87	24.83

步驟		實作（作答區）
一	平均值 $x_{av}$ 暫時不用考慮有效位數	$x_{av} = \frac{24.85 + 24.90 + 24.80 + 24.87 + 24.83}{5} = 24.85 \text{ mm}$
二	標準差 $s$ 暫時不用考慮有效位數	$s = \sqrt{\frac{(24.85 - 24.85)^2 + (24.90 - 24.85)^2 + (24.80 - 24.85)^2 + (24.87 - 24.85)^2 + (24.83 - 24.85)^2}{5 - 1}}$ $\approx 0.0381 \text{ mm}$
三	$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。	$u_A = \frac{s}{\sqrt{5}} = \frac{0.0381}{2.24} \approx 0.0170 \Rightarrow 0.017 \text{ mm}$
四	最佳估計值 $X$ ：將平均值 $x_{av}$ 以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。	$x_{av} = 24.85 \text{ mm} \Rightarrow X = 24.850 \text{ mm}$
五	測量結果 = $X \pm u_A$	測量結果 = $(24.850 \pm 0.017) \text{ mm}$

- 類題：某位汽車維修師想要校正車上的時速表，在一條幾近筆直且不受干擾的測試道路上，盡可能讓時速維持在 130 km/h，而協助者利用碼表測量，當汽車通過相隔  $1.0000 \pm 0.0001 \text{ km}$  的兩標誌所需要的時間，得到以下 9 組數據（以秒為單位）：29.04、29.02、29.24、28.89、29.33、29.35、29.00、29.25、29.43，試回答以下問題：
- 求出所需時間的平均值與標準差，並以正確形式表示量測結果。
  - 量測所得這輛汽車的速率為若干？

- 答：(1) 平均值為 29.1722 s；標準差為 0.1883 s；量測結果表示為  $29.172 \pm 0.063 \text{ s}$ ；  
(2)  $123.41 \pm 0.27 \text{ km/h}$
- ( (1) 計算過程標準差先保留四位有效數字，平均值末位則與標準差一致，求得平均值 29.1722 s、標準差 0.1883 s，A 類不確定度為  $\frac{0.1883}{\sqrt{9}} \approx 0.0627 \Rightarrow 0.063$ ，故量測結果表示為  $29.172 \pm 0.063 \text{ s}$ 。  
(2) 根據這幾組量測結果求出的汽車速率為：124.0, 124.1, 123.1, 124.6, 122.7, 122.7, 124.1, 123.1, 122.3 (km/h)，因此這輛汽車的速率為  $123.41 \pm 0.27 \text{ km/h}$ 。 )

2. B 類不確定度及測量結果表示法：

(1) B 類不確定度  $u_B$ （系統不確定度）

① 來源：主要來自儀器限制、引用數據（包含操作手冊）、製造商提供規格、校正證書或權威機構發布的量值。

② B 類不確定度  $u_B$  與量測儀器最小讀數（LC）的關係： $u_B = \frac{LC}{2\sqrt{3}} \approx 0.28867 \times LC$ 。

註：不同儀器的最小讀數可能會以精密度、精準度、精確度、精度、刻度、解析度、…等名詞來表現。

③ 有效位數取值規則：以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。

(2) 測量結果表示法：測量結果 = 最佳估計值  $X \pm$  B 類不確定度  $u_B$

註：最佳估計值  $X$ ：將平均值  $x_{av}$  以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。

範例 2 B 類不確定度的計算流程

小南站在精確度為 0.1 kgw 的電子體重計量體重，用力地縮起小腹，一旁的小依笑笑地說：你以為縮了小腹，體重就會變輕嗎？小南搖搖頭：我當然知道這樣做不會變輕，是因為不縮小腹，我看不到螢幕。當時體重計顯示為 132.3 kgw。此時若由 B 類評估的方法，所得的測量結果如何表示？試完成下方步驟表並求出測量結果。（ $1/2\sqrt{3} \approx 0.28867$ ）

步驟	實作（作答區）
一 $u_B = \frac{LC}{2\sqrt{3}}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。	$u_B = \frac{LC}{2\sqrt{3}} = \frac{0.1 \text{ kgw}}{2\sqrt{3}} \approx 0.028867 \Rightarrow 0.029 \text{ kgw}$
二 最佳估計值 $X$ ：將平均值 $x_{av}$ 以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。	$x_{av} = 132.3 \text{ kgw} \Rightarrow X = 132.300 \text{ kgw}$ (此處需補兩位零)
三 測量結果 = $X \pm u_B$	測量結果 = $(132.300 \pm 0.029) \text{ kgw}$

類題：若一游標尺最小刻度為 0.1 mm，則 B 類不確定度約為多少 mm？

(A) 0.029 (B) 0.011 (C) 0.017 (D) 0.034 (E) 0.055

答：(A) ( $u_B = \frac{0.1 \text{ mm}}{2\sqrt{3}} \approx 0.028867 \text{ mm} \Rightarrow 0.029 \text{ mm}$ 。故選(A)。)

### 3. 組合不確定度及測量結果表示法：

#### (1) 組合不確定度 $u_C$ (不確定度)

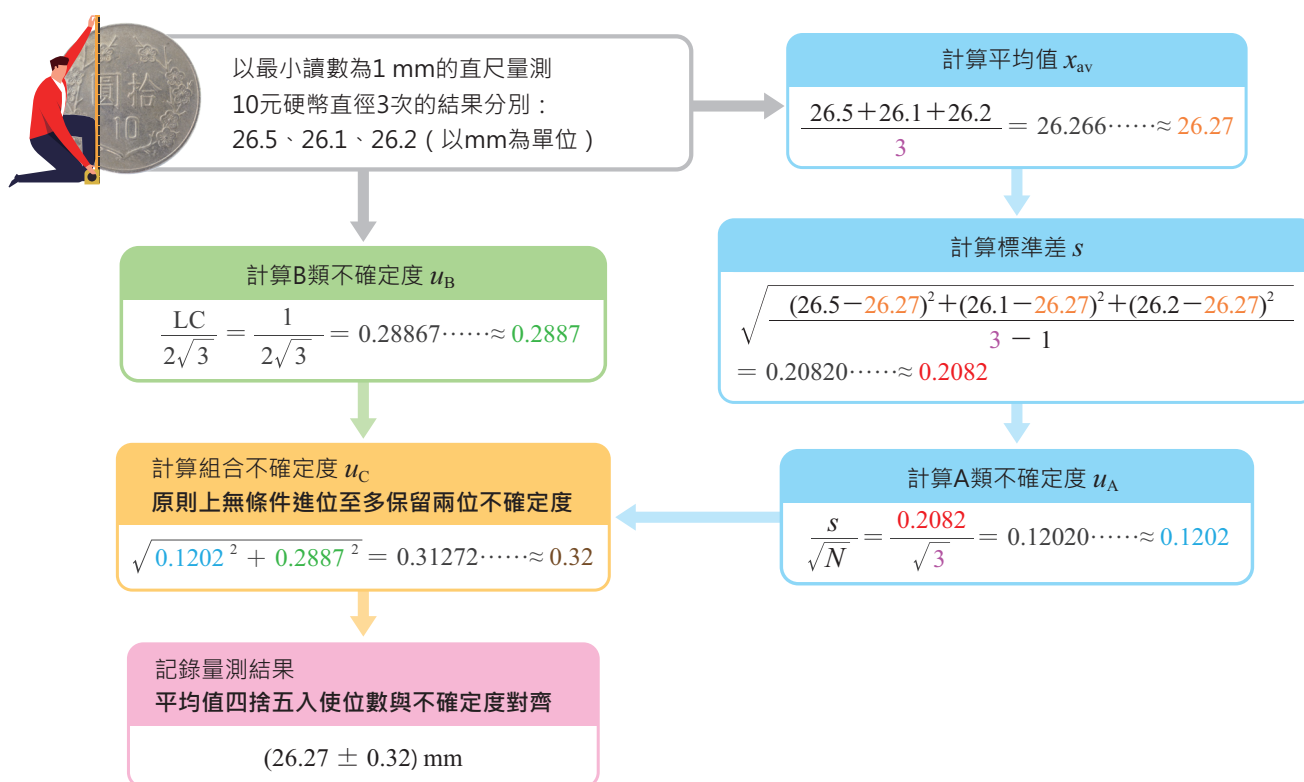
- ① 意義：將多個不確定度來源 ( $u_A$ 、 $u_B$ ) 綜合起來，得到一個總不確定度。
- ② 組合不確定度公式： $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ 。
- ③ 有效位數取值規則：以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。

**註** 組合不確定度  $u_C$  的推導，超出高中課程內容，可視為來自兩個垂直方向量（維度）的影響，因此組合不確定度  $u_C$  為  $u_A$ 、 $u_B$  兩者平方相加開根號。

#### (2) 測量結果表示法：測量結果 = 最佳估計值 $X \pm$ 組合不確定度 $u_C$

**註** 最佳估計值  $X$ ：將平均值  $x_{av}$  以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。

### 4. 重點回顧：



⊙以直尺直接量測10元硬幣直徑（以mm為單位）的結果表示成： $(26.27 \pm 0.32 \text{ mm})$ 。

### 範例 3 組合不確定度的計算流程

小華以一台最小讀數為 1 gw 的彈簧秤量，測某一金屬塊 4 次，得到數據如下表結果，試完成下方步驟表並求出測量結果。 $1/2\sqrt{3} \approx 0.28867$ ， $\sqrt{1037} \approx 32.202$

第幾次	1	2	3	4	平均值 $x_{av}$	標準差 $s$
測量值 (mm)	287.5	287.7	287.6	287.9	287.625	0.2755

答	步驟	實作 (作答區)
一	$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。	$u_A = \frac{0.2755}{\sqrt{4}} = 0.13775 \Rightarrow 0.14 \text{ gw}$
二	$u_B = \frac{LC}{2\sqrt{3}}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。	$u_B = \frac{1 \text{ gw}}{2\sqrt{3}} \approx 0.28867 \Rightarrow 0.29 \text{ gw}$
三	$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字。	$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{(0.14)^2 + (0.29)^2} \approx 0.32202 \Rightarrow 0.33 \text{ gw}$
四	最佳估計值 $X$ ：將平均值 $x_{av}$ 以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。	$x_{av} = 287.625 \text{ gw} \Rightarrow X = 287.63 \text{ gw}$
五	測量結果 = $X \pm u_C$	測量結果 = $(287.63 \pm 0.33) \text{ gw}$

**類題：**珠寶商使用最小刻度為 1 mg 的電子秤測量金飾質量 5 次，求得平均值為  $m_{av}$ ，標準差為 SD。若以  $u_A$ 、 $u_B$  與  $u_C$  分別代表標準的 A 類、B 類與組合不確定度，且已知分析過程計算機顯示  $m_{av}$  為 95.367823 g、 $u_C$  為 0.35686524 mg，則下列選項何者正確？

(112 分科改)

- (A)  $u_A = SD/4$  (B)  $u_B = 1 \text{ mg}$  (C)  $u_C = 0.4 \text{ mg}$   
 (D) 金飾質量的報告應為  $m_{av} = 95.4 \text{ g}$ ， $u_C = 0.36 \text{ mg}$   
 (E) 金飾質量的報告應為  $m_{av} = 95.36782 \text{ g}$ ， $u_C = 0.36 \text{ mg}$

答 (E)

((A)  $u_A = \frac{SD}{\sqrt{N}} = \frac{SD}{\sqrt{5}}$ ；(B)  $u_B = \frac{LC}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \text{ mg}}{2\sqrt{3}} \approx 0.28867 \Rightarrow 0.29 \text{ mg}$ ；(C)  $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ ，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字  $\Rightarrow 0.36 \text{ mg} = 0.00036 \text{ g}$ ；(D)(E) 金飾質量的測量結果 =  $X \pm u_C$ ，最佳估計值  $X$ ：將平均值  $m_{av}$  以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致  $\Rightarrow X = 95.36782 \text{ g}$ ，故  $X \pm u_C = (95.36782 \pm 0.00036) \text{ g}$ 。故選(E)。)



學習概念

3

導出量的不確定度評估

配合課本 11 頁

獨立量測所得導出量的不確定度之評估：當  $X$  與  $Y$  為兩個獨立量測的最佳估計值，若其不確定度分別為  $u_X$  與  $u_Y$ ，則導出量的最佳估計值  $Z$  與不確定度  $u_Z$  其規則如下。

1. 物理量加減後的不確定度：

種類	相加	相減
最佳估計值 $Z$	$X + Y$	$X - Y$
不確定度 $u_Z$	$\sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$	$\sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$
測量結果	$(X + Y) \pm \sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$	$(X - Y) \pm \sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$

- 註
- ① 其有效位數通常以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。
  - ② 若  $Z = aX + bY$  或  $Z = aX - bY$  時， $u_Z = \sqrt{(au_X)^2 + (bu_Y)^2}$ 。

2. 物理量相乘除後的不確定度：

種類	相乘	相除
最佳估計值 $Z$	$XY$	$\frac{X}{Y}$
不確定度 $u_Z$	$ XY  \sqrt{\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$	$\frac{X}{Y} \sqrt{\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$
測量結果	$XY \pm u_Z$	$\frac{X}{Y} \pm u_Z$

- 註
- ① 其有效位數通常以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。
  - ② 兩個物理量相乘除後的不確定度，來自組合不確定性與引入「相對不確定度」來處理。當物理量  $Z = XY$  或  $Z = \frac{X}{Y}$  時， $Z$  的相對組合不確定度可定義為  $\frac{u_Z}{|Z|} = \sqrt{\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$
  - ③ 公式中使用絕對值  $|Z|$ ，可讓相對不確定度恆為正。
  - ④ 對於相乘除不確定度，高中階段著重概念介紹，沒有深入探究。



# 範例 4 物理量加減後不確定度的計算流程

鈞婷有 A、B 兩張正方形桌子，其長度分別為  $(90.00 \pm 0.45)$  cm 和  $(72.00 \pm 0.32)$  cm，兩物為獨立量測。試完成下方步驟表並求出測量結果： $(\sqrt{3049} \approx 55.22)$

(1) 計算出併桌後多少公分：

答	步驟	實作（作答區）
一	A 桌不確定度 $u_x$	0.45 cm
二	B 桌不確定度 $u_y$	0.32 cm
三	$u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ，以無條件進位法，至少保留兩位有效數字	$\sqrt{(0.45)^2 + (0.32)^2} \approx 0.5522 \Rightarrow 0.56$ cm
四	$Z = X + Y$ ，以四捨五入進位法，保留到與不確定度末位一致	$90 + 72 = 162 \Rightarrow 162.00$ cm (此處需補兩位零)
五	測量結果 = $(X + Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$(162.00 \pm 0.56)$ cm

(2) 計算兩張桌子長度相差多少公分：

答	步驟	實作（作答區）
一	A 桌不確定度 $u_x$	0.45 cm
二	B 桌不確定度 $u_y$	0.32 cm
三	$u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ，以無條件進位法，至少保留兩位有效數字	$\sqrt{(0.45)^2 + (0.32)^2} \approx 0.5522 \Rightarrow 0.56$ cm
四	$Z = X - Y$ ，以四捨五入進位法，保留到與不確定度末位一致	$90 - 72 = 18 \Rightarrow 18.00$ cm (此處需補兩位零)
五	測量結果 = $(X - Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$(18.00 \pm 0.56)$ cm

**類題：**阿一老師取出一臺電子秤（儀器精確度為 0.1 g），請小虎同學測量鐵塊試樣與銅塊試樣的質量，電子秤上顯示的讀數分別為 30.1 g 和 79.3 g，則鐵塊和銅塊的總質量應如何表示？ $(1/2\sqrt{3} \approx 0.28867, \sqrt{1682} \approx 41.01)$

- (A)  $(109.40 \pm 0.05)$  g (B)  $(109.4 \pm 0.1)$  g (C)  $(109.400 \pm 0.029)$  g  
(D)  $(109.40 \pm 0.01)$  g (E)  $(109.400 \pm 0.041)$  g

答 (E)

(若不計 A 類不確定度，則鐵塊的測量結果為  $30.1 \pm \frac{0.1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow (30.100 \pm 0.029)$  g，銅塊的測量結果為  $79.3 \pm \frac{0.1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow (79.300 \pm 0.029)$  g，總質量的不確定度為  $\sqrt{0.029^2 + 0.029^2} \approx 0.04101 \Rightarrow 0.041$ ，最佳估計值為  $30.100 + 79.3 = 109.4 \Rightarrow 109.400$ ，測量結果為  $(109.400 \pm 0.041)$  g。故選(E)。

**範例 5 物理量相乘除後不確定度的計算流程**

小南開車出遊，全程位移  $(2.00 \pm 0.10)$  km，費時  $(5.00 \pm 0.60)$  h，試完成下方步驟表並求出平均速度的測量結果。

物理量	測量結果	最佳估計值	組合不確定度
位移量值	$(2.00 \pm 0.10)$ km	$X = 2.00$ km	$u_X = 0.10$ km
時間	$(5.00 \pm 0.60)$ h	$T = 5.00$ h	$u_T = 0.60$ h

計算出平均速率：

答	步驟	實作（作答區）
一	$\frac{u_X}{X}$ ，暫時不用考慮保留位數	$\frac{0.1}{2} = 0.05$
二	$\frac{u_T}{T}$ ，暫時不用考慮保留位數	$\frac{0.6}{5} = 0.12$
三	$\frac{X}{T}$ ，暫時不用考慮保留位數	$\frac{2}{5} = 0.4$
四	$u_z = \left  \frac{X}{T} \right  \sqrt{\left( \frac{u_X}{X} \right)^2 + \left( \frac{u_T}{T} \right)^2}$ ， 以無條件進位法，至多保留兩位有效數字	$ 0.40  \sqrt{(0.05)^2 + (0.12)^2} = 0.052 \text{ km/h}$
五	$Z = \frac{X}{T}$ ，以四捨五入進位法，保留到與不確定度末位一致	$\frac{2}{5} = 0.4 \Rightarrow 0.400 \text{ km/h}$ (此處需補二位零)
六	測量結果 $= \frac{X}{T} \pm u_z$	$(0.400 \pm 0.052) \text{ km/h}$

**類題：**在研究浮體時，同學推測圓柱浮體能否穩定維持直立，與密度有關。故決定先測量圓柱體的體積，以同一把尺對圓柱體的直徑與高度各測量 4 次，並將結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、標準差平方與 1/12。

(111 分科改)

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	標準差平方	1/12
直徑 (mm)	121.2	121.5	121.0	121.9	121.400	0.1533333	0.083333
高度 (mm)	100.0	100.8	100.4	101.2	100.600	0.2666667	0.083333

則圓柱體體積的組合不確定度，是否為高度與直徑兩者之組合不確定度的和？

(因體積為物理量相乘除後的不確定度，圓柱體體積 = 底面積  $\times$  高，假設底面積與高的最佳估計值分別為  $X$ 、 $Y$ ，則圓柱體體積的組合不確定度為  $u_z = |XY| \sqrt{\left( \frac{u_X}{X} \right)^2 + \left( \frac{u_Y}{Y} \right)^2} \neq$  高度與直徑兩者之組合不確定度的和。)

**答：**否。

## 1-1

## 課後練習

\* 為多選題

## 基礎題

## 概念 不確定度的分類及其組合

(解析見解答本)

- ( D ) 1. 小依使用彈簧秤測量蘋果手機的重量多次後，求得 A 類不確定度  $u_A$ ，而由彈簧秤的最小讀數推得 B 類不確定度  $u_B$ ，並由 A 類與 B 類不確定度，求得組合不確定度  $u_C$ 。若之後小依以相同測量方式增加測量次數，則  $u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$  變化的情形最可能為何？
- (A)  $u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$  均不變 (B)  $u_A$  變小、 $u_B$  變大、 $u_C$  不變 (C)  $u_A$  變小、 $u_B$  不變、 $u_C$  不變 (D)  $u_A$  變小、 $u_B$  不變、 $u_C$  變小 (E)  $u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$  均變小

## 2. ~ 3. 題為題組

小南利用校正過的精密游標尺測量某象棋的直徑 5 次，測量結果記錄如下表，若僅考慮 A 類不確定度評估，則： $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472\right)$

次數	1	2	3	4	5	平均值
測量值 (mm)	28.85	28.90	28.80	28.87	28.83	28.85

- ( D ) 2. 若標準差  $s=0.038078\cdots$  (mm)，則不確定度  $u_A$  為多少 mm？  
 (A) 0.019 (B) 0.022 (C) 0.0170 (D) 0.017 (E) 0.02
- ( B ) 3. 根據測量數據，找出最佳估計值為多少 mm？  
 (A) 24.85 (B) 24.850 (C) 24.800 (D) 24.90 (E) 24.9
- ( A ) 4. 下列象棋直徑的測量結果何者表示最恰當？  
 (A)  $(24.850 \pm 0.017)$  mm (B)  $(24.850 \pm 0.0170)$  mm (C)  $(24.90 \pm 0.0170)$  mm  
 (D)  $(24.90 \pm 0.017)$  mm (E)  $(24.85 \pm 0.02)$  mm

## 概念 導出量的不確定度評估

- \*( A D ) 5. 下列關於不確定度的敘述哪些正確？
- (A) 若測量時同時存在 A 類與 B 類不確定度，且分別為  $u_A$  與  $u_B$ ，則其組合不確定度會同時大於  $u_A$  與  $u_B$  (B) 獨立測量的兩物理量  $X$ 、 $Y$  相加後，其不確定度  $u$  為  $X$ 、 $Y$  個別物理量不確定度  $u_X$ 、 $u_Y$  之和 (C) 不確定度可以為負值 (D) 電子溫度計的 B 類不確定度為  $\frac{\text{儀器最小讀數}}{2\sqrt{3}}$  (E) 兩物理量相乘後，其不確定度的有效位數，通常以無條件進位，至多保留四位有效數字

6. 雷射測距儀是藉由雷射脈衝光的反射來測量距離，具有準確迅速、獨立操作優點，還能針對危險的區域進行測距。地震後救難員小南利用雷射測距儀量測一危樓，測量出 2 層樓高的總高度為  $h_Y = Y \pm u_Y$ ，而 1 樓的高度為  $h_X = X \pm u_X$ ，其中  $u_X$ 、 $u_Y$  分別為樓高的 B 類不確定度，且各樓只測量一次，兩樓高度差為  $\Delta h = h_Y - h_X = Z \pm u_Z$ ，請求出下列數值：
- (1) 最佳估計值  $Z$ ；(2) 不確定度  $u_Z$ ；(3)  $u_Z$  為  $u_X$  幾倍

**答：**(1)  $Z = Y - X$ ；(2)  $u_Z = \sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$ ；(3)  $\sqrt{2}$  倍

### 進階題

1. 小南健康檢查時，護理師拿出耳溫槍幫他量測體溫，若單次量測體溫被記錄為  $(36.500 \pm 0.029)^\circ\text{C}$ ，則溫度計的最小刻度為 0.1  $^\circ\text{C}$ 。（ $1/2\sqrt{3} \approx 0.28867$ ）
2. 小依以精確度為 0.1 kgw 的電子體重計量體重，總共量了 6 次，體重計上都顯示一模一樣的數值為 42.3 kg，請求出下列數值：
- (1) A 類不確定度  $u_A$   
 (2) B 類不確定度  $u_B$   
 (3) 組合不確定度  $u_C$   
 (4) 測量結果

**答：**(1) 0；(2) 0.029 kgw；(3) 0.029 kgw；(4)  $(42.300 \pm 0.029)$  kgw

- ( C ) 3. 在研究浮體時，同學推測圓柱浮體能否穩定維持直立，與密度有關。故決定先測量圓柱體的體積，而以同一根米尺對圓柱體的直徑與高度各測量 4 次，結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、標準差平方與 1/12。

24% 答對率 (111 分科)

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	標準差平方	1/12
直徑 (mm)	121.2	121.5	121.0	121.9	121.400	0.1533333	0.083333
高度 (mm)	100.0	100.8	100.4	101.2	100.600	0.2666667	0.083333

若以下各測量值括弧內  $\pm$  號後的數字代表組合不確定度，則下列敘述何者正確？

- (A) 直徑的測量值為  $(121.4 \pm 0.2)$  mm  
 (B) 直徑的測量值為  $(121.4 \pm 0.5)$  mm  
 (C) 高度的測量值為  $(100.60 \pm 0.39)$  mm  
 (D) 高度的測量值為  $(100.60 \pm 0.26)$  mm  
 (E) 圓柱體體積的組合不確定度等於高度與直徑兩者之組合不確定度的和

1-2 物理量的因次

配合課本 15 頁

1. 物理量：

凡是在物理學上測量的量值，統稱為物理量。可分為：**基本單位**、**導出單位**

(1) 基本單位：用來描述自然界**基本現象**的物理量，**無法通過其他物理量來定義**。

(2) 導出單位：可由**兩個或兩個以上**的基本量組成的物理量。

例如：速度（m/s）、加速度（m/s<sup>2</sup>）、力（kg·m/s<sup>2</sup>）。

2. 物理量基本單位的因次：

- (1) 因次的意義：通過基本量的統一來**理解**和**分類**不同**名稱及單位的物理量**。
- (2) 因次的呈現：物理量的因次以 [ ] 來表示，例如時間的因次為 [Δt] = T。

物理量	名稱及符號	因次符號	物理量	名稱及符號	因次符號
長度	公尺 m	L	熱力學溫度	克耳文 K	θ
質量	公斤 kg	M		(絕對溫度)	
時間	秒 s	T	光強度	燭光 cd	J
電流	安培 A	I	物（質）量	莫耳 mol	N

- (3) 力學三個基本量：大部份的力學物理量均以**長度**、**時間**、**質量**來作為基本量，其因次分別表示為**L**、**T**、**M**，稱為基本因次。其他的力學物理量都可用這三個基本量導出，其因次可表示為**L<sup>a</sup>M<sup>b</sup>T<sup>c</sup>**的幕次組合。

**註** ① 描述相同物理量，即使使用不同單位，依然都具有相同的因次。  
例如：質量單位（公斤、台斤、磅…等），具有相同的質量因次 M。

② **不一定所有的物理量都具有因次**，例如：弧度 rad、摩擦係數 μ。

3. 常見力學物理量導出單位的因次：

物理學上導出量的因次，可先由其 SI 制內單位基本量，再用因次基本量代號取代。

名稱	質量	加速度	進行代數運算	力	因次
代號	<i>m</i>	<i>a</i>		<i>F</i>	<b>[F] = MLT<sup>-2</sup></b>
SI 單位	kg	m/s <sup>2</sup>		kg·m/s <sup>2</sup>	
因次	<b>M</b>	<b>L/T<sup>2</sup></b>		<b>M·L/T<sup>2</sup></b>	

物理量	SI 單位制	因 次	物理量	SI 單位制	因 次
速 度	m/s	LT <sup>-1</sup>	力 矩	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> (= N·m)	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
加速度	m/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>	功	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> (= J)	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
角速度	rad/s	T <sup>-1</sup>	功 率	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> (= W)	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
力	kg·m/s <sup>2</sup> (= N)	MLT <sup>-2</sup>	動 能	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> (= J)	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>

#### 4. 因次分析法：

(1) 藉由因次分析來分辨**物理量本質**，可用來簡化不同單位系統下的計算和比較。

**註**：基本性質不同，也可能發生兩個物理量因次相同，但物理意義不同。例：力矩  $[\tau]$  與功  $[W]$ 。

(2) 不同因次的物理量不可以進行代數的加減運算，但可進行乘或除的運算；故物理方程式等式的**左右兩邊因次必相同**，可來**檢驗方程式**。

**例** 等加速度的速度公式  $v = v_0 + at$ ，以物理量的因次檢驗：

$$[v] = \text{LT}^{-1}, [v_0] = \text{LT}^{-1}, [at] = \text{LT}^{-2} \cdot \text{T} = \text{LT}^{-1}$$

#### 範例 1 物理量的因次

假設在水波槽中，與水波波速可能有關係的物理量為重力加速度  $g$ 、水的密度  $\rho$  與水深  $D$ 。請用現有的物理知識完成下列試題：

(110 指考改)

(1) 若僅以上述三個物理量的因次來判斷波速  $v$ ，下列何者正確？

(A)  $v$  正比於  $gD$  (B)  $v$  正比於  $\rho gD$  (C)  $v$  正比於  $\sqrt{gD}$  (D)  $v$  正比於  $\sqrt{\rho D}$

(E)  $v$  正比於  $\frac{1}{\sqrt{gD}}$

(2) 關於水波槽實驗常用的物理量，請完成下方作答區的空白欄

物理量	公式	SI 單位	因次
波速 $v$	$\Delta x / \Delta t$	m/s	$\text{LT}^{-1}$
加速度 $a$	$\Delta v / \Delta t$	$\text{m/s}^2$	$\text{LT}^{-2}$
密度 $\rho$	$M/V$	$\text{kg/m}^3$	$\text{ML}^{-3}$

**答** (1)(C)；(2)詳見作答區

**解** (1)利用物理方程式等式左右兩邊之因次必相同來檢驗方程式。已知波速  $v$  的因次  $[v] = \text{LT}^{-1}$ 。重力加速度  $g$  的因次  $[g] = \text{LT}^{-2}$ ，水的密度  $\rho$  的因次  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ ，水深  $D$  的因次  $[D] = \text{L}$ 。則(C)  $\sqrt{gD}$  的 SI 單位為  $\sqrt{(\text{m/s}^2) \times \text{m}} = \text{m/s}$ ，因次為  $\text{LT}^{-1}$ 。故選(C)。

**類題**：欲了解聲波如何在金屬中傳播，可利用簡化的一維模型：將金屬原子視為質量  $m$  的小球，以間距  $d$  排列成一直線，且相鄰兩個小球間以彈力常數  $k$  的彈簧連結，藉以模擬原子間的作用力。在此簡化模型的假設下，應用因次分析來判定下列何者可能為金屬中的聲速？（ $k = -F/\Delta x$ ，因次為  $\text{MT}^{-2}$ ）

(105 指考改)

(A)  $d\sqrt{\frac{k}{m}}$  (B)  $d\sqrt{mk}$  (C)  $\sqrt{\frac{dm}{k}}$  (D)  $\frac{dk}{m}$  (E)  $\frac{mk}{d}$

**答** (A) (力的 SI 單位為  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ ，因次為  $\text{MLT}^{-2}$ ，彈力常數  $k = -\frac{F}{\Delta x}$ ，因次為  $\text{MT}^{-2}$ ， $\sqrt{\frac{k}{m}}$  的因次為  $\text{T}^{-1}$ ，所以  $d\sqrt{\frac{k}{m}}$  的因次為  $\text{LT}^{-1}$ ，因次與速度相同。故選(A)。)



## 1-2

## 課後練習

\* 為多選題

## 基礎題

## 概念 物理量與基本單位

(解析見解答本)

- ( B ) 1. 十八世紀的科學家庫倫，發現電荷間彼此作用的道理，根據庫倫的靜電理論，電量為  $q_1$  與  $q_2$  的兩粒子，若相距為  $r$ ，其彼此間的引力可用數學式表為  $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ 。請問在國際單位制中，靜電常數  $k$  的單位為下列何者？（ $q$  的單位為  $A \cdot s$ ）
- (A)  $\frac{m^3}{A^2 \cdot kg}$  (B)  $\frac{kg \cdot m^3}{A^2 \cdot s^4}$  (C)  $(A^2 \cdot s^3 \cdot m^3) / kg$
- (D)  $A^2 \cdot s^4 \cdot m^3 \cdot kg$  (E)  $\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}$

## 概念 物理量的因次

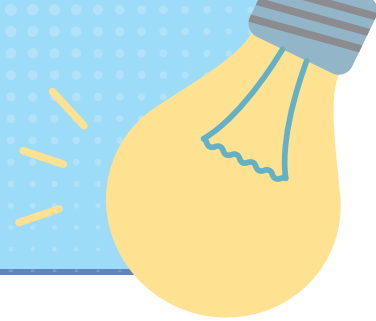
- \*( A C ) 2. 關於因次分析，下列敘述哪些正確？
- (A)「位置」與「位移」具有相同的因次 (B)「力」與「加速度」具有相同的因次 (C)「動能」與「功」具有相同的因次 (D)「週期」與「頻率」具有相同的因次 (E)「功率」與「力矩」具有相同的因次
- ( C ) 3. 萬有引力的公式為  $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ ，則重力常數  $G$  的因次為何？
- (A)  $L^{-1}M^{-1}T^2$  (B)  $L^{-1}M^{-2}T^3$  (C)  $L^3M^{-1}T^{-2}$
- (D)  $L^3M^{-2}T^{-3}$  (E)  $L^{-3}MT^2$
- ( B ) 4. 下列關於因次的敘述，何者是正確的？
- (A)兩個相同因次的物理量，必定有相同的物理意義 (B)具有相同因次的物理量才可以進行加或減的運算 (C)具有相同因次的物理量才可以進行乘或除的運算 (D)等式兩邊的物理量，可能具有不同的因次 (E)公斤和公斤重具有相同的因次

## 進階題

- ( D ) 1. 繩波波形傳導的速率，只與繩張力  $F$  及繩的線密度  $\mu$ （單位長度的質量，因次為  $ML^{-1}$ ）有關，則下列選項中的式子何者可能為繩波波速  $v$  的公式？
- (A)  $v = \mu F$  (B)  $v = \mu F^2$  (C)  $v = \sqrt{\mu F}$  (D)  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  (E)  $v = F \sqrt{\mu}$
2. 小南發現單擺擺動時，若角度  $\theta$  控制於  $5^\circ$  以內，其週期與擺角無關。他推測單擺週期  $T$  可能與擺長  $L$ 、擺錘質量  $m$  及重力加速度  $g$  有關，若假設關係式為  $T = aL^x m^y g^z$ （ $a$  為一常數），請藉由物理量的因次分析，求出  $x+y+z$  的值。

答：0





(解析見解答本)

### 區間測速取代原有測速模式

近幾年來，區間測速逐漸取代舊有的雷達測速器與雷射測速器，成為警方執法上的利器。在開始區間測速前，部分駕駛人在快接近測速器前，才將車速降低至速限以下，一旦通過測速器便又回復超速行駛，故目前固定式測速器對於超速的控制，僅侷限於定點附近距離很短的範圍，對於車速管理的成效有限。現行「雷達測速」也是偵測車輛在雷達波特定範圍內移動距離與時間差的關係計算車速，實際上也算是區間平均速率。

區間測速將測速範圍由點延伸為線，可大幅增加速率控制的有效範圍，除可抑制超速行為外，重點在於可減少車輛間行駛速度的差異，達到控制車速趨於穩定的效果，預期會減少事故發生。

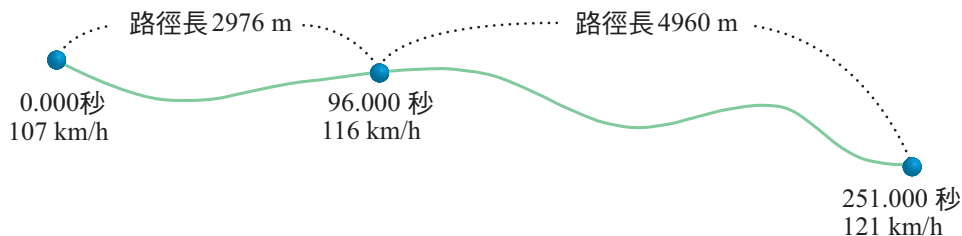
區間測速是由車輛通過偵測點時辨識號牌並記錄系統時間，以固定兩點間之路徑長及通行時間換算出區間平均速率為科學證據，系統時間持續與經濟部標準檢驗局的國家時間與頻率伺服器對時，又兩點距離較雷達測速範圍更遠且固定，誤差影響程度甚低，精確度並無疑義。反觀現行測速雷達之測速原理為都卜勒效應，發射頻率波長是否正確及穩定對測速精確度影響甚大，故需每年實施檢驗。

(改編自新北市政府警察局交通警察大隊宣導專區)

( B ) 1. 區間測速主要可以減少何種不確定度？

(A) A 類不確定度 (B) B 類不確定度 (C) 組合不確定度 (D) 以上皆是 (E) 條件不足，無法判斷

( C ) 2. 如下圖所示，高工局欲以國道三號某路段以一車輛通過各收費點的方式測試區間測速，具備路徑長、通過各點時間及瞬時速率。若計時器的組合不確定度為 0.001 秒，測距儀的組合不確定度為 10 cm，請問兩段路程的平均速率差最接近多少 km/h？



(A) 1.8 (B) 2.4 (C) 3.6 (D) 4.8 (E) 6.0

## 新版 SI 制定義上路，基本單位定義大改變

在新版 SI 制單位定義正式使用前，公斤是當時唯一仍以人造物所定義之質量單位。在原本的定義中，國際公斤原器的質量恆為 1 公斤且不具任何不確定度，但人造物的絕對質量穩定度與人造物不確定度為零的弔詭概念卻困擾了科學家數百年之久。

公斤作為一個基本單位，若仰賴人造物來定義，則其人造物的穩定性應非常高。但在 1889 年至 1992 年間，各國科學家將其實驗室中依規定妥善保存的副原器和國際公斤原器共進行了三次定期校正，將六個副原器之平均質量與國際公斤原器比較後，竟顯示出百年間國際標準公斤原器的質量減少了約 50  $\mu\text{g}$ ，此看似微小的質量差異卻遠大於各國家計量機構所宣稱之質量量測不確定度。這件大事也促使了科學家尋求以自然界的真正不變之物：基本物理常數定義與實現單位之方法。

經過眾多學者的努力，新版 SI 單位定義於 2019 年 5 月 20 日正式實施。以公斤為例，公斤的新定義是經由普朗克常數  $h$  連結至光子所具有的能量與質量。單位公斤的精確表達式由定義普朗克常數  $h$ 、鉍-133 超精細分裂頻率  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  和光速  $c$  給出：

$$\text{kg} = \left( \frac{h}{6.626070040 \times 10^{-34}} \right) \text{m}^{-2}\text{s} = 1.475521 \cdots \times 10^{-40} \frac{h \Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2}$$

在此定義中，當普朗克常數所選用的數值被採納時，國際公斤原器的質量等於 1 kg，且含相對標準不確定度  $2.0 \times 10^{-8}$  公斤。公斤的重新定義可確保公斤單位的長期穩定度與可靠度，解決原定義上無法達到絕對量測的問題。

(改編自國家度量衡標準實驗室－SI 基本單位定義)

- ( A C ) 3. 在一次重量與測量國際會議中，科學家們決定從 2019 年 5 月開始使用以量子力學方法，根據普朗克常數  $h$  推算出的質量為 1 公斤的標準，而不再使用鉑銥合金的標準原型。科學家這個決定是基於哪些原因？(多選)
- D E
- (A) 鉑銥合金的標準原型隨著時間與環境的推移，質量還是會改變
- (B) 使用比較新穎的量子力學方法，較能說服人心
- (C) 根據普朗克常數  $h$  推算出的質量，較不需考慮環境因素帶來的影響，比較精準
- (D) 單位標準必須具有：恆常性、複製性、國際公認
- (E) 改用普朗克常數作為質量單位的重要參考，透過它可用秒與公尺定義出 1 公斤
- ( D ) 4. 由文中公斤的表達式可得出，下列何者為普朗克常數  $h$  的因次單位？
- (A)  $\text{MLT}$  (B)  $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$  (C)  $\text{ML}^2\text{T}^3$  (D)  $\text{ML}^2\text{T}^{-1}$  (E)  $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$