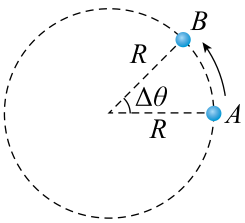
5 週期運動

5-1 等速圓周運動

教學策略

一、角速度

1. 角位移：一質點作圓周運動，當質點由 A 點移動到 B 點，其軌跡所對應的圓心角 $\Delta\theta$，稱為角位移。



(1)角位移以弧度（radian，縮寫為 rad）為單位，又稱為弳。

(2)角位移的量值定義為所張的圓弧長除以半徑，故不帶任何物理因次。

(3)質點繞一圈，角位移的量值為 $\Delta\theta=\dfrac{\text{圓弧長}}{\text{半徑}}=\dfrac{2\pi R}{R}=2\pi(\text{rad})$。

2. 角速度：單位時間內質點運動的角位移。質點作等速圓周運動時，在一個週期 T 內掃過一整個圓周，故角速度為

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\ (\because \text{頻率}\ f=\frac{1}{T})$$

(1)角速度的單位為弧度 / 秒 (rad/s)，有時亦寫成弳 / 秒。

(2)角速度又稱為角頻率。

二、速度、加速度與角速度的關係

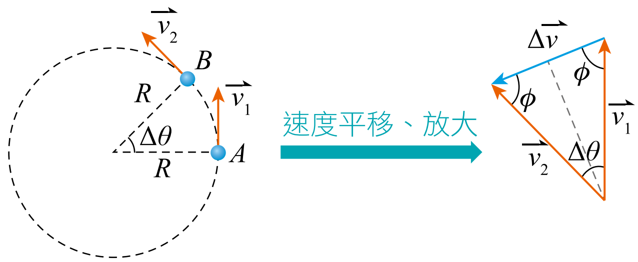
1. 速率：速率為單位時間內所走的路徑長，當時間為週期 T 時，路徑長為圓周長 $2\pi R$，故

$$v=\frac{\Delta\ell}{\Delta t}=\frac{2\pi R}{T}=R\cdot\frac{2\pi}{T}=R\omega$$

作等速圓周運動物體的速率 v 雖然不變，但由於其運動方向不斷改變，故速度也會隨著時間不斷改變。

2. 速度變化量：當質點由 A 點移動到 B 點的過程中，將前後兩個時刻的速度 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 平移（$|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=v$），由幾何關係可得速度變化量 $\Delta\vec{v}$ 的量值為

$$\Delta v=|\Delta\vec{v}|=2|\vec{v}_1|\sin\frac{\Delta\theta}{2}=2v\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$



3. 加速度：

(1)當時間間隔 $\Delta t \to 0$ 時，可知角位移 $\Delta\theta \to 0$，因此 $\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$，此時加速度的量值為

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{2v\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \approx \frac{2v \cdot \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$$

(2)因為 $\Delta\theta \to 0$，故速度的變化量 $\Delta\vec{v}$ 與 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 幾近垂直（上圖中 $\phi \approx 90°$）。因為速度恆為切線方向，表示 $\Delta\vec{v}$ 指向法線方向，亦即加速度 $\vec{a}$ 為法線方向，指向圓心；由於物體作等速圓周運動時，其加速度方向恆指向圓心，故常被稱為向心加速度 $\vec{a}_c$。

(3)由 $v = R\omega = \dfrac{2\pi R}{T}$，可得向心加速度的量值亦可寫為

$$a_c = v\omega = R\omega^2 = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{v^2}{R}$$

4. 向心力：根據牛頓第二運動定律，向心加速度必定是因為物體受到向心力作用而來，其量值可依此算出為

$$F_c = ma_c \Rightarrow F_c = \frac{mv^2}{R} = mR\omega^2 = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

三、圓周運動的應用

1. 錐動擺：擺長為 ℓ 的單擺，擺錘在水平面上作等速圓周運動，此時擺繩與懸掛點的中垂線之夾角為 θ，如圖 (a) 所示，此裝置稱為錐動擺或圓錐擺。

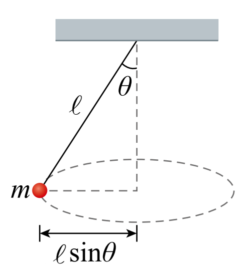


圖 (a)

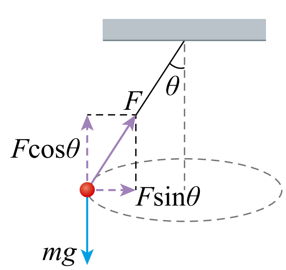


圖 (b)

(1)力的分析：如圖 (b) 所示，擺錘受到重力 mg 及繩子張力 F 的作用，F 可分解成水平及鉛直的兩分力 $F\sin\theta$ 及 $F\cos\theta$，其中 $F\sin\theta$ 為擺錘作等速圓周運動所需的向心力，$F\cos\theta$ 與重力 mg 平衡，因此

$$\begin{cases} F\sin\theta = F_c = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{v^2}{\ell\sin\theta} \\ F\cos\theta = mg \end{cases}$$

(2)繩子張力：$F = \dfrac{mg}{\cos\theta} = mg\sec\theta$。

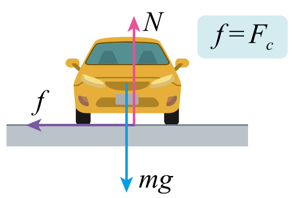
(3)向心力：$F_c = F\sin\theta = \dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = mg\tan\theta$。

(4)向心加速度：$a_c = \dfrac{F_c}{m} = \dfrac{mg\tan\theta}{m} = g\tan\theta$。

(5)速率：$F_c = m\dfrac{v^2}{\ell\sin\theta} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{F_c \cdot \ell\sin\theta}{m}} = \sqrt{\dfrac{mg\tan\theta \cdot \ell\sin\theta}{m}} = \sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}$。

(6)週期：$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi\ell\sin\theta}{\sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\theta}{g}}$。

2. 汽車在水平路面上靠摩擦力轉彎：汽車在水平路面轉彎時，靠輪胎與地面之間的摩擦力 f 做為所需的向心力（R 為車子轉彎時的曲率半徑）。由右圖可知

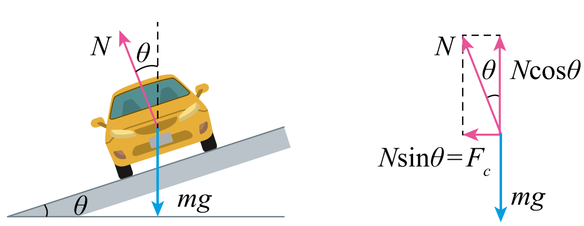


$$\begin{cases} N = mg \\ f = F_c = m\dfrac{v^2}{R} \le f_{s,\max} = \mu_s N \end{cases} \Rightarrow m\dfrac{v^2}{R} \le \mu_s mg$$

上式可得汽車在水平路面轉彎的安全速率 $v \le \sqrt{\mu_s gR}$。

（摩擦力在選修物理 II 會有較詳細的解說，老師備課時可以備而不用，或依照自己的教學需求作適時補充，但內容不必作為段考的依據）。

3. 汽車在傾斜路面上不靠摩擦力轉彎：若摩擦力不提供向心力的情形下，路面必須傾斜一角度 θ，此時汽車受到路面所施的正向力 N 的水平分量，可適時提供轉彎所需的向心力。



(1)力的分析：汽車受到重力 mg 及路面正向力 N 的作用，N 可分解成水平及鉛直的兩分力 $N\sin\theta$ 及 $N\cos\theta$，其中 $N\sin\theta$ 為汽車轉彎所需的向心力，$N\cos\theta$ 與重力 mg 平衡，因此

$$\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = F_c = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$（R 為車子轉彎時的曲率半徑）

(2)路面摩擦力不提供向心力時的轉彎車速：$\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR} \Rightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta}$。

(3)真實情況的車速：在真實的行車狀況下，汽車與路面間存在摩擦力，提供額外的向心力，因此通過彎道的速率並非定值，有可變化的範圍。若車速 $v < \sqrt{gR\tan\theta}$，此時汽車有往內滑的趨勢，因此輪胎與地面間的摩擦力方向向外，如圖 (a) 所示；若 $v > \sqrt{gR\tan\theta}$，此時汽車有往外滑的趨勢，因此輪胎與地面間的摩擦力方向向內，如圖 (b) 所示。

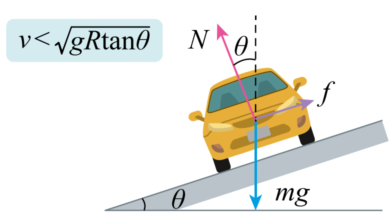


圖 (a)

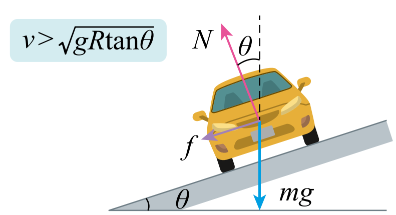
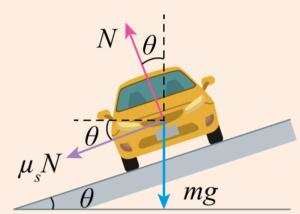


圖 (b)

參考補充／汽車在傾斜路面上轉彎時的車速

當汽車在傾斜路面上轉彎且不發生向外側滑的情況下，其車速有一最大值 v_{max}，而摩擦力和正向力所能提供的向心力亦為最大，此時的靜摩擦力為最大靜摩擦力 $\mu_s N$，方向如右圖所示。由右圖可得

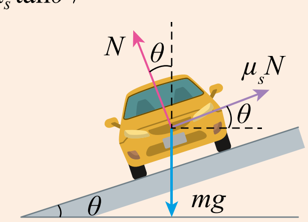


$$\begin{cases} N\cos\theta = mg + \mu_s N\sin\theta \\ N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\dfrac{{v_{max}}^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg \cdots\cdots ① \\ N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = m\dfrac{{v_{max}}^2}{R} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

第 ② 式除以第 ① 式得

$$\frac{{v_{max}}^2}{gR} = \frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{gR\left(\frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)}$$

當汽車在傾斜路面上轉彎且不發生向內側滑的情況下，則車速須有一最小值 v_{min}。此時最大靜摩擦力 $\mu_s N$ 的方向沿斜面向外，如右圖所示。由右圖可得



$$\begin{cases} N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg \\ N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = m\dfrac{{v_{min}}^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) = mg \cdots\cdots ③ \\ N(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) = m\dfrac{{v_{min}}^2}{R} \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

第 ④ 式除以第 ③ 式得

$$\frac{v_{\min}^{2}}{gR}=\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}=\frac{\tan\theta-\mu_s}{1+\mu_s\tan\theta}\Rightarrow v_{\min}=\sqrt{gR\left(\frac{\tan\theta-\mu_s}{1+\mu_s\tan\theta}\right)}$$

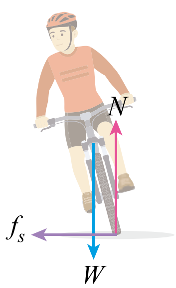
想一想解答

1. 若提供向心力的力源突然消失，作圓周運動的物體會如何？ (P.147)

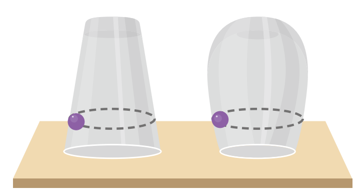
答 沿切線方向飛離。

2. 騎腳踏車在平面上過彎時，哪個力量提供了轉彎的向心力？ (P.147)

答 地面施予輪胎的側向靜摩擦力，方向指向圓心。



3. 如圖，小球在兩個倒立的玻璃杯中作水平面圓周運動時，哪一個玻璃杯的杯壁無法支撐小球的重量？ (P.150)



答 左邊的玻璃杯。左杯內緣杯壁的傾斜方向，無法支撐小球重量；而右杯內緣杯壁的傾斜方向除可提供向心力外，亦可協助支撐小球重量。

迷思概念釐清

1. 等速圓周運動為等速度運動。

答 錯。作等速圓周運動物體的速率不變，但運動方向不斷改變，故速度隨著時間而變，為變速度運動。

2. 作等速圓周運動的物體，其半徑、速率皆不變，因此物體作等加速運動。

答 錯。作等速圓周運動物體的加速度量值 $a=\dfrac{v^2}{R}$，雖然半徑 R、速率 v 皆不變，但因為加速度的方向隨著時間而變，因此為變加速度運動。

3. 作等速圓周運動的物體，在任一瞬間的加速度方向，皆指向圓心。

答 對。當時間間隔 $\Delta t \to 0$ 時，物體的速度變化量 $\Delta\vec{v}$ 與切向速度方向幾乎垂直，表示 $\Delta\vec{v}$ 指向法線方向，亦即加速度 $\vec{a}$ 為法線方向，指向圓心。

4. 作等速圓周運動的物體，若半徑固定不變，則其速度量值與角速度量值成正比。

答 對。由 $v = R\omega$ 可知，若半徑 R 不變，則 $v \propto \omega$。

5. 錐動擺的擺錘作等速圓周運動時，其向心力由擺錘所受的重力提供。

答 錯。擺錘所受繩子的張力，可分解成水平及鉛直的兩分力，其中鉛直分力與重力平衡，水平分力為擺錘作等速圓周運動所需的向心力，因此向心力是由繩子的張力的水平分量所提供。

6. 錐動擺的擺錘質量愈大，擺錘的擺動週期愈短。

答 錯。由擺錘的擺動週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\theta}{g}}$ 可知，週期與擺錘的質量無關。

7. 水平路面若無摩擦力，則汽車無法在該水平路面上轉彎。

答 對。汽車在水平路面轉彎，是靠輪胎與地面之間的摩擦力作為所需的向心力，因此若無摩擦力作為向心力，汽車就無法轉彎。

8. 傾斜路面若不提供摩擦力作為向心力，則汽車無法在該傾斜路面上轉彎。

答 錯。汽車在傾斜路面上轉彎，其轉彎所需的向心力，可以由路面施給汽車的正向力的水平分量所提供，因此傾斜路面若不提供摩擦力作為向心力，特定速率的汽車可以在該傾斜路面上轉彎。

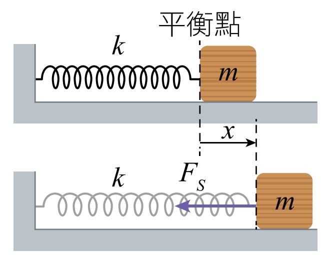
9. 作等速圓周運動的物體，其加速度不會改變物體運動的快慢。

答 對。等速圓周運動的「等速」是指等速率，表示其速率不變，因此向心加速度不會改變物體運動的快慢。

5-2 簡諧運動

教學策略

1. 彈簧－物體系統的加速度與位移的關係：在光滑水平面上，用手將彈簧－物體系統中的物體，拉離原長（平衡點）處後釋放，根據虎克定律，物體會受到與位移反向的彈性力作用



$$\vec{F_s} = -k\vec{x}$$

因物體僅受彈性力作用，由牛頓第二運動定律可得

$$\vec{F_s} = -k\vec{x} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

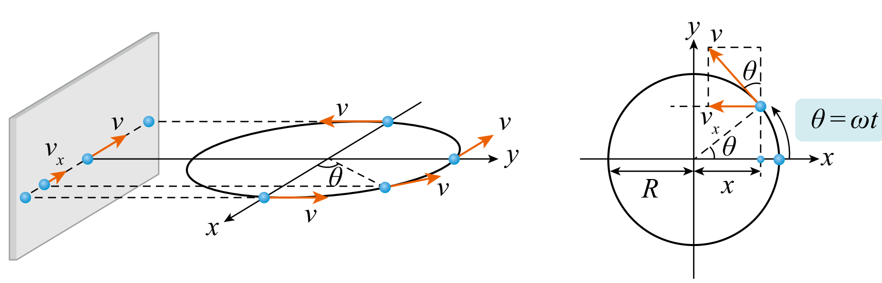
2. 簡諧運動：當物體運動的加速度（或物體所受的力）之量值與位移大小成正比，且加速度（或所受的力）的方向與其位移方向相反並總是指向平衡點時，此類運動稱為簡諧運動（simple harmonic motion，簡記為 SHM）。上述的彈簧－物體系統，物體釋放後作往復的週期性運動，即為簡諧運動的一種。

一、參考圓

1. 等速圓周運動的投影：將圓周運動的圓心，放在直角坐標系的原點。物體於時刻 $t = 0$ 在 x 軸上，距離原點為 R 的位置，於時刻 t 轉動到角度 θ 的位置。

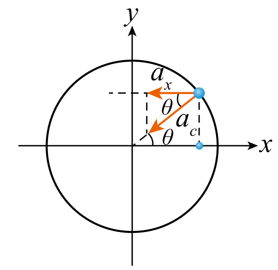
(1)位置的投影：將物體投影在 x 軸上，可得物體的水平位置 $x = R\cos\theta$，等速圓周運動中的角位移 $\theta = \omega t$，故

$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t)$$



(2)速度的投影：等速圓周運動的速度 v，投影在 x 軸上為 v_x，由幾何關係可得

$$v_x = -v\sin\theta = -R\omega\sin(\omega t)$$



(3)加速度的投影：等速圓周運動的向心加速度 a_c，投影在 x 軸上為 a_x，由幾何關係可得

$$a_x = -a_c\cos\theta = -R\omega^2\cos(\omega t)$$

2. 簡諧運動與參考圓：等速圓周運動在水平面投影的位置、速度與加速度，分別如下

$$\begin{cases} x = R\cos\theta = R\cos(\omega t) \\ v_x = -v\sin\theta = -R\omega\sin(\omega t) \\ a_x = -a_c\cos\theta = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x \end{cases}$$

其中加速度 $a_x = -\omega^2 x$，與彈簧—物體系統的加速度、位移的關係式 $a = -\dfrac{k}{m}x$ 相同，因此，等速圓周運動在直徑方向的投影，恰好就是簡諧運動，而此圓周運動即稱為簡諧運動的參考圓。另外，式中的 R 稱為振幅，ω 稱為角頻率（即等速圓周運動中的角速度），角頻率與週期 T 的關係，與等速圓周運動中角速度與週期的關係相同，為

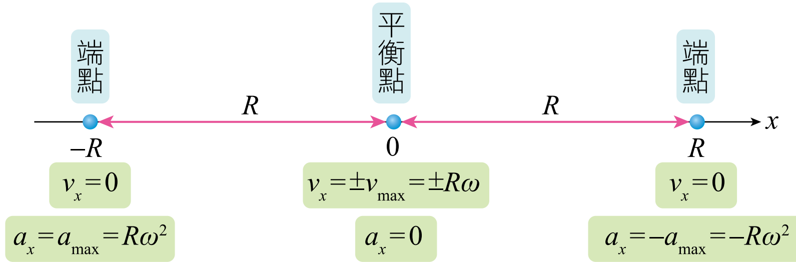
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

（因為簡諧運動的位置、速度、加速度及受力都一直在改變，不僅量值改變，連方向都改變，情況比等加速度運動似乎複雜許多；再則學生對於三角函數尚不熟悉，處理簡諧運動的問題較為陌生，因此若能善用參考圓的投影，在計算物體的瞬時速度、瞬時加速度以及任兩位置所經過的時間等等，可以大幅減輕學生的數學負擔，值得對學生作完整的說明。）

3. 端點、平衡點的性質：由參考圓的位置、速度、加速度分別投影後，可知簡諧運動的端點、平衡點的性質如下

(1)端點：速度 $v_x = 0$，加速度 $a_x = \pm a_{max} = \pm R\omega^2 = \pm \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = \pm \dfrac{{v_{max}}^2}{R}$。

(2)平衡點：速度 $v_x = \pm v_{max} = \pm R\omega = \pm \dfrac{2\pi R}{T}$，加速度 $a_x = 0$。

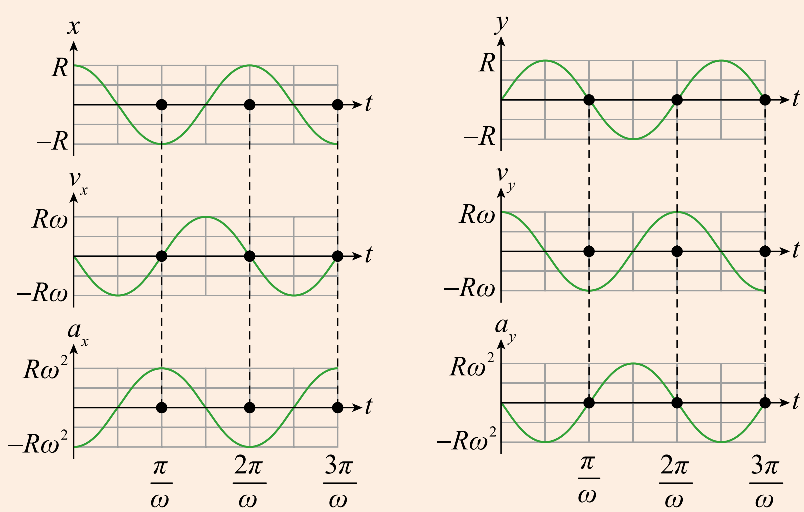


參考補充／簡諧運動的函數及其函數圖形

1. 函數圖形：若將等速圓周運動投影在 y 軸上，則任何時刻的位置 y、速度 v_y、加速度 a_y 分別為

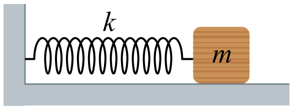
$$\begin{cases} y = R\sin\theta = R\sin\omega t \\ v_y = v\cos\theta = R\omega\cos\omega t \\ a_y = -a_c\sin\theta = -R\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y \end{cases}$$

因為加速度 $a_y = -\omega^2 y$ 符合簡諧運動的模式，因此無論投影至 x 軸、y 軸或任一直徑上，其投影的運動都是簡諧運動。由於簡諧運動的位置、速度、加速度皆為正弦或餘弦函數，故其 $x-t$ 圖、v_x-t 圖、a_x-t 圖（或 $y-t$ 圖、v_y-t 圖、a_y-t 圖）分別如下



不論是 $x = R\cos\omega t$，或是 $y = R\sin\omega t$，都是簡諧運動的函數，但是當時間 $t = 0$ 時，質點若不在端點 $(x = R)$ 或平衡點 $(x = 0)$ 處，則三角函數中需加入一相位常數 ϕ，此常數只與簡諧運動的初始狀態有關，且不影響質點在端點與平衡點的各項性質或週期。因此，簡諧運動的通式可寫成

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t + \phi) \\ v = -R\omega\sin(\omega t + \phi) \\ a = -R\omega^2\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y = R\sin(\omega t + \phi) \\ v = R\omega\cos(\omega t + \phi) \\ a = -R\omega^2\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$



4. 彈簧作簡諧運動的週期：一物體質量為 m，在光滑水平地面上與彈性常數為 k 的彈簧連結，以手拉物體使彈簧伸長後靜止釋放，由虎克定律、牛頓第二定律可得物體位移為 x 時所受的力為

$$F=-kx=ma\Rightarrow a=-\frac{k}{m}x=-\omega^2x$$

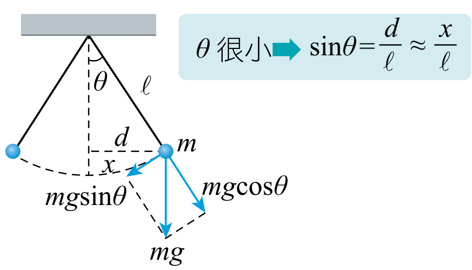
故彈簧振動的角頻率為 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$。又角頻率與週期的關係為 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，因此彈簧的振動週期為

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

二、小角度的單擺運動

1. 單擺的擺動週期：伽利略在 18 歲那一年（西元 1582 年）偶然中看到教堂風燈的擺盪，發現到小角度的單擺運動具有等時性；在伽利略死後 14 年，荷蘭的物理學家惠更斯，才首次使用單擺作為計時工具。假設一單擺懸掛於天花板上，當擺角 θ 很小時，擺錘到鉛垂線的距離 d 與弧長 x 約略相等。根據三角函數關係

$$\sin\theta=\frac{d}{\ell}\approx\frac{x}{\ell}$$



由幾何關係可知，擺錘在切線方向上的受力量值為 $mg\sin\theta$，利用上式的近似值可得

$$F_x=-mg\sin\theta\approx-mg\frac{x}{\ell}\Rightarrow a_x=\frac{F_x}{m}\approx-\frac{g}{\ell}x$$

與 $a_x=-\omega^2x$ 比較，可得角頻率 $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$，因此小角度單擺的週期為

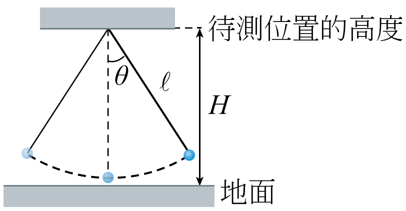
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2. 單擺的應用：

(1)計時：若單擺的半週期為 1.00 秒，此種單擺稱為「秒擺」，此時擺長大約 1.00 公尺。

(2)測量高度：利用碼錶、當地的重力加速度值，可測量某位置的高度如右圖所示，使擺錘貼近地面，則

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow \text{高度 } H\approx\text{擺長 } \ell=\frac{gT^2}{4\pi^2}$$



(3)測量 g 值：利用碼錶、直尺測量某地的重力加速度值，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \text{重力加速度 } g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$$

公式整理／ **錐動擺、彈簧、單擺的公式整理**

1. 錐動擺：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\theta}{g}}$
2. 彈簧：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
3. 小角度單擺：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

想一想解答

1. 等速圓周運動是簡諧運動嗎？ (P.154)

答 不是。因為簡諧運動的軌跡為直線，將等速圓周運動投影在直線上，其投影點的運動才是簡諧運動。

2. 單擺作任意角度的擺動時，擺錘作簡諧運動嗎？ (P.158)

答 不是。因為單擺擺錘的運動軌跡為曲線，不是直線。唯有當擺角很小時，擺錘的運動才會近似為簡諧運動。

3. 把一組彈簧裝置和一組單擺裝置從地球移至月球表面，重新作簡諧運動和小擺角單擺實驗，兩者的實驗結果週期會有所變化嗎？ (P.158)

答 彈簧簡諧運動的週期不變，因 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 與 g 值無關；單擺擺動週期變大，因 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ 與 g 值有關。

迷思概念釐清

1. 簡諧運動是等速圓周運動的一種。

答 錯。等速圓周運動是平面運動，而簡諧運動是直線運動，兩者為性質不同的運動。

2. 一物體在水平面上作簡諧運動，物體振動的振幅愈大，其週期愈長。

答 錯。簡諧運動的週期與振幅無關，並非振幅愈大週期即愈長。

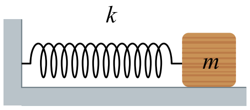
3. 物體作簡諧運動時，在任一時刻，物體的加速度量值與物體相對平衡點的位移量值成正比，而加速度的方向與物體相對平衡點的位移方向相反。

答 對。由加速度 $a_x = -\omega^2 x$ 可知：加速度量值與物體相對平衡點的位移量值成正比，即 $|a_x| \propto |x|$；而式中的負號，表示加速度的方向與物體相對平衡點的位移方向相反。

4. 簡諧運動屬於變加速度直線運動的一種。

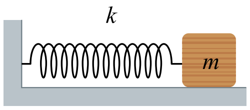
答 對。簡諧運動為直線運動，且其加速度隨時間而改變，故為變加速度直線運動。

5. 彈簧一端繫著木塊，另一端固定在牆壁上，將木塊拉動一小段距離後由靜止釋放，使它在光滑水平面上作簡諧運動，如右圖所示。則木塊的振動週期與木塊的質量成正比。



答 錯。由彈簧的振動週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \propto \sqrt{m}$ 可知，週期 T 與木塊質量的平方根 $\sqrt{m}$ 成正比。

6. 若將右圖的彈簧—木塊系統放置在月球表面上，並使木塊在水平面上作簡諧運動，則木塊的振動週期比此系統在地表上的振動週期還長。



答 錯。由彈簧的振動週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 可知，週期 T 與星球的重力加速度無關，表示彈簧—木塊系統在月球表面上或地表上的振動週期相同。

7. 單擺運動是簡諧運動的一種。

答 錯。單擺的擺動是平面運動，而簡諧運動是直線運動，兩者是性質不同的運動。只有小角度擺動的單擺可以近似為簡諧運動，其他的單擺就不能視為簡諧運動。

8. 擺錘質量愈大，小角度單擺的擺動週期愈短。

答 錯。由小角度單擺的擺動週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ 可知，週期與擺錘的質量無關。

9. 同一個小角度單擺，在月球表面上的擺動週期，比在地表上的擺動週期還長。

答 對。由小角度單擺的擺動週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{g}}$ 可知，由於月球表面的重力加速度量值較地表小，因此單擺在月球表面上的週期比在地表上的週期還長。

第 5 章 習題解答

＊為多選題

基礎題

5-1 等速圓周運動

1. 在天文館中有一組模擬八大星球公轉的儀器，其中的地球儀正以頻率 0.25 Hz 繞公轉的中心點作半徑 2 m 的等速圓周運動，試問地球儀公轉的向心加速度量值為多少 m/s^2？

(A) $\dfrac{\pi^2}{2}$　(B) $2\pi^2$　(C) $3\pi^2$　(D) $4\pi^2$　(E) $5\pi^2$。

答 (A)

解析 向心加速度量值：$a_c = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 f^2 R = 4\pi^2 \times (0.25)^2 \times 2 = \dfrac{\pi^2}{2}$ (m/s^2)。

2. 甲、乙兩位機車騎士騎著車分別沿半徑比為 2：3 之兩圓周作等速圓周運動，若兩人運動的週期相同，則有關兩人作圓周運動各物理量的比較，下列何者正確？
(A) 角速度的比為 3：2　(B) 角速度的比為 2：3　(C) 切向速度的比為 1：1
(D) 切向速度的比為 3：2　(E) 向心加速度的比為 2：3。

答 (E)

解析 (A)(B)×：週期 T 相同 $\Rightarrow$ 角速度 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 相同。

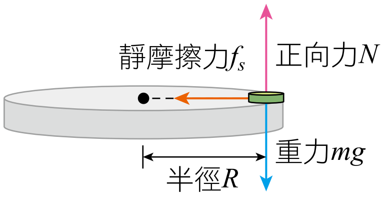
(C)(D)×：切向速度 $v = \omega R \propto R \Rightarrow v_{甲} : v_{乙} = 2 : 3$。

(E)○：向心加速度 $a_c = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} \propto R \Rightarrow a_{c甲} : a_{c乙} = 2 : 3$。

3. 林同學在爸爸的黑膠唱盤上放置一枚硬幣，唱盤以固定的轉速旋轉且硬幣與唱盤間沒有相對運動，試問硬幣所受的哪個力提供它旋轉所需的向心力？
(A) 重力　(B) 正向力　(C) 重力與正向力的合力　(D) 靜摩擦力
(E) 動摩擦力。

答 (D)

解析 當硬幣相對於唱盤靜止時，摩擦力為靜摩擦力。分析硬幣的受力，如右圖所示。
由圖可知，只有靜摩擦力能提供硬幣旋轉的向心力。



4. 有一條最大耐重 32 N、長度 1 m 的繩子，在光滑水平面上一端固定於定點、一端繫著質量 2 kg 的球，使球作等速圓周運動。當球的速率達多少 m/s 時，繩子將會斷裂？
(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6　(E) 8。

答 (C)

解析 繩張力提供向心力 $\Rightarrow T = F_c = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow 32 = 2\times\dfrac{v^2}{1} \Rightarrow v = 4(\text{m/s})$。

5. 自行車以等速繞行水平的圓弧彎道時，與輪胎接觸的地面須提供自行車足夠的向心力，方能順利轉彎。在相同的彎道轉彎，若速率變為原來的 2 倍時，所需的向心力需變為原來的多少倍？
(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2　(E) 4。【106 學測】

答 (E)

解析 由向心力量值：$F_c = ma_c = m\dfrac{v^2}{R} \propto v^2$
故當速率變為 2 倍時，向心力量值變為原來的 4 倍。

5-2 簡諧運動

6. 光滑水平地面放置一彈性常數 $k = 16$ N/m 的彈簧，其一端固定於牆壁，另一端繫著質量為 1 kg 的小球。今將其壓縮 10 cm 後放手，則小球的振動週期為多少 s ？
(A) π　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{4}$　(E) $\dfrac{\pi}{5}$。

答 (B)

解析 週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ (s)。

＊7. 某物體正在水平面上作簡諧運動，有關此物體的敘述，下列哪些正確？
(A) 在平衡點處速率最大　(B) 在端點處受力量值最大　(C) 加速度方向恆與速度反方向
(D) 在平衡點處加速度最小但不為零　(E) 速率和受力量值成正比。

答 (A)(B)

解析 (C) ×：由 $\vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{a}$ 和 $\vec{x}$ 方向恆相反，即加速度恆與位移反方向，但加速度不一定與速度反方向。
(D) ×：平衡點處的受力為零，故其加速度必為零。
(E) ×：應是 F 和 x 成正比，而 F 和 v 並無正比關係。

＊8. 某質點正作簡諧運動，其位移 x(cm) 與時間 t(s) 之關係為 $x = 20\cos(\frac{\pi}{2}t)$，有關此質點運動的敘述，下列哪些正確？
(A) 簡諧運動週期為 4 s　(B) 振幅為 10 cm　(C) 最大速度的量值為 10 cm/s
(D) 最大加速度的量值為 $5\pi^2$ cm/s^2　(E) 在平衡點處的加速度量值為 $10\pi^2$ cm/s^2。

答 (A)(D)

解析 由 $x = 20\cos(\frac{\pi}{2}t) = R\cos(\omega t) \Rightarrow R = 20$(cm)，$\omega = \frac{\pi}{2}$ (rad/s)

(A)○：$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4$(s)。

(B)×：$R = 20$(cm)。

(C)×：$v_{max} = \omega R = \frac{\pi}{2} \times 20 = 10\pi$(cm/s)。

(D)○：$a_{max} = \omega^2 R = (\frac{\pi}{2})^2 \times 20 = 5\pi^2$(cm/s^2)。

(E)×：平衡點處，$a = 0$。

9. 質點作振幅為 15 cm 的簡諧運動，已知質點的最大速率為 3 cm/s，則質點在運動過程中，最大加速度的量值為多少 cm/s^2？
(A) 0.1　(B) 0.2　(C) 0.4　(D) 0.6　(E) 0.8。

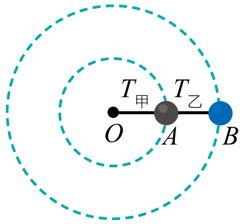
答 (D)

解析 由 $v_{max} = \omega R \Rightarrow 3 = \omega \times 15 \Rightarrow \omega = 0.2$(rad/s)
$a_{max} = \omega^2 R = 0.2^2 \times 15 = 0.6$(cm/s^2)。

進階題

5-1 等速圓周運動

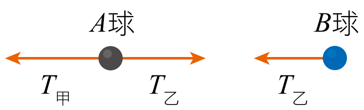
1. 質量分別為 m 和 $2m$ 的 A、B 兩球，以長度皆為 ℓ 的甲、乙兩繩連結繞著轉軸 O 以等角速度相鄰一起同步作等速圓周運動，如圖所示。試問此時甲繩和乙繩的張力量值之比為多少？



(A)1：1　(B)1：4　(C)4：1　(D)4：5　(E)5：4。

答 (E)

解析 A、B 兩球同步 ⇒ 週期 T 相等

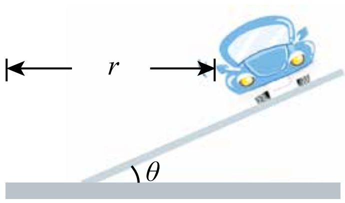


由 $F_c = ma_c = m\dfrac{4\pi^2 R}{T^2} \propto mR \Rightarrow F_A：F_B = m_A R_A：m_B R_B$

$= 1\times1：2\times2 = 1：4$

如右圖 $\begin{cases} A \text{ 球所受合力 } F_A = T_甲 - T_乙 \\ B \text{ 球所受合力 } F_B = T_乙 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{F_A}{F_B} = \dfrac{T_甲 - T_乙}{T_乙} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow T_甲：T_乙 = 5：4$。

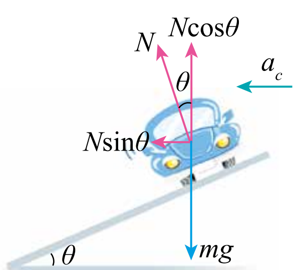
2. 有一輛汽車在傾斜角為 θ 的路面轉彎，當其車速為 v 時，汽車可以不依靠路面與車輪的側向摩擦力即能安全過彎。已知汽車轉彎的曲率半徑為 r，則此時的車速量值 v = ？



(A) $\sqrt{gr\tan\theta}$　(B) $\sqrt{gr\cos\theta}$　(C) $\sqrt{gr\sin\theta}$　(D) $\sqrt{\dfrac{gr}{\sin\theta}}$　(E) $\sqrt{\dfrac{gr}{\cos\theta}}$。

答 (A)

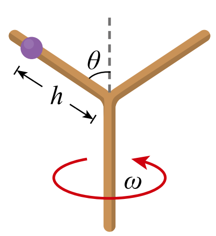
解析 將汽車的受力分解，如右圖所示。



$\begin{cases} \text{鉛直方向：} N\cos\theta = mg \cdots\cdots ① \\ \text{水平方向：} N\sin\theta = F_c = \dfrac{mv^2}{r} \cdots\cdots ② \end{cases}$

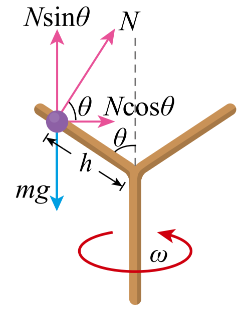
$\dfrac{②}{①}$ 得 $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gr} \Rightarrow v = \sqrt{gr\tan\theta}$。

3. 將一珠子串於 Y 形桿上，如圖所示。當 Y 形桿繞鉛直方向的軸作等角速度旋轉，恰可使珠子維持於一固定長度 h 處。若珠子與 Y 形桿間無摩擦，且圖中 $\theta = 53°$、$h = 6$ cm，重力加速度為 10 m/s^2，試問珠子圓周運動角速度 ω 的量值為多少 rad/s ？



(A)7.5　(B)12.5　(C)17.5　(D)22.5　(E)27.5。

答 (B)



解析 (1) 由力圖可知正向力與重力的合力，提供旋轉的向心力

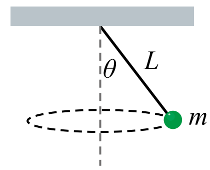
$$\begin{cases}\text{水平方向：}N\cos\theta = F_c \\ \text{鉛直方向：}N\sin\theta = mg\end{cases} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{F_c}{mg} \Rightarrow F_c=\frac{mg}{\tan\theta}\text{。}$$

(2) $F_c=\dfrac{mg}{\tan\theta}=m\omega^2 r=m\omega^2\times(h\sin\theta)$

$$\Rightarrow \omega^2=\frac{g}{\tan\theta\times h\sin\theta}=\frac{10}{(4/3)\times0.06\times(4/5)}=\frac{625}{4}$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{625}{4}}=\frac{25}{2}=12.5(\text{rad/s})\text{。}$$

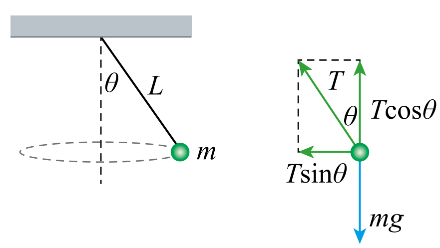
4. 以長度為 L 且質量不計的細繩，繫住質量為 m 的質點，繞同一鉛直線作水平等速圓周運動，細繩與鉛直線的夾角為 θ，如圖所示。已知重力加速度量值為 g，則：



(1) 質點所受的向心力量值為何？
(2) 圓周運動的半徑為何？
(3) 速度的量值為何？
(4) 圖中的 θ 愈大時，繩張力的量值愈大或愈小？

答 (1) $mg\tan\theta$　(2) $L\sin\theta$　(3) $\sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$　(4) 愈大

解析 (1) 如右圖所示，繩張力 T 的水平分力指向圓心，提供質點圓周運動所需的向心力。



$$\begin{cases}\text{水平：}T\sin\theta = F_c \cdots\cdots①\\ \text{鉛直：}T\cos\theta = mg \cdots\cdots②\end{cases}$$

$$\frac{①}{②}\Rightarrow \tan\theta=\frac{F_c}{mg}\Rightarrow F_c=mg\tan\theta\text{。}$$

(2) 圓周運動半徑 $r=L\sin\theta$。

(3) 由 $F_c=mg\tan\theta=m\dfrac{v^2}{r}\Rightarrow v=\sqrt{gr\tan\theta}=\sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$。

(4) 由 ② 式可知 $\Rightarrow T=\dfrac{mg}{\cos\theta}\Rightarrow$ 當 θ 愈大時，$\cos\theta$ 愈小，則 T 愈大。

5-2 簡諧運動

5. 在地球表面測量彈簧簡諧運動的週期 T_1 和小角度單擺的週期 T_2，若地表重力加速度為 g，得到的結果為 $T_1=T_2$。現在改到重力加速度為 $4g$ 的某星球表面重複作測量，其餘條件不變，測得的週期分別為 T_1' 和 T_2'，則：

(A) $T_1'=T_2'$　(B) $T_1'=2T_2'$　(C) $T_1'=4T_2'$　(D) $2T_1'=T_2'$　(E) $4T_1'=T_2'$。

答 (B)

解析 彈簧簡諧運動的振動週期：$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\Rightarrow$ 與 g 值無關 $\Rightarrow T_1'=T_1$。

小角度單擺擺動週期：$T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\Rightarrow$ 與 $\sqrt{g}$ 成反比 $\Rightarrow T_2'=\dfrac{T_2}{2}$ 又 $T_1'=T_1=T_2$ 可得 $T_1'=2T_2'$。

6. 一物體在光滑水平面上作簡諧運動，當其位移為振幅一半時，速率為 v，則此物體通過位移為零之平衡點時的速率為下列何者？【107 指考】

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}v$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}v$ (C) $\frac{1}{2}v$ (D) $2v$ (E) v。

答 (A)

解析 $\begin{cases} x = R\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{R} \\ v = -\omega R\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = -\frac{v}{\omega R} \end{cases} \Rightarrow v = \omega\sqrt{R^2 - x^2}$

依題意：振幅一半時的速率 $v = \omega\sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega R$

通過平衡點時的速率＝ $v_{max} = \omega R = \frac{2}{\sqrt{3}}v = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$。

7. 有關「簡諧運動」與「等速圓周運動」的敘述，下列何者正確？

(A) 兩種運動中質點皆不具有切向加速度

(B) 簡諧運動是等速圓周運動的特例

(C) 等速圓周運動是簡諧運動的特例

(D) 某物體受到合力和位移的關係為：$\vec{F} = 2\vec{x}$ 時，此物體正在作簡諧運動

(E) 將作等速圓周運動質點的軌跡投影在直線上，此投影點的運動即為簡諧運動。

答 (E)

解析 (A) ×：簡諧運動 ⇒ 速度量值一直改變 ⇒ 有切向加速度；等速圓周運動 ⇒ 速度量值不變 ⇒ 沒有切向加速度。

(B)(C) ×：簡諧運動是直線上的振動，而等速圓周運動是平面運動，兩者並無隸屬關係。

(D) ×：滿足 $\vec{F} = -k\vec{x}$ 者，才會作簡諧運動。

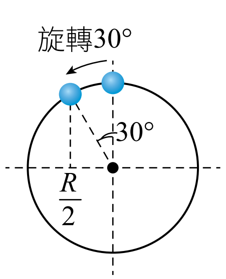
8. 某質點作簡諧運動，其振幅為 10 cm、週期為 T s，則質點由平衡位置移至距平衡點 5 cm 處所花費之最短時間應為多少 s ？

(A) $\frac{T}{4}$ (B) $\frac{T}{6}$ (C) $\frac{T}{8}$ (D) $\frac{T}{12}$ (E) $\frac{T}{15}$。

答 (D)

解析 題目所求的最短時間為：由平衡點移動振幅的一半，即 $\frac{R}{2}$ 的距離，此相當於在參考圓中旋轉 30°，如右圖所示。

⇒ 由參考圓的旋轉來計算時間，費時 $\Delta t = \frac{30°}{360°} \times T = \frac{T}{12}$ (s)。



素養混合題——實驗題

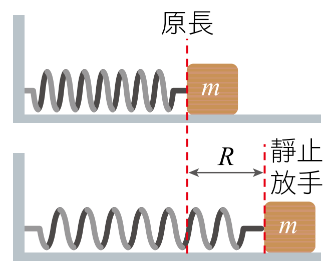
水平彈簧的簡諧運動

簡諧運動（簡稱 S.H.M.）：當物體受到與其位移大小成正比，且指向平衡位置的恢復力作用時，物體以平衡點為中心做週期性的來回振動。最常見的實例為：在光滑水平地面上，將質量不計的輕彈簧（彈性常數為 k）水平放置，一端固定於牆面，另一端繫上質量為 m 的物體作為振子。在比例限度內，將彈簧自原長處拉出 R 的伸長量後，將物體由靜止放手後，物體所做的運動即為簡諧運動。

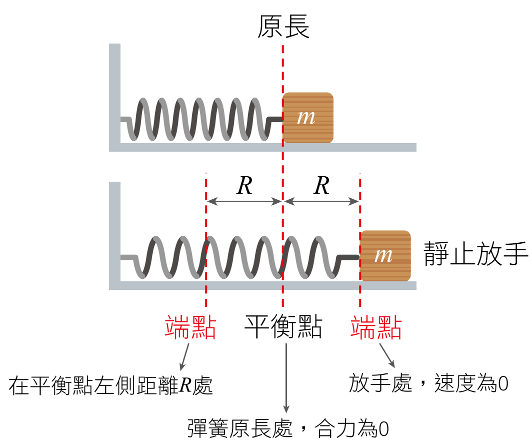
小智準備了表列的實驗器材，準備進行上述實驗。試根據本文敘述，回答下列問題：

實驗器材	規格或說明
彈簧 3 條	原長皆 50 cm，質量皆不計。彈性常數 k 分別為 10 N/m、20 N/m、30 N/m
振子 3 個	質量 m 分別為 100 g、200 g、300 g
碼表、直尺	量測時間及長度

1. 請根據簡諧運動的定義，說明靜止放手後，物體做簡諧運動的理由；並利用圖示標出簡諧運動的端點及平衡點的位置。



答



解析 理由：

在比例限度內，彈簧遵守「虎克定律」，

即：回復力 $\vec{F}$ 和形變量 $\vec{x}$ 大小成正比，且方向相反。

此滿足簡諧運動：$\vec{F}=-k\vec{x}$ 的數學式，故作簡諧運動。

2. 物體自靜止放手後，有關其振動的敘述，下列哪些正確？

(A) 物體振動到最左端的位置時，速度為零，但加速度量值不為零

(B) 物體振動回到彈簧原長處時，速度量值最大，加速度量值也最大

(C) 當物體再度回到原放手位置瞬間，其受力量值最大，加速度量值也最大

(D) 物體在平衡點位置時，速度量值為 $R\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(E) 若物體振動的週期為 T，則物體自放手後移動$\dfrac{R}{2}$距離，共費時$\dfrac{T}{8}$。

答 (A)(C)

解析 (A)○：物體在端點處，速度為零、但加速度量值最大不為零。

(B)×：彈簧原長處即平衡點處，此時速度量值最大，但加速度為零。

(C)○：放手處為端點，此時彈簧伸長量最大，所受回復力量值最大，故加速度量值也最大。

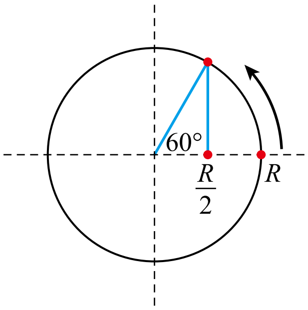
(D)×：物體在平衡點位置時，速度量值為最大值，

$$v_{\max} = \omega R \text{ 又 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

所以 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \cdot R$。

(E)×：如圖，物體自放手後移動$\dfrac{R}{2}$，相當於在參考圓中旋轉 60°，

費時 $t = T \times \dfrac{60°}{360°} = \dfrac{T}{6}$。



3. 小智以不同的器材組合進行六次的實驗，並測量物體的振動週期 T，將數據記錄如下表所示。試問：表中 T_1、T_2、T_3、T_4、T_5、T_6 的大小關係為何？

次數	振子質量 m	彈簧彈性常數 k	拉出的伸長量 R	週期 T
1	100 g	10 N/m	15 cm	T_1
2	100 g	20 N/m	15 cm	T_2
3	200 g	20 N/m	10 cm	T_3
4	200 g	30 N/m	10 cm	T_4
5	300 g	10 N/m	5 cm	T_5
6	300 g	30 N/m	5 cm	T_6

答 $T_5 > T_1 = T_3 = T_6 > T_4 > T_2$

解析 由簡諧運動週期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \propto \sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$\Rightarrow T_1 : T_2 : T_3 : T_4 : T_5 : T_6 = \sqrt{\frac{0.1}{10}} : \sqrt{\frac{0.1}{20}} : \sqrt{\frac{0.2}{20}} : \sqrt{\frac{0.2}{30}} : \sqrt{\frac{0.3}{10}} : \sqrt{\frac{0.3}{30}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1}} : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{1}} : \sqrt{\frac{3}{3}}$$

$\Rightarrow T_5 > T_1 = T_3 = T_6 > T_4 > T_2$。

4. 承第 3. 題，T_1 的值約為多少？（$\pi \approx 3.14$）
(A) 0.31 (B) 0.63 (C) 0.94 (D) 1.26 (E) 1.57。

答 (B)

解析 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0.1}{10}} = \dfrac{2\pi}{10} \approx 0.628(\text{s}) \approx 0.63(\text{s})$。

5. 承第 3. 題，若小智將實驗裝置移至加速向上的電梯中重新做實驗，測得物體的簡諧運動週期 T 將如何改變？簡述理由。

答 不變；如詳解

解析 由 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 可知，簡諧運動的週期，與加速度 a 無關。

當 m、k 不變時，週期 T 也不變。

素養混合題——生活情境題

收集波浪的能量

你在海邊欣賞起伏不斷的波浪時，是否有想過善用其中的能量呢？如果你有一點工程魂的話，可能會絞盡腦汁，試著設計海洋波浪的能量收集裝置。其中一種可行的方案，就是在海面裝設浮動裝置，收集波浪上下運動的動能。因此在設計時，需要考慮波浪的週期、波長、波高等因素，才能讓能量收集的效率提高。

這其中最重要的關鍵，就是善用波浪近似週期運動的特性。雖然浮動裝置相當複雜，但若是以簡諧運動來近似，其振動頻率 f 為

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

其中 m 為裝置的質量，k 為裝置的彈性常數。因此藉由改變彈性常數或是質量，即可改變浮動裝置的自然頻率。這樣在波浪來臨時，裝置能夠以接近波浪頻率的方式上下移動，藉由共振效應而達到最好的能量轉移效率。原來看似簡單的簡諧運動，還能夠幫上工程師不少忙呢！

1. 當設計波浪能量收集裝置時，為了提高能量轉移效率，哪一項設計原則最為重要？
   (A) 將裝置固定在海床上以減少損壞風險
   (B) 增加浮動裝置的質量，以穩定其運動
   (C) 適當調整浮動裝置的自然頻率
   (D) 最大化裝置接觸海面的面積
   (E) 強化浮動裝置的彈性常數。

   答 (C)

   解析 適當調整浮動裝置的自然頻率，使其與波浪的頻率接近，藉此達到共振效應，以增加能量轉移效率，故選 (C)。

2. 原先設計波浪能量收集裝置時，是根據該地的波浪週期約 6 秒，而浮動裝置也已調整在最佳的共振頻率。經過長年使用後，其彈性常數變為原先一半。浮動裝置的質量原先為 10 公斤，若根據簡諧運動的頻率公式，該如何調整浮動裝置的質量，使其回復到最佳的能量轉移效率。

   答 質量減半為 5 kg

   解析 根據簡諧運動公式，當彈性常數減半時，質量也應減半，方能維持相同的自然頻率。因此應將浮動裝置的質量減半，調整成 5 公斤。

第 5 章 深度探索

單擺

單擺的「等時性」是伽利略發現的，但是單擺被用來做為計時工具，是在伽利略死後 14 年，由荷蘭物理學家惠更斯，設計製造出單擺時鐘取代重力齒輪的擺鐘。

在教科書上，通常以小角度擺動的單擺，將擺錘的運動近似為簡諧運動，並求出單擺的週期為

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdots\cdots①$$

小角度的說法一般是擺錘的擺角小於 5°，如果擺角愈大，則週期與上式 T_0 的差就愈大。單擺的理論週期，可利用微積分的方式來求得，當擺錘移動一小段弧長 ds 時，所經過的時間為 dt，兩者的關係為（如圖 1 所示）

$$ds = Ld\theta = vdt \cdots\cdots②$$

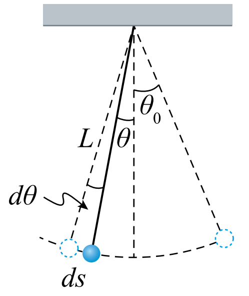


圖 1　擺錘的擺角為 θ_0，當擺錘移動一小段弧長 ds 時，$ds = Ld\theta$

第 ② 式中的 v 為擺錘由擺角 θ_0 擺至 θ 時的瞬時速率，利用力學能守恆可得其值為 $v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$，代回第 ② 式後，可得單擺的週期為

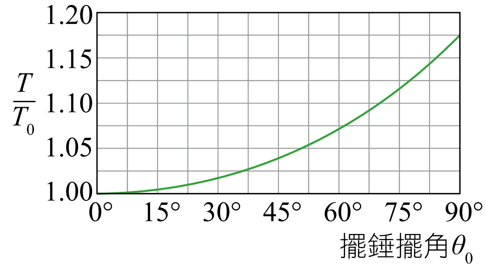
$$T = \int dt = \int\frac{Ld\theta}{v} = 4\int_0^{\theta_0}\frac{Ld\theta}{\sqrt{2gL(\cos\theta-\cos\theta_0)}} = T_0\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \cdots\cdots③$$

第 ③ 式中的 T_0 即為第 ① 式的 $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$。

要計算第 ③ 式可利用級數展開為

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\frac{5^2}{6^2}\sin^6\frac{\theta_0}{2} + \cdots\cdots \quad \cdots\cdots④$$

當擺錘擺角 θ_0 極小時，第 ④ 式中級數第二項之後即可略去不計（$\theta_0 = 5°$ 時，$\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} = 4.757\times10^{-4}$），此時單擺的運動週期 $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$；當 θ_0 夠大時，級數第二項（或第二項之後）即不能忽略。$\frac{T}{T_0}$ 與擺角 θ_0 的關係曲線如圖 2 所示。



▲圖 2　$\frac{T}{T_0}$ 與擺角 θ_0 的關係曲線

假如定義 T 與 T_0 的偏差為 $\frac{T-T_0}{T_0}\times100\%$，則某些擺角與偏差的關係如表 1 所示；如前面所述小角度的擺角須 $\theta_0 \leq 5°$，則偏差只有約 0.0476%。

▼表 1　單擺週期 T 與單擺週期近似公式 T_0 的偏差

擺角 θ_0	5°	10°	15°	20°	25°	30°	45°	60°	90°
偏差 (%)	0.0476	0.1907	0.4301	0.7669	1.2030	1.7407	3.9934	7.2813	17.2357

另外也可以用數值積分的方式，由第 ③ 式計算單擺的週期。由於第 ③ 式為瑕積分 (improper integrals)，實際計算時，該積分式應寫為

$$T = T_0\frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{\phi\to\theta_0^-}\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

因為積分上限 ϕ 須極為逼近 θ_0，在這種情形下，以數值方法計算瑕積分通常需要很長的時間；且電腦的運算時間，端看處理器的運算速度，和積分上限逼近的情形。以現今的電腦科技，計算上述 1° 至 90° 共 90 個數據，精確度小者約數小時，精確度大者通常需要幾天的時間。

阻尼振盪 (damped oscillation)

簡諧運動討論的是假設物體振盪時完全無阻力，所以物體振盪的振幅永遠不衰減，物體只受線性回復力作用，作永無止盡的振動。事實上我們日常生活觀察到的振動，例如繫在彈簧一端振動的物體，無論是在水平面或鉛直面上振動，均見其振幅愈來愈小而終至停止，單擺亦復如此。可見我們忽略阻力下的簡諧運動常常是一理想狀態下的運動而已。

事實上，我們需考慮在空氣中具有阻力情況下物體的振動情形。物體在空氣中所受的阻力，在速度不大的情況下與速度的一次方成正比，阻力可表示為 $-bv$，b 為常數，則在彈簧恢復力及空氣阻力作用下，物體所受的合力為 $\sum F_x = -kx - bv = ma$，得 $-kx - b\dfrac{dx}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$，即

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \cdots\cdots ①$$

第 ① 式為二階線性微分方程式，將 $x = e^{\lambda t}$ 代入，得 $m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$，解一元二次方程式得

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega$$

式中的 ω 為

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \cdots\cdots ②$$

第 ① 式微分方程式的解，可分為三種情況討論：

1. 若第 ② 式中 $b = 0$，則 $\omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，這表示物體在無阻尼下的振動，其振動頻率稱為物體的自然頻率 ω_0。
2. 若第 ② 式中 $\omega_0 > \dfrac{b}{2m}$，則 ω 為實數，第 ① 式的解為

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \theta) \cdots\cdots ③$$

其中 θ 為相位角，是開始觀察物體時，與位置有關的初始值。第 ③ 式表示當阻力相對小時，運動仍保有振動特徵，但振動振幅隨時間減小，若 $\theta = 0$，則第 ③ 式的圖形如圖 1 所示，稱為阻尼振盪；如果將第 ③ 式改寫為 $x = A'(t)\cos(\omega t + \theta)$，其振幅 $A'(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ 係一隨時間衰減的物理量，故振幅會愈來愈小，而終至停止，經此修正所描述的物體阻尼振盪，就與日常生活觀察中的事實相符了。

3. 若第 ② 式中 $\omega_0 < \dfrac{b}{2m}$，第 ① 式的解不能寫成第 ③ 式的形式，這表示阻力太大，物體不能產生來回振盪，只是緩緩地回到平衡點，如圖 2 所示。

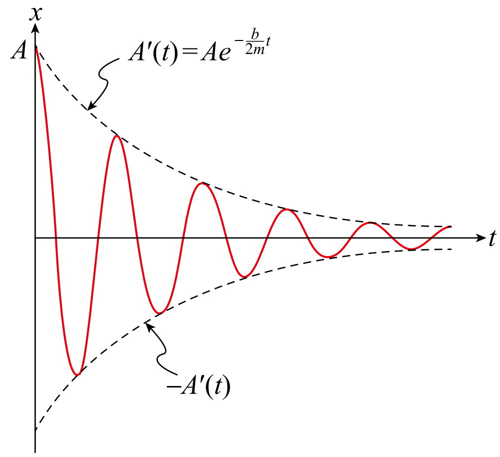


圖 1　阻尼振盪

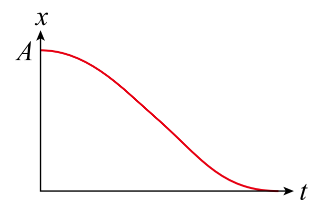


圖 2　阻力太大，物體無法振盪

本章圖片來源

第 5 章
CH5 章首 shutterstock 圖庫提供
基礎題 3 shutterstock 圖庫提供