2 直線運動

2-1 運動學簡介

教學策略

一、位移與路徑長

1. 運動學 (kinematics)：描述物體在空間中的位置、位移、路徑長、速度、速率、加速度等概念，如何隨著時間改變，進而分析這些物理量之間的關係。
2. 質點：物體的體積與運動的路徑相比，可以忽略時，我們可將物體視為質點，例如描述地球在軌道上的路徑時，可以將地球視為一個點。如果物體體積不可忽略時，物體運動的路徑由質心移動的路徑來表示。關於質心的描述，在選修物理 II《第 2 章　動量與角動量》，會有完整的介紹，所以不必對學生做過多的說明。
3. 位移：位移由起點與終點來定義，等於位置的變化量。位移為零時，質點不一定是靜止的。因此，若要以位移來描述質點的運動細節時，必須將每個時距分隔成很短，如此就能了解質點運動的方向、路徑及快慢。
4. 向量與純量：任何兼具量值與方向的量稱為向量 (vector)，例如位移，還有之後陸續會介紹的速度、加速度、力等。只有量值而沒有方向性的量稱為純量 (scalar)，例如路徑長、速率、時間、質量等。
5. 路徑長：運動體所經過的路途長度，稱為路徑長，為一沒有方向性的純量。

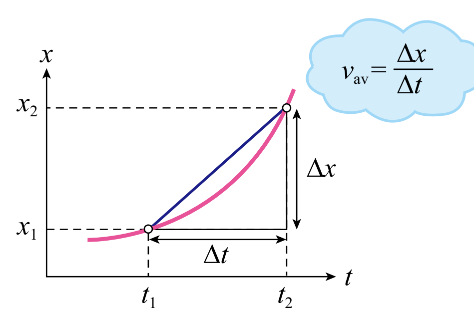
二、速度與速率

1. 平均速度：

(1)平均速度 $= \dfrac{\text{位移}}{\text{時間}} \Rightarrow v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$，平均速度 v_{av} 也常記為 $\bar{v}$。

(2)可適時利用 $x-t$ 圖介紹平均速度。

(3)平均速度的方向與位移方向相同。



2. 瞬時速度：

(1)瞬時速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$（即 $v=\dfrac{dx}{dt}$）

(2)瞬時速度也是平均速度，當時間間隔 Δt 趨近於零的平均速度，即稱為瞬時速度。

(3)瞬時速度也常簡稱為速度。

(4)為避免學生暫時無法接受微分的概念，課堂上不必強調以微分代替極限的符號。

3. 平均速率：

(1)平均速率＝$\dfrac{\text{路徑長}}{\text{時間}}\Rightarrow V_{\text{av}}=\dfrac{L}{\Delta t}$

(2)因為位移量值 $|\Delta x|\le$ 路徑長 L，所以平均速度量值 $|v_{\text{av}}|\le$ 平均速率 V_{av}，除非質點作直線單方向的運動，兩者才會相等。

4. 瞬時速率：

(1)瞬時速率 $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{L}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta t}$＝瞬時速度量值 $|v|$

(2)物體在極短的時段內不可能改變方向，表示 Δt 趨近於零時，物體必作直線單方向的運動，此時路徑長等於位移的量值，因此瞬時速率與瞬時速度的量值必定相等。

(3)瞬時速率也常簡稱為速率，速率就是速度的量值。

(4)質點作直線單方向的等速運動時，平均速率、瞬時速率、平均速度量值、瞬時速度量值均相等；質點作曲線運動或直線來回運動時，平均速率、平均速度量值均可能不相等。

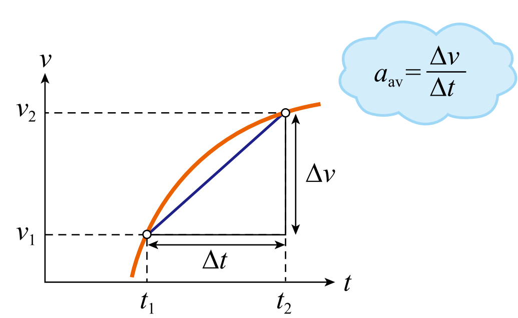
三、加速度

1. 平均加速度：

(1)平均加速度＝$\dfrac{\text{速度變化量}}{\text{時間}}\Rightarrow a_{\text{av}}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$，平均加速度 a_{av} 也常記為 $\overline{a}$。

(2)可適時利用 $v-t$ 圖介紹平均加速度。

(3)平均加速度的方向不一定與速度方向相同，但與速度變化方向必相同。



2. 瞬時加速度：

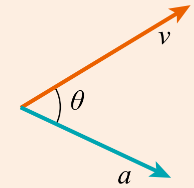
(1)瞬時加速度 $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$（即 $a=\dfrac{dv}{dt}$）

(2)瞬時加速度又常簡稱為加速度。

參考補充／速度 v 與加速度 a 的關係

若 v 與 a 的夾角為 θ，以 θ 判斷速度量值（速率）的變化：

v 與 a 的夾角 θ	速度量值（速率）	速度方向
$\theta = 0°$（v 與 a 同方向）	增大	不變
$0° < \theta < 90°$	增大	改變
$\theta = 90°$（v 與 a 垂直）	不變	改變
$90° < \theta < 180°$	減小	改變
$\theta = 180°$（v 與 a 反方向）	減小	不變



想一想解答

1. 等速運動的軌跡一定是直線嗎？(P.34)

答 對。等速運動中，速度的方向不能改變，所以等速運動的軌跡必為朝單方向的直線軌跡。

2. 平均速率與平均速度的量值一定相等嗎？(P.36)

答 不一定。因為路徑長恆大於等於位移的量值，故平均速率必大於或等於平均速度的量值。

3. (1)一顆球可以瞬時速度為零，但瞬時加速度不為零嗎？(P.37)

答 可以。例如將球鉛直上拋至最高點時，球的速度為零，但加速度量值仍為 9.8 m/s^2。

(2)一匹馬可以速度方向向右跑，但加速度的方向向左嗎？(P.37)

答 可以。例如當馬匹向右跑，但速度逐漸慢下來時。

(3)一輛車可以速度量值漸增，但加速度的量值漸減嗎？(P.37)

答 可以。例如某輛車其加速度由 5 m/s^2 變成 2 m/s^2，但因仍然在加速中，故速度量值漸增。

迷思概念釐清

1. 必須先有參考的坐標系，才能得到物體的位移。

答 錯。根據位移的定義，當質點的起點與終點已知時，不論描述位移所取的坐標系為何，其位移量值與方向便已決定。

2. 物體在某時段內的位移，等於速度與時間的乘積。

答 嚴格來說並不正確。除非是等速運動，否則物體的位移應等於「平均速度與時間的乘積」。

3. 位移的時變率等於速度。

答 錯。「時變率」的意思為「對時間的變化率」，所以正確的說法應該是「位置的時變率（或位置對時間的變化率）等於速度」。

4. 平均速度的量值等於平均速率。

答 錯。只有作直線單方向運動的物體，其位移的量值等於路徑長，此時平均速度的量值才會等於平均速率。

5. 加速度為零時，速度不一定為零；速度為零時，加速度也不一定為零。

答 對。由 $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ 可知，當加速度 a 為零時，表示速度變化量 Δv 為零，此時速度為定值，但不一定為零。當速度為零時，可能是因為物體運動正在轉向（由正變為負，或由負變為正），此時速度仍在變化，因此加速度不為零；例如鉛直上拋運動，物體達最高點時，速度為零，但加速度仍為重力加速度。

6. 物體的加速度量值愈大，則物體的速度量值也會愈大。

答 錯。對直線運動的物體來說，只有速度與加速度的方向相同時，物體的速度量值才會愈大；對平面運動的物體而言，則速度與加速度的夾角小於 90° 時，物體的速度量值才會愈大。

2-2 物體運動圖

教學策略

一、位置－時間圖

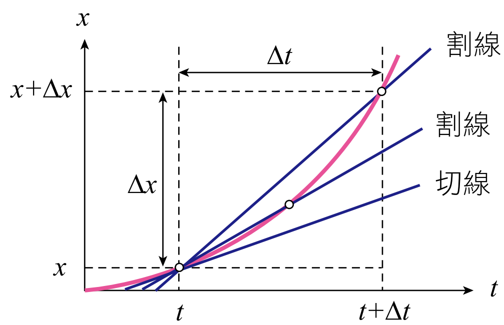
v_{av}=割線斜率
v=切線斜率

1. 平均速度：

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}= x-t \text{ 圖的割線斜率。}$$

2. 瞬時速度：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}= x-t \text{ 圖的切線斜率。}$$



二、速度－時間圖

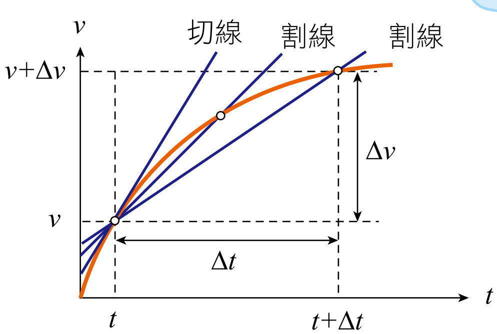
1. 平均加速度：可用類比的方式，仿照 $x-t$ 圖的做法求得，

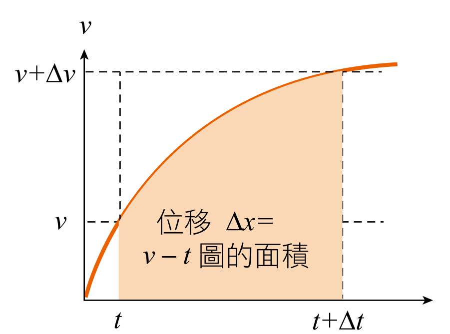
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}= v-t \text{ 圖的割線斜率}$$

2. 瞬時加速度：$a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}= v-t$ 圖的切線斜率。

3. $v-t$ 圖求位移：$\Delta x = v-t$ 圖曲線與 t 軸包圍的面積。

a_{av}=割線斜率
a = 切線斜率

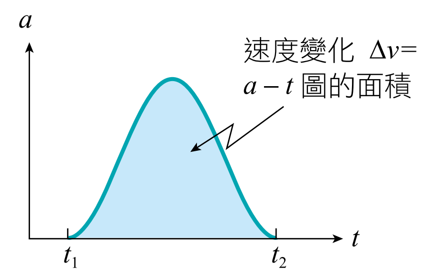




4. 面積的代數和：t 軸上方的面積，代表位移為正值；t 軸下方的面積，代表位移為負值。取適當正負號，再將所有面積加總後，其值等於總位移。

5. $v-t$ 圖的運用：$v-t$ 圖中包含了許多運動資訊，如每一時刻的速度、某一時距的速度變化及位移等，在運動的圖形，毫無疑問地，這個圖最具重要性，因此老師宜多舉幾個 $v-t$ 圖的例子，向學生說明圖中含意。例如以 $v-t$ 圖來說明平均速率與平均速度量值的差異，比用文字描述更為具體而有用。

三、加速度－時間圖



1. $a-t$ 圖求速度變化量：可用類比的方式，仿照 $v-t$ 圖的做法求得，$\Delta v = a-t$ 圖曲線與 t 軸包圍的面積。

2. 速度變化量的正負：t 軸上方的面積，代表速度變化為正值（$v_2-v_1>0$）；t 軸下方的面積，代表速度變化為負值（$v_2-v_1<0$）。

3. 各類運動圖特性所對應的物理意義：

圖形特性 / 物理意義 / 運動圖	割線斜率	切線斜率	與 t 軸包圍的面積
$x-t$ 圖	平均速度 v_{av}	瞬時速度 v	×
$v-t$ 圖	平均加速度 a_{av}	瞬時加速度 a	位移 Δx
$a-t$ 圖	×	×	速度變化量 Δv

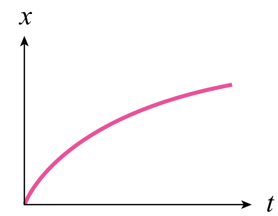
4. 各類運動圖的關係：

$$x-t\text{ 圖} \underset{\text{面積}=\Delta x}{\overset{\text{斜率}\frac{\Delta x}{\Delta t}=v}{\rightleftarrows}} v-t\text{ 圖} \underset{\text{面積}=\Delta v}{\overset{\text{斜率}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a}{\rightleftarrows}} a-t\text{ 圖}$$

5. 等加速度的運動圖：在此可先介紹等加速度的三個運動圖，一可讓學生熟悉運動圖的特性，二來可為 2-3 節預做準備。

想一想解答

1. 某車作直線運動，根據其位置對時間的關係圖，判斷此車加速度大於或小於零？(P.39)



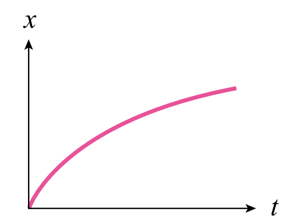
答 $x-t$ 圖的切線斜率代表物體的瞬時速度，由圖可看出物體的速度逐漸減慢，作減速度運動，故加速度小於 0。

2. 由 $v-t$ 運動圖中，可以了解物體的哪些運動情形？(P.42)

答 可從 $v-t$ 圖直接讀取速度量值、由切線斜率可得到瞬時加速度、由函數曲線所涵蓋面積可得到位移。

迷思概念釐清

1. 一物體運動的位置 x 與時間 t 的關係圖，如圖所示，則該運動物體的速度與加速度方向相同。



答 錯。$x-t$ 圖的切線斜率等於瞬時速度，因為斜率為正值且愈來愈小，表示速率愈來愈小，因此速度與加速度方向相反。

2. 由 $v-t$ 圖可以求得運動物體的平均速度。

答 對。由 $v-t$ 圖的面積可以求得運動物體的位移，將位移除以經過的時間，即等於運動物體的平均速度。

3. $v-t$ 圖中，無論時間 t 軸上方或下方的面積，若一律取為正值，再將所有面積加總後，其值等於總路徑長。

答 對。若 t 軸上方面積取為正值，t 軸下方的面積取為負值，將所有面積加總後，其值等於總位移；若面積一律取為正值，將所有面積加總後，其值等於總路徑長。

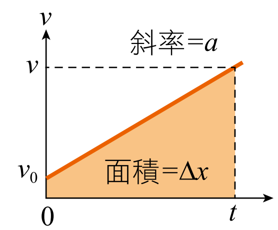
4. $a-t$ 圖中，若面積在時間 t 軸上方，代表速度為正值；若面積在時間 t 軸下方，代表速度為負值。

答 錯。正確的說法應該是：若面積在時間 t 軸上方，代表速度變化為正值；若面積在時間 t 軸下方，代表速度變化為負值。

2-3 等加速運動

教學策略

一、等加速運動公式推導



1. 等加速運動的 $v-t$ 圖：物體在運動的過程中，加速度的量值與方向均維持不變，表示在任意時刻的斜率皆相同，因此 $v-t$ 圖為一斜直線，如圖所示。且 2-2 節已說明過 $v-t$ 圖的重要性，在此應不厭其煩地對學生強調其實用價值，無論在等加速運動公式的推導或是解題，都是非常有用。
2. 等加速運動四個基本公式：

(1) $v-t$ 圖的斜率 $= a = \dfrac{v-v_0}{t-0} \Rightarrow v = v_0 + at$

(2) $v-t$ 圖的面積 $= \Delta x = \dfrac{1}{2}(v_0+v)t = (\dfrac{v_0+v}{2})\times t = v_{av}\times t$

(3) 將 (1) 式代回 (2) 式 $\Rightarrow \Delta x = (\dfrac{v_0+v_0+at}{2})\times t = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$

(4) 由 (1) 式 $t = \dfrac{v-v_0}{a}$ 代回 (2) 式 $\Rightarrow \Delta x = (\dfrac{v_0+v}{2})\times\dfrac{v-v_0}{a} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

3. 等加速運動三大基本公式：若將四個基本公式中的 (2)、(3) 兩式合併為求運動物體的位移，即 $\Delta x = (\dfrac{v_0+v}{2})\times t = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$，則連同 (1)、(4) 兩式通稱為三大基本公式。
4. 等加速運動的平均速度：$\dfrac{v_0+v}{2} = v_{av} \Rightarrow \dfrac{初速+末速}{2}$ = 平均速度，只有在等加速運動中才成立，其他型態的運動不一定符合。
5. 等加速運動向量的正、負號：務必提醒學生，使用等加速運動公式時要注意向量的正、負符號，原則上正、負號可以自訂，但通常是以初速 v_0 的方向為正方向；若初速為零，則通常以加速度的方向為正方向。

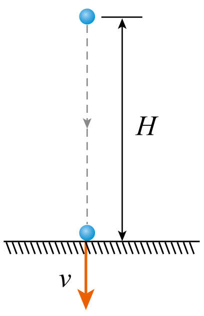
二、靜止下落運動

1. 自由落體運動：物體僅受重力作用時，稱為自由落體運動。若僅止於地表附近的自由落體運動，且忽略空氣阻力的情況下，物體下落的加速度量值約為 9.8 公尺 / 秒 ^{2}，這個加速度也稱為重力加速度 (acceleration of gravity)，習慣上以符號 g 表示，因此地表附近的自由落體運動是一種等加速運動。
2. 靜止下落運動的方程式：

(1)物體自離地高度 H 處由靜止落下 $\Rightarrow H=\dfrac{1}{2}gT^2$

(2)下落所需的時間 $T=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

(3)自由落體觸地的末速 $v=gT=\sqrt{2gH}$

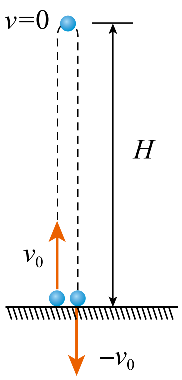


三、鉛直上拋運動

1. 鉛直上拋運動向量的正、負號：初速度 v_0 往上、加速度 g 往下，通常以初速度的方向（往上）為正，故初速為 v_0、加速度為 $-g$。
2. t 秒末的速度：$v=v_0-gt$，$\begin{cases}\text{若 } v>0\text{，表示物體正在往上運動}\\ \text{若 } v<0\text{，則物體正在往下運動}\end{cases}$
3. t 秒末的位移：$h=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ $\begin{cases}\text{若 } h>0\text{，表示物體位置在拋點的上方}\\ \text{若 } h<0\text{，則物體位置在拋點的下方}\end{cases}$
4. 鉛直上拋抵達最高點的性質：利用最高點時物體速度為零的性質，可求出

(1)上升時間：$v=v_0-gt_{上升}=0\Rightarrow t_{上升}=\dfrac{v_0}{g}$

(2)最大高度：$v^2=v_0^2-2gH=0\Rightarrow H=\dfrac{v_0^2}{2g}$



5. 鉛直上拋回到拋出點的性質：拋體到達最高點後，隨即開始自由下落，由靜止下落運動的性質可求出

(1)下降時間：$H=\dfrac{1}{2}gt_{\text{下降}}{}^2 \Rightarrow \dfrac{v_0{}^2}{2g}=\dfrac{1}{2}gt_{\text{下降}}{}^2 \Rightarrow t_{\text{下降}}=\dfrac{v_0}{g}=t_{\text{上升}}$

(2)速度：$v=-gt_{\text{下降}}=-g\times\dfrac{v_0}{g}=-v_0$

6. 鉛直上拋運動的對稱性：物體作鉛直上拋運動時，其上升與下降的過程具有時間與速率的對稱性（如圖 (a) 所示），

(1)時間對稱：拋體在兩點之間同一個高度差的情況下，其上升過程所經歷的時間，與下降過程所經歷的時間必相等，即 $t=t'$。

(2)速率對稱：拋體在同一個高度時其速率必相等，即 $|v_1|=|v'_1|$、$|v_2|=|v'_2|$。

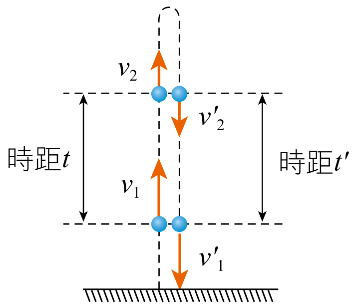


圖 (a)

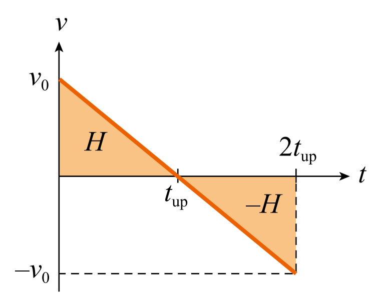


圖 (b)

7. 鉛直上拋運動的 $v-t$ 圖：正因為 $v-t$ 圖中包含了許多運動資訊，再加上鉛直上拋有關時間與速率的對稱性，因此面對鉛直上拋運動的問題時，可提醒學生多利用 $v-t$ 圖（如圖 (b) 所示），然後根據題目的關鍵條件，找出解題的途徑。因此，不論是面對鉛直上拋運動，或是等加速運動的問題，$v-t$ 圖都是一項非常有用的工具。

想一想解答

1. 等加速運動的軌跡一定是直線嗎？ (P.46)

答 不一定，例如將球水平或斜向拋出時，球作加速度為 9.8 m/s^2 的等加速運動，但其軌跡為拋物線而非直線。

2. 鉛直上拋運動中，上升的最後 1 秒和下降的第 1 秒，位移量值是否相同？ (P.49)

答 是，因為上升與下降具有對稱性。

迷思概念釐清

1. 對運動的物體而言，在某一時段內物體的初速與末速的算術平均數，等於該時段內的平均速度。

答 錯。$\frac{\text{初速}+\text{末速}}{2}$＝平均速度，只有在等加速運動中才成立。

2. 物體作等加速運動，其運動軌跡必為直線。

答 錯。只要物體在運動過程中，加速度的量值與方向均維持不變，即為等加速運動，其軌跡可能為直線或拋物線。

3. 物體以初速為零作自由下落運動，則物體在尚未落地之前，每一秒內下落距離的比為 1：3：5：7…。

答 對。

第 1 秒內下落距離：第 2 秒內下落距離：第 3 秒內下落距離…

$$=\frac{1}{2}g\times1^2:(\frac{1}{2}g\times2^2-\frac{1}{2}g\times1^2):(\frac{1}{2}g\times3^2-\frac{1}{2}g\times2^2):(\frac{1}{2}g\times4^2-\frac{1}{2}g\times3^2)\cdots$$

$$=1:3:5:7\cdots$$

4. 物體在地表附近作鉛直上拋運動，是等加速運動，但不屬於自由落體運動。

答 錯。物體在運動過程中僅受重力作用時，即為自由落體運動，包括靜止下落、鉛直上拋、鉛直下拋、水平拋射與斜向拋射運動等；因為物體的加速度均為重力加速度，所以也是等加速運動。

5. 物體作鉛直上拋運動時，其上升過程中的平均速度，等於初速的一半。

答 對。因為鉛直上拋運動是等加速運動，因此 $v_{av}=\frac{\text{初速}+\text{末速}}{2}=\frac{v_0+0}{2}=\frac{v_0}{2}$。

6. 作鉛直上拋運動時，物體在同一個高度處會通過兩次，此兩次的速度會相等。

答 錯。鉛直上拋運動的對稱性為時間與速率，故物體通過同一個高度處的速度量值（速率）相等，但方向相反，因此速度並不相等。

實驗 1 自由落體與物體在斜面上的運動

一、打點計時器相鄰點痕的時間測量

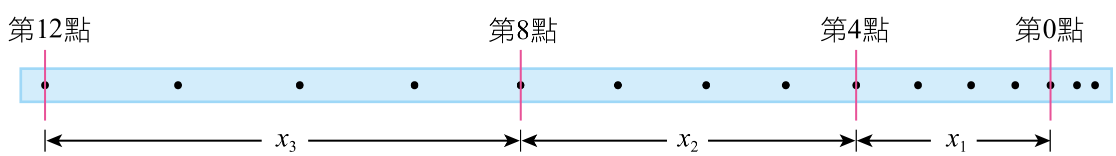
1. 相鄰兩點間的時距：拉動紙帶 T 秒，使打點計時器在紙帶上留下點痕 N 個，若令相鄰兩點間的時距為 Δt(s)，則 N 個點痕代表共有 $N-1$ 個時距，因此

$$\Delta t=\frac{T}{N-1}\ (\mathrm{s})$$

二、物體在斜面上的運動分析

1. 相鄰 5 個點痕的時距：滑車下滑後，紙帶上可得打點計時器的點痕紀錄，為了計算方便，從第 0 點開始，每隔 4 個點畫一直線，如下圖所示。因此相鄰 5 個點痕的時距為

$$4\Delta t=\frac{4T}{N-1}\ (\mathrm{s})$$



2. 時距的截取：要取若干個點痕的時距，依實驗狀況可以自訂，原則上只取有紀錄清晰點痕的紙帶部分，且截取該時距內的位移不宜過小，以避免人為操作的不確定度過大。
3. 紙帶上加速度的分析：

(1)第 0 點到第 4 點的位移為 x_1，時間為 $4\Delta t$，故平均速度（亦等於第 0 點到第 4 點「中點時刻」的瞬時速度，可記為 v_2）為

$$v_{av(0\sim4)}=\frac{x_1}{4\Delta t}=v_2$$

(2)同理，第 4 點到第 8 點的平均速度為

$$v_{av(4\sim8)}=\frac{x_2}{4\Delta t}=v_6$$

(3)由 (1)、(2) 可得第 0 點到第 8 點的平均加速度為

$$a_{av(0\sim8)}=\frac{v_6-v_2}{(6-2)\Delta t}=\frac{\dfrac{x_2}{4\Delta t}-\dfrac{x_1}{4\Delta t}}{4\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{(4\Delta t)^2}$$

(4)同理，第 4 點到第 12 點的平均加速度為

$$a_{av(4\sim12)}=\frac{v_{10}-v_6}{(10-6)\Delta t}=\frac{\dfrac{x_3}{4\Delta t}-\dfrac{x_2}{4\Delta t}}{4\Delta t}=\frac{x_3-x_2}{(4\Delta t)^2}$$

(5)如果紙帶上的數據夠多，可以再繼續往下分析，而實驗所得滑車的平均加速度，為上述各段平均加速度的平均值，

$$a_{av}=\frac{a_{0\sim8}+a_{4\sim12}+\cdots}{n}$$

(6)若滑車作等加速運動，則該滑車的加速度為

$$a=\frac{x_2-x_1}{(4\Delta t)^2}=\frac{x_3-x_2}{(4\Delta t)^2}=\cdots=\frac{\Delta x}{(4\Delta t)^2}$$

其中 Δx（$=x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots$）為相鄰兩時距內的位移變化量。

三、自由落體的運動分析

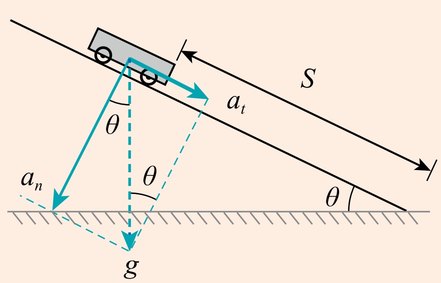
1. 自由落體實驗時距的截取：加速度的分析方式與斜面上的運動分析相同，不過自由落體的加速度比斜面上的加速度大得多，因此每隔 5 個點取一個時距可能位移會過大，造成數據點太少。以課本每隔 4 個點取一個時距如果仍然位移過大，則可以改成每隔 2 個點，或甚至每隔 1 個點取一個時距，並不影響加速度的分析。

參考補充／ 斜面上的等加速運動

1. 斜面光滑：

(1)物體在光滑斜面上的加速度，為重力加速度在平行斜面方向上的分量 a_t，另一垂直斜面方向上的分量為 a_n，兩分量分別為

$$\begin{cases}a_t=g\sin\theta\\a_n=g\cos\theta\end{cases}$$

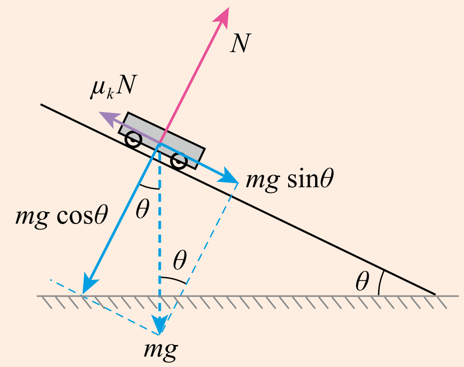


(2)物體滑至斜面底部時的速度與所經過的時間分別為

$$\begin{cases}v^2=v_0^2+2a_tS=0+2a_tS\Rightarrow v=\sqrt{2a_tS}=\sqrt{2g\sin\theta S}\\S=\dfrac{1}{2}a_tt^2=\dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2S}{g\sin\theta}}\end{cases}$$

2. 斜面粗糙：當斜面有摩擦力時，由於斜面作用於物體的動摩擦力幾乎為定值，而重力的分量 $mg\sin\theta$ 也是定值，因此物體在斜面粗糙上仍作等加速運動，此加速度的量值為（詳見選修物理 II《第 1 章靜力平衡》）

$$\begin{cases} mg\sin\theta - \mu_k N = ma \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \Rightarrow a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$



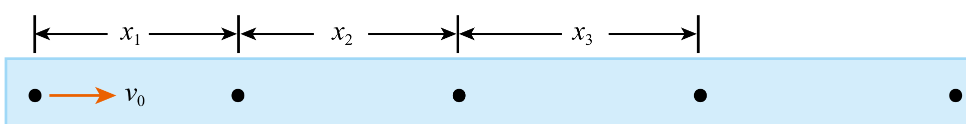
迷思概念釐清

1. 作「自由落體與物體在斜面上的運動」實驗時，紙帶上的點痕密度應該愈多愈好，才能得到較精確的實驗數據。

答 錯。點痕密度太高，若造成點痕與點痕之間無法區別，反而使實驗結果的不確定度增大。

2. 作「自由落體與物體在斜面上的運動」實驗時，紙帶上的點痕與點痕之間的距離會成等差數列。

答 對。例如下圖，相鄰兩點痕之間的時距為 t，且第 1 個點痕時滑車速度為 v_0，則



$$\begin{cases} x_1 = v_0 \times t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ x_1 + x_2 = v_0 \times 2t + \dfrac{1}{2}a(2t)^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v_0 \times 3t + \dfrac{1}{2}a(3t)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ x_2 = v_0 t + \dfrac{3}{2}at^2 \\ x_3 = v_0 t + \dfrac{5}{2}at^2 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = at^2$$

因為相鄰兩點痕之間的距離差皆為 at^2，因此紙帶上的點痕與點痕之間的距離成等差數列。

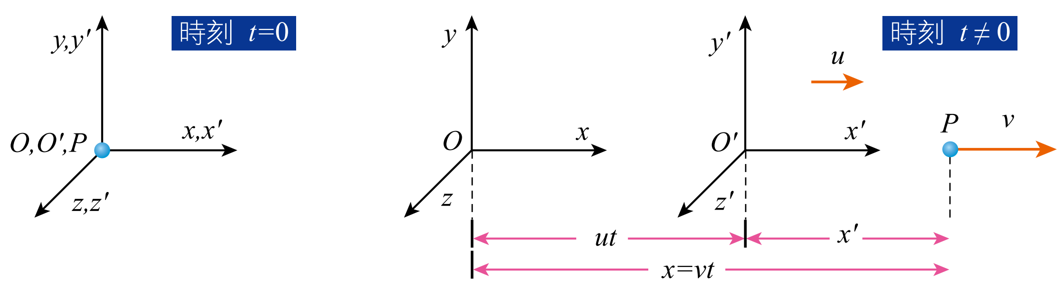
2-4 相對運動

教學策略

一、相對位移

1. 兩個以等速相對運動的坐標系觀察同一個物體的位置：兩個坐標系的原點 O、O' 以及物體 P，在時刻 $t = 0$ 時位於同一位置，如下圖所示。假設坐標系 O 相對地面靜止，O' 相對地面的速度為 u，P 相對地面的速度為 v（u、v 都朝 x 方向），當時刻為 t 時，由下圖可知

$$vt = x' + ut \quad \text{或} \quad x' = x - ut$$



2. 相對位置：由等式 $x' = x - ut$ 可知，O' 觀察到 P 的位置，以地面的坐標系（即坐標系 O）來說，等於 P、O' 兩位置之差。因此假定物體 A（即物體 P）與物體 B（即坐標原點 O'），相對於地面坐標系 O 的位置分別為 $x_A = x$ 與 $x_B = ut$，則物體 A 相對於物體 B 的相對位置 x_{AB}（即物體 B 觀察物體 A 的位置）定義為

$$x_{AB} = x_A - x_B$$

同理，物體 B 相對於物體 A 的位置（即物體 A 觀察到物體 B 的位置）$x_{BA} = x_B - x_A$，因此

$$x_{AB} + x_{BA} = 0$$

3. 相對位移：上述物體 A 與物體 B 皆由坐標原點 O 出發，故其位置 x_A、x_B 也是時距為 t 的位移，此時物體 A 相對於物體 B 的相對位移（即物體 B 觀察物體 A 的位移），等於其相對位置 x_{AB}，亦即

$$\text{A 對 B 的相對位移 } x_{AB} = x_A - x_B$$

$$\text{B 對 A 的相對位移 } x_{BA} = x_B - x_A$$

二、相對速度和相對加速度

1. 兩個以等速相對運動的坐標系觀察同一個物體的速度：坐標系 O 觀察到物體 P 的位置為 $x = vt$，因此推得 P 作速度為 v 的等速運動；坐標系 O' 觀察到物體 P 的位置為 $x' = vt - ut = (v - u)t$，因此推得 P 作速度為 $v - u$ 的等速運動。比較兩者觀察到的速度 v 與 v'，得到以下的關係式

$$v' = v - u$$

2. 相對速度：若物體 A 與物體 B 相對於地面坐標系 O 的速度分別為 v_A 與 v_B，則物體 A 相對於物體 B 的相對速度 v_{AB}（即物體 B 觀察物體 A 的速度）定義為

$$v_{AB} = v_A - v_B$$

同理，物體 B 相對於物體 A 的速度（即物體 A 觀察到物體 B 的速度）$v_{BA} = v_B - v_A$，因此

$$v_{AB} + v_{BA} = 0$$

3. 相對加速度：將相對位置與相對速度的概念推廣，運用到相對加速度上，若兩物體的加速度分別為 a_A 與 a_B，則物體 A 相對於物體 B 的相對加速度（即物體 B 觀察物體 A 的加速度）、物體 B 相對於物體 A 的相對加速度（即物體 A 觀察物體 B 的加速度）分別為

$$\begin{cases} a_{AB} = a_A - a_B \\ a_{BA} = a_B - a_A \end{cases} \Rightarrow a_{AB} + a_{BA} = 0$$

4. 簡化兩個物體的運動：處理兩個同時在運動的物體時，若能以相對運動來分析，將其中一個物體視為靜止的觀察者，可以將問題簡化為一個物體的運動。

5. 相對運動的公式整理：

物體 A 相對於物體 B 的位移 $x_{AB} = x_A - x_B$

物體 A 相對於物體 B 的速度 $v_{AB} = v_A - v_B$

物體 A 相對於物體 B 的加速度 $a_{AB} = a_A - a_B$

想一想解答

1. 以時速 100 公里的速度向東行駛的火車上，甲和乙兩位乘客並排而坐，乙看甲的速度為何？當火車等速通過月台時，乙看月台的速度為何？(P.54)

答 乙看甲的速度為零；乙看月台的速度為 100 km/h 向西。

以東為正向，相對速度：

$v_{甲乙} = v_{甲} - v_{乙} = 100 - 100 = 0$

$v_{月乙} = v_{月} - v_{乙} = 0 - 100 = -100$

$= 100$ (km/h)，向西

2. 臺東鹿野高台熱氣球嘉年華中，小雷從等速上升的熱氣球，將小石頭往外輕輕放手落下，小堯則在地面上觀看。試問：在小雷和小堯的觀察中，石頭作哪一種運動？(P.55)

答 (1)小雷：石頭作初速為零，自由落下的運動。

(2)小堯：石頭作鉛直上拋的運動。

迷思概念釐清

1. 物體 1 相對於物體 2 的相對速度，其意思是物體 1 觀察物體 2 的速度。

答 錯。物體 1 相對於物體 2 的相對速度，應該是「物體 2 觀察物體 1 的速度」。

2. 物體 1 與物體 2 相對於地面的加速度分別為 a_1 與 a_2，則物體 2 相對於物體 1 的相對加速度為 $a_2 - a_1$。

答 對。物體 2 相對於物體 1 的相對加速度（即物體 1 觀察物體 2 的加速度）為 $a_{21} = a_2 - a_1$。

第 2 章 習題解答

＊為多選題

基礎題

2-1 運動學簡介

1. 猛禽類動物視網膜上的錐狀細胞每平方公釐約有 100 萬個，是人類的 5 倍，所以牠們總能看清遠方獵物再由高處俯衝獵食。山崖上有一隻遊隼（猛禽的一種，美國戰機 F-16 以其為名）看見 400 m 外的獵物，直線俯衝費時 5 s 捕抓到獵物，試問遊隼俯衝的平均速率為多少 km/h ？
(A) 80 (B) 156 (C) 200 (D) 256 (E) 288。

答 (E)

解析 平均速率：$V_{av}=\dfrac{L}{\Delta t}=\dfrac{400}{5}=80(\text{m/s})=\dfrac{80/1000}{1/3600}=288(\text{km/h})$。

2. 某質點作直線運動，其第 t s 末的位置與速度如表所示，試問此質點前 5 s 內的平均速度為多少 m/s ？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5。

時間 t（s）	0	1	2	3	4	5
位置 x（m）	−3	−1	1	3	5	17
速度 v（m/s）	12	0	−2	4	6	2

答 (D)

解析 $v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{17-(-3)}{5-0}=4(\text{m/s})$。

3. 承上題，此質點前 5 s 內的平均加速度為多少 m/s^2 ？
(A) 0 (B) 1 (C) −1 (D) 2 (E) −2。

答 (E)

解析 $a_{av}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{2-12}{5-0}=-2(\text{m/s}^2)$。

4. 下列有關「運動」的敘述，何者正確？
(A) 位移的量值恆等於路徑長 (B) 開車繞圓周運動時，車可作等速度運動 (C) 瞬時速度的量值必等於瞬時速率 (D) 平均速度的量值必等於平均速率 (E) 等速率運動必為等速度運動。

答 (C)

解析 (A) ×：位移的量值 ≤ 路徑長。
(B) ×：物體作等速度運動時，速度的量值和方向皆不能改變。開車繞圓圈時會轉彎，故並非等速度運動。
(C) ○：瞬時速度包括量值和方向，其中的量值即為瞬時速率。
(D) ×：因位移量值 ≤ 路徑長，故平均速度量值 ≤ 平均速率。

(E) ×：等速率運動不一定是等速度運動。例如物體作等速率曲線運動時，速度的量值不變、但方向改變，此非等速度運動。

5. 在航空母艦上通常得利用彈射裝置，才能讓戰鬥機在長度僅有 200 m ～ 300 m 的甲板跑道上順利起飛。已知某航空母艦上有一臺戰鬥機在 2.5 s 內由靜止被加速到時速 360 km。則此期間戰鬥機的平均加速度量值為多少 m/s^2？

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80 (E) 100。

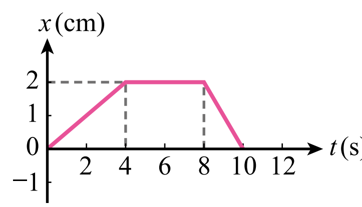
答 (B)

解析 $360(km/h) = \dfrac{360 \times 1000}{3600} = 100(m/s)$

$a_{av} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{100 - 0}{2.5 - 0} = 40(m/s^2)$。

2-2 物體運動圖

6. 下雨天窗戶外有一隻蝸牛在作直線運動，其位置對時間的關係如圖所示。試問：蝸牛在 10 s 內的平均速率為多少 cm/s？

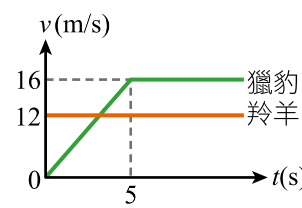


(A) 0 (B) 0.2 (C) 0.4 (D) 0.5 (E) 0.8。

答 (C)

解析 平均速率：$V_{av(0 \sim 10)} = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = \dfrac{2+0+2}{10} = 0.4(cm/s)$。

7. 非洲草原上，靜止的獵豹在 $t=0$ s 時，發現前方 30 m 處有隻向前奔跑的羚羊，便開始追趕。兩動物之速度對時間的關係，如圖所示。已知獵豹和羚羊的運動都在同一直線上進行，則在第 5 s 末獵豹距離羚羊多少 m？



(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50。

答 (E)

解析 設 $t = 0$ 秒時，獵豹位置在 $x = 0(m)$，羚羊位置在 $x = 30(m)$

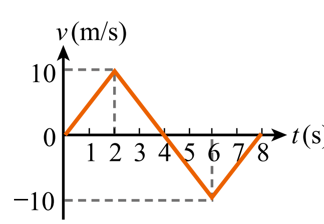
則第 5 秒末，兩隻動物的位置分別在：

$x_{獵豹} = 0 + \Delta x_{獵豹} = 0 + \dfrac{16 \times 5}{2} = 40(m)$

$x_{羚羊} = 30 + \Delta x_{羚羊} = 30 + 12 \times 5 = 90(m)$

$\Rightarrow$ 兩者距離 $= 90 - 40 = 50(m)$。

＊8. 有一輛車作直線運動，其速度對時間的關係，如圖所示。有關這輛車的運動情形，下列敘述哪些正確？



(A) 第 4 s 末的速度為零 (B) 第 4 s 末的加速度為零 (C) 0 s ～ 4 s 的平均加速度為零 (D) 0 s ～ 4 s 的平均速度為零 (E) 0 s ～ 8 s 的平均速率為零。

答 (A)(C)

解析 (A)○：由 $v-t$ 圖讀出，$v_4=0$。

(B)×：瞬時加速度 $a=v-t$ 圖的切線斜率 $=\dfrac{(-10)-10}{6-2}=-5(\text{m/s}^2)$。

(C)○：平均加速度 $a_{av}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{0-0}{4-0}=0$。

(D)×：平均速度 $v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{v-t\text{ 圖曲線包圍面積}}{\Delta t}=\dfrac{\frac{4\times10}{2}}{4-0}=5(\text{m/s})$。

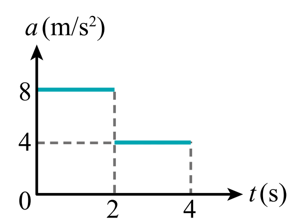
(E)×：平均速率 $V_{av}=\dfrac{L}{\Delta t}=\dfrac{L_{0\sim4}+L_{4\sim8}}{\Delta t}=\dfrac{\left(\frac{4\times10}{2}\right)+\left(\frac{4\times10}{2}\right)}{8-0}=5(\text{m/s})$。

9. 承上題，在哪一段時間區間內，這輛車的加速度為正，但速率卻愈來愈慢？
(A) 0 s ～ 2 s　(B) 2 s ～ 4 s　(C) 4 s ～ 6 s　(D) 6 s ～ 8 s　(E) 0 s ～ 8 s。

答 (D)

解析 $v-t$ 圖斜率代表加速度，故加速度為正的區間有 0 s ～ 2 s 及 6 s ～ 8 s，其中 0 s ～ 2 s 車的速率愈來愈快，而 6 s ～ 8 s 車的速率愈來愈慢。

10. 某物體作直線運動，初速度為 6 m/s，而其加速度對時間的關係，如圖所示。試問物體在第 4 s 末的瞬時速度為多少 m/s？　(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 40　(E) 50。



答 (C)

解析 速度變化量 $=a-t$ 圖曲線包圍的面積

$\Rightarrow \Delta v_{0\sim4}=8\times2+4\times(4-2)=24(\text{m/s})$

$\Rightarrow v_4=v_0+\Delta v_{0\sim4}=6+24=30(\text{m/s})$。

2-3 等加速運動

11. 王同學在高樓頂上將一顆小鐵球由靜止釋放，小鐵球作等加速運動經 2 s 著地。已知重力加速度量值為 10 m/s^2，忽略空氣的影響，試問小鐵球在第 2 s 內移動了多少 m？
(A) 1　(B) 5　(C) 10　(D) 15　(E) 20。

答 (D)

解析 $\Delta y_{\text{第 2 秒內}}=$ 前 2 秒內的位移 − 前 1 秒內的位移 $=\dfrac{1}{2}\times10\times2^2-\dfrac{1}{2}\times10\times1^2=15(\text{m})$。

12. 某輛公車以 20 m/s 的速度在路上行駛，司機突然發現前方 50 m 處有一輛拋錨靜止的汽車，於是司機踩煞車，使公車作等加速運動，恰好在汽車前方 10 m 處將公車停下。試問公車加速度的量值為多少 m/s^2？
(A) 0.5　(B) 1.0　(C) 1.5　(D) 2.0　(E) 5.0。

答 (E)

解析 剎車距離 $\Delta x = 50 - 10 = 40(\text{m})$
由 $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 = 20^2 + 2a\times 40 \Rightarrow a = -5(\text{m/s}^2)$
$\Rightarrow$ 加速度的量值為 $5(\text{m/s}^2)$。

13. 承上題，煞車時間共費時多少 s ？
(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8　(E) 10。

答 (C)

解析 由 $v = v_0 + at \Rightarrow 0 = 20 + (-5)\times t \Rightarrow t = 4(\text{s})$。

14. 將一小球由地面鉛直上拋，最後再落回地面，忽略空氣阻力，則下列敘述何者**錯誤**？
(A) 上升時小球的速度量值漸減　(B) 上升與下降過程小球的加速度方向相同　(C) 最高點時，小球的速度和加速度皆為零　(D) 小球上升所花時間與下降所花時間相同　(E) 小球全程平均加速度大小為 g。

答 (C)

解析 (A)○：上升過程加速度為 g 向下，故小球的速度量值漸減。
(B)○：在飛行過程中，小球任一瞬間的加速度皆為 g 向下。
(C)×：在最高點時，小球速度為零，但加速度仍為 g 向下。
(D)○：鉛直上拋再落回到原出發點的過程中，上升和下降過程，時間是對稱的，故花費的時間相同。
(E)○：飛行過程中，小球任一瞬間的加速度皆為 g 向下，故全程的平均加速度亦為 g 向下。

15. 將一小球由離地面高 40 m 的高塔上，以 10 m/s 的速度垂直向上拋出，則小球經幾 s 後會落到地面上？（$g = 10\ \text{m/s}^2$）
(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　(E) 8。

答 (A)

解析 由 $\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$，以向上為正 $\Rightarrow -40 = 10t - 5t^2 \Rightarrow t = 4(\text{s})$ 或 $-2(\text{s})$（負不合）。

2-4 相對運動

16.-18. 為題組
在直線公路上有三輛車，其中甲車的速度為 8 m/s 向東、乙車的速度為 8 m/s 向西、丙車對甲車的速度為 3 m/s 向西，以東方為正向，試回答下列問題。

16. 甲車對乙車的相對速度為多少 m/s ？
(A) 0　(B) 8　(C) −8　(D) 16　(E) −16。

答 (D)

解析 依題意，$v_{甲} = +8$、$v_{乙} = -8 \Rightarrow v_{甲乙} = v_{甲} - v_{乙} = 8 - (-8) = 16(\text{m/s})$。

17. 乙車對甲車的相對速度為多少 m/s ？
(A) 0　(B) 8　(C) -8　(D) 16　(E) -16。

答 (E)

解析 $v_{乙甲}=v_{乙}-v_{甲}=-v_{甲乙}=-16(m/s)$。

18. 丙車的速度（對地）為多少 m/s ？
(A) 3　(B) 5　(C) 8　(D) 11　(E) 13。

答 (B)

解析 依題意，$v_{甲}=+8$、$v_{丙甲}=-3$
$v_{丙甲}=v_{丙}-v_{甲}=v_{丙}-8=-3 \Rightarrow v_{丙}=5(m/s)$。

19. 李同學站在等速前進的台車上，並將一顆棒球向上拋出，試問棒球最後會掉落到李同學的手上、手的前方、還是手的後方？請以相對運動的觀點，簡述其理由。

棒球最後掉落到	理由
□手的前方	
□手上	
□手的後方	

解析

棒球最後掉落到	理由
□手的前方 ☑手上 □手的後方	以相對運動來看，棒球相對李同學而言，只有鉛直向上之初速其軌跡為直上直下，故最後會掉落到李同學手上。

進階題

2-1 運動學簡介

1. 有關「速度」和「加速度」的敘述，下列何者正確？
(A) 兩者單位相同　(B) 加速度的方向等於速度的方向　(C) 加速度為零時，速度不一定為零　(D) 速度變快時，加速度亦變大　(E) 平均速度為零的期間，平均加速度亦為零。

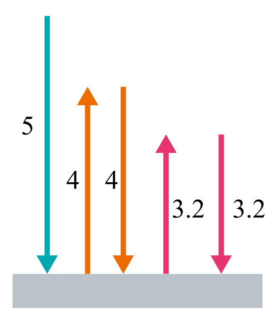
答 (C)

解析 (1)速度的 SI 制單位為「m/s」、而加速度的 SI 制單位為「m/s^2」，故 (A)×。
(2)加速度的方向等於「速度變化」的方向，不一定等於速度的方向，故 (B)×。
(3)速度和加速度的量值之間，並無絕對的大小關係，故 (C) ◯、(D)(E)×。

＊2. 吳同學為了測試高爾夫球的反彈效果，在 $t=0$ s 時讓球由 5 m 的高處靜止落下，球觸地後不斷地上下反彈，每次觸地後都能反彈原高度的 4/5。已知在 $t=5$ s 時，球第三次接觸地面。有關此期間高爾夫球的運動，下列敘述哪些正確？
(A) 總位移量值為 0 m　(B) 總位移量值為 5 m　(C) 總位移量值為 12.2 m　(D) 路徑長為 12.2 m　(E) 路徑長為 19.4 m。

答 (B)(E)

解析 以下方為正向，高爾夫球的軌跡示意圖，如圖。



總位移：$\Delta x = 5 + (-4) + 4 + (-3.2) + (3.2)$
$= 5(\text{m}) \Rightarrow$ (B) ◯、(A)(C)×
路徑長：$L = 5 + 4 + 4 + 3.2 + 3.2 = 19.4(\text{m})$
$\Rightarrow$ (E) ◯、(D)×

3. 承上題，高爾夫球在前 5 s 內的平均速度為：
(A)0　(B)1 m/s 向上　(C)2 m/s 向上　(D)1 m/s 向下　(E)2 m/s 向下。

答 (D)

解析 平均速度 $v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5}{5-0} = 1(\text{m/s})$，向下。

4. 德國 9 號高速公路是一條從柏林到慕尼黑的南北向公路。張先生全家由公路起點柏林開車至萊比錫，全長為 200 km。已知前 100 km 的車速為 180 km/h，後 100 km 的車速為 120 km/h，則全程的平均速率為多少 km/h ？
(A)144　(B)150　(C)156　(D)162　(E)168。

答 (A)

解析 平均速率 $V_{av} = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \dfrac{100 + 100}{\dfrac{100}{180} + \dfrac{100}{120}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{180} + \dfrac{1}{120}} = 144(\text{km/h})$。

5. 王同學在折返跑比賽中以 6 m/s 的速率跑出，在 20 s 後以相同速率、相反方向回到原出發點，若此期間王同學的平均速度及平均加速度量值，可表示為 X m/s 與 Y m/s^2，試問 $(X,Y)=$ ？

(A) $(0,0)$　(B) $(0,\frac{3}{5})$　(C) $(0,\frac{4}{5})$　(D) $(3,0)$　(E) $(6,0)$。

答 (B)

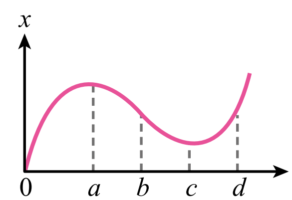
解析 設回程的方向為正，則出發時的初速度為 -6 m/s，回到出發點時的末速度為 6 m/s

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{位移} = 0 \\ \text{速度變化量} = 6-(-6) = 12(\text{m/s}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{平均速度 } X = \dfrac{0}{20} = 0(\text{m/s}) \\ \text{平均加速度 } Y = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}\ (\text{m/s}^2) \end{cases}$$

2-2 物體運動圖

6. 如圖為作直線運動的質點，其位置對時間的關係圖。試問：下列哪一個區間內，質點的加速度方向和速度方向保持相反？

(A) ab　(B) bc　(C) cd　(D) $0b$　(E) bd。



答 (B)

解析

	ab 區間	bc 區間	cd 區間	$0b$ 區間	bd 區間
速度方向	負	負	正	先正後負	先負後正
加速度方向	負	正	正	負	正

7. 一列高鐵車廂沿著直線軌道做加速測試，此列車在 160 s 內，其速度由靜止等加速到 288 km/h 後，維持等速前進 160 s，最後再作等減速運動經 320 s 而停止。試回答下問題：

(1) 列車在加速過程中的加速度量值為多少 m/s^2 ？

(2) 請繪出列車全程的速度 (m/s) 與時間 (s) 之關係圖。

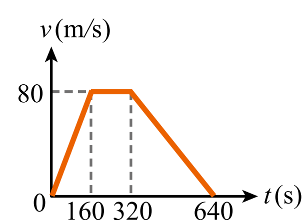
(3) 列車全程移動的位移量值為多少 km ？

答 (1) 0.5　(2) 略　(3) 32

解析 (1) $288(\text{km/h}) = \dfrac{288\times1000(\text{m})}{3600(\text{s})} = 80(\text{m/s})$

在加速過程中：$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{80-0}{160} = 0.5(\text{m/s}^2)$。

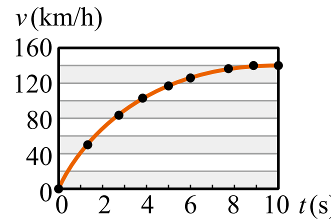
(2) 列車速度對時間的關係圖，如圖所示。



(3) $\Delta x = v-t$ 圖曲線所包圍的面積 $= \dfrac{(160+640)\times80}{2} = 32000(\text{m})$

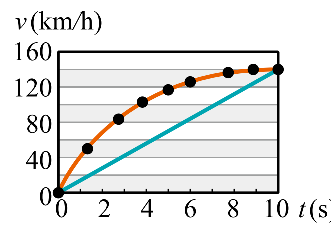
$= 32(\text{km})$。

8. 某跑車自靜止開始作直線運動，其前 10 s 內的速度與時間的關係如圖所示。有關此跑車在前 10 s 內的運動情形，下列何者正確？
(A) 速率愈來愈快　(B) 加速度為負值　(C) 平均加速度為 14 km/h^2　(D) 平均速度為 70 km/h　(E) 以上皆非。



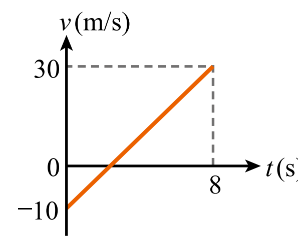
答 (A)

解析 (A)○：由 $v-t$ 圖可看出速率漸快，故跑車愈來愈快。
(B)×：$v-t$ 圖曲線各點的切線斜率皆為正 ⇒ 加速度為正值。
(C)×：$a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{140-0}{\frac{10}{3600}}\neq 14(\text{km/h}^2)$。



(D)×：$v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{v-t\text{ 圖曲線所圍面積}}{\Delta t}>\dfrac{\text{圖中△面積}}{\Delta t}=\dfrac{\frac{(10/3600)\times 140}{2}}{10/3600}=70(\text{km/h})$
⇒ $v_{av}>70(\text{km/h})$。

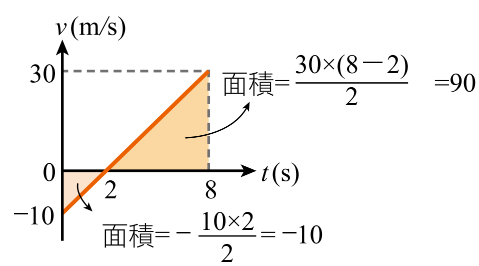
9. 有一質點作直線運動，其速度對時間的關係圖，如圖所示。若此質點 8 s 內的平均速度量值為 v_1 m/s、8 s 內的平均速率為 v_2 m/s，則 $\dfrac{v_1}{v_2}=$ ？
(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$　(E) 1。



答 (D)

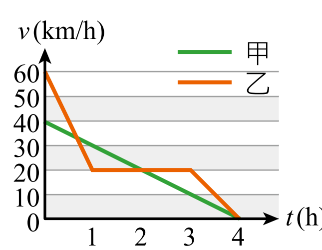
解析 如圖，$v-t$ 圖曲線包圍面積代表位移

$$\begin{cases}\text{平均速度}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{(-10)+(90)}{8}=10(\text{m/s})\\ \Rightarrow v_1=10\\ \text{平均速率}=\dfrac{L}{\Delta t}=\dfrac{|(-10)|+|(90)|}{8}=12.5(\text{m/s})\\ \Rightarrow v_2=12.5\end{cases}$$



$\Rightarrow \dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{10}{12.5}=\dfrac{4}{5}$。

＊10. 甲、乙兩車直線前進行駛於筆直的水平道路上，其速度對時間的關係如圖所示。已知時間 $t=0$ s 時甲車領先乙車 5 km，下列關於兩車的敘述，哪些正確？　【106 指考】
(A) 甲車在 4 h 內均維持等速運動　(B) 甲乙兩車在第一個 h 末第一次相遇　(C) 乙車在第一個 h 內作加速度為負值的等加速運動　(D) 乙車在第一個 h 末至第三個 h 末之間作等加速運動　(E) 4 h 之後，兩車均停了下來，此時兩車的距離為 5 km。



答 (C)(E)

解析 (A) ×：甲車 4 h 內的 $v-t$ 圖為斜直線 ⇒ 作等加速運動。

(B) ×：考慮兩車在 1 h 內（含 1 h）可能相遇，設相遇時間為 $t(t \le 1)$，由 $x_{甲}=x_{乙}$

$$\Rightarrow 5+\Delta x_{甲}=0+\Delta x_{乙} \Rightarrow 5+40t+\frac{1}{2}(-10)t^2=0+60t+\frac{1}{2}(-40)t^2 \Rightarrow t=\frac{1}{3}\text{(h)}$$

和 1(h)，故第一個 h 末，已是兩車的第二次相遇。

(C) ○：乙車的 $v-t$ 圖在第一個 h 內為斜直線，作加速度為負值的等加速運動。

(D) ×：乙車的 $v-t$ 圖在第一個 h 末至第三個 h 末為水平直線，作等速運動。

(E) ○：在第 4 h 末，由 $v-t$ 圖知兩車都停了下來速度皆為 0，兩車位置如下：

$$x_{甲}=5+\Delta x_{甲}=5+\frac{40\times 4}{2}=85\text{(km)}、$$

$$x_{乙}=0+\Delta x_{乙}=0+\frac{(60+20)\times 1}{2}+20\times(3-1)+\frac{20\times(4-3)}{2}=90\text{(km)}$$

$\Rightarrow$ 兩車距離 $=90-85=5$(km)。

2-3 等加速運動

11. 在中山高速公路的某直線車道上，有輛轎車正以 32 m/s 的速度前進，突然發現前方 20 m 處有輛卡車正以 24 m/s 等速行駛，轎車司機立即踩煞車而獲得 $-2\ \text{m/s}^2$ 的加速度，試問兩車最接近的距離為多少 m？

(A) 4 (B) 7 (C) 12 (D) 18 (E) 20。

答 (A)

解析 設轎車的速度在 t 秒後降為 24 m/s

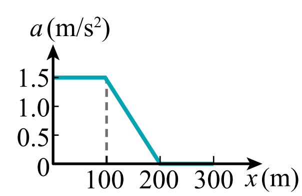
$\Rightarrow 24=32+(-2)\times t \Rightarrow t=4$(s)。

$$\begin{cases}\Delta x_{轎車}=v_0 t+\frac{1}{2}at^2=32\times 4+\frac{1}{2}\times(-2)\times 4^2=112\text{(m)}\\ \Delta x_{卡車}=v\times t=24\times 4=96\text{(m)}\end{cases}$$

$\because \Delta x_{轎車}=112<\Delta x_{卡車}+20=96+20=116$ $\therefore$ 尚未撞上

此時兩車的距離最接近，距離為 $116-112=4$(m)。

＊12. 某輛汽車在十字路口（$x=0$）停下等待，當紅燈轉綠燈後，開始在筆直水平道路上沿 $+x$ 方向作直線運動，前 300 m 的加速度與位置之關係如圖所示。有關此汽車的運動，下列敘述哪些正確？ 【改自 108 指考】



(A) 汽車在 $0<x<100$ m 作等速運動 (B) 汽車在 100 m$<x<$200 m 作等速運動 (C) 汽車在 200 m$<x<$300 m 作等速運動 (D) 汽車行至 $x=100$ m 處時，速度大小約為 17 m/s (E) 汽車行至 $x=100$ m 處時，速度大小約為 150 m/s。

答 (C)(D)

解析 (1) $\begin{cases}0<x<100\text{m}，a=1.5(\text{m/s}^2) \Rightarrow 等加速運動 \Rightarrow (A)\times\\ 100\text{m}<x<200\text{m}，a 由 1.5(\text{m/s}^2) 遞減至 0 \Rightarrow 變加速運動 \Rightarrow (B)\times\\ 200\text{m}<x<300\text{m}，a=0 \Rightarrow 等速運動 \Rightarrow (C)\bigcirc\end{cases}$

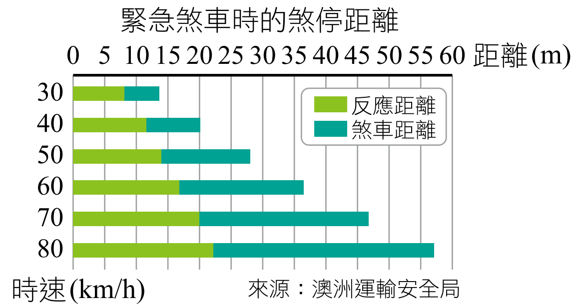
(2) $0\le x\le 100$m 期間，汽車作等加速運動

由 $v^2=v_0^2+2a\Delta x \Rightarrow v^2=0^2+2a\Delta x=0^2+2\times 1.5\times 100 \Rightarrow v=\sqrt{300}\approx 17.3$(m/s)

⇒ (D) ○、(E) ×。

13.-14. 為題組

在交通事故現場，執法人員會用工具丈量肇事汽車車輪的煞車痕跡作為煞車距離 S（單位：m）、再查閱當地路面的摩擦係數 μ（無單位），最後根據公式 $v=\sqrt{254\times\mu\times S}$（km/h）來推算事故發生時汽車的速度。上列公式告訴我們，車速愈快的話，要讓車子停下來，所需的煞車距離 S 就愈長。



但是，除了車輪本身的煞車距離 S 之外，當駕駛人發現前方事故時，通常需要 1 s 的反應時間，才能作出踩踏煞車的動作，這短暫時間車子仍以等速前進，此前進距離稱為反應距離 d。世界衛生組織（WHO）引用澳洲運輸安全局資料（如附圖），宣導若車速為 50 km/h，反應距離 d 加上煞車距離 S，總共是 28 m，換言之，若車速 50 km/h，駕駛必須在 28 m 之前覺察危險的存在並反應，否則很難避免車禍發生。試根據上述內容，回答下列問題。

13. 若將汽車緊急煞車停下的過程視為直線等加速運動，已知煞車的加速度值為 9.8 μ m/s^2（μ 為當地路面與輪胎的摩擦係數）、最初的車速為 v km/h、煞車距離為 S m，試證明：$v=\sqrt{254\times\mu\times S}$（km/h）

解析 由等加速公式：$v^2=v_0^2+2aS$，以公尺和秒為單位

$$\Rightarrow 0^2=v^2+2\times(-9.8\mu)S$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{19.6\mu S}\,(\text{m/s})=\sqrt{19.6\mu S}\times\left(\frac{1/1000}{1/3600}\right)(\text{km/h})$$

$$=\sqrt{19.6\mu S}\times 3.6(\text{km/h})=\sqrt{254.016\times\mu\times S}\,(\text{km/h})\approx\sqrt{254\times\mu\times S}$$，故得證。

14. 已知澳洲當地路面與輪胎的摩擦係數平均值約為 $\mu=0.7$，試問在澳洲運輸安全局這份資料的附圖中，當車速為 50 km/h 時，反應距離 d 和煞車距離 S 應分別為多少 m？

答 d=13.9 m、S=14.1 m

解析 車速 $v=50(\text{km/h})=\dfrac{50\times1000}{3600}(\text{m/s})$

(1) 反應距離 $d=\dfrac{50\times1000}{3600}\times1\approx13.9(\text{m})$

(2) 煞車距離 $S=\dfrac{v^2}{254\,\mu}=\dfrac{50^2}{254\times0.7}\approx14.1(\text{m})$。

2-4 相對運動

15. 某升降機持續以 2 m/s^2 之向下加速度鉛直下降，當升降機的速度為 1 m/s 時，升降機內天花板的螺絲釘突然鬆脫，在 t s 內掉落至升降機的地板上。已知升降機內的高度為 256 cm，重力加速度為 10 m/s^2。試問在 t s 內，若以升降機地板為觀察者，則螺絲釘作下列哪一種運動？
(A) 靜止不動 (B) 等速向上 (C) 等速向下 (D) 等加速向上 (E) 等加速向下。

答 (E)

解析 以下方為正向，在 t 秒內，由升降機地板來看螺絲釘

$$\begin{cases} 相對初速度：v_{螺板}= v_{螺}-v_{板}= 1-1 = 0 \\ 相對加速度：a_{螺板}= a_{螺}-a_{板}= 10-2 = 8(m/s^2) \\ 相對位移：S_{螺板}= S_{螺}-S_{板}=向下 2.56 公尺= 2.56(m) \end{cases}$$

以升降機地板為觀察者：螺絲釘以 8 m/s^2 的加速度，由靜止作位移 2.56 m 向下的等加速運動。

16. 承上題，螺絲釘掉落到升降機地板所花的時間 t 為多少 s ？

(A) 0.2 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.8 (E) 1.0。

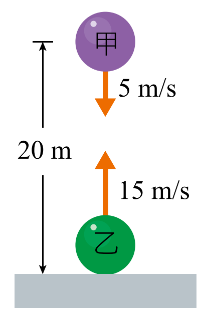
答 (D)

解析 利用相對運動，由 $\Delta x =\frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow 2.56 =\frac{1}{2}\times 8\times t^2 \Rightarrow t = 0.8(s)$。

17.-19. 為題組

如圖，將甲球自 20 m 高處以 5 m/s 的速率鉛直下拋，同時將乙球以 15 m/s 的速率鉛直上拋。已知 $g=10$ m/s^2，試回答下列問題。



17. 對乙球而言，甲球作下列哪一種運動？

(A) 等速向上運動 (B) 等速向下運動 (C) 鉛直上拋 (D) 鉛直下拋 (E) 靜止自由落下。

答 (B)

解析 以下方為正向，由乙球看甲球時：

$$\begin{cases} 相對初速度：v_{甲乙}= v_{甲}-v_{乙}= 5-(-15) = 20(m/s)，向下 \\ 相對加速度：a_{甲乙}= a_{甲}-a_{乙}= 10-10 = 0 \end{cases}$$

故乙球看甲球：甲球作速度 20(m/s) 向下的等速運動。

18. 試以相對運動的觀點，計算甲、乙兩球經多少 s 後會在空中相遇？

(A) 0.4 (B) 0.6 (C) 1.0 (D) 1.2 (E) 2.0。

答 (C)

解析 乙球看甲球作速度 20(m/s) 向下的等速運動

當兩球相遇時，表示相對位移 $S_{甲乙}= 20$(m) 向下

設甲、乙兩球 t 秒時在半空中相遇，

由 $S = vt \Rightarrow 20 = 20\times t \Rightarrow t = 1(s)$。

19. 甲、乙兩球的相遇點，距離地面多少 m ？

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18。

答 (A)

解析 相遇點的高度＝乙上升 1 秒的位移（以向上為正）

由 $\Delta y_{乙}= v_{0乙}t +\frac{1}{2}at^2 = 15\times 1 +\frac{1}{2}\times(-10)\times 1^2 = 10(m)$。

素養混合題——實驗題

運動滑車的紙帶實驗

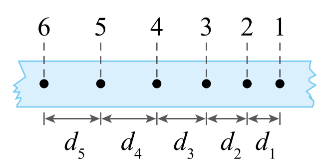
在直線運動實驗中，打點計時器及紙帶等器材，適合用來測量滑車的速度及加速度。將空白紙帶繫於物體後方，並使其穿過打點計時器的打點裝置。當紙帶隨著滑車朝某個固定方向運動時，打點裝置會以固定的時間差 Δt 在紙帶上留下痕點，對紙帶的痕點進行分析，便可計算出滑車的速度及加速度。試回答下列問題：

1. 利用打點計時器及紙帶來做直線運動實驗時，下列敘述哪些正確？
(A) 當滑車等速度前進時，紙帶上的痕點間距愈來愈大
(B) 當滑車由靜止作等加速運動時，紙帶上的痕點間距將成等差數列
(C) 選取紙帶上痕點愈密集的區域，愈能精確計算速度及加速度的量值
(D) 打點計時器及紙帶亦可適用於物體來回振動時的加速度量測
(E) 利用打點計時器及紙帶，來測量自由落體的重力加速度時，若與理論值不相符，可能是由於紙帶拉動過程中受摩擦力作用導致。

答 (B)(E)

解析 (A) ×：當滑車等速度前進時，紙帶上的痕點間成等間距。
(B) ○：當滑車由靜止做等加速運動時，由第 2. 題的證明可知：
$$a=\frac{d_2-d_1}{(\Delta t)^2}=\frac{d_3-d_2}{(\Delta t)^2}=\frac{d_4-d_3}{(\Delta t)^2}=\frac{d_5-d_4}{(\Delta t)^2}$$
$$\Rightarrow d_2-d_1=d_3-d_2=d_4-d_3=d_5-d_4$$
故各痕點間距 d_1、d_2、d_3、d_4、d_5 成等差數列。
(C) ×：紙帶上的痕點愈密集，愈不易丈量出精確的距離，以致無法更精確計算速度和加速度。
(D) ×：物體前進時紙帶繫於物體後方；若物體往反方向運動，則紙帶勢必被物體回推而扭曲，無法再被有效地打點紀錄。故不適用於物體來回振動的實驗。
(E) ○：重力加速度的理論值，係指物體僅受重力作用的情形。利用紙帶和打點計時器做此實驗時，紙帶及打點計時器裝置組在運作時，可能受到摩擦力作用而影響實驗結果。

2. 某滑車做等加速直線運動，擷取其中一段紙帶的痕點數據，如圖所示，圖上的 1、2、…為痕點編號；d_1、d_2、…為痕點間距。已知打點的時間間隔為 Δt，試證明：此滑車的加速度量值 $a=\dfrac{d_2-d_1}{(\Delta t)^2}$



答 如詳解

解析 當物體作等加速運動時，某段區間內的平均速度＝時間中點的瞬時速度

(1) 痕點 1 和痕點 2 之間，平均速度 $\overline{v}_{12}=\dfrac{d_1}{\Delta t}$＝痕點 1 和痕點 2 時間中點的瞬時速度為 $v_{1.5}$

(2) 痕點 2 和痕點 3 之間，平均速度 $\overline{v}_{23}=\dfrac{d_2}{\Delta t}=$痕點 2 和痕點 3 時間中點的瞬時速度為 $v_{2.5}$

(3) 加速度 $a=\dfrac{\text{速度變化量}}{\text{時間}}=\dfrac{v_{2.5}-v_{1.5}}{\Delta t}=\dfrac{\dfrac{d_2}{\Delta t}-\dfrac{d_1}{\Delta t}}{\Delta t}=\dfrac{d_2-d_1}{(\Delta t)^2}$，故得證。

3. 承第 2. 題，以 v_1 表示滑車第 1 痕點的速度量值、v_2 表示滑車第 2 痕點的速度量值，依此類推。試問：v_2 可為下列哪些？

(A) $\dfrac{d_1}{\Delta t}$ (B) $\dfrac{d_2}{\Delta t}$ (C) $\dfrac{d_1+d_2}{2\Delta t}$ (D) $\dfrac{d_2-d_1}{2\Delta t}$ (E) $\dfrac{v_1+v_3}{2}$。

答 (C)(E)

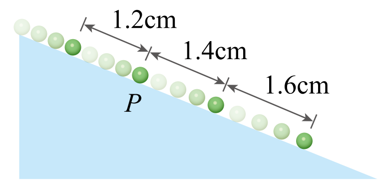
解析 等加速運動中，某段區間內的平均速度：$\overline{v}=\dfrac{v_{初}+v_{末}}{2}=v_{時間中點}$

$\Rightarrow v_2=\overline{v}_{1\,和\,3\,中點}=\dfrac{d_1+d_2}{\Delta t+\Delta t}=\dfrac{d_1+d_2}{2\Delta t}$

$\Rightarrow v_2=\dfrac{v_{初}+v_{末}}{2}=\dfrac{v_1+v_3}{2}$

故答案選 (C)(E)。

4. 在本書 2-2 節中提到，在運動實驗中可藉由相同時距發出強光的閃頻計時器，來拍攝出物體運動的畫面，其效果等同於打點計時器和紙帶。小智讓小球在一光滑斜面下滑作等加速運動，並以每秒閃光 40 次的閃頻計時器，連續拍攝小球 4 個畫面疊合如圖所示，則：



(1) 小球的加速度量值為多少 m/s^2？

(2) 小球在圖中的 P 位置時，瞬時速率為多少 m/s？

(3) 小智的實驗構想，來自物理（全）第 2 章「物體的運動」單元中所提到：伽利略設計了一個斜面實驗來模擬物體的自由落體運動。試說明這樣的實驗設計，與直接讓小球自由落下相比較，有何差異？

答 (1) 3.2 (2) 0.52 (3) 如詳解

解析 (1) 每秒閃光 40 次 $\Rightarrow \Delta t=\dfrac{1}{40}=0.025(s)$

由 $a=\dfrac{d_2-d_1}{(\Delta t)^2}=\dfrac{1.4-1.2}{\left(\dfrac{1}{40}\right)^2}=320(cm/s^2)=3.2(m/s^2)$。

(2) P 點位置的瞬時速度＝第 1 位置至第 3 位置之間的平均速度

$\Rightarrow v_P=\dfrac{1.2+1.4}{0.025+0.025}=52(cm/s)=0.52(m/s)$。

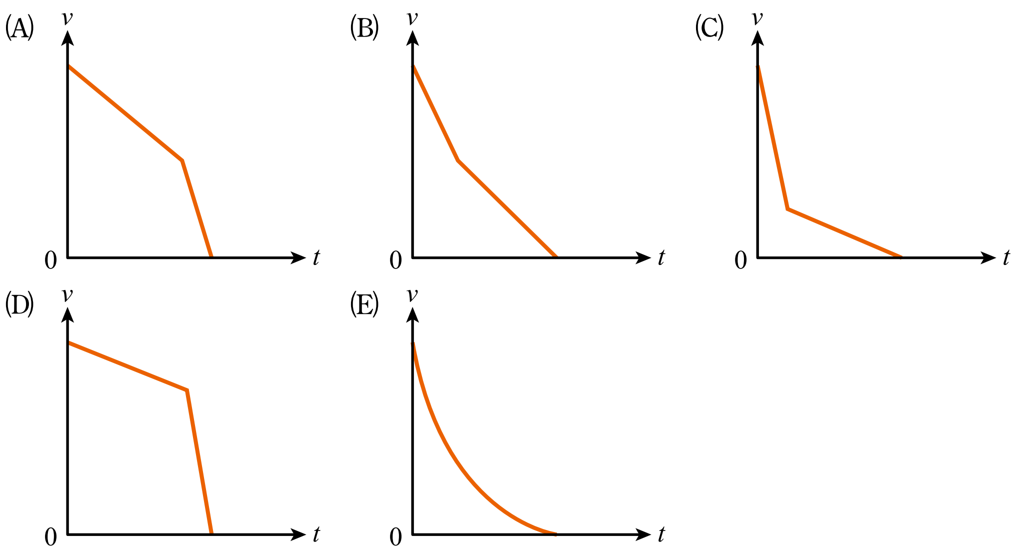
(3) 承 (1)，$a=3.2(m/s^2)$ ＜重力加速度理論值 $9.8(m/s^2)$，此表示小球在斜面上的下滑加速度量值較重力加速度量值小，故速度增加的趨勢較小，有助於觀察、記錄、分析物體的運動情形。

素養混合題——生活情境題

交通事故分析

速度與加速度可以描述物體的運動狀況，在交通事故分析中，更是重建事故過程的關鍵因素。這些數據可以協助專業人員，了解車輛發生事故前後的運動狀況，例如車輛是否超速、駕駛員是否及時反應，以及車輛在碰撞前的減速情況。假設你現在負責調查一起追撞事故，追撞別人的後車駕駛說：「我下交流道時車速為 72 km/h，先輕踩煞車 5 s，以等加速度降速至 36 km/h。因遇到前車事故，急踩煞車到底約 2 s 以等加速度至車子全停。」位移與速度直觀易懂，但還不足以解釋所有的狀況，必須引入加速度的概念，再利用運動定律來分析客觀數據，才能完整還原事故的現場情形。

1. 請根據後車駕駛的描述，判斷其車速隨時間變化圖應為以下何者？



答 (A)

解析 後車駕駛先輕煞減速一半，之後再急踩煞車到速度為零，故應選 (A)。

2. 我們可以根據駕駛口述，進行定量的運動學分析，試計算在急煞 2 秒的期間，車子的平均加速度為何？

答 $-5\ m/s^2$

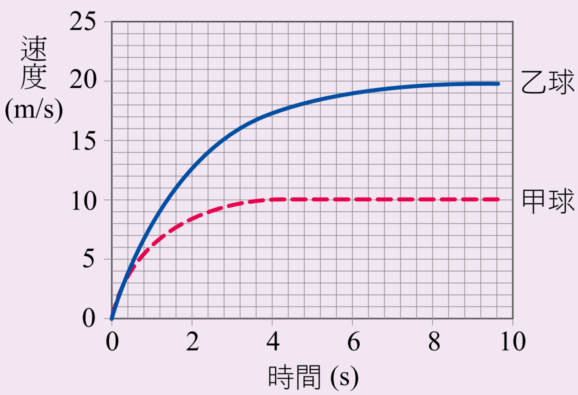
解析 若急踩煞車時的車速為 36 km/h ＝ 10 m/s，車子在 2 秒內完全停止，故其平均加速度是 $-5\ m/s^2$。

第 2 章 試題探究

落體運動的函數圖形

101 年和 102 年的學測考題，各出現一題有關空氣阻力作用的落體運動，分列如下：

◎由離地相同高度處，於同一瞬間，使甲球與乙球自靜止狀態開始落下，兩球在抵達地面前，除重力外，只受到來自空氣阻力 F 的作用，此阻力與球的下墜速度 v 成正比，即 $F = -kv\ (k > 0)$，且兩球的比例常數 k 完全相同，如圖所示為兩球的速度 – 時間關係圖。

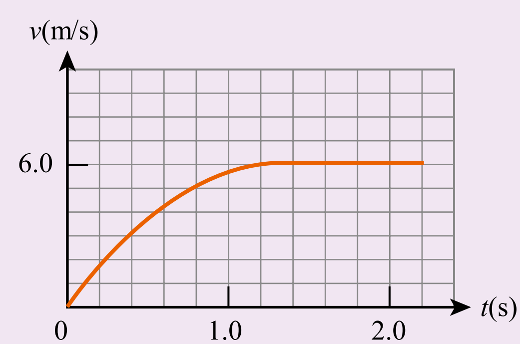


1. 若甲球與乙球的質量分別為 m_1 與 m_2，則下列敘述何者正確？
(A) $m_1 = m_2$，且兩球同時抵達地面　(B) $m_2 > m_1$，且乙球先抵達地面　(C) $m_2 < m_1$，且乙球先抵達地面　(D) $m_2 < m_1$，且兩球同時抵達地面　(E) $m_2 > m_1$，且甲球先抵達地面。

2. 若已知甲球質量為 0.2 公斤，落下過程中重力加速度恆為 10 公尺 / 秒 ^{2}，則比例常數 k 值約為多少公斤 / 秒？　(A) 0.1　(B) 0.2　(C) 4　(D) 10　(E) 40。　〔101 學測〕

參考答案 1. B，2. B

◎物體自高處落下時，除了受到重力之外，還有空氣阻力。某同學觀測一小物體自高處落下，其速度 v 與時間 t 的關係如圖。



1. 如圖的數據中，小物體從 $t = 0$ s 至 $t = 2.0$ s 的位移與下列何值（單位為 m）最為接近？
(A) 4　(B) 6　(C) 9　(D) 12　(E) 14。

2. 下列有關小物體運動的敘述，何者正確？

(A) 小物體的加速度量值愈來愈大　(B) 在 $t = 1.4$ s 時，小物體所受空氣阻力的量值為零　(C) 在落下的全程中，小物體所受空氣阻力的量值為一定值　(D) 小物體所受空氣阻力的量值隨速率增快而變大　(E) 在 $t = 2.0$ s 時，小物體所受重力量值為零。

〔102 學測〕

參考答案 1. C，2. D

一般空氣阻力 f 會與速度 v 的平方成正比，但在物體速率不大時，阻力大約與速度的一次方成正比，即空氣阻力 $f = -kv$，其中 k 為常數，且負號表示阻力與物體的速度方向相反。實際在命題時，也可以根據題目的設計，自己畫出落體運動所需要的 $v-t$ 圖。我們做最簡單的假設，就是空氣阻力的形式為 $f = -kv$，物體下落時所受的合力，為重力 mg 與空氣阻力 f 之和，即

$$mg - kv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

上式移項後再整理得

$$-\frac{k}{m}dt = \frac{d\left(g-\frac{k}{m}v\right)}{g-\frac{k}{m}v}$$

左右兩邊同時積分，可得出物體的速度 v 與時間 t 的關係為

$$v = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

例如給定幾個數據：$m = 0.8$ kg、$g = 10$ m/s^2、$k = 0.4$ N · s/m，則上式應為

$$v = 20(1-e^{-0.5t})\ (\mathrm{m/s})$$

根據上式可畫出物體的 $v-t$ 圖，如圖 1(a) 所示，該圖即為終端速度 20 m/s 的 $v-t$ 圖；若改變 k 值為 0.8 N · s/m，其餘條件不變，則可畫出終端速度 10 m/s 的 $v-t$ 圖，如圖 1(b) 所示。

(a) $k=0.4$ N · s/m 的 $v-t$ 圖　　(b) $k=0.8$ N · s/m 的 $v-t$ 圖

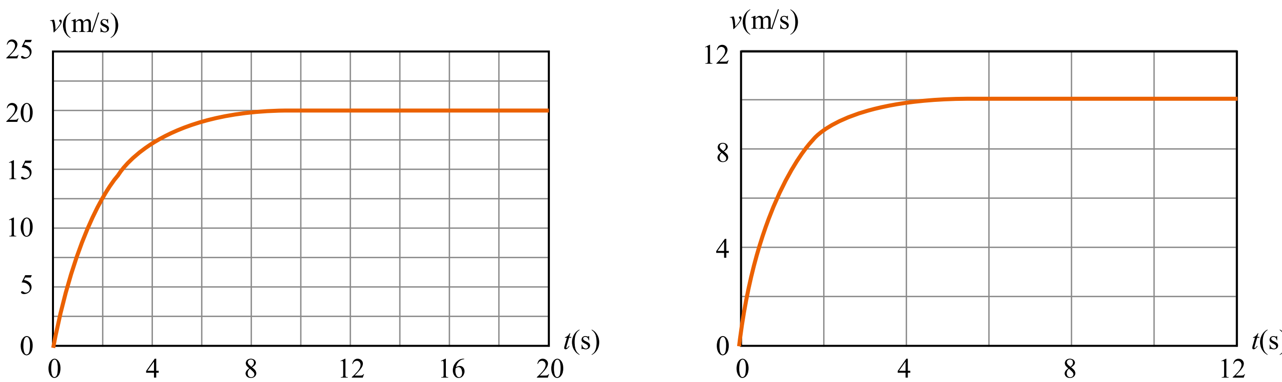


圖 1　$m=0.8$ kg、$g=10$ m/s^2

因為運動的函數圖形有三種，所以像這類型的試題，也可以轉換成 $x-t$ 圖（或 $h-t$ 圖，h 為物體的掉落距離）與 $a-t$ 圖。若要轉換成 $h-t$ 圖，則將速度 v 對時間 t 積分，得

$$h=\int_0^t v dt=\int_0^t \frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})dt=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

將前一例 $m=0.8$ kg、$g=10$ m/s^2、$k=0.4$ N · s/m 代入上式，則

$$h=20t-40(1-e^{-0.5t})\ \text{(m)}$$

同樣的方式，畫出物體在前 20 秒內所掉落的距離 h 與時間 t 的關係曲線，如圖 2(a) 所示。從圖 1(a) 可以得知，該物體大約在 $t=10$ s 後即作等速運動，因此在圖 2(a) 中的 $h-t$ 圖，在 $t=10$ s 之後，曲線的斜率即大約維持定值。

另外轉換成 $a-t$ 圖時，則須將速度 v 對時間 t 微分，故

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t})=ge^{-\frac{k}{m}t}$$

同一例子的 $a-t$ 圖如圖 2(b) 所示，由於物體在 $t=10$ s 後即作等速運動，所以 $a-t$ 圖中 $t=10$ s 後的加速度為零。

(a) $h-t$ 圖　　(b) $a-t$ 圖

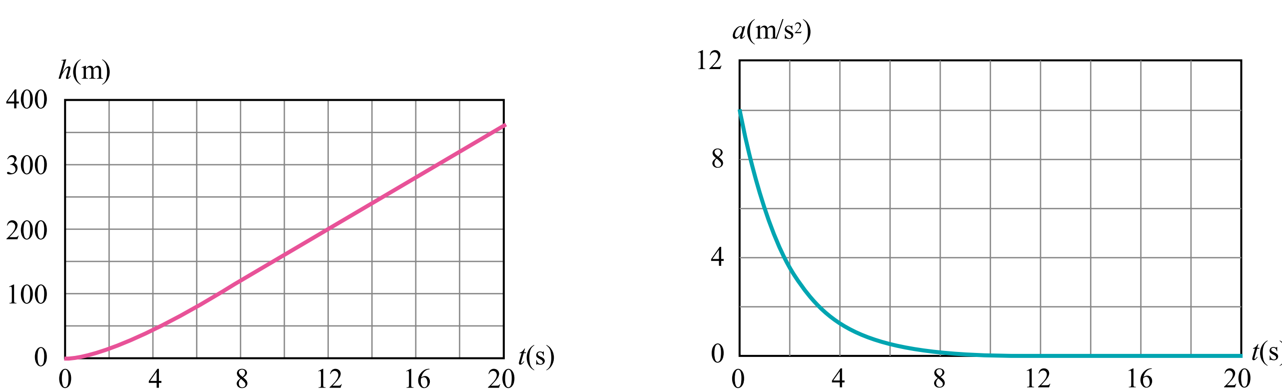


圖 2　$m=0.8$ kg、$g=10$ m/s^2、$k=0.4$ N · s/m

至於有空氣阻力作用時的 $h-t$ 圖和 $a-t$ 圖在試題中如何設計，原則上就如一般的 $x-t$ 圖和 $a-t$ 圖的內容類似。例如圖 1(a) 的終端速度為 20 m/s，所以在圖 2(a) 的 $h-t$ 圖，在 $t=10$ s 後的斜率亦為 20 m/s；此時試題可提問：物體在 $t=16$ s 時的速率為何？學生即可根據 $h-t$ 圖的曲線在 $t=10$ s 後約呈一直線，然後取兩點數據組，求出該兩點之間的斜率（例如在圖 2(a) 中取 $t=12$ s 和 $t=20$ s 的下降高度分別約為 200 m 和 360 m，因此 $t=$ 16 s 時的速率 $v=\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\dfrac{360-200}{20-12}=\dfrac{160}{8}=20(\text{m/s})$）。

另外 $a-t$ 圖的面積等於速度變化量，所以在 $t=0$ s 至 $t=10$ s 的區間，$a-t$ 圖曲線和 t 軸包圍的面積應為 20 m/s。由於 $a-t$ 圖無法直接求得面積，因此可利用圖 3 中 $t=0$ s 至 $t=2$ s 的梯形，與 $t=2$ s 至 $t=10$ s 的三角形兩面積之和，近似 $t=0$ s 至 $t=10$ s 曲線和 t 軸包圍的面積，故

$$\Delta v=(2+10)\times 2\times\frac{1}{2}+(10-2)\times 2\times\frac{1}{2}=20(\text{m/s})$$

物體初速為零，則 $t=10$ s 的速度即為 20 m/s。

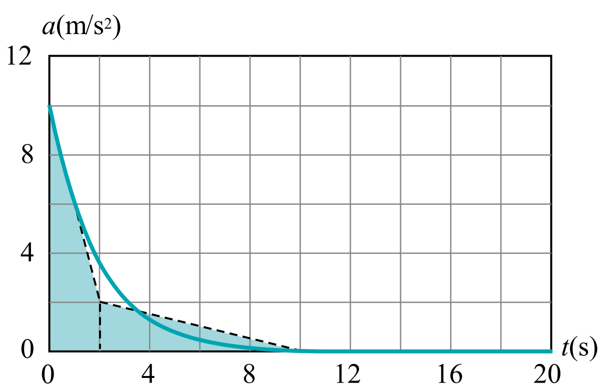


圖 3　由梯形與三角形兩面積之和，近似 $t=0$ s 至 $t=10$ s 曲線和 t 軸包圍的面積

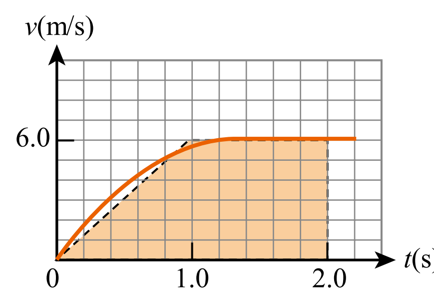
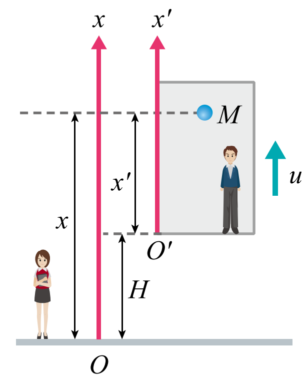


圖 4　由 $t=0$ s 至 $t=2.0$ s 的梯形，估計 $v-t$ 圖曲線和 t 軸包圍的面積，求得位移的近似值

這樣的設計，其實是仿照 102 年學測題所提問：物體從 $t=0$ s 至 $t=2.0$ s 的位移最接近哪個數值？因為無法直接計算該年度圖形中 $v-t$ 圖的面積，因此以 $t=0$ s 至 $t=2.0$ s 的梯形，估計 $v-t$ 圖曲線和 t 軸包圍的面積，求得位移的近似值，如圖 4 所示。

第 2 章 深度探索

以等速相對運動的坐標系



如圖所示，一電梯以等速度 u 垂直上升，一觀察者靜立於電梯內觀察此電梯中物體 M 的運動，以電梯地板為坐標原點，稱為 O'，測得物體 M 在時刻 t' 的坐標為 x'，速度為 v'，加速度為 a'。地面上另有一觀察者也在觀察 M 的運動，但選擇以地面為坐標原點，稱為 O，測得物體 M 在時刻 t 的坐標為 x，速度為 v，加速度為 a，而原點 O' 的坐標為 H。由圖可得兩觀察者所用坐標之間的關係為

$$x' = x - H \cdots\cdots①$$

根據牛頓力學的基本假設，時間是絕對的，兩觀察者的時間相同，因此 $t = t'$。若電梯在時刻 $t = 0$ 時從地面出發，由等速運動公式可知 $H = ut$，因此

$$x' = x - ut \cdots\cdots②$$

設在時刻 $t + \Delta t$ 時，兩觀察者觀察到 M 的坐標分別為 $x + \Delta x$ 及 $x' + \Delta x'$，利用 ② 式可得

$$x' + \Delta x' = (x + \Delta x) - u(t + \Delta t) \cdots\cdots③$$

將 ② 及 ③ 兩式相減，得

$$\Delta x' = \Delta x - u\Delta t$$

上式除以 Δt 後得

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - u$$

當 Δt 趨近於零時，上式即為兩觀察者各自所定義物體 M 的瞬時速度 v 及 v' 的轉換公式，即

$$v' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} - u = v - u \quad 或 \quad v = v' + u \cdots\cdots④$$

上式指出當電梯以等速度 u 相對於地面運動時，物體 M 相對於地面的速度 v，恆等於 M 相對於電梯的速度 v' 加上電梯相對於地面的速度 u。

另外，設在時刻 $t + \Delta t$ 時，兩觀察者觀測到 M 的速度各為 $v + \Delta v$ 及 $v' + \Delta v'$，則由 ④ 式可得

$$v + \Delta v = (v' + \Delta v') + u \cdots\cdots⑤$$

將 ④ 與 ⑤ 兩式相減，可得

$$\Delta v' = \Delta v \quad \text{或} \quad \frac{\Delta v'}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

因此，當 Δt 趨近於零時，可得兩觀察者各自所定義物體 M 的瞬時加速度 a 及 a' 的轉換式，即

$$a' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \cdots\cdots ⑥$$

亦即當電梯以等速度 u 運動時，物體 M 相對於地面的加速度 a，恆等於物體相對於電梯的加速度 a'。以上結果也適用於水平或任何其他方向的相對運動，例如當車以等速度 u 前進時，靜坐於車上的乘客，相對於車的速度為 $v' = 0$，加速度為 $a' = 0$，故相對於地面的速度 $v = u$，加速度 $a = 0$。

本章圖片來源

第 2 章
CH2 章首 shutterstock 圖庫提供
基礎題 1 shutterstock 圖庫提供
基礎題 5 shutterstock 圖庫提供