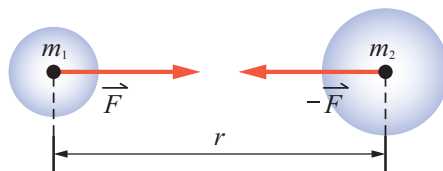
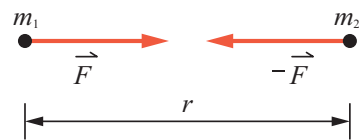


CH. 6

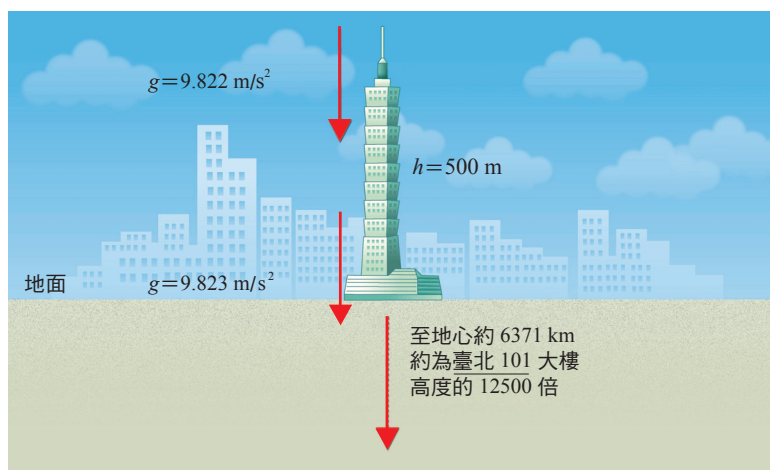
學習重點

萬有引力定律

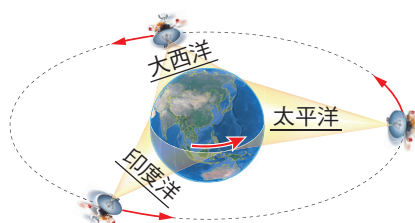
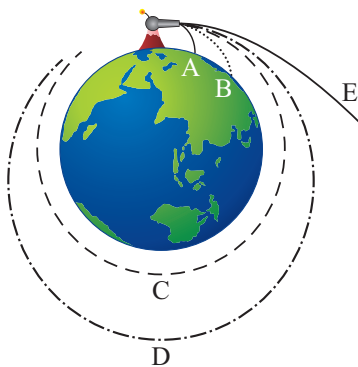
- 萬有引力定律與萬有引力 $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

地表的
重力與
重力
加速度

- 重力場
- 重力加速度
- 重力場強度與重力加速度的比較

行星與
衛星運動

- 克卜勒行星運動定律
- 牛頓解釋克卜勒行星運動第三定律
- 地球衛星的運動



CH. 6

萬有引力

6-1 萬有引力定律

學習概念 1

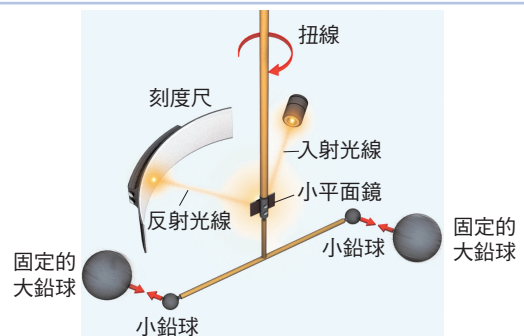
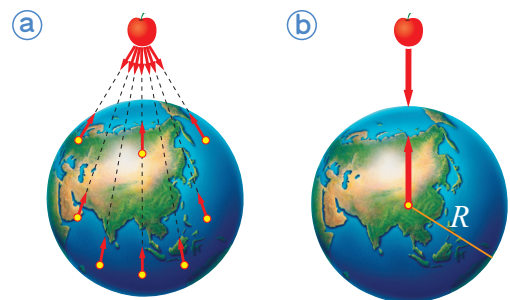
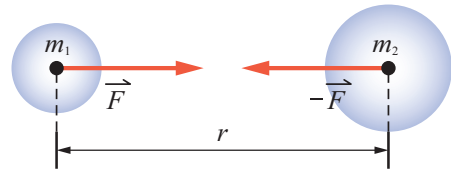
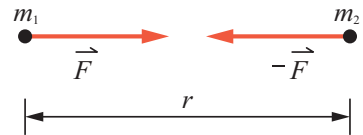
萬有引力定律 (law of universal gravitation)

配合課本 175 頁

牛頓在庭園中深思時，因蘋果從樹上掉落而觸發重力（gravity）的概念。並且思考這種重力作用是否可以延伸到月球的位置？



形成條件	宇宙中，任何兩個具質量的物體間，會相互吸引的作用力，且遵守牛頓第三運動定律
作用方向	沿著兩質點的連線作用且相向
數學式	<p>萬有引力 $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$（重力常數 $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$）</p> <p>單位：萬有引力 F (N)、質量 m (kg)、距離 r (m)</p> <p>(1) 與兩物體質量的乘積成正比 ($\propto m_1m_2$)</p> <p>(2) 和兩質點之間距離的平方成反比 ($\propto \frac{1}{r^2}$)</p>
適用	<p>質點與均勻球體間皆適用</p> <p>註：兩均勻球體間的 r 為兩球心之間的距離。</p> <p>均勻球體間的重力可利用牛頓積分得知：</p> <p>(1) 球體的質量可視為集中於球心</p> <p>(2) 球體的體積 $V_{\text{球體}} = \frac{4}{3}\pi R^3$</p>
重力常數 G 的測量	<p>(1) 測量者：英國人卡文迪西</p> <p>(2) 實驗：扭秤實驗</p> <p>(3) 當時測得 G 值與現今精密實驗所測得已相去不遠</p>



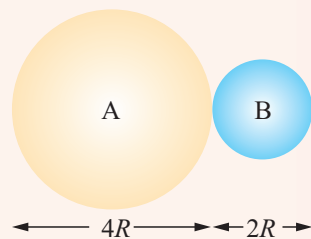
範例 1 萬有引力的計算「均勻球體間」

如右圖所示，將密度相同，直徑分別為 $4R$ 、 $2R$ 的 A、B 兩大、小實心球靠在一起。已知小球的質量為 $2m$ ，則：

(1) A、B 兩球間的萬有引力為何？

- (A) $\frac{Gm^2}{R^2}$ (B) $\frac{4Gm^2}{3R^2}$ (C) $\frac{32Gm^2}{9R^2}$ (D) $\frac{9Gm^2}{16R^2}$ (E) $\frac{25Gm^2}{36R^2}$

(2) 若將另一質量為 m 的質點 C，置於 A、B 球心連線上 B 球右側，緊貼 B 球表面，則此質點受引力總和為若干？



答 (1)(C)；(2) $3Gm^2/R^2$ (←)

解 (1) 已知球體體積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，所以球體質量 $M = \rho \times V = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \propto \rho \times r^3$ ，當兩球半徑相差 2 倍，大球質量是小球的 8 倍，因為均勻球體，可視質量集中於球心，則利用萬有引力公式 $F = \frac{G(8 \times 2m)(2m)}{(2R+R)^2} = \frac{32Gm^2}{9R^2}$ 。故選(C)。

(2) 質點 C 分別受 A、B 兩球向左吸引力，則：

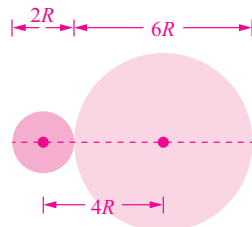
$$F_C = F_{AC} + F_{BC} = \frac{G(16m)m}{(4R)^2} + \frac{G(2m)m}{R^2} = \frac{3Gm^2}{R^2} \text{ (←)}。$$

類題：兩實心圓球的直徑分別為 $6R$ 和 $2R$ 、密度之比為 $4:3$ 。現在將兩實心圓球緊密排列，已知小球的質量為 m ，則大、小兩球間的萬有引力量值為何？

- (A) $\frac{Gm^2}{R^2}$ (B) $\frac{2Gm^2}{9R^2}$ (C) $\frac{8Gm^2}{9R^2}$ (D) $\frac{9Gm^2}{2R^2}$ (E) $\frac{9Gm^2}{4R^2}$

答 (E) (質量 $M = \rho \times V = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \propto \rho \times r^3 \Rightarrow \frac{M_{\text{大球}}}{M_{\text{小球}}} = \frac{4 \times 3^3}{3 \times 1^3} = 36 \Rightarrow M_{\text{大球}} = 36m$ 。

如右圖，兩球球心距離為 $4R \Rightarrow F = G \frac{36m \times m}{(4R)^2} = \frac{9Gm^2}{4R^2}$ 。故選(E)。

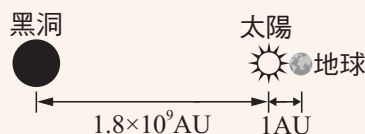


範例 2 萬有引力的計算「一維形式」

一般認為銀河系中心有一個超大質量的黑洞，有些天文學家估計這黑洞的質量大約是太陽的四百萬倍，太陽離此超大質量黑洞的距離約為 28,000 光年。如果該黑洞、太陽與地球排成一直線，且二者對地球的主要影響只有萬有引力，則：

(103 學測改)

- (1) 這個超大質量黑洞和地球之間的萬有引力，大約是地球和太陽之間萬有引力的多少倍？（28,000 光年大約是 1.8×10^9 天文單位，太陽到地球的距離為 1 天文單位 (AU)）



- (A) 1.2×10^{-12} (B) 2.5×10^{-7} (C) 2.2×10^{-3}
(D) 4×10^6 (E) 8.1×10^{11}

- (2) 一艘質量為 m 的太空船，在太陽與地球的連心線上航行。若不計其他天體的影響時，則在二者連線間，距太陽為多少天文單位時，太空船所受總重力為零？（假設太陽質量為地球的 3.6×10^5 倍）

答 (1)(A)；(2) 600 / 601

解 (1) 由萬有引力公式 $F = \frac{GMm}{R^2} \propto \frac{M}{R^2}$ ，得 $\frac{F_{\text{黑洞-地球}}}{F_{\text{太陽-地球}}} = \frac{\frac{4 \times 10^6}{(1.8 \times 10^9)^2}}{\frac{1}{1^2}} = 1.2 \times 10^{-12}$ 。故選(A)。

(2) 設地球質量為 M ，當太空船所受合力為零時，

此時太空船與太陽距離為 x ，則如右圖 $F_{\text{太陽-太空船}} = F_{\text{地球-太空船}}$ ，

$$\frac{G \times 3.6 \times 10^5 M m}{x^2} = \frac{GMm}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{3.6 \times 10^5}{x^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{兩邊同時開根號} \Rightarrow \frac{6 \times 10^2}{x} = \frac{1}{1-x}, x = \frac{600}{601}。$$



類題：甲恆星質量為乙行星質量的 8100 倍，兩者圓心相距 d 。有一顆隕石在甲恆星與乙行星的連心線上，當其與乙的距離為 a 時，此隕石受甲乙引力之合力為零，求 $\frac{a}{d}$ 之值為何？

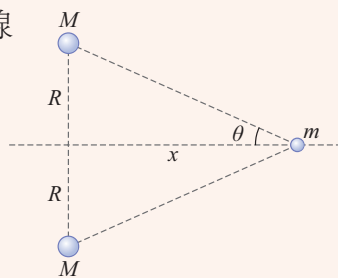
- (A) $\frac{1}{90}$ (B) $\frac{1}{91}$ (C) $\frac{90}{91}$ (D) $\frac{89}{90}$ (E) $\frac{10}{9}$

答 (B) (令乙行星質量為 m ，隕石質量為 m' ，由引力公式 $\frac{8100 Gmm'}{(d-a)^2} = \frac{Gmm'}{a^2}$ ，
得 $a = \frac{d}{91}$ 或 $\frac{a}{d} = \frac{1}{91}$ 。故選(B)。)

範例 3 萬有引力的計算「二維形式」(分解 x, y 分量)

如右圖所示，相距 $2R$ 的兩固定質點，質量皆為 M ，在其連線的中垂線上距連線中點 x 處，另置一質量為 m 的質點，則：

- (1) 質點 m 受到兩質點 M 的合力量值 F 為若干？
- (2) 承(1)，若 $x = 0$ 時，則 F 為若干？
- (3) 承(1)，若 $x \ll R$ 時，則 F 為若干？



答 (1) $\frac{2GMmx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$; (2) 0 ; (3) $\frac{2GMmx}{R^3}$

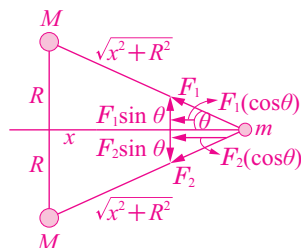
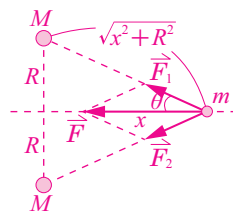
解 (1) 如右圖所示，上下兩個質點 M 對質點 m 的萬有引力 F_1 、 F_2 ，其量值皆為 $\frac{GMm}{x^2 + R^2}$ ，因為兩個引力的鉛直分量 $F_1 \sin \theta = F_2 \sin \theta$ 恰能相互抵消，故合力的量值 $F = F_1 \cos \theta + F_2 \cos \theta$ ，為兩個引力的水平分量和，因 $F_1 \cos \theta = F_2 \cos \theta$ ，即：

$$F = 2 \left(\frac{GMm}{x^2 + R^2} \right) \cos \theta = 2 \left(\frac{GMm}{x^2 + R^2} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{2GMmx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

(2) 若 $x = 0$ 時， $F = 0$ ，表示質點 m 位於兩質點 M 的連線中點時，兩質點 M 對質點 m 的引力恰相抵消。

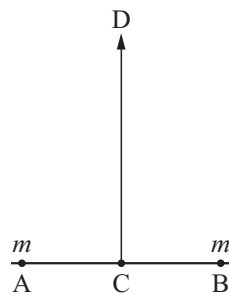
(3) 若 $x \ll R$ 時，分母的 x^2 遠小於 R^2 ，故可以忽略不計，則 $F = \frac{2GMmx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{2GMmx}{(R^2)^{3/2}} = \frac{2GMmx}{R^3}$

此時，質點 m 所受總引力的量值與距離 x 成正比，即 $F \propto x$ ，而其方向則指向連線中點。



類題：如右圖所示，兩個質量相等的質點分別固定於 A、B 兩處， \overline{DC} 為 \overline{AB} 連線的中垂線，且 D 位於無窮遠處。現將一具有質量的質點由 C 點沿 \overline{CD} 移動至 D 點，則質點在移動過程中所受的萬有引力量值如何變化？

- (A) 逐漸增加 (B) 逐漸減少 (C) 先增加後減少
- (D) 先減少後增加 (E) 一直不變



答 (C)

解 由範例可得知，質點在 C、D 點時所受到的萬有引力量值為零，而在 \overline{CD} 點之間所受到的萬有引力量值大於零，故由 C 點移動至 D 點，質點所受的萬有引力量值為先增加再減少。故選(C)。

6-1

課後練習

* 為多選題

基礎題

概念 萬有引力基本概念

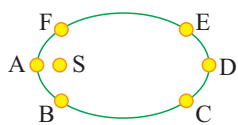
(解析見解答本)

*(A C) 1. 關於兩質點間「萬有引力」的敘述，下列哪些正確？

- (A) 其大小與兩質點的質量乘積成正比 (B) 其大小與兩質點之間的距離成反比
(C) 其方向在兩質點的連心線方向，並指向對方 (D) 此力可解釋蘋果從樹上掉下來的現象 (E) 此力無法說明為何衛星繞地球旋轉而沒有墜落

(B) 2. 如右圖所示，有一行星繞著恆星 S 作橢圓軌道運動，則下列有關行星在各點的加速度量值的敘述，何者正確？

- (A) 所有點都一樣大 (B) 點 A 處最大 (C) 點 B 與點 F 處最大
(D) 點 C 與點 E 處最大 (E) 點 D 處最大



(C) 3. 重力常數 G 值的 SI 制單位為：

- (A) 牛頓²·公尺/公斤² (B) 牛頓·公尺²/公斤 (C) 牛頓·公尺²/公斤²
(D) 公斤重·公尺/公斤² (E) 為定值，無單位

概念 萬有引力之均勻球體計算

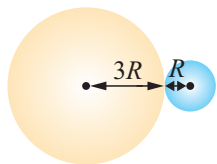
4. 如右圖所示，將密度相同且皆均勻分布的大、小兩實心球彼此緊靠。已

知半徑為 r 的球，其體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ，若小球的質量為 m ，兩球的半徑分

別為 R 及 $3R$ ，則：

- (1) 大球的質量為若干？ (2) 兩球間的重力量值為若干？

答：(1) $27m$ ；(2) $\frac{27Gm^2}{16R^2}$



概念 萬有引力一維基本計算

(E) 5. 若地球半徑為 R ，火箭由地球表面垂直升高，當其質量剩下出發時的 $\frac{1}{3}$ ，火箭離地球表面高度恰為 $2R$ ，則此時火箭所受到萬有引力為出發時的幾倍？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{18}$ (E) $\frac{1}{27}$

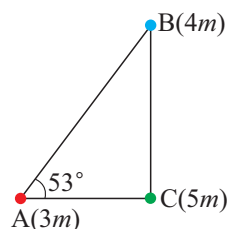
概念 萬有引力多維計算

(A) 6. 三個質量同為 M 的質點，被固定於邊長為 L 的正三角形的頂點，則各質點所受的萬有引力之合力大小為何？

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{L^2} GM^2$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{L^2} GM^2$ (C) $\frac{GM^2}{L^2}$ (D) $\frac{GM^2}{2L^2}$ (E) $\frac{2GM^2}{L^2}$

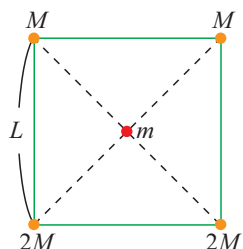
- (D) 7. 三個固定的質點 A、B、C 排列如右圖所示，其質量分別為 $3m$ 、 $4m$ 、 $5m$ ，若 A、B 之間的萬有引力為 F ，則 B、C 之間的萬有引力為多少 F ？

(A) $\frac{25}{9} F$ (B) $\frac{125}{9} F$ (C) $\frac{125}{16} F$ (D) $\frac{125}{48} F$ (E) $\frac{325}{48} F$



8. 如右圖所示，在邊長為 L 的正方形頂點分別放置質點，其質量分別為 M 、 M 、 $2M$ 及 $2M$ 。若在正方形的中心放置一質量為 m 的質點，則其所受引力合力的量值為若干？

答： $\frac{2\sqrt{2} GMm}{L^2}$

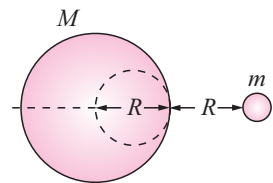


進階題

1. 如右圖所示，質量 m 的質點擺在質量 M 的大球外側，則：

- (1) 質點所受的引力為若干？
- (2) 若將大球中之直徑為 R 的虛線部分去掉，則質點所受的引力又為若干？

答：(1) $\frac{GMm}{4R^2}$; (2) $\frac{7GMm}{36R^2}$



- * (C D) 2. 如右圖所示，質量 m 的質點置於質量為 M 、半徑為 R 且均勻圓環的中心軸上，且質點與圓心相距 h ，則下列敘述哪些正確？

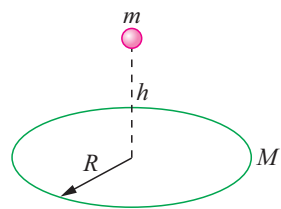
(A) 質點受環的萬有引力為 $\frac{GMm}{h^2}$

(B) 若 $h \gg R$ ，則質點受環的萬有引力為 $\frac{GMm}{R^2}$

(C) 若 $R \gg h$ ，則質點受環的萬有引力為 $\frac{GMmh}{R^3}$

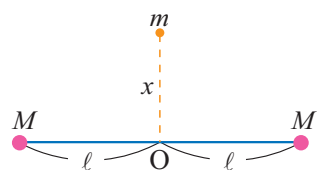
(D) 若質點自靜止釋放，則質點在中心軸上作週期性往返運動

(E) 若質點自靜止釋放，當質點通過圓心處時，加速度為最大值



3. 有兩顆星質量均為 M ，固定相距 2ℓ ，如右圖所示。今在中點上方 x 處置質量為 m 之一物體，使 $x \ll \ell$ ，則此物受力量值為_____，若此物放手後作簡諧運動，則其週期為_____。

答： $\frac{2GMmx}{\ell^3}$; $\pi\sqrt{\frac{2\ell^3}{GM}}$

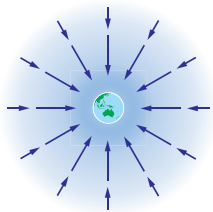
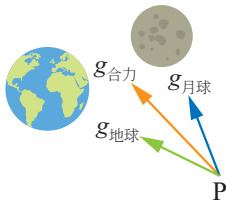
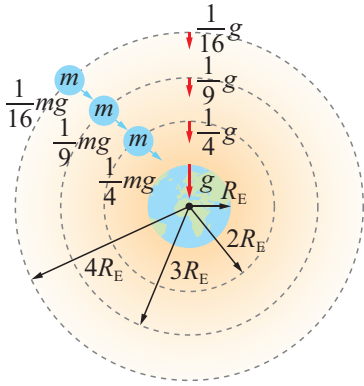


6-2 地表的重力與重力加速度

學習概念 1

重力場

配合課本 180 頁

重力場	一個具有質量的場源物體會改變其周圍空間的性質，具強度與方向，並對其他物質產生交互作用力	 <p>◎圖中箭頭方向代表重力場方向，箭矢長度代表重力場相對強弱</p>
作用條件	放置另一具有質量的物體於重力場內，場源會對物體作用產生重力	
定義	在該處的物體「單位質量所受的重力」	
數學式	重力場強度 $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{GM}{r^2}$ (N/kg 或 m/s ²) (1) 與場源質量成正比 ($\propto M$)，與距離的平方成反比 ($\propto \frac{1}{r^2}$) (2) 僅與場源質量和距離有關，與測試質點質量無關	
受多個場源的重力場	空間中 P 點的重力場是由所有場源對該點作用之重力場向量和。  <p>◎所受重力分別指向各場源中心，橘色箭頭代表重力場合力</p>	
地球周圍的重力場	若地球的質量為 M_e 、平均半徑為 R_e ，某測試質點的質量為 m ，該質點與地球中心的距離為 r ，則地球在該位置的重力場 \vec{g} 之量值為 $g = \frac{GM_e m}{r^2} = \frac{GM_e}{r^2}$ (1) 地球外部 ($r > R_e$) : $g_{\text{外部}} = \frac{GM_e}{r^2}$ 。 (2) 地球表面 ($r = R_e$) : $g_{\text{表面}} = \frac{GM_e}{r^2} = \frac{GM_e}{R_e^2}$ 。 (3) 地球內部 ($r < R_e$) : $g_{\text{內部}} = \frac{GM_e}{R_e^2} \times \frac{r}{R_e} = g_{\text{表面}} \times \frac{r}{R_e}$ 。(補充) 	

6

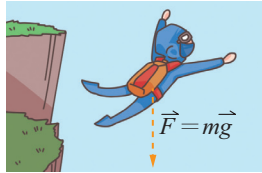
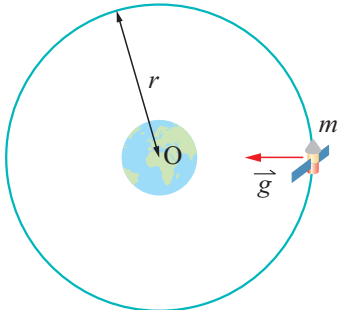
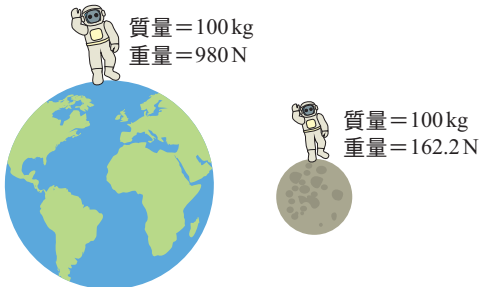
教師用書

貼心伴隨 · 敬請賜教

學習概念 2

重力加速度

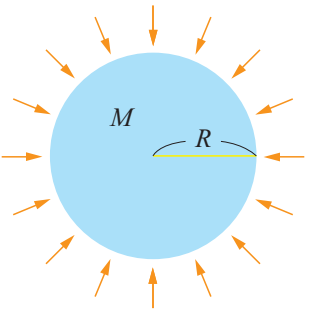
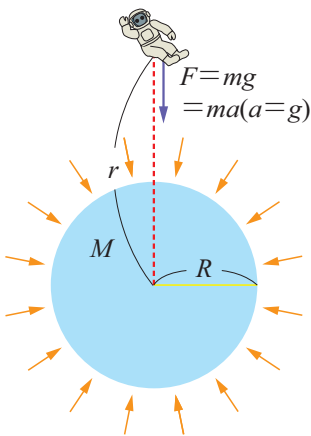
配合課本 182 頁

若物體於重力場 g 下落時，因物體受到 重力 $\vec{F}=m\vec{g}$ 的作用，而產生 加速度	
分析	<p>由牛頓第二運動定律：$\vec{F}=m\vec{a}=m\vec{g}$，</p> <p>則重力加速度 $\vec{a}=\frac{m\vec{g}}{m}=\vec{g}=\frac{GM}{r^2}$</p> <p>註 重力場與重力加速度量值相等，但意義不同</p> 
地球周圍的重力加速度量值	<p>地球質量為 M_e，質點與地心距離為 r，</p> <p>則重力加速度 $a=g=\frac{GM_e}{R_e^2}$</p> <p>(1) 與場源質量成正比 ($\propto M_e$)</p> <p>(2) 與距離的平方成反比 ($\propto \frac{1}{r^2}$)</p> <p>(3) 與質點質量 m 無關</p> 
地表附近的重力加速度	<p>若對地球表面上某一觀察者來說，範圍不大的地面可視為水平平面，此時重力加速度的方向均與地面垂直。若假設地球是正球體，其平均半徑約為 6371 km，質量約為 5.974×10^{24} kg，且不考慮地球自轉，則：</p> <div>$g=\frac{GM_e}{R_e^2}=\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(5.974 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6371 \times 10^3 \text{ m})^2}=9.823 \text{ m/s}^2$</div> <p>一般人日常活動的高度範圍與地球半徑相比較，可以說是微不足道，可將兩處的重力加速度視為相同，$g=9.823 \text{ m/s}^2$，一般為簡化計算也常取 10 m/s^2。</p> <p>圖 若不計阻力，地表附近的落體運動，可視為等加速運動</p>
重力加速度 g 的測量	<p>(1) 測量者：<u>荷蘭人惠更斯</u></p> <p>(2) 利用小角度的單擺週期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$，計算地表的重力加速度</p>
物體的重量	<p>(1) 物體的重量即物體受到場源的引力，方向恆指向球心。</p> <p>(2) 質量為 m 的物體，在地表的重量 $\vec{W}=m\vec{g}$。</p> <p>註 $1 \text{ kgw}=9.8 \text{ N}$。</p> <div></div> <p>⊙ 物體的重量依場源而不同</p>

學習概念 3

重力場強度與重力加速度的比較

補充：重要概念釐清

名稱	重力場	重力加速度
形成	一個具有質量的物體，會改變其周圍空間的性質，而建立引力「場」	將另一具有質量的物體放置於重力場內，會受到重力作用，使物體產生「加速度」。
		
	⊙ 質量為 M 、半徑為 R 的星球產生的重力場分布	⊙ 重力場內具有質量 m 的物體所產生的加速度
	註 若另一受力物體不存在，則重力加速度便不存在。	
方向	指向星球中心	
量值形式	$g = \begin{cases} \text{(於星球外部距離 } r) \Rightarrow \frac{GM}{r^2} \propto \frac{M}{r^2} \Rightarrow \frac{G(\frac{4}{3}\pi R^3)\rho}{r^2} \propto \frac{R^3\rho}{r^2} \\ \text{(於星球表面距離 } R) \Rightarrow \frac{GM}{R^2} \propto \frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{G(\frac{4}{3}\pi R^3)\rho}{R^2} = \frac{4G\pi R\rho}{3} \propto R\rho \end{cases}$	
單位	N/kg 或 m/s^2	

範例 1

影響重力場強度的要素

某星球的平均密度與半徑，分別為地球的 0.10 倍與 10 倍，則此星球表面的重力加速度量值約是地球表面重力加速度量值的幾倍？

- (A) 0.010 (B) 0.10 (C) 1.0 (D) 10 (E) 100

42% 答對率 110 學測



答 (C)

解 因表面重力加速度（重力場）與星球半徑和星球密度乘積成正比

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4G\pi R\rho}{3} \propto R\rho \Rightarrow \frac{g_{\text{某星球}}}{g_{\text{地球}}} = 0.1 \times 10 = 1.0。故選(C)。$$

類題：近年科學家發現某一顆巨大的類地球行星，其質量為地球的 17 倍、直徑為地球的 2.3 倍，它像地球一樣擁有堅固的表層，因此被天文學家歸類為“巨無霸地球”。假設該星球與地球皆可視為均質的球體，則該行星表面的重力加速度約為地球的多少倍？

78% 答對率 106 指考

(A) 0.31 (B) 2.2 (C) 3.2 (D) 7.3 (E) 39

答：(C) $(g = \frac{GM}{R^2} \propto \frac{M}{R^2}, \text{而 } \frac{17}{2.3^2} \approx 3.2。故選(C)。)$

範例 2 影響重力加速度的要素

已知地球半徑為某星球的 4 倍，質量為某星球的 96 倍，則：

- (1) 某星球表面的重力場強度約為地球表面重力場的多少倍？
- (2) 若地球表面的重力加速度為 g ，則質量為 m 之物體在某星球表面的重量為若干？
- (3) 某星球表面的小角度單擺的週期為在地球表面的多少倍？

答：(1) $\frac{1}{6}$; (2) $\frac{1}{6} mg$; (3) $\sqrt{6}$

解：(1) 設地球和某星球的半徑分別為 $R_{\text{地球}}$ 和 $R_{\text{某星球}}$ ，兩者的質量分別 $M_{\text{地球}}$ 和 $M_{\text{某星球}}$ ，其表面的重力場大小與星球質量 M 成正比和離星球中心距離平方 r^2 成反比，

$$\text{即 } g = \frac{GM}{R^2} \propto \frac{M}{R^2}, \quad \frac{g_{\text{某星球}}}{g_{\text{地球}}} = \frac{\frac{M_{\text{某星球}}}{(R_{\text{某星球}})^2}}{\frac{M_{\text{地球}}}{(R_{\text{地球}})^2}} = \left(\frac{1}{96}\right)(4)^2 = \frac{1}{6},$$

所以某星球表面的重力場約為地表重力場的六分之一。

(2) 因重力場量值和重力加速度相同，故某星球表面的重力加速度約為地表重力加速度的六分之一 $\Rightarrow g_{\text{某星球}} = \frac{1}{6} g$ ，質量 m 之物體在某星球表面的重量 $W_{\text{某星球}} = mg_{\text{某星球}} = \frac{1}{6} mg$ 。

(3) 小角度單擺的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_{\text{某星球}}}{T_{\text{地球}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{地球}}}{g_{\text{某星球}}}} = \sqrt{6}$ 。

類題：已知地球的平均半徑約為火星的 1.9 倍，地球的質量約為火星的 9.3 倍。若忽略空氣阻力，而將同一小球以相同的初速度分別於火星表面與地球表面鉛直上拋，則小球在空中運動的時間，在火星上約為地球上的多少倍？

(A) 0.20 (B) 0.38 (C) 1.0 (D) 2.6 (E) 4.9

44% 答對率 102 學測

答：(D) $\left(\frac{g_{\text{地}}}{g_{\text{火}}} = \frac{\frac{GM_{\text{地}}}{R_{\text{地}}^2}}{\frac{GM_{\text{火}}}{R_{\text{火}}^2}} = \frac{9.3GM}{(1.9R)^2} = \frac{9.3}{3.61} \approx 2.58, \text{由鉛直上拋可知飛行時間 } t = \frac{2v_0}{g} \propto \frac{1}{g}\right)$
 $\Rightarrow \frac{t_{\text{火}}}{t_{\text{地}}} = \frac{g_{\text{地}}}{g_{\text{火}}} \approx 2.58。故選(D)。)$



6-2

課後練習

* 為多選題

基礎題

概念 重力場強度與重力加速度

(解析見解答本)

- (C) 1. 若地球半徑為 6400 km，地表重力加速度為 9.8 m/s^2 ，重力常數 G 為 $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ，則地球平均密度約為多少 kg/m^3 ？
(A) 35 (B) 4.5×10^2 (C) 5.5×10^3 (D) 6.5×10^4 (E) 7.5×10^5
- (D) 2. 一個密度均勻的星球分裂為 27 個密度不變、質量相等的星球，則每個星球表面的重力加速度變為原來的多少倍？
(A) 1 (B) 3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{9}$
- (A) 3. 地球半徑為 R ，平均密度為 ρ ，且萬有引力常數為 G ，則地表重力加速度為何？
(A) $\frac{4}{3}\pi G\rho R$ (B) $\frac{4}{3}\pi G\rho R^2$ (C) $\frac{4}{3}\pi G\rho R^3$ (D) $\frac{4\pi G\rho}{3R}$ (E) $\frac{4\pi G\rho}{3R^2}$
- (B) 4. A 與 B 兩星球之半徑比為 3:1，密度比為 1:2，則兩者表面之重力加速度比為何？
(A) 1:1 (B) 3:2 (C) 9:4 (D) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (E) 6:1
- (E) 5. 甲、乙兩星球的質量相等，但半徑比為 1:3，則甲、乙星球表面的重力加速度比為何？
(A) 1:1 (B) 1:3 (C) 3:1 (D) 1:9 (E) 9:1
- (E) 6. 兩顆不同質量的鐵球由靜止狀態自同一位置同時落下，兩球落至地面所需的時間相同，這是因為下列何者？
(A) 作用力等於反作用力 (B) 兩球材質相同 (C) 兩球的位能變化相同 (D) 兩球所受萬有引力相等 (E) 每球所受重力與質量之比值相同
- (D) 7. 若地球半徑不變，平均密度增為現在的 3 倍，則同一隻跳蚤的跳高高度將變為原本的多少倍？
(A) 1 (B) 3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{9}$
- (D) 8. 甲、乙兩行星質量相同，表面重力加速度 $g_{\text{甲}} = 3g_{\text{乙}}$ ，則星球半徑比值 $\frac{R_{\text{甲}}}{R_{\text{乙}}}$ 為何？
(A) 3 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (E) $\frac{1}{9}$
9. 若宇宙中有 8 個完全相同的星球，全部熔合在一起，且密度不變，則新星球表面重力加速度為原來表面重力加速度的幾倍？

答：2

- (A) 10. 質點間的重力與其質量的乘積成正比，而與其距離的平方成反比。小君想從重力常數 G 、地球表面的重力加速度 g 和地球半徑 R 去估算地球的質量 M ，她寫出的正確計算式應為下列何者？

32% 答對率 (100 學測)

(A) $M = \frac{gR^2}{G}$ (B) $M = \frac{GR^2}{g}$ (C) $M = \frac{Gg}{R^2}$ (D) $M = \frac{R^2}{gG}$ (E) $M = gGR^2$

概念 重力加速度的影響

- *(A B) 11. 下列哪些物理量會受到地球重力加速度之影響？
 C D (A)重量 (B)斜拋物體之上升最大高度 (C)自由落體的時間 (D)大氣壓力 (E)質量
- (C) 12. 若科學家發現與地球極為類似的某星球，並測得其表面之重力場強度為地球表面重力場強度的 0.6 倍。某太空人在地表上垂直向上跳起時，離地最大高度為 120 公分，則他在該星球表面以相同初速垂直向上跳時，離地最大高度為多少公分？
 (A) 12 (B) 180 (C) 200 (D) 100 (E) 80

概念 重力加速度對重量影響

- (D) 13. 地球半徑為 R ，小球在離地表 $2R$ 處重量為離地表 R 處重量的幾倍？
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) 1
- (A) 14. 地球表面的重力加速度大小為 9.8 m/s^2 ，月球表面的重力加速度大小為 1.6 m/s^2 。大力士甲在月球的舉重成績是 1250 kgw，大力士乙在地球的舉重成績是 200 kgw，則誰的力氣較大？
 (A)甲 (B)乙 (C)相同 (D)無法比較
- *(B D) 15. 甲物體在北極上之重量與乙物體在赤道之重量相同，則下列哪些敘述正確？
 E (A)甲的質量較大 (B)乙的質量較大 (C)甲和乙的質量一樣大 (D)兩者所受到的重力大小相同 (E)兩者所受的重力方向指向同一處
- (A) 16. 設一星球為密度均勻之球體，若一質點在此星球表面的重量為 W ，則此質點在此星球球心位置的重量為何？
 (A) 0 (B) $0.5W$ (C) W (D) $2W$ (E)無窮大
17. 已知地球質量為某星球質量的 80 倍、地球半徑為該星球半徑的 4 倍，地表的重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。質量為 50 公斤的太空人登陸該星球後，測量自己的體重和質量，則：
 (1) 太空人測得的體重為 _____ N = _____ kgw。
 (2) 太空人測得的質量為 _____ kg。

答： (1) 98，10；(2) 50

82 日大

- (C) 18. 太空船登陸某星球後，派出一台質量為 20 kg 的探測小船探測星球表面的地形。太空船測得探測小船的重量變為 100 kgw ，已知地球表面重力場強度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，則該星球表面的重力場強度為多少 m/s^2 ？
(A) 4.9 (B) 9.8 (C) 49 (D) 98 (E) 147

概念 重力加速度與單擺

- *(C D) 19. 若地球表面之重力加速度 g 加倍，則下列哪些敘述正確？
(A) 物體的重量不變 (B) 單擺擺動的週期變為原來的一半 (C) 單擺的週期變為原來的 $\frac{1}{\sqrt{g}}$ (D) 某人以相同初速向上跳的高度變為原來的一半 (E) 自由落體之時間變為原來的 $\sqrt{2}$ 倍
- *(B C) 20. 火星表面上的重力加速度量值比地球表面上為小。下列有關在地球和火星表面上各種物理現象的敘述，哪些正確？
(A) 繩長相同的單擺作小幅度擺動的週期相同 (B) 同一個質量—彈簧系統鉛直懸掛，作簡諧振動的週期相同 (C) 同一個物體的慣性質量相同 (D) 同一個物體的重量相同 (E) 同一個物體由相同高度作自由落體的時間相同

進階題

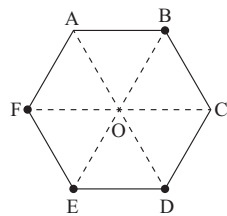
- (A) 1. 如右圖，已知一半徑為 R ，均勻六分之一圓環質量為 $\frac{M}{6}$ ，造成環心重力場量值為 20 牛頓/公斤 ，如圖(a)。



則圖(b)相同材質之二分之一圓環為質量 $\frac{M}{2}$ ，造成環心重力場量值為多少牛頓/公斤？

- (A) 40 (B) 60 (C) 80 (D) 100 (E) 120

- (E) 2. 有一邊長為 a 的正六邊形，在頂角 B、D、E、F 各置放一質量為 m 的質點，如右圖所示。若重力常數為 G ，則 O 點重力場強度為何？

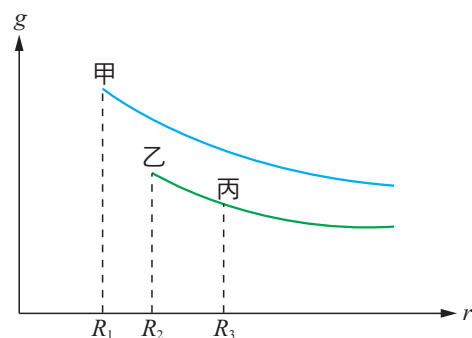


- (A) $\frac{5Gm}{a^2}$ (B) $\frac{4Gm}{a^2}$ (C) $\frac{3Gm}{a^2}$ (D) $\frac{2Gm}{a^2}$ (E) $\frac{Gm}{a^2}$

- *(B E) 3. 若地球平均密度不變，但半徑增為 2 倍時，則下列敘述哪些正確？
(A) 立於地表上的人重量變為原來的 4 倍 (B) 以相同初速鉛直上拋所能到達的最大高度為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍 (C) 相同高度自由落下的物體抵達地面所需的時間為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍 (D) 自由落體自相同高度落下的末速度為原來的 2 倍 (E) 月球受到地球萬有引力變為原來的 8 倍

4. 右圖為甲乙丙三個星球外部重力加速度 g 和距星球中心 r 的函數關係，其中 R_1 、 R_2 和 R_3 分別為甲、乙、丙三個星球半徑，試求：

- (1) 三個星球質量依序為： 甲 > 乙 = 丙 。
- (2) 三個星球密度依序為： 甲 > 乙 > 丙 。



- (B) 5. g 為地表之重力加速度，距地表 h ($h \ll R$, R 為地球半徑) 高處之重力加速度量值，與地表之重力加速度的差值為何？

(A) $\frac{R^2}{h^2} g$ (B) $\frac{2h}{R} g$ (C) $\frac{R}{h} g$ (D) $\frac{2R^2}{h^2} g$ (E) $\frac{2h^2}{R^2} g$

- (A) 6. 有一單擺在地面上的週期為 T ，在某高度處的週期為 T' ，則該高度處的離地高度與地球半徑的比值為何？

(A) $\frac{T'-T}{T}$ (B) $\frac{T'-T}{T'}$ (C) $\frac{T'}{T}$ (D) $\frac{T}{T'}$ (E) $\sqrt{\frac{T'-T}{T}}$

- * (C D) 7. 某行星的質量為地球的 5 倍，半徑為地球的 0.5 倍，則下列哪些正確？

(A) 該行星表面 g 值為地球表面 g 值的 100 倍 (B) 在地球表面可射至 400 m 高度的砲彈，若以相同的初速自此行星表面發射，可達 40 m 的高度 (C) 在地球表面週期為 2 s 的小角度單擺，移至此行星表面，週期變為 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ s (D) 在地球表面週期為 2 s 的彈簧振動系統，移至此行星表面，週期為 2 s (E) 同樣的質量在此行星表面與地球表面所受之重力大小相同

- (E) 8. 欲使物體的重量減少為地表處重量的一半，須將物體升至地表上空何處？（假設地球半徑為 R ）

(A) $\frac{R}{2}$ (B) $\sqrt{2} R$ (C) $2R$ (D) $(\sqrt{2} + 1) R$ (E) $(\sqrt{2} - 1) R$

- * (A B) 9. 假設有一星球其密度為地球的 a 倍，其半徑為地球的 b 倍，下列敘述哪些正確？

C (A) 該星球質量為地球的 ab^3 倍 (B) 該星球表面之重力加速度為地球的 ab 倍 (C) 同一單擺在該星球表面上小角度擺動的頻率為地球的 \sqrt{ab} 倍 (D) 自該星球表面上以相同初速及仰角拋射之質點，其水平射程為地球的 ab 倍

95 指考改

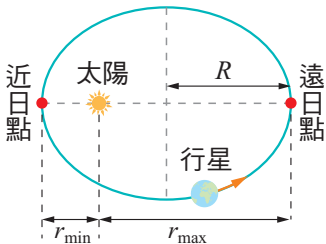
6-3 行星與衛星運動

學習概念 1 克卜勒行星運動定律

配合課本 187 頁

克卜勒分析第谷的天文觀察數據，陸續發表了三個定律，稱為克卜勒行星運動定律。

第一定律：軌道定律

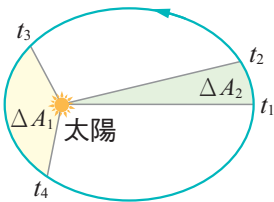


(1) 行星以**橢圓形**軌道環繞太陽運行，太陽位於橢圓的其中一個**焦點**上。

(2) 平均軌道半徑 = $\frac{(r_{\min} + r_{\max})}{2}$ = 半長軸。

註 地球公轉平均軌道半徑作為長度單位，稱為天文單位 (AU)

第二定律：等面積定律（只適用橢圓）



！ 小提醒

當時間間隔 $\Delta t_{1 \rightarrow 2} = \Delta t_{3 \rightarrow 4}$ 所掃過的面積也相同 $\Delta A_1 = \Delta A_2$

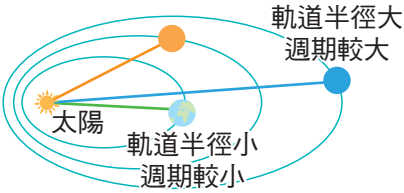
(1) 行星與太陽的連線在**相同的時間**間隔內 Δt ，將掠掃過**相同的面積** $\Delta A (\propto \Delta t)$ 。

(2) 同一行星在同一軌道上**任意位置繞轉**，其**面積速率** $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 皆為**定值**。

註 不同軌道有不同的面積速率。

(3) 同一行星在同一軌道上運行時，**越接近近日點速率越快，越接近遠日點速率越慢**。（遠日點的速率及角速度度量值最小）

第三定律：週期定律（適用橢圓及圓形）



(1) 各行星繞太陽公轉**週期的平方與其平均軌道半徑的立方成正比**。 $(\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \text{定值})$

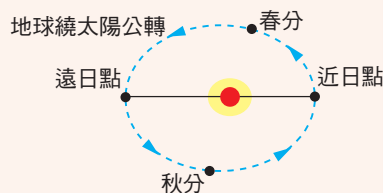
(2) 適用於以不同軌道繞同一恆星之所有行星。

註 也適用衛星繞同行星

範例 1 克卜勒行星運動定律

根據克卜勒行星運動定律，可推知地球繞太陽運動時，則下列敘述那些正確？（多選）

- (A)作等速橢圓軌道運動 (B)平均軌道半徑即為行星與太陽最近距離與最遠距離之算術平均數 (C)每個行星的面積速率皆不同 (D)地球在近日點的繞日速率比遠日點慢 (E)地球與太陽的連線，在 1 月份和 7 月份所掃掠的面積相等

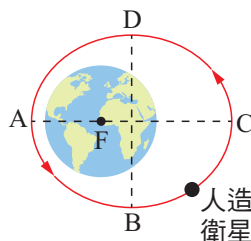


答 (B)(C)(E)

解 (A)(B)變速率橢圓軌道運動；(C)「同一軌道」上，不同位置，行星與太陽連線掃過的面積速率相同。每個行星繞日不同軌道，因此繞日的面積速率不相同；(D)由克卜勒行星運動第二定律可知，距太陽愈近時，速率愈快；(E)根據等面積定律，地球與太陽的連線在相同時間內會掃掠出相同面積。故選(B)(C)(E)。

類題：如右圖為一顆人造衛星以橢圓軌道繞地球的示意圖，其中 F 點為地球質量中心，則下列敘述哪些錯誤？（地球質量中心表示可以把地球的全部質量集中在這一點）（多選）

- (A)衛星經 A 點的速率最大 (B)由 A 點到 C 點，衛星移動速率漸增 (C)衛星受到地球的引力作用，作等加速運動 (D)在相同時間內，衛星與地心連線掃過之面積等於月心與地心連線掃過之面積 (E)地心 F 點是人造衛星橢圓軌道的焦點



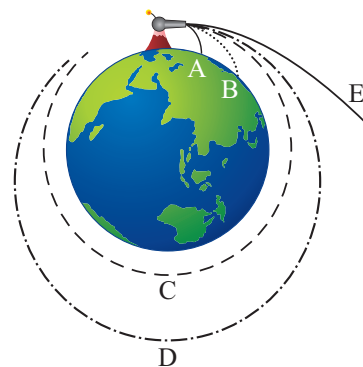
答 (B)(C)(D) (A)近日點速率最大；(B)克卜勒第二定律由 A 點到 C 點，衛星移動速率漸減；(C)衛星受到地球的引力作用，作變加速運動（ $F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$ ）；(D)克卜勒行星第二運動定律只適用在同一軌道的星體，而衛星與月球在不同軌道上，故在相同時間內，衛星與地心連線掃過之面積不一定等於月心與地心連線掃過之面積。故選(B)(C)(D)。

學習概念 2 牛頓解釋克卜勒行星運動第三定律

配合課本 187 頁

1. 牛頓的想像實驗：

從山頂將物體以愈來愈大的速度水平射出，它的射程將愈來愈遠，如右圖中的路徑 A 和 B。然而地面不是平的，當物體的速度增大到某個特定值時，將不會落至地面，而會環繞地球運轉，如圖中的路徑 C 和 D（C 為圓形軌道、D 為橢圓軌道）。若速度再增大，甚至可以脫離地球，如圖中的路徑 E。牛頓認為造成這些想像運動模式的根本原因正是萬有引力。



◎牛頓的想像實驗：逐漸增加砲彈的水平速度，最後砲彈將繞行地球。（本圖未依實際比例繪製）

2. 牛頓利用理論推導出克卜勒行星運動第三定律：

牛頓認為天體的運動同樣可以用萬有引力定律的作用來解釋。假設質量 M 的恆星與質量 m 的行星間的萬有引力，提供行星繞恆星作圓周運動所需的向心力 $F_{\text{向心力}}$ ，半徑為 R 、週期為 T ，則 $F_{\text{萬有引力}} = F_{\text{向心力}} \Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ ，其中 $\frac{R^3}{T^2}$ 之比值只與恆星質量 M 有關。因為恆星質量 M 在短時間內不會變化，故 $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{常數}$ ，恰吻合克卜勒行星運動第三定律的描述。

註 此結果可應用到其他行星或衛星系統

範例 2 萬有引力與克卜勒行星運動第三定律的關係

地球繞太陽公轉週期和平均軌道半徑分別為 $T_{\text{地球}}$ 和 $R_{\text{地球}}$ ，月球繞地球公轉週期和平均軌道半徑分別為 $T_{\text{月球}}$ 和 $R_{\text{月球}}$ ，則太陽質量 $M_{\text{太陽}}$ 和地球質量 $M_{\text{地球}}$ 比值為何？

- (A) $\frac{R_{\text{地球}}^3 T_{\text{地球}}^2}{R_{\text{月球}}^3 T_{\text{月球}}^2}$ (B) $\frac{R_{\text{地球}}^2 T_{\text{地球}}^3}{R_{\text{月球}}^2 T_{\text{月球}}^3}$ (C) $\frac{R_{\text{地球}}^3 T_{\text{月球}}^2}{R_{\text{月球}}^3 T_{\text{地球}}^2}$ (D) $\left(\frac{R_{\text{地球}} T_{\text{月球}}}{R_{\text{月球}} T_{\text{地球}}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (E) 無法求得

答 (C)

解 由 $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \propto \frac{R^3}{T^2}$ ， $\frac{M_{\text{太陽}}}{M_{\text{地球}}} = \frac{\frac{R_{\text{地球}}^3}{T_{\text{地球}}^2}}{\frac{R_{\text{月球}}^3}{T_{\text{月球}}^2}} = \frac{R_{\text{地球}}^3 T_{\text{月球}}^2}{R_{\text{月球}}^3 T_{\text{地球}}^2}$ 。故選(C)。

類題：一衛星繞某行星表面運轉週期為 T ，則該行星的密度為何？

- (A) $\frac{\pi}{3GT^2}$ (B) $\frac{\pi T^2}{3G}$ (C) $\frac{3\pi}{GT^2}$ (D) $\frac{\pi}{GT^2}$ (E) $\frac{2\pi}{GT^2}$

答 (C) (由 $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ ，又 $M = d \times \frac{4}{3} \pi R^3$ 代入，可得 $d = \frac{3\pi}{GT^2}$ 。故選(C)。

學習概念 3 地球衛星的運動

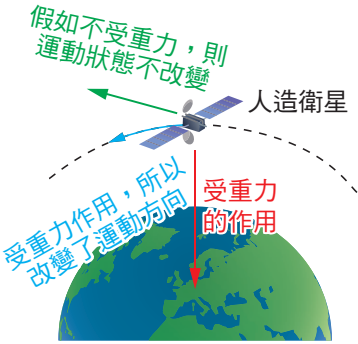
配合課本 188 頁

1. 人造衛星：

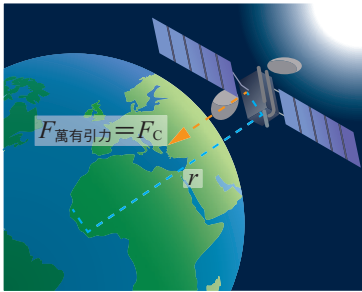
假設衛星質量 m ，以軌道半徑 r 繞質量 M 的行星作**等速圓周運動**。因衛星與行星的**萬有引力**提供衛星作圓周運動的**向心力**，則：

$$F_{\text{萬有引力}} = F_c \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma_c = m \frac{v^2}{r} = m r \omega^2 = m \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

整理可得：



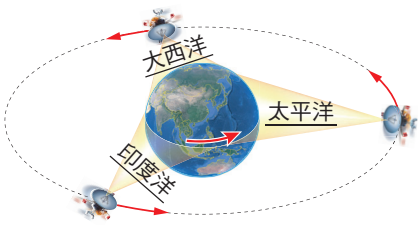
物理量	公式	說明
向心加速度 a_c	$a_c = \frac{GM}{r^2}$	軌道半徑 愈長 ，向心加速度 愈小 ($a \propto \frac{M}{r^2} = Mr^{-2}$)
軌道速率 v	$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$	軌道半徑 愈長 ，繞轉軌道速率 愈小 ($v \propto \sqrt{\frac{M}{r}} = Mr^{-\frac{1}{2}}$)
軌道週期 T	$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$	軌道半徑 愈長 ，繞轉軌道週期 愈大 ($T \propto M\sqrt{r^3} = Mr^{\frac{3}{2}}$)



- (1) 若衛星繞同一顆星球時： $a \propto \frac{1}{r^2}$ ， $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ ， $T \propto \sqrt{r^3}$
- (2) 物理量 a 、 v 、 t 皆和**衛星的質量 m** 無關
- (3) 繞不同星球時，需考慮被**繞星球質量 M** 影響
- (4) 若僅知星球密度 ρ ，則**星球質量 M** 以 $\frac{3}{4} \pi R^3 \rho$ 取代。

2. 同步衛星：觀察者於地球上觀測，可觀察到這種人造衛星在空中的同一位置上**保持靜止**不動，又稱「地球同步衛星」。

物理量	說明
繞轉週期	與地球自轉同步，週期為 86400 秒（一天）
軌道半徑	運轉軌道在 赤道上空 ，距地心約地球半徑 6.6 倍，距地表高度約為地球半徑的 5.6 倍



將三顆同步衛星等間隔配置於赤道上空（恰可安置在太平洋、大西洋及印度洋上空），就可建立一個除了接近兩極地區以外的全球通訊網

範例 3 人造衛星的運動——重要物理量

假設地球可視為密度均勻的孤立球體，有甲、乙、丙三個衛星：

107 指考改

甲：同步衛星（在距離地球表面約 35786 km）

乙：GPS 系統衛星（在距離地球表面約 20200 km 的太空軌道上運行）

丙：福衛五號人造衛星軌道（在距離地球表面約 720 km）

(1) 比較甲、乙、丙三處衛星的公轉週期，由大至小排列順序為下列何者？

(A) 丙乙甲 (B) 甲乙丙 (C) 乙丙甲 (D) 甲丙乙 (E) 乙甲丙

(2) 比較甲、乙、丙三處衛星的公轉速率，由大至小排列順序為下列何者？

(A) 丙乙甲 (B) 甲乙丙 (C) 乙丙甲 (D) 甲丙乙 (E) 乙甲丙

(3) 比較甲、乙、丙三處衛星的向心加速度，由大至小排列順序為下列何者？

(A) 丙乙甲 (B) 甲乙丙 (C) 乙丙甲 (D) 甲丙乙 (E) 乙甲丙

答 (1)(B)；(2)(A)；(3)(A)

解 (1) 因衛星的公轉週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \propto \sqrt{r^3}$ ，故衛星公轉週期順序為甲 > 乙 > 丙。故選(B)。

(2) 因衛星的軌道速率 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ ，故衛星公轉速率順序為丙 > 乙 > 甲。故選(A)。

(3) 因衛星的軌道向心加速度 $a_c = \frac{F_c}{m} = \frac{GM}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$ ，故衛星公轉向心加速度順序為丙 > 乙 > 甲。故選(A)。

類題：質量分別為 M_1 與 M_2 的甲、乙兩衛星均繞地球作等速圓周運動，已知甲、乙衛星的軌道半徑分別為 R_1 與 R_2 ，則甲衛星繞地球的速率是乙衛星繞地球速率的多少倍？

23% 答對率 105 學測

(A) $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ (B) $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ (C) $\sqrt{\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}}$ (D) $\sqrt{\frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}}$ (E) $\sqrt{\frac{M_1 R_2}{M_2 R_1}}$



答 (B)

(衛星繞同一顆星球下，則：由衛星繞轉速度公式 $v = \sqrt{\frac{GM_{\text{地球}}}{r}} \propto \sqrt{\frac{1}{r}} \Rightarrow \frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1}}}{\sqrt{\frac{1}{R_2}}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ 。故選(B)。

另解：重力 = 向心力，則： $\frac{GM_{\text{地球}}M_{\text{衛星}}}{r^2} = M_{\text{衛星}} \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{\text{地球}}}{r}} \propto \sqrt{\frac{1}{r}} \Rightarrow \frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1}}}{\sqrt{\frac{1}{R_2}}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ 。)

範例 4 人造衛星運動 —— 軌道週期

臺灣首枚自主研製的高解析度遙測衛星「福衛五號」，於 2017 年 8 月順利升空在距地表 720 公里處繞地球作接近圓軌道運轉。一般在此高度繞地心作等速圓周運動的衛星，其週期約 100 分鐘。已知地球半徑約為 6400 公里。若為特殊目的發射一新衛星，使其沿圓軌道繞行地球一周所需時間約為 800 分鐘。則此新衛星離地面的高度約為多少公里？

23% 答對率 107 學測



- (A) 22000 (B) 16000 (C) 2800 (D) 920 (E) 150

答 (A)

解 衛星繞同一顆星球下，則：假設衛為五號繞轉半徑為 R_1 ，新衛星繞轉半徑為 R_2 ，再根據人造衛星運動軌道週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \propto \sqrt{R^3}$ ，所以 $\frac{800}{100} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}$ ，可得 $R_2 = 4R_1 = 4 \times (6400 + 720) = 28480 \text{ km}$ ，故其新衛星高度為 $h = 28480 - 6400 = 22080 \text{ km} \approx 22000 \text{ km}$ 。故選(A)。

類題：同步衛星繞地球運行的週期和地球自轉的週期相同。若部署一顆與同步衛星質量相同的新衛星，使其繞行地球一次的時間約為 3 小時，且兩顆衛星的軌道均為圓形，則該新衛星所受的重力量值約是同步衛星的多少倍？

27% 答對率 108 學測



- (A) 16 (B) 8 (C) 1 (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{16}$

答 (A)

(同步衛星繞地球運行的週期為 24 小時，人造衛星運動軌道週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \propto \sqrt{r^3}$ ，得 $\frac{R_{\text{新}}}{R_{\text{同}}} = \left(\frac{3}{24}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ ，根據牛頓之萬有引力定律 $F_g = \frac{GMm}{R^2}$ ，因兩顆衛星的質量相同，可知重力 $F_g \propto \frac{1}{R^2}$ ，則 $\frac{F_{\text{新}}}{F_{\text{同}}} = \frac{R_{\text{同}}^2}{R_{\text{新}}^2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$ 。故選(A)。

範例 5 同步衛星

下列有關地球同步衛星的敘述，哪些正確？（多選）

(A)同步衛星不受地球引力作用，所以可以停留在軌道上運動，而不被地球引力吸引而墜地 (B)不同的同步衛星繞轉時，其與地心連線在單位時間內掃過面積不同 (C)同步衛星，角速率和地球相同 (D)同步衛星可以停留在北迴歸線正上方 (E)已知地球質量為月球 81 倍，若一繞月球的衛星，其繞轉半徑和另一繞地球的同步衛星相同，則繞月衛星週期為 9 天。

答 (C)(E)

解 (A)同步衛星作等速率圓周運動，則需重力提供繞轉之向心力，只是轉動週期也為 24 小時，地面上人看覺得衛星一直停留在原位不動而已；(B)同步衛星單位時間內衛星與地心連線所掃過的面積

$$= \frac{\pi r^2}{T} = \frac{\pi r^2}{2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}} = \frac{1}{2} \sqrt{GM} r \propto \sqrt{r} \Rightarrow \text{繞轉半徑 } r \text{ 相同，則單位時間內掃過相同面積；}$$

(C)因 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ；(D)為確保同步衛星固定在地表上方某一點，須維持在赤道上空繞轉；(E)繞轉半

$$\text{徑相同，週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \propto \frac{1}{\sqrt{M}}, \text{ 若繞月衛星週期為 } T_{\text{月}} \Rightarrow \frac{T_{\text{同}}}{T_{\text{月}}} = \frac{\sqrt{M_{\text{月}}}}{\sqrt{M_{\text{地}}}} \Rightarrow \frac{1}{T_{\text{月}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} \Rightarrow T_{\text{月}} = 9 \text{ 天。故選(C)(E)。}$$

類題：洲際通訊衛星繞地球運轉，稱為「同步衛星」，而由地面看此種同步通訊衛星，衛星像是懸在高空中靜止不動，則下列有關此種衛星的敘述，哪些正確？（多選）
(A)只能運行在赤道上空某一固定高度上 (B)不同之同步衛星在軌道上運行時，速率可以不同 (C)繞地球中心運行的方向皆由西向東 (D)因從地表上看來必須停留在空中不動，故繞地球中心公轉的週期為無限長 (E)假定月球繞地球中心公轉的週期為 27 天，則月球與同步通訊衛星繞地運行的軌道半徑比為 9 : 1

答 (A)(C)(E)

((A)由週期定律可知，特定週期的衛星，只能運行在赤道上空的某一固定高度上；(B)因高度固定，不同的同步衛星其速率均相同，與其質量無關；(C)需與地球自轉方向相同，均為由西向東轉；(D)繞地球公轉的週期與地球自轉週期相同，非無限長；(E)由週期定律 $\frac{27^2}{R_{\text{月}}^3} = \frac{1^2}{R_{\text{同}}^3}$ ，可得 $R_{\text{月}} : R_{\text{同}} = 9 : 1$ 。故選(A)(C)(E)。)

6-3

課後練習

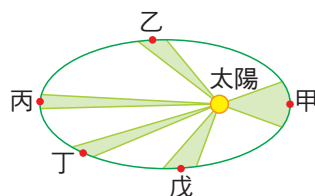
* 為多選題

基礎題

概念 萬有引力與克卜勒行星運動第三定律關係

(解析見解答本)

- (A) 1. 如右圖所示，克卜勒行星運動第二定律又稱等面積定律，即一個行星與太陽的連線，在等長的時間內，於行星軌道所掃過的面積必相等。已知太陽在右邊焦點上，則此行星在甲、乙、丙、丁、戊五點上，哪一點的動能最大？



(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁 (E)戊

- (C) 2. 假設萬有引力係與兩物體間距離一次方成反比。若以 R 及 T 分別代表行星繞日作圓周運動時之軌道半徑及週期，則下列各種比值中何者對所有行星而言均相同？

(A) $\frac{T^2}{R^3}$ (B) $\frac{T^3}{R^2}$ (C) $\frac{T}{R}$ (D) $\frac{T}{R^2}$ (E) $\frac{T^2}{R}$

概念 行星或人造物繞轉運動

- (B) 3. 我國在 2004 年 5 月發射的福（華）衛二號人造衛星，屬低軌道衛星，每日繞地球運行十多圈，兩次經過臺灣海峽上空。下列有關該衛星在軌道運行的敘述，何者錯誤？

73% 答對率 94 學測

(A)該衛星繞地球轉速比地球自轉快 (B)該衛星利用太陽能繞地球運行，與地心引力無關 (C)由於低軌道運行，該衛星可能受有空氣阻力的作用 (D)運行多年後，該衛星的軌道有可能愈來愈接近地面

- * (A D) 4. 若地球的密度加倍，半徑不變，則繞轉地球的衛星在原來軌道上的：
E (A)軌道速率將增加 (B)運轉週期將增加 (C)自轉週期將減小 (D)所受引力將增加 (E)向心加速度量值將增加

- * (A C) 5. 繞地球作圓周運動的人造衛星 A 與 B，其軌道速率比為 1：2，質量比為 2：1，則 A 與 B：
D (A)軌道半徑比 4：1 (B)週期比 16：1 (C)向心加速度之量值比 1：16 (D)向心力之量值比 1：8 (E)角速率比 1：4

- (B) 6. 人造衛星在距地表高度為 $2R$ 的圓周軌道上運行 (R 為地球半徑)。已知地表的重力加速度為 g ，則人造衛星的速率為何？(以 R 和 g 表示)

(A) $\sqrt{2gR}$ (B) $\sqrt{\frac{gR}{3}}$ (C) $2\sqrt{gR}$ (D) $\sqrt{3gR}$ (E) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$

- (E) 7. 一太空船環繞火星作圓周運動，測得該太空船之轉動週期為 T ，則火星之平均密度為何？

(A) $\frac{2\pi}{GT}$ (B) $\frac{2\pi G}{T^2}$ (C) $\frac{4\pi G}{T^2}$ (D) GT (E) $\frac{3\pi}{GT^2}$

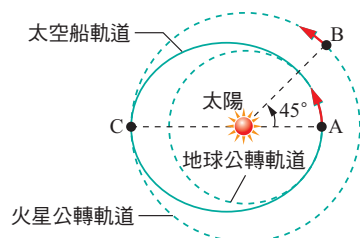
- (D) 8. 有一人造衛星的週期為 T ，當此衛星移到新的軌道上時，其向心力變為原來的 $\frac{1}{16}$ ，則此衛星的週期變為幾倍？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

- (A) 9. 假設地球繞日軌道為圓形，且公轉之半徑為 R 、速率為 v ；地球半徑為 r 、地表重力場強度為 g ，由此知地球與太陽兩者質量之比值為何？

(A) $\frac{gr^2}{Rv^2}$ (B) $\frac{Rr^2}{v^2g}$ (C) $\frac{v^2}{rg}$ (D) $\frac{rg}{v^2}$ (E) 條件不足，無法計算

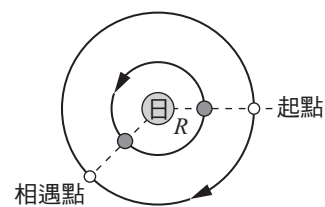
- (D) 10. 2020 年 7 月有 3 艘太空船從地球出發前往火星，此時地球在 A 處、火星在 B 處。太空船由火箭推動進入橢圓軌道後在重力下航行，如圖所示，直到要與火星會合時，再進入繞行火星的軌道，最後於 C 處會合。已知火星公轉週期為地球公轉週期的 1.9 倍，則太空船由地球出發到與火星會合，所需時間最接近下列何者？ **35% 答對率** (110 學測)



- (A) 600 天 (B) 360 天 (C) 300 天 (D) 260 天 (E) 180 天

- (B) 11. 繞日公轉週期分別為 T_1 與 T_2 ($T_1 > T_2$) 之兩行星，若兩行星運行的方向相反，則連續兩次最接近之時間間隔為何？

(A) $\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ (B) $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ (C) $\frac{T_1 + T_2}{2}$ (D) $\frac{T_1 - T_2}{2}$
(E) $\frac{T_1 T_2}{2(T_1 - T_2)}$

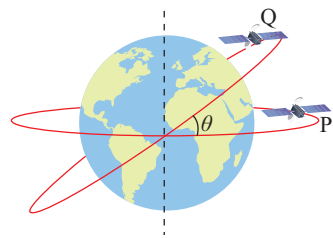


概念 同步衛星

- (D) 12. 同步衛星的加速度為 a_1 、地面附近衛星的加速度為 a_2 、地球赤道上物體隨地球自轉的向心加速度為 a_3 ，則三者有下列哪個關係？

(A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_3 > a_2 > a_1$ (C) $a_2 > a_3 > a_1$
(D) $a_2 > a_1 > a_3$ (E) $a_1 = a_2 > a_3$

- * (A E) 13. 地球外現有兩個人造衛星 P 與 Q 均以半徑為 R 的圓形軌道繞地球運行，衛星 P 的軌道平面與地球的赤道面重合，而衛星 Q 的軌道平面與赤道面存在一傾斜角，如圖所示。下列的敘述中，哪些是正確的？



(A) 人造衛星 P 與 Q 的運行速率相同 (B) 人造衛星 P 的週期比人造衛星 Q 大 (C) 人造衛星 P 與 Q 的向心力量值相同 (D) 當 R 距離適當時，人造衛星 P 與 Q 均可為同步衛星 (E) 人造衛星 P 與 Q 滿足克卜勒行星運動第三定律

- (B) 14. 假設有兩人造衛星甲與乙，分別繞地球與月球運行，且均為同步衛星，則其甲與乙運行的軌道半徑比值為何？ $(\alpha = \frac{M_{\text{地}}}{M_{\text{月}}}, \beta = \frac{T_{\text{地}}}{T_{\text{月}}})$

(A) $\alpha\beta$ (B) $\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$ (C) $\sqrt[3]{\alpha\beta^3}$ (D) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}}$ (E) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}$

概念 視重

- (A) 15. 地球表面之重力加速度為 g 、地球半徑為 R ，一太空船繞地球運行，軌道半徑為 $3R$ ，則船內質量 m 的太空人，其視重為何？

(A) 0 (B) mg (C) $\frac{1}{2}mg$ (D) $\frac{1}{4}mg$ (E) $\frac{1}{8}mg$

- (B) 16. 赤道上的一靜止物體，其實會環繞地球自轉軸作等速圓周運動。假定赤道上有一靜止物體，其重力為 W 、向心力量為 F_c ，且地面對該物的正向力量為 N ，則下列關係式何者正確？

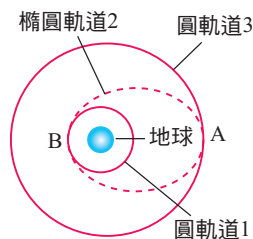
(A) $F_c = W + N$ (B) $F_c = W - N$ (C) $F_c > W + N$
(D) $F_c > W - N$ (E) $F_c + W + N = 0$

17. 設地球半徑為 R ，某太空船在軌道半徑 $2R$ 的圓形軌道上環繞地球運動，船內太空人在地表時質量為 60 公斤，則在太空船內：

(1) 太空人所受地球引力為 15 kgw。
(2) 太空人的向心力為 15 kgw。
(3) 太空人的視重為 0 kgw。

進階題

- *(A D) 1. 當要發射衛星與到特定軌道，需先將衛星發射至較接近地球的圓軌道 1。然後點火，使其沿橢圓軌道 2 運行，在 A 點時再次點火，將衛星送到太空站的圓軌道 3 進行結合。軌道 2 與軌道 3 相切於軌道 2 的遠地點 A，軌道 2 與軌道 1 相切於軌道 2 的近地點 B。設太空梭在圓軌道 1 的速率為 v_1 ，在圓軌道 3 的速率為 v_3 ，而在橢圓軌道遠地點 A 及近地點 B 的速率分別為 v_A 及 v_B ，則下列選項哪些正確？



(A) $v_1 > v_3$ (B) $v_B = v_1$ (C) $v_3 = v_A$ (D) $v_B > v_A$ (E) $v_1 > v_A$

- *(A C) 2. 某生查得太陽系中行星的基本資料如下表所示。

行星名稱	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
與太陽的平均距離	0.39	0.72	1.0	1.52	5.20	9.57	19.17	30.18
質量	0.055	0.82	1.0	0.11	317.8	95.2	14.5	17.1
公轉週期	0.241	0.615	1.0	1.88	11.9	29.4	83.7	164
自轉週期	58.8	244	1.0	1.03	0.415	0.445	0.720	0.673

表中的平均距離、質量、公轉週期、自轉週期等數值，皆是以地球的值設為 1 時的比值。假設這些行星皆繞太陽作等速率圓周運動，則下列有關表中行星數據的觀察或推論，哪些正確？

17% 全對率 (112 分科)

- (A) 離太陽越遠的行星，其公轉角速率越小
 (B) 離太陽越遠的行星，其自轉角速率越小
 (C) 離太陽越遠的行星，其繞日運行的速率越小
 (D) 離太陽越遠的行星，其繞日的角動量值越小
 (E) 離太陽越遠的行星，其所受太陽的重力量值越小

3. 一質量為 m 之行星，繞質量為 M 之太陽作圓軌道運行，其軌道半徑為 r ，則行星與太陽的連線之面積速率為何？（萬有引力常數以 G 表示）

答： $\frac{1}{2}\sqrt{GMr}$

- *(B C) 4. 若萬有引力變成與距離三次方成反比，而繞地球運轉的衛星軌道增大為原來的 2 倍，則：
- (A) 速率為原先的 8 倍 (B) 速率為原先的 $\frac{1}{2}$ 倍 (C) 加速度為原先的 $\frac{1}{8}$ 倍 (D) 軌道上的重力場強度為原先的 $\frac{1}{4}$ 倍 (E) 克卜勒行星運動第三定律變為 $\frac{T}{r^2} = \text{常數}$

- * (A B) 5. 將重力常數當作已知，則從下面哪些選項中的兩個數據，就可以估計出地球的質量？
C E

9% 全對率 96 指考

(A) 地球與同步衛星間的距離，地球的自轉週期 (B) 人造衛星的運動速率，人造衛星的週期 (C) 人造衛星與地球間的距離，人造衛星的週期 (D) 地球繞太陽運轉的週期，地球與太陽間的距離 (E) 月球繞地球運轉的週期，月球與地球間的距離

- (C) 6. 有一行星繞行某一恆星以正圓軌道運行，軌道半徑為恆星半徑的 1000 倍。若該恆星的半徑因演化而增加為原來的 2 倍，而此時行星的正圓軌道半徑也因故變為原來的 $\frac{1}{2}$ ，但兩者的質量皆保持不變，則下列敘述何者正確？

(A) 行星的繞行週期變為原來的 $\frac{1}{4}$ (B) 行星的繞行週期變為原來的 $2\sqrt{2}$ 倍

(C) 恆星的表面重力加速度變為原來的 $\frac{1}{4}$ (D) 行星所受恆星的重力變為原來的 $\frac{1}{4}$

(E) 恆星所受行星的重力變為原來的 $\frac{1}{2}$

- (E) 7. 依據天文學預測，當中子星是恆星演化過程的一種可能結果，它的密度很大。

現有一中子星，觀測到它的自轉週期為 $T = \frac{1}{30}$ s。問該中子星的最小密度應是多少 kg/m^3 才能維持該星體的穩定，不致因自轉而瓦解？（計算時星體可視為均勻球體，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ ）

(A) 9.3×10^4 (B) 7.6×10^8 (C) 5.4×10^{10} (D) 3.2×10^{12} (E) 1.3×10^{14}

8. 設地球的半徑為 R ，在地表之重力加速度為 g ，則：

- (1) 當軌道為圓形的人造衛星距地表高度等於地球半徑時，此人造衛星之週期為何？
- (2) 當此人造衛星在進行方向作極短時間加速噴射，結果軌道變為橢圓，其週期亦發生變化，那麼在新軌道上，距離地表最近點的高度等於地球之半徑，距離地表最遠點的高度等於地球直徑的 3.5 倍，求新週期是原圓軌道運動週期的幾倍？

答：(1) $4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ ；(2) $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

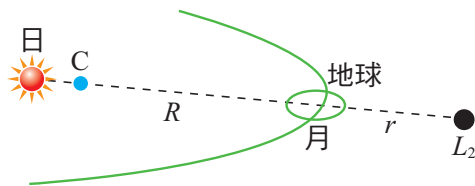
9. ~ 11. 題為題組

2021 年 12 月發射的 James Webb 太空望遠鏡 (JWST)

主要用於紅外線天文學的研究，是目前太空中最強大的望遠鏡，它的溫度必須保持低於 50 K，才可在不受其他熱輻射源的干擾下觀察微弱的紅外線信號。JWST 的位

置靠近日—地系統的拉格朗日點 L_2 ，此為日—地連心線上的定點，位於地球公轉軌道外側，如圖所示，其中實線的圓弧與圓分別代表地球與月球的公轉軌道。已知在 L_2 點的小物體，受到日—地系統的重力，可與地球同步繞日—地系統的質心公轉。

假設只考慮來自日、地的重力，日—地的距離近似為定值 R ，日、地的質量分別為 M 、 m ，地心到 L_2 的距離為 r ，重力常數為 G ，日—地系統繞其質心 C 轉動的角速率為 ω 。注意：只有日—地系統的質心 C 可視為靜止，日、地與 L_2 處的小物體均繞 C 以角速率 ω 做圓周運動。



(B) 9. 已知地心到 C 的距離為 $\frac{MR}{(M+m)}$ ，則角速率的平方 ω^2 為下列何者？

(A) $\omega^2 = G \frac{M+m}{r^3}$ (B) $\omega^2 = G \frac{M+m}{R^3}$ (C) $\omega^2 = G \frac{m}{r^3}$ (D) $\omega^2 = G \frac{m}{R^3}$

(E) $\omega^2 = G \frac{M}{r^3}$

67% 答對率 111 分科

(A) 10. 承上題，地心到 L_2 的距離 r 滿足下列何者？

38% 答對率 111 分科

(A) $G \left[\frac{M}{(R+r)^2} + \frac{m}{r^2} \right] = \left(\frac{MR}{M+m} + r \right) \omega^2$ (B) $G \left[\frac{M}{(R+r)^2} + \frac{m}{r^2} \right] = R \omega^2$

(C) $G \left[\frac{M}{(R+r)^2} + \frac{m}{r^2} \right] = (R+r) \omega^2$ (D) $G \left[\frac{M}{(R+r)^2} + \frac{m}{r^2} \right] = r \omega^2$

(E) $G \left[\frac{M}{(R+r)^2} + \frac{m}{r^2} \right] = \left(\frac{mR}{M+m} + r \right) \omega^2$

11. 將上題結果中的 r 改為 $-r$ ，可看出在日—地連心線上，位於地球公轉軌道內側、距離地心為 r 處，尚有一個可與地球同步繞日公轉的定點，稱為拉格朗日點 L_1 。依題幹所述，為了避免其他熱輻射源的干擾，以觀察廣闊範圍內來自宇宙各處的微弱紅外線信號，JWST 的位置選擇 L_2 ，比起 L_1 有何優點？試舉出二項優點。

答：見解析



(解析見解答本)

福衛七號

福爾摩沙衛星七號計畫（簡稱福衛七號計畫）為臺美雙方大型國際合作案，本計畫是福衛三號的後續計畫，任務目標為建立一高可靠度操作型氣象衛星系統，延續福衛三號計畫之掩星氣象觀測任務，於低傾角佈署 6 枚任務衛星，以密集提供中低緯度的氣象觀測資料。

福衛七號衛星上搭載全球衛星導航系統無線電訊號接收器，可接收美國的 GPS 及俄國的 GLONASS 全球衛星導航系統（GNSS）訊號，藉由量測無線電掩星訊號，可推導出大氣層壓力、溫度、和溼度等大氣參數，與電離層的電子濃度。

福衛七號星系有六枚衛星，初步發射上太空時高度約為 720 公里，在佈署完成後，高度下降至 550 公里，傾角 24 度，繞行地球一圈約 97 分鐘；6 枚衛星佈署完成後，可提供在南北緯 50 度間每日約 4,000 筆資料，在臺灣地區附近的資料量約是福衛三號的 3 ~ 4 倍，大幅增加包含臺灣在內的低緯度地區氣象資料。觀測資料將提供交通部中央氣象局納入數值預報系統，提升國內氣象預報準確度及劇烈天氣（颱風路徑及降雨）預測準確度。每天平均可提供 4000 點大氣資料，對於天氣預報、氣候觀測、太空天氣監控有很大的助益。

（國家太空中心福衛七號計畫簡介）

<https://www.nspo.narl.org.tw/tw2015/projects/FORMOSAT-7/program-description.html>

註：無線電掩星訊號是一種測量行星大氣層物理屬性的遙感技術。

(D E) 1. 有關福衛七號衛星的敘述，哪些正確？（多選）

- (A)福衛七號衛星是 GPS 衛星系統之一 (B)福衛七號衛星繞地球運轉時，不考慮地球大氣影響下，總共受 2 個力作用，分別為地球引力與向心力 (C)福衛七號星系由高度 720 公里下降至 550 公里時，所受之萬有引力變小 (D)福衛七號星系由高度 720 公里下降至 550 公里時，運轉速率變大 (E)福衛七號星系由高度 720 公里下降至 550 公里時，運轉週期變小

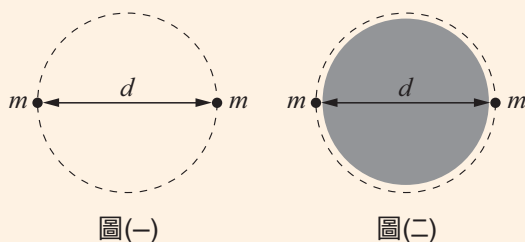
2. 地球半徑約為 6400 km，若福衛七號衛星在地表附近所受之萬有引力為 F ，在佈署完成後所受之萬有引力 F' 約為 0.85 F 。

(E) 3. 承上題，剛發射到太空的衛星軌道週期和部署完成後的衛星軌道週期約差多少分鐘？

- (A) 19 (B) 13 (C) 11 (D) 8 (E) 3

雙星系統

如下圖(-)所示，今考慮一個孤立雙星系統，兩星體的個別質量皆為 m ，且彼此的間距為 d 。若這兩星體對它們的共同質心（兩星間距之中點）作等速圓周運動，且其彼此之間沒有其他物質的存在，以 G 表示萬有引力常數，則理論上兩星體其圓周週期應為 T_0 ，但實際觀察時的週期 T 與 T_0 有差距，因此有科學家提出兩星體之間應該有均勻分布的「暗物質 M 」對兩星體產生萬有引力作用，其作用力大小可視為將 M 集中在兩星體的共同質心處再對星體產生引力，如下圖(二)所示。



(B C) 4. 若兩星體之間無「暗物質 M 」，則下列敘述哪些為真？

(A) 兩星體的運轉週期 $T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{Gm}}$ (B) 兩星體的運轉週期 $T_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 d^3}{Gm}}$

(C) 若兩星體的間距 d 不變，同時變小兩星體的質量 m ，將會使雙星系統運轉週期變大
 (D) 若兩星體的間距 d 不變，同時變小兩星體的質量 m ，將會使雙星系統運轉週期變小
 (E) 若兩星體的間距 d 不變，同時變小兩星體的質量 m ，雙星系統運轉週期不變

5. 考慮兩星體之間有「暗物質 M 」對兩星體產生萬有引力作用時，兩星體繞轉的圓周週期變為 $\frac{10}{11} T_0$ ，則均勻分布在兩星體之間的暗物質質量 $M = \underline{\frac{21}{400}} m$ 。