1

測量與不確定度

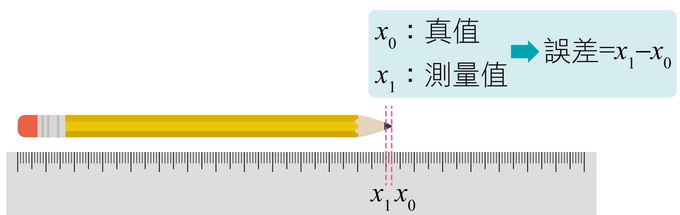
1-1 簡介不確定度

教學策略

一、從誤差到不確定度

1. 誤差：過往分析實驗數據時，多採用測量值與真值的差值，也就是誤差 (error)，來標定測量值的可信度。如下圖所示，誤差的定義為

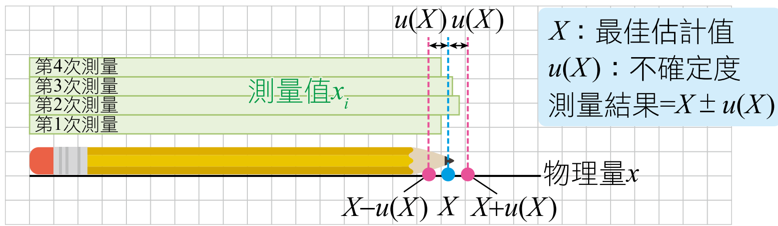
$$誤差＝測量值－真值$$



2. 真值：實際情形下，真值是未知的，無法由實驗數據推得。我們可以藉由測量數據，得出某一物理量的測量平均值，然而無從得知其真值；既然無法得知真值，故誤差也無從定義，更無法有效估算。
3. 不確定度：原先國際上對於誤差分析並無共識，直到 1993 年，才由國際標準組織 ISO 聯合其他國際組織，以不確定度 (uncertainty) 的觀念取代誤差，並建立量測不確定度的評估與表示規則，通稱不確定度國際標準 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO-GUM)。其後不確定度的分析逐漸為各界接受，成為比對分析量測結果的國際標準。
4. 測量結果的表示法：根據 ISO-GUM 的不確定度評估與表示規則，測量某物理量 x 時，在取得多次的測量數據後，可將測量結果表示為（如下頁圖）

$$測量結果＝最佳估計值 \pm 標準不確定度＝ X \pm u(X)$$

上式中 $u(X)$ 為標準不確定度，簡稱不確定度，一般至多保留兩位有效數字，而最佳估計值 X 的有效數字，則與不確定度的末位對齊。



5. 誤差與不確定度的比較：誤差與不確定度的差異如下表

物理量	誤差	不確定度
意涵	測量值與真值的差	測量值的分散程度
數值	正負值皆有可能	恆為正值
符號	無規定	以 $u(X)$ 表示
分類	系統誤差、隨機誤差	A 類評估和 B 類評估

二、不確定度的 A 類評估

1. 不確定度的分類：根據國際標準，不確定度分為 A、B 兩類。

(1)A 類評估：依據多次測量數據，進行統計分析而來。

(2)B 類評估：依其他資訊來源，例如材料或儀器特性、製造商提供的規格說明、過往類似數據的統計分析、數據隨附的不確定度、校正證書等等研判而來；亦即 B 類評估的不確定度，是直接引用已知數據，而非測量者進行統計分析所得來的。

2. 平均值與標準差 (standard deviation)：對某物理量 x 進行 n 次測量，得到測量數據 x_1，x_2，⋯，x_n。由測量數據可得平均值 $\bar{x}$ 與標準差 s 分別為

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

（可就《知識延長線》中的母體標準差以及樣本標準差做簡單說明，可適時消除學生對於計算標準差時，為何不是除以樣本數 n，而是除以 $n-1$ 的疑慮。因為統計學中關於標準差的分類，並非本章課程的學習重點，因此不必列為評量範圍。）

3. 標準不確定度的定義：根據 ISO-GUM，標準不確定度 $u(X)$ 的定義為

$$u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

計算不確定度時，原則上採用無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時，則採用捨去法。

4. 最佳估計值：將平均值 $\overline{x}$ 的計算結果，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X。

5. A 類評估的計算流程：

(1)求出平均值 $\overline{x}$ 與標準差 s：將測量數據 x_i 代入平均值與標準差公式，分別算出 $\overline{x}$ 與 s，可暫時不需擔心保留位數，將計算結果寫下即可。

（此時可適時說明《小百科》中，關於有效數字的判定法則以及採用科學記號的用意。）

(2)求出不確定度 $u(X)$：將 $u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}$ 的計算結果，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時則捨去。

(3)求出最佳估計值 X：將平均值 $\overline{x}$ 的計算結果，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(4)寫出測量結果：測量結果＝最佳估計值 ± 不確定度＝ $X \pm u(X)$。

step 1	step 2	step 3	step 4
平均值 $\overline{x}$ 標準差 s →	不確定度 $u(X)$ →	最佳估計值 X →	測量結果 = $X \pm u(X)$
$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$	$u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}$ 無條件進位保留 2 位有效數字，逢零捨去	$\overline{x}$ 四捨五入保留到與 $u(X)$ 末位一致	例如： (5.24 ± 0.36) kg

6. A 類評估的實例說明：例如對同 1 枝鉛筆的長度進行 4 次測量，得到測量數據分別為 15.15 cm，15.15 cm，15.20 cm，15.30 cm。

(1)平均值與標準差：由各測量數據 x_i 與測量次數 n，得到數據的平均值與標準差分別為

$$\bar{x}=\frac{15.15+15.15+15.20+15.30}{4}=15.20(\text{cm})$$

$$s=\sqrt{\frac{(15.15-15.20)^2+(15.15-15.20)^2+(15.20-15.20)^2+(15.30-15.20)^2}{4-1}}$$

$$=0.07071\cdots(\text{cm})$$

(2)不確定度：將標準差 s 與測量次數 $n=4$ 代入不確定度公式，

$$u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{0.07071\cdots}{\sqrt{4}}=0.03535\cdots(\text{cm})$$

將 $u(X)$ 以無條件進位法，並保留 2 位有效數字，得 $u(X)=0.036$ cm。

(3)最佳估計值：將平均值 $\bar{x}$ 以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致，故最佳估計值 $X=15.200$ cm。

(4)測量結果：測量結果＝最佳估計值 ± 不確定度＝ $X \pm u(X)$，即測量結果＝ (15.200 ± 0.036) cm。（測量鉛筆的長度時，一般使用的直尺最小刻度為公釐，最後記錄測量值時，可加入一位估計值，例如 15.15 cm、15.20 cm 等測量值。由上述 A 類評估的計算標準，測量結果中的最佳估計值以及不確定度，其最末位數並不一定是測量工具的最小刻度，也不一定是最小刻度的下一位。）

7. 測量值與測量結果的關係：當測量結果表示為 $X \pm u(X)$ 時，並非代表所有測量值都介於 $X-u(X)$ 與 $X+u(X)$ 之間。例如鉛筆長度的測量結果＝ (15.200 ± 0.036) cm，但有些測量值比 15.236 cm 還大，有些測量值比 15.164 cm 還小，並非所有的測量數據都會介於兩者之間。

（如果數據量夠多且數據屬常態分布，正負一個標準差內的數據範圍，會占所有數據的 68%，因此測量結果有相當大的機率會落在 $X-u(X)$ 與 $X+u(X)$ 之間；但是像課本舉的例子測量身高、範例 1-1 測週期，都只有測量 4 次，以 4 次算出來的標準差，跟大數據的標準差，情況大不相同，這牽涉到統計學的分析方法，由於其技術性細節略為繁瑣，所以在此略過不談。）

8. 不確定度與測量的精確性：不確定度的大小代表測量值的分散程度，因此不確定度愈小，表示測量的精確性愈高，也可以說測量結果的品質較好。例如兩種不同的測量方法，得

到鉛筆長度的測量結果分別為 (15.200 ± 0.036) cm、(15.200 ± 0.014) cm，雖然兩種測量結果的「值」都是 15.200 cm，但後者測量結果的「質」確實優於前者，亦即前者具有較多的不確定性。

9. 影響不確定度的因素：要確切理解不確定度 $u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}$ 背後的統計意義並不容易，但概略來說，不確定度 $u(X)$ 主要與兩個因素有關，即測量方法及測量次數。測量方法的設計會影響標準差 s，但即便測量的標準差相同，只要增加測量次數 n，也可以降低不確定度。

參考補充／計算標準差時為何須取測量偏差值的平方

由於測量時免不了隨機變動，因此各個數據 x_i 不會恰好等於平均值 $\bar{x}$，而會有所偏差 $\Delta_i=x_i-\bar{x}$。有些偏差為正，有些偏差為負，若是將所有偏差相加，其和恰好為零：

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)-n\bar{x}=0$$

因此若要描述偏離最佳估計值的程度，必須將各個數據的偏差平方相加，才可避免正負偏差相消的困境：

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\geq 0$$

當利用統計學來分析測量數據時，其偏離最佳估計值的程度即可用標準差 s 來表示。

三、不確定度的 B 類評估

1. B 類評估：除了測量統計分析外，藉由其他資訊來評估不確定度，即是 B 類評估，包括儀器製造商的規格說明、過往類似數據的統計分析、數據隨附的不確定度等等。
2. 精密度 (accuracy)、精準度 (precision)、精度等名詞：過往常見的準確度、精密度、精度等，皆為與誤差有關的概念，且容易與不確定度混淆，應避免使用這些名詞解說不確定度。
3. 儀器最小刻度 (minimum scale) 與 B 類不確定度的關係：一般儀器的最小刻度，可當作 B 類評估的不確定度來源；亦即取儀器最小刻度的 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 做為 B 類評估的不確定度，如下

$$\text{B 類不確定度}=\frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}\approx 0.2887\times\text{最小刻度}$$

故測量結果可表示為

$$\text{測量結果}=\text{最佳估計值}\pm\text{不確定度}=\text{儀器顯示的讀數}\pm\frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$$

4. B 類評估的計算流程：

(1)求出不確定度 $u(X)$：依據儀器最小刻度、規格說明、過往數據分析、數據隨附資料等等估算，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時，則採用捨去法。

(2)求出最佳估計值 X：將測量值（儀器顯示的讀數）以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(3)寫出測量結果：測量結果＝最佳估計值 ± 不確定度＝ $X \pm u(X)$。

step 1：不確定度 $u(X)$ → step 2：最佳估計值 X → step 3：測量結果 = $X \pm u(X)$

step 1：$u(X) = \dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$

無條件進位保留 2 位有效數字，逢零捨去

step 2：儀器顯示讀數以四捨五入保留到與 $u(X)$ 末位一致

step 3：例如：(8.320 ± 0.029) cm

5. B 類評估的實例說明：例如小龍以最小刻度為 0.1 kg 的電子體重計量體重，總共量了 4 次，體重計上都顯示一模一樣的數值 62.3 kg；此時若由 A 類評估的方法，所得標準不確定度為 0，因此需進行 B 類評估。

(1)不確定度：$\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{0.1\ \text{kg}}{2\sqrt{3}} \approx 0.02887$ kg，以無條件進位法保留 2 位有效數字，可得 $u(X) = 0.029$ kg。

(2)最佳估計值：最佳估計值必須與不確定度的末位一致，因此將測量值 62.3 kg 再補二位，即 $X = 62.300$ kg。

(3)測量結果：測量結果＝ $X \pm u(X) = (62.300 \pm 0.029)$ kg。

（一般體重計上顯示的讀數單位為 kg，而物理上重量的單位為 kgw，由於地表上物體的重量正比於質量，亦即 1 kg 的物體其重量為 1 kgw，因此這裡沿用體重計的讀數單位 kg，實際上也代表 kgw。）

想一想解答

1. 林同學和王同學測量同一物體的長度各 5 次，數據如下（單位為公釐）：
林同學：48、48、50、52、52　　王同學：46、50、50、50、54
兩人測得數據的平均值都是 50 公釐，但兩人的測量結果一定相同嗎？ (P.8)

答 不一定。測量結果＝最佳估計值 ± 不確定度，兩人測得數據的平均值相同，僅表示最佳估計值相同，但不確定度不一定會相同。經由計算：
林同學測量結果＝ (50.00 ± 0.90) mm；王同學測量結果＝ (50.0 ± 1.3) mm。

迷思概念釐清

1. 測量的不確定度，可能是正值，也有可能是負值。

答 錯。不論是 A 類評估或是 B 類評估，測量的不確定度皆為正值。

2. 實驗誤差，就是不確定度國際標準 ISO-GUM 所提到的不確定度。

答 錯。實驗誤差其實無法定義，但 ISO-GUM 有一套建立量測不確定度的評估與表示規則，兩者並不相同。

3. 測量結果的最佳估計值，等於所有測量數據的平均值。

答 錯。將平均值以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X，因此最佳估計值與平均值不一定相等。

4. 對某一個物理量進行多次測量，所得到的不確定度會小於標準差。

答 對。不確定度 $u(X)$ 與標準差 s 的關係為 $u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}$，因為測量次數 $n>1$，所以 $u(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}<s$。

5. 測量結果的不確定度，其最末位數須等於測量工具最小刻度的下一位。

答 錯。測量結果中的最佳估計值以及不確定度，其最末位數並不一定是測量工具的最小刻度，也不一定是最小刻度的下一位。

6. 以儀器對某一個物理量進行多次測量，若所得數據皆相同，則測量的不確定度為 0。

答 錯。雖然由 A 類評估的方法，所得不確定度為 0，但若進行 B 類評估時，則不確定度就不是 0。

1-2 不確定度的組合

教學策略

一、兩類不確定度的組合

1. A 類與 B 類不確定度的組合：若測量時同時存在 A 類與 B 類的不確定度，且其不確定度分別為 u_A、u_B，根據 ISO-GUM 評估準則，其組合不確定度 u 可表示為

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

二、物理量加減後的不確定度

1. 物理量相加後的不確定度：若獨立測量物理量 x、y 後，相加所得的物理量為 $z = x + y$。

(1)不確定度：根據 ISO-GUM 評估準則，不確定度 $u(Z)$ 可表示為

$$u(Z) = \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}$$

將 $u(Z)$ 的計算結果以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時，則採用捨去法。

(2)最佳估計值：最佳估計值 $Z = X + Y$，其有效位數的取法，需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(3)測量結果：測量結果 $= Z \pm u(Z) = (X + Y) \pm \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}$。

2. 相加後不確定度的實例說明：例如前述小龍以最小刻度 0.1 kg 的電子體重計量體重，其體重的測量結果為 $X \pm u(X) = (62.300 \pm 0.029)$ kg；若小騰也以此電子體重計量體重，得到體重的測量結果為 $Y \pm u(Y) = (58.700 \pm 0.029)$ kg。若想要求得小龍和小騰的總質量。

(1)不確定度：$u(X) = u(Y) = 0.029$ kg，不確定度 $u(Z)$ 可表示為

$$u(Z) = \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2} = \sqrt{0.029^2 + 0.029^2} = 0.04101\cdots(\text{kg}) \approx 0.041(\text{kg})$$

(2)最佳估計值：$X = 62.300$ kg、$Y = 58.700$ kg，最佳估計值為

$$Z = X + Y = 62.300 + 58.700 = 121.000(\text{kg})$$

(3)測量結果：測量結果 $= Z \pm u(Z) = (121.000 \pm 0.041)$ kg。

3. 物理量相減後的不確定度：若獨立測量物理量 x、y 後，相減所得的物理量為 $z = x - y$。

(1)不確定度：根據 ISO-GUM 評估準則，不確定度 $u(Z)$ 可表示為

$$u(Z) = \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}$$

將 $u(Z)$ 的計算結果以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時，則採用捨去法。

(2)最佳估計值：最佳估計值 $Z = X - Y$，其有效位數的取法，需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(3)測量結果：測量結果 $= Z \pm u(Z) = (X - Y) \pm \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}$。

參考補充／ 測量 10 枚硬幣的總厚度與 1 枚硬幣的厚度到底有什麼關係？

假設測量 10 枚硬幣厚度所得的測量結果為 $X \pm u(X)$，可不可以將 1 枚硬幣的厚度表示為 $\frac{1}{10}X \pm \frac{1}{10}u(X)$ 呢？嚴格來說，這是不行的。

首先必須定義新的隨機變數 $Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10} = \frac{X}{10}$，其中 X_1，X_2，⋯，X_{10} 為各個硬幣厚度的最佳估計值，而 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ 為這 10 枚硬幣的總厚度，此時 $u(Z) = \frac{1}{10}u(X)$ 的關係式才可成立。因為在沒有定義新的隨機變數之前，雖然測得 10 枚硬幣的總厚度，也不能做為 10 枚個別硬幣厚度的加總，而且還必須假設 X_1，X_2，⋯，X_{10} 的機率分布都相同，才可以用這樣的測量方式去近似 1 枚硬幣的厚度；若是這 10 枚硬幣是不同種類型的，雖然總厚度還是會遵循特定的機率分布，但此時除以 10 之後的隨機變數，就沒有太大的意義。

如果你很嚴格遵循上述方式來定義這些隨機變數，仍須注意 Z 只能代表這 10 枚硬幣中平均 1 枚硬幣的厚度，即便這些硬幣看起來都一樣，但彼此的厚度仍存在些微差距，所以 $Z \pm u(Z)$ 並不能代表每 1 枚硬幣的厚度。在實務上若想知道某 1 枚硬幣的厚度，最好還是對該枚硬幣做直接測量。

三、物理量乘除後的不確定度

1. 相對標準不確定度：考慮物理量相乘 $z = xy$ 或相除 $z = \frac{x}{y}$ 的情形，由於 $u(X)$、$u(Y)$ 的因次不見得相同，此時可引入相對標準不確定度 (relative standard uncertainty) 的概念，其定義為不確定度除以最佳估計值的絕對值：

$$u_r(X) = \frac{u(X)}{|X|}，u_r(Y) = \frac{u(Y)}{|Y|}$$

上式中最佳估計值 X、Y 出現絕對值，是為了使相對不確定度 $u_r(X)$、$u_r(Y)$ 恆為正值。

2. 相對不確定度的組合：物理量相乘或相除後，其相對不確定度的組合公式為

$$u_r(Z)=\sqrt{u_r(X)^2+u_r(Y)^2}\Rightarrow\frac{u(Z)}{|Z|}=\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}$$

3. 物理量相乘後的不確定度：若獨立測量物理量 x、y 後，相乘所得的物理量為 $z=xy$。

(1)不確定度：根據相對不確定度的組合公式，可得不確定度 $u(Z)$ 為

$$u(Z)=|Z|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}=|XY|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}$$

將 $u(Z)$ 的計算結果以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時則捨去。

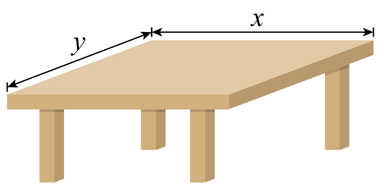
(2)最佳估計值：最佳估計值 $Z=XY$，其有效位數的取法，需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(3)測量結果：

測量結果 $=Z\pm u(Z)=XY\pm|XY|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}$。

4. 相乘後不確定度的實例說明：以桌面的面積測量為例，假如桌面長度 x 與寬度 y 的測量結果如下表。

物理量	最佳估計值	不確定度	測量結果表示
長度 x	$X=1.0050$ m	$u(X)=0.0060$ m	(1.0050 ± 0.0060) m
寬度 y	$Y=1.2500$ m	$u(Y)=0.0050$ m	(1.2500 ± 0.0050) m



(1)不確定度：依不確定度組合公式

$$u(Z)=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}$$
$$=\sqrt{1.2500^2\times0.0060^2+1.0050^2\times0.0050^2}=0.009027\cdots(\mathrm{m}^2)\approx0.0091(\mathrm{m}^2)$$。

(2)最佳估計值：$Z=XY=1.0050\times1.2500=1.25625000(\mathrm{m}^2)\approx1.2563(\mathrm{m}^2)$。

(3)測量結果：測量結果 $=Z\pm u(Z)=(1.2563\pm0.0091)\ \mathrm{m}^2$。

5. 物理量相除後的不確定度：若獨立測量物理量 x、y 後，相除所得的物理量為 $z=\frac{x}{y}$。

(1)不確定度：根據相對不確定度的組合公式，可得不確定度 $u(Z)$ 為

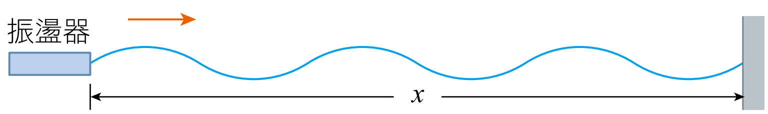
$$u(Z)=|Z|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}=\left|\frac{X}{Y}\right|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{\frac{u(X)^2}{Y^2}+\frac{X^2u(Y)^2}{Y^4}}$$

將 $u(Z)$ 的計算結果以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；但 2 位有效數字的下一位數為零時則捨去。

(2)最佳估計值：最佳估計值 $Z=\dfrac{X}{Y}$，其有效位數的取法，需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

(3)測量結果：測量結果 $=Z\pm u(Z)=\dfrac{X}{Y}\pm\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$。

6. 相除後不確定度的實例說明：以測量繩波的波速為例，假如振盪器與牆壁距離 x、繩波傳遞時間 t 的測量結果如下表。



物理量	最佳估計值	不確定度	測量結果表示
距離 x	$X=8.425$ m	$u(X)=0.012$ m	(8.425 ± 0.012) m
時間 t	$T=1.25$ s	$u(T)=0.10$ s	(1.25 ± 0.10) s

(1)不確定度：依不確定度組合公式

$$u(Z)=\sqrt{\frac{u(X)^2}{T^2}+\frac{X^2u(T)^2}{T^4}}=\sqrt{\frac{0.012^2}{1.25^2}+\frac{8.425^2\times0.10^2}{1.25^4}}=0.539\cdots(\text{m/s})\approx0.54(\text{m/s})$$

(2)最佳估計值：$Z=\dfrac{X}{T}=\dfrac{8.425}{1.25}=6.74(\text{m/s})$。

(3)測量結果：測量結果 $=Z\pm u(Z)=(6.74\pm0.54)$ m/s。

公式整理／不確定度組合公式整理

1. 同時存在 A 類不確定度 u_A 與 B 類不確定度 u_B：$u=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}$
2. 物理量 $z=x+y$ 時：測量結果 $=Z\pm u(Z)=(X+Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$
3. 物理量 $z=x-y$ 時：測量結果 $=Z\pm u(Z)=(X-Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$
4. 物理量 $z=xy$ 或 $z=\dfrac{x}{y}$ 時：相對不確定度 $\dfrac{u(Z)}{|Z|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$
5. 物理量 $z=xy$ 時：測量結果 $=Z\pm u(Z)=XY\pm|XY|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$
6. 物理量 $z=\dfrac{x}{y}$ 時：測量結果 $=Z\pm u(Z)=\dfrac{X}{Y}\pm\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$

參考補充／關於測量與不確定度的試題設計

由於測量的平均值、標準差以及不確定度的計算，過程都頗為繁瑣，無論是課堂上的講解，或是做為考試評量，如果不能使用計算機的情況下，對老師與學生來說，都是一項艱鉅的挑戰。因為這些計算過程並非本章的學習重點，所以應該善用電腦或計算機做為課堂上講解輔助的教具，除了實際演練整個流程之外，也可以讓學生熟悉簡易程式的應用。

但是考試中可能不適合讓學生使用計算機，這時候試題的設計就非常重要。因為學生要學習的是平均值、標準差以及不確定度的定義，還有實際數據出現之後，該如何決定這些數值，所以試題應盡可能避開類似標準差的繁瑣計算過程。以課本範例 1-1 為例，題幹直接將測量的平均值、標準差列出來，便省去複雜的計算過程；其次，將測量次數設計為 4 次（或 9 次、16 次等）的目的，就是因為不確定度必須將標準差除以$\sqrt{n}$，也巧妙避開了平方根的繁瑣計算。底下再用另一個例子，說明不確定度的組合，也可以利用這些技巧設計本章的試題。

例如小龍測量甲、乙兩根小木棍的長度，且各進行 4 次測量，所測得的數據，以及測量的平均值和標準差，如右表所示。由表中標準差的數據，可得甲、乙兩根小木棍長度測量的不確定度 $u(X)$、$u(Y)$，分別為

	甲木棍	乙木棍
第 1 次測量	2.06 cm	15.12 cm
第 2 次測量	2.02 cm	15.16 cm
第 3 次測量	1.92 cm	15.23 cm
第 4 次測量	1.98 cm	15.30 cm
平均值	1.995 cm	15.2025 cm
標準差	0.05972⋯cm	0.07932⋯cm

$$u(X)=\frac{s(x)}{\sqrt{4}}=\frac{0.05972\cdots}{2}$$
$$=0.02986\cdots\approx 0.030(\text{cm})$$
$$u(Y)=\frac{s(y)}{\sqrt{4}}=\frac{0.07932\cdots}{2}$$
$$=0.03966\cdots\approx 0.040(\text{cm})$$

根據上述不確定度 $u(X)$、$u(Y)$，可分別求得最佳估計值 X、Y 分別為

$$X=1.995\text{ cm}、Y=15.203\text{ cm}$$

因此甲、乙小木棍長度的測量結果可表示為

$$\text{甲木棍長}=X\pm u(X)=(1.995\pm 0.030)\text{ cm}$$
$$\text{乙木棍長}=Y\pm u(Y)=(15.203\pm 0.040)\text{ cm}$$

若小龍想進一步求得兩木棍的總長度，則此時總長度的最佳估計值為

$$Z=X+Y=1.995\text{ cm}+15.203\text{ cm}=17.198\text{ cm}$$

根據不確定度的組合公式，可得組合後的不確定度為

$$u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}=\sqrt{0.030^2+0.040^2}=0.050(\text{cm})$$

因此兩木棍的總長度可記為

$$\text{總長度}=Z\pm u(Z)=(17.198\pm 0.050)\text{ cm}$$

上述計算過程都避開了繁複的計算，甚至不確定度組合也利用 $3^2+4^2=5^2$ 的關係，讓整個過程的講解，或是做為一道評量的試題，都可以變得簡單易懂。至於物理量乘除後的不確定度，則可利用相對不確定度的組合公式，讓 $u_r(X)$、$u_r(Y)$、$u_r(Z)$ 三者的比例，成為 3：4：5 或是 5：12：13 等關係，一樣會有上述的效果，但這可能需要老師稍微費心去嘗試數據的比例。雖然實際測量結果不太可能出現這麼巧妙的數字，但在教學跟命題時，這可能是不得不的權宜之計。

想一想解答

1. 以游標尺來測量十張紙的總厚度，是疊起來一起測量比較好？還是分開測量再加總比較好？ (P.16)

答 疊起來一起測量比較好。

$$\begin{cases} \text{10 張紙疊起來一起測} \Rightarrow \text{不確定度為 } u(X) \\ \text{單獨測 1 張紙，分別對 10 張紙測量} \Rightarrow \text{每 1 張紙的不確定度} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{分別為 } u(X_1)\text{、}u(X_2)\text{、}\cdots\cdots\text{、}u(X_{10}) \end{cases}$$

當測量工具、測量者相同時，$u(X)$ 和 $u(X_1)$、$u(X_2)$、⋯、$u(X_{10})$ 差不多一樣，但若分開測量再加總後，10 張紙總厚度的組合不確定度 $u(Z)=\sqrt{u(X_1)^2+u(X_2)^2+\cdots\cdots+u(X_{10})^2}$

因 $\sqrt{u(X_1)^2+u(X_2)^2+\cdots\cdots+u(X_{10})^2}>u(X)$，故 10 張紙疊起來一起測比 10 張分開測量再加總，會有較佳的測量品質。

迷思概念釐清

1. 若測量時同時存在 A 類與 B 類的不確定度，且其不確定度分別為 u_A、u_B，則其組合不確定度會同時大於 u_A 與 u_B。

答 對。根據 ISO-GUM 評估準則，其組合不確定度為 $u=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}$，因此 $u>u_A$ 且 $u>u_B$。

2. 兩物理量 x、y 相加後的不確定度，為 x、y 個別物理量不確定度之和。

答 錯。根據 ISO-GUM 評估準則，相加後的不確定度，為個別物理量不確定度的平方和之後的平方根，即 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。

3. 兩物理量 x、y 相減後的最佳估計值，為 x、y 個別物理量最佳估計值之差，且其有效位數需以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

答 對。設物理量 x、y 的最佳估計值分別為 X、Y，則相減後的最佳估計值 $Z=X-Y$，且其有效位數的取法，需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算，以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致。

4. 相對標準不確定度可以為負值。

答錯。物理量 x 的相對標準不確定度定義為 $u_r(X)=\dfrac{u(X)}{|X|}$，由於不確定度 $u(X)$ 與最佳估計值的絕對值 $|X|$，皆大於零，因此相對標準不確定度 $u_r(X)$ 必為正值。

5. 兩物理量相乘後，其不確定度的有效位數，需以四捨五入的方式，至多保留 2 位有效數字。

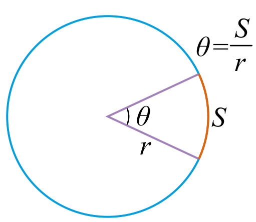
答錯。不確定度的有效位數，皆須以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字；若是 2 位有效數字的下一位數為零時，則採用捨去法。

1-3 物理量的因次

教學策略

一、因次的概念

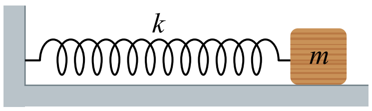
1. 因次：物理量必須同時包含數值與單位，才具有定量分析的意義，這些無法僅用數值表示，還必定同時包含單位的物理量，稱為具有因次 (dimension) 的物理量。
2. 力學的基本因次：力學中以質量、長度、時間來作為基本量，其因次分別表示為 M、L、T，稱為基本因次，其他物理量的因次都可依此推導出來。
3. 因次的運算：
   (1)因次的加減：可進行加減運算的物理量，必定有相同的因次，運算結果亦具有相同的因次。但並非因次相同即可進行加減，如功與力矩的因次相同（皆為 ML^2T^{-2}），但兩者是不同的物理量，所以不可相加或相減。
   (2)因次的乘除：物理量間乘除運算而導出的因次，必可以表示為質量、長度、時間等基本因次的冪次組合，即 $M^aL^bT^c$，其中 a、b、c 可為整數或分數。
4. 因次的表示法：以中括弧 [　] 表示物理量的因次。例如



   (1)速度：$[v]$ ＝ [位移 / 時間] ＝ LT^{-1}。
   (2)加速度：$[a]$ ＝ [速度變化 / 時間] ＝ LT^{-2}。
   (3)力：$[F]$ ＝ [質量 × 加速度] ＝ MLT^{-2}。
   (4)力矩：$[\tau]$ ＝ [力 × 力臂] ＝ ML^2T^{-2}。
   (5)角度：$[\theta]$ ＝ [弧長 / 半徑] ＝ 1。（角度 θ 定義為所張的弧長 S 除以半徑 r，其單位為弧度。但由於弧長與半徑的因次均為長度，相除後的角度為無因次的物理量，其因次表示為 1。）
   (6)重力常數：$[G]$ ＝ [力 × 距離 ^{2} / 質量 ^{2}] ＝$\dfrac{MLT^{-2} \cdot L^2}{M^2}$＝ $M^{-1}L^3T^{-2}$。

二、因次分析

1. 因次分析：用來分析判斷一個物理量計算的結果是否合理，或是分析數個物理量之間關係的方法，稱為因次分析。
2. 因次分析的實例：如右圖所示，如果想要求得彈簧 - 物體系統的振動週期 T，與各個物理量間的關係，可依下列因次分析的步驟：



(1)找出與週期 T 有關的物理量：若忽略一切阻力的效應，這可能包含彈性常數 k、物體質量 m、振幅 R。

(2)寫出物理量的因次：$[k]=[\text{力}/\text{形變量}]=\dfrac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L}}=\mathrm{MT^{-2}}$，$[m]=\mathrm{M}$，$[R]=\mathrm{L}$。

(3)分析各物理量與時間的關係：

令物體的振動週期 $T=ak^bm^cR^d$，其中 a 為無因次的常數，故

$$[T]=[k]^b[m]^c[R]^d\Rightarrow T=(\mathrm{MT^{-2}})^b\mathrm{M}^c\mathrm{L}^d$$

等式兩邊因次的冪次須相等，因此

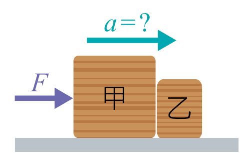
$$\begin{cases}\text{T 的冪次}：1=-2b\Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}\\[2ex] \text{M 的冪次}：0=b+c\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=a\sqrt{\dfrac{m}{k}}\\[2ex] \text{L 的冪次}：0=d\Rightarrow d=0\end{cases}$$

（第 5 章會詳述正確公式為 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$）

想一想解答

1. 小智思考一個問題（如圖），最後解出答案為 $a = \dfrac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}$，如果用因次分析的方法檢查答案，此答案是否正確？(P.20)

問題：
光滑水平面上，分別施 F 的水平力作用於甲和乙，產生的加速度分別為 a_1 和 a_2。如圖，若今 F 的水平力同時施於甲和乙，則加速度 a = ？



答 以因次的角度來看，$[a] = \mathrm{LT^{-2}}$；

$$\left[\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right] = \frac{\mathrm{LT^{-2}}}{\mathrm{LT^{-2}} \cdot \mathrm{LT^{-2}}} = \mathrm{L^{-1}T^{2}}$$

兩者的因次明顯不同，答案必不正確。

註：正確解法與答案如下：

$$\begin{cases} \text{推甲：} F = m_{\text{甲}} a_1 \Rightarrow m_{\text{甲}} = \dfrac{F}{a_1} \\ \text{推乙：} F = m_{\text{乙}} a_2 \Rightarrow m_{\text{乙}} = \dfrac{F}{a_2} \end{cases}$$

同時推甲和乙：$F = (m_{\text{甲}} + m_{\text{乙}}) \cdot a \Rightarrow \cancel{F} = (\dfrac{\cancel{F}}{a_1} + \dfrac{\cancel{F}}{a_2}) \cdot a \Rightarrow a = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}} = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$。

迷思概念釐清

1. 一般物理常數，例如重力常數，是沒有因次的。

答 錯。多數的物理常數都是有因次的，例如重力常數的因次為 $[G] = \mathrm{M^{-1}L^{3}T^{-2}}$。

2. 因次不同的物理量，仍然可以進行加減運算。

答 錯。因次不同的物理量，代表其單位也不同，因此單位不同的物理量若進行加減運算，並不具物理意義。

3. 因次相同的物理量，即可進行加減運算。

答 錯。因次相同的物理量，仍有可能是不同的物理量，不一定可以進行加減運算。

4. 兩個單位不同的物理量，其因次有可能相同。

答 對。例如 180 m 和 180 cm，兩者單位不同，但兩者的因次都是長度。

5. 光子的能量 E 與頻率 f 的關係為：$E = hf$，則普朗克常數 h 的因次為 $\mathrm{ML^{2}T^{-1}}$。

答 對。$[h]$ = [能量 / 頻率] = [能量 × 週期] = $\mathrm{ML^{2}T^{-2}} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{ML^{2}T^{-1}}$。

第 1 章 習題解答

基礎題

1-1 簡介不確定度

1. 實驗時，某一組同學用直尺測量一支鉛筆的長度，共進行 9 次測量，測量的 9 筆數據經組員計算後，得到平均值為 10.7575 cm、標準差為 0.07588 cm。僅考慮不確定度的 A 類評估，試問此次測量的：
(1) 不確定度為多少？
(2) 最佳估計值為多少？
(3) 鉛筆長度的測量結果為多少？

答 (1) 0.026 cm (2) 10.758 cm (3) (10.758 ± 0.026) cm

解析 (1) 不確定度 $u(X)=\dfrac{s(x)}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.07588}{\sqrt{9}}=0.02529=0.026$(cm)（無條件進位取 2 位有效數字）。
(2) 最佳估計值 $X=10.758$(cm)（四捨五入保留至與不確定度的末位一致）。
(3) 鉛筆長度的測量結果＝ $X\pm u(X)=(10.758\pm 0.026)$ cm。

2. 在金屬比熱實驗中，老師取出一臺電子秤（電子秤的最小刻度為 0.01 g），請林同學測量鋁塊的質量，結果電子秤上顯示的讀數為 30.15 g，則鋁塊的質量應記為多少 g ？

答 (30.1500 ± 0.0029) g

解析 不確定度 $u(X)=\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{0.01}{2\sqrt{3}}\approx 0.0029$ g（無條件進位保留 2 位有效數字）
最佳估計值 $X=30.1500$ g（保留至與不確定度的末位一致）
故測量結果＝ (30.1500 ± 0.0029) g。

1-2 不確定度的組合

3. 承第 2 題，林同學測得另一銅塊，在電子秤上的讀數為 99.32 g，則鋁塊和銅塊的總質量應表示為多少 g ？（已知$\sqrt{(0.29)^2+(0.29)^2}\approx 0.4101$）

答 (129.4700 ± 0.0041) g

解析 物理量相加的測量結果＝ $(X+Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$
不確定度＝ $\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}=\sqrt{(0.0029)^2+(0.0029)^2}\approx 0.004101\approx 0.0041$ g（保留 2 位有效數字；因 2 位有效數字的下一位數為零，故捨去較為合理。）
最佳估計值＝ $X+Y=30.1500+99.3200=129.4700$ g（保留至與不確定度的末位一致）
$\Rightarrow$ 總質量的測量結果＝ (129.4700 ± 0.0041) g。

1-3 物理量的因次

4. 根據牛頓第二運動定律公式：
力＝質量 × 加速度，力的因次可以表示為：
(A) MLT (B) ML／T (C) MT／L (D) ML^2/T (E) ML/T^2。

答 (E)

解析 $[F]=[m][a]=M\cdot(LT^{-2})=M\cdot L/T^2$

5. 物理學上，長度、時間、質量的因次分別以 L、T、M 來表示；而在之前物理課程的能量單元中，作功公式 $W=FS$、動能公式 $K=\frac{1}{2}mv^2$、重力位能公式 $U=mgh$。根據上述內容，試回答下列問題：
(1) 功的因次如何表示？
(A) MLT^{-1} (B) $ML^{-1}T$ (C) ML^2T^{-2} (D) $ML^{-2}T^2$ (E) $M^2L^{-2}T^2$。
(2) 動能的因次如何表示？
(A) MLT^{-1} (B) $ML^{-1}T$ (C) ML^2T^{-2} (D) $ML^{-2}T^2$ (E) $M^2L^{-2}T^2$。
(3) 重力位能的因次如何表示？
(A) MLT^{-1} (B) $ML^{-1}T$ (C) ML^2T^{-2} (D) $ML^{-2}T^2$ (E) $M^2L^{-2}T^2$。

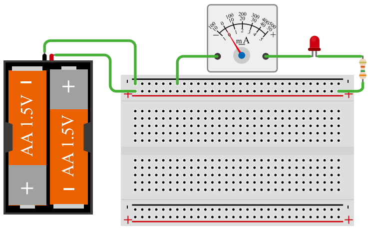
答 (1) (C) (2) (C) (3) (C)

解析 (1) $[W]=[F][S]=MLT^{-2}\cdot L=ML^2T^{-2}$。
(2) $[K]=[m][v]^2=M(LT^{-1})^2=ML^2T^{-2}$。
(3) $[U]=[m][g][h]=M(LT^{-2})L=ML^2T^{-2}$。

進階題

1-1 簡介不確定度

1. 如圖所示，林同學和王同學在實驗室將電池、LED 燈、電阻以電路板相連接，電路開通後，兩人用指針式的毫安培計，測量通過 LED 燈電流各 4 次，並求得實驗數據的標準差，數據如下表，僅考慮 A 類不確定度，試回答下列問題：



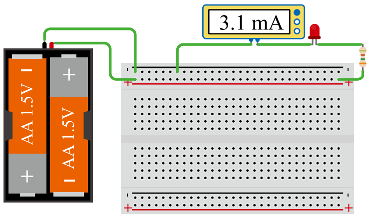
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	標準差 s
林同學	3.0 mA	3.2 mA	3.1 mA	3.6 mA	0.26299 mA
王同學	3.2 mA	3.0 mA	2.9 mA	3.8 mA	0.40311 mA

(1) 請將林同學和王同學的測量結果填入下表中。（表格單位為 mA）

	最佳估計值	A 類不確定度	測量結果
林同學			
王同學			

(2) 哪一位同學的測量品質較佳？

(3) 劉同學改用數位式三用電表的安培檔來取代毫安培計，重新測量電路中通過 LED 燈的電流，結果螢幕上顯示的電流讀數為 3.1 mA，若此三用電表安培檔的最小刻度為 0.1 mA，則劉同學的測量結果應表示為多少 mA ？



答 (1) 表格單位為 mA

	最佳估計值	A 類不確定度	測量結果
林同學	3.23	0.14	(3.23 ± 0.14)
王同學	3.23	0.21	(3.23 ± 0.21)

(2) 林同學　(3) (3.100 ± 0.029) mA

解析 (1) $u_{林}(X)=\dfrac{s(x)}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.26299}{\sqrt{4}}=0.131495\approx 0.14(\text{mA})$（無條件進位保留 2 位有效數字）

$$\bar{x}_{林}=\frac{3.0+3.2+3.1+3.6}{4}=3.225(\text{mA})\Rightarrow X_{林}=3.23(\text{mA})$$

⇒ 林同學的測量結果為：(3.23 ± 0.14) mA。

$u_{王}(X)=\dfrac{s(x)}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.40311}{\sqrt{4}}=0.201555\approx 0.21(\text{mA})$（無條件進位保留 2 位有效數字）

$$\bar{x}_{王}=\frac{3.2+3.0+2.9+3.8}{4}=3.225(\text{mA})\Rightarrow X_{王}=3.23(\text{mA})$$

$\Rightarrow$ 王同學的測量結果為：(3.23 ± 0.21) mA。

(2) 因林同學測量結果的不確定度較小，故林同學測量的品質較王同學為佳。

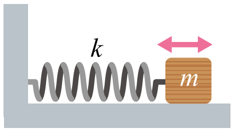
(3) 不確定度 $u(X)=\frac{最小刻度}{2\sqrt{3}}=\frac{0.1}{2\sqrt{3}}\approx 0.029$ mA（無條件進位保留 2 位有效數字）

最佳估計值 $X=3.100$ mA（保留至與不確定度的末位一致）

故劉同學的測量結果＝(3.100 ± 0.029) mA。

1-3 物理量的因次

2. 將彈簧一端固定，另一端繫著質量為 m 的物體後，可以進行振動實驗。已知彈簧的彈性常數為 k、圓周率為 π，請利用因次分析，推論算式 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 最可能為下列哪個物理量？



(A) 時間　(B) 速度　(C) 加速度　(D) 長度　(E) 力。

答 (A)

解析
$$\begin{cases}\pi\ 為圓周率，無因次\ \cdots\cdots①\\ m\ 為質量，因次為\ \text{M}\ \cdots\cdots②\\ k\ 為彈簧的彈性常數，由\ F=kx\Rightarrow k\ 的因次為\ \frac{[F]}{[x]}=\frac{\text{M}\cdot\text{LT}^{-2}}{\text{L}}=\text{MT}^{-2}\ \cdots\cdots③\end{cases}$$

綜合 ①②③ 可得：

$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 的因次為：$\sqrt{\frac{\text{M}}{\text{MT}^{-2}}}=\sqrt{\text{T}^2}=\text{T}$

故 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 最可能為時間的物理量。

（事實上：$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 是彈簧作簡諧運動的振動週期）

3. 物理學家愛因斯坦 1905 年提出狹義相對論，指出若將物體質量 m 和真空中光速 c 的平方相乘，可以得到一個物理量。試問此物理量的因次為下列哪一個組合？

(A) MLT^{-1}　(B) ML^{-1}T　(C) ML^2T^{-2}　(D) ML^{-2}T^2　(E) $\text{M}^2\text{L}^{-2}\text{T}^2$。

答 (C)

解析
$$\begin{cases}m\ 為質量\Rightarrow 因次為\ \text{M}\\ c\ 為光速\Rightarrow 因次為\ \text{LT}^{-1}\end{cases}$$

$\Rightarrow [mc^2]=\text{M}\cdot(\text{LT}^{-1})^2=\text{ML}^2\text{T}^{-2}$。

（事實上：mc^2 是由質量轉換而來的巨大能量，故其因次和能量因次相同）

素養混合題——實驗題

漂浮水面的硬幣

小智閱讀一篇科學文章，文中提到水黽在水面上行走的現象，乃因水的表面張力所致；將金屬迴紋針輕輕放置於水面上，也可達到懸浮效果。小智拿新臺幣 1 元進行此實驗，卻發現硬幣沉入水中；後來他改取日幣 1 元，才成功讓它漂浮。

成分	純鋁
質量	1 g
直徑	20 mm
發行年	昭和 30 年

小智查閱日本造幣局有關日幣 1 元的資料，如圖所示，其主要內容表示：日幣 1 元的材料成分為純鋁、質量為 1 g，直徑為 20 mm。試根據上述資料，回答下列問題：

1. 影響物體沉浮的因素，除了上述水的表面張力之外，還必須考慮：物體密度與水的密度大小之比較、水施予物體的浮力作用等。試問：小智若要利用上述查閱的資料（質量、直徑等數據），來計算這枚日幣 1 元（視為實心圓柱體）的密度，其步驟應如何？

答 如詳解

解析 可先測量硬幣的厚度 d，再利用直徑算出硬幣的截面積 A。將厚度 d 乘以截面積 A，得到硬幣的體積 V。最後由密度 $D=\frac{M}{V}$，計算得出密度。

2. 小智取一支數位顯示的游標卡尺（最小刻度為 0.01 mm，如圖），測量這枚 1 元日幣的厚度 5 次，得到的各別數值、平均值、標準差，如表所示。則此測量的 A 類不確定度、B 類不確定度、組合不確定度，分別為何？（僅須排列算式，不須求出數值）

次數	測量結果（mm）
第 1 次	1.49
第 2 次	1.50
第 3 次	1.47
第 4 次	1.43
第 5 次	1.49
平均值	**1.4760**
標準差	**0.0279**

答 $\frac{0.0279}{\sqrt{5}}$；$\frac{0.01}{2\sqrt{3}}$；$\sqrt{(\frac{0.0279}{\sqrt{5}})^2+(\frac{0.01}{2\sqrt{3}})^2}$

解析 A 類不確定度：$u_A=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{0.0279}{\sqrt{5}}$ (mm)

B 類不確定度：$u_B=\frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\frac{0.01}{2\sqrt{3}}$ (mm)

組合不確定度：$u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{(\frac{0.0279}{\sqrt{5}})^2+(\frac{0.01}{2\sqrt{3}})^2}$ (mm)。

3. 承 2.，若組合不確定度欄位的計算結果為 0.0128（mm），則此枚 1 元日幣厚度的測量結果，應如何表示？

答 (1.476 ± 0.013) (mm)

解析 組合不確定度為 0.0128 (mm)，無條件進位，保留 2 位有效數字 $\Rightarrow u(X) = 0.013$ (mm)。
平均值為 1.4760 (mm)，四捨五入，與不確定度的末位一致 $\Rightarrow$ 最佳估計值 $X = 1.476$ (mm)
$\Rightarrow$ 測量結果 $= X + u(X) = (1.476 \pm 0.013)$ (mm)。

4. 根據上述資料及測量結果，計算此枚 1 元日幣的密度，最接近下列哪一個數值？（圓周率 $\pi = 3.14$）
(A) 2.60　(B) 2.40　(C) 2.20　(D) 2.00　(E) 1.80　g/cm^3。

答 (C)

解析 由 $D = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{A \cdot d} = \dfrac{1}{3.14 \times (\dfrac{2.00}{2})^2 \times 0.1476} \approx 2.16$，選最接近的 (C)。

5. 承 4.，這枚硬幣計算所得的密度，小於鋁的密度（查表為 2.70 g/cm^3）。小智觀察硬幣外型，發現其正反面有凹陷的花紋。據此，該如何解釋密度的計算值與查表值間的差異？

答 如詳解

解析 因硬幣的外緣略高於內部的花紋雕刻，而測量的硬幣厚度為外緣的厚度，因此計算的體積會大於實際的體積。由密度 $D = \dfrac{M}{V}$ 可知，若質量 M 固定而 V 愈大，則密度 D 愈小。故計算的密度會小於 2.70 g/cm^3。

6. 物理學上，「表面張力」可定義為：「將液面拉開時，增加單位面積所須作的功。」根據此定義，表面張力的基本單位組合及因次組合，該如何表示？

答 kg/s^2；MT^{-2}

解析 表面張力基本單位組合為：$\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} = \dfrac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{m}^2} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{kg \cdot m/s^2}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg/s^2}$
表面張力的因次為：$\dfrac{[\,質量\,]}{[\,時間\,]^2} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}^2} = \mathrm{MT^{-2}}$。

素養混合題——生活情境題

B 類不確定度的困擾

在進行測量時，應該採用適當的不確定度，方能完整表達測量的可信度。在某次物理實驗中，兩位同學利用電子秤來測定未知物的質量，兩人都發現電子秤顯示讀數為 200 g，但採用不同的方式來估算 B 類不確定度。第一位同學認為最小刻度為 1 g，因此利用以下公式來估算 B 類不確定度 u：

$$u = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{g} \approx 0.2887\ \mathrm{g}$$

但第二位同學則參閱說明書，發現廠商考慮所有實際因素後，給出測量值的不確定度為 0.53 g。雖然兩人測得未知物的質量讀數相同，但是對於該採用哪一種方式來估算 B 類不確定度，產生了爭執。第一位同學覺得利用公式得到的不確定度較小，因此可信度較高，但第二位同學認為說明書是廠商提供的專業資訊，當然應該以此為準。到底哪一位同學採用的方式，才會得到合理的 B 類不確定度呢？

1. 若採用第一位同學的方式，該如何正確地表達未知物質量的測量結果呢？

答 (200.00±0.29) g

解析 不確定度採無條件進位法，至多取兩位有效數字，故此處應採用 $u = 0.29$ g。最佳估計值位數應與不確定度對齊，故測量結果應表示為 (200.00±0.29) g。

2. 根據題幹描述的測量結果，下列哪一項最能正確地反映 B 類不確定度的採用準則呢？
(A) 第一位同學採用的估算方法較佳，因為利用了最小刻度
(B) 第二位同學採用說明書的資訊，是較為正確的做法
(C) 第一位同學只考慮了最小刻度，因此必然會得到較小的不確定度
(D) 第二位同學因為忽略測量環境影響，所得 B 類不確定度較大
(E) 兩位同學的估計方法都不好，因為並沒有使用數據分析工具。

答 (B)

解析 只有在欠缺其他資訊的條件下，才會利用最小刻度的公式來估算 B 類不確定度。第二位同學採用說明書的資訊，是估算 B 類不確定度的正確做法，故選 (B)。

第 1 章 試題探究

測量的不確定度

過去的評量很少涉及到測量的不確定度，只有在 91 年指考題出現過 1 題，不過所用到的觀念與方法，與本章所闡述的內容截然不同。該試題如下：

小明想利用自由落體運動公式 $v = gt$，測量一靜止物體由同一高度下墜抵地時的速率 v。他先由實地測量，得到重力加速度 g 為 9.8 m/s^2，接著對物體下墜抵地所需之時間 t，作了 8 次測量，得到下表之結果：

測量次序 n	1	2	3	4	5	6	7	8
抵地時間 t(s)	1.28	1.27	1.28	1.28	1.28	1.27	1.28	1.27

下列以有效數字表示抵地時間 t 的平均值與抵地速率 v，何者最能適當地表示此實驗測量之結果？

選項	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
t 的平均值 (s)	1.27625	1.276	1.28	1.28	1.28
速率 v (m/s)	12.5073	12.5	12.5	12.51	13

參考答案 B

物體下墜抵地的時間共測量 8 次，故平均值與標準差分別為

$$\overline{t} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} t_i = 1.27625(\text{s})$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(t_i - \overline{t})^2} = 0.00517549\cdots(\text{s})$$

根據標準差可得時間的不確定度為

$$u(T) = \frac{s(t)}{\sqrt{8}} \approx \frac{0.00517549\cdots}{\sqrt{8}} = 0.001829\cdots(\text{s})$$

由於不確定度至多保留兩位有效數字，並以無條件進位，因此這 8 次測量結果的不確定度為 $u(T) = 0.0019$ s；而最佳估計值以四捨五入的方式，保留到與不確定度的末位一致，故最佳估計值為 $T = 1.2763$ s。所以物體下墜抵地的時間應記為

$$T \pm u(T) = (1.2763 \pm 0.0019)\ \text{s}$$

另一個測量為重力加速度，因為題幹只提到小明實地測量得到 g 為 9.8 m/s^2，所以無從得知測量的不確定度。若以測量值 9.8 m/s^2 推估，由於不確定度至多為 2 位有效數字，且與最佳估計值的末位一致，故合理推論重力加速度的最小不確定度為 0.1 m/s^2。如果以重力加速度為 9.8 m/s^2 ± 0.1 m/s^2，由 $v = gt$，可得出物體下墜抵地時的速率為

$$V \pm u(V)$$

其中 $V = 9.8 \times 1.2763 = 12.50774(\text{m/s})$，

$$u(V) = \sqrt{(9.8 \times 0.0019)^2 + (1.2763 \times 0.1)^2} = 0.1289\cdots(\text{m/s}) \approx 0.13(\text{m/s})$$

故物體下墜抵地時的速率可記為

$$V \pm u(V) = (12.51 \pm 0.13)\ \text{m/s}$$

如果不寫出各次測量的不確定度，則物體抵地時間、抵地速率分別為 1.2763 s 與 12.51 m/s，以大考中心公布的答案 (B) 選項來看，時間跟速率都各少了 1 位有效數字。

第 1 章 深度探索

豪豬教授開講：關於不確定度的精闢解說

你的 A 類、B 類不確定度組合是我的 B 類不確定度

掃描看更多

$(X+X)$ 不確定度 $\neq 2X$ 不確定度

掃描看更多

有效位數取法的 4 個實作法則

掃描看更多

精度、精確度與 B 類不確定度

掃描看更多

不確定度背後的統計分析

不確定度與過往「誤差」的理論架構截然不同，在教學時若能避免採用過時的名詞與觀念，如真值、誤差、準確度、精密度等等，就不會陷入不必要的迷思中。不確定度的理論核心是統計分析，無論是 A 類或是 B 類不確定度，其統計上的意義通通是一樣的，就是最佳估計值的標準差。

A 類不確定度

先介紹 A 類不確定度該如何分析。假設對某物理量進行 n 次相同但獨立的測量，其結果可由 x_1，x_2，⋯，x_n 共 n 個隨機變數來描述。定義另一隨機變數來描述測量結果的平均值為

$$A_x \equiv \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

利用統計分析，隨機變數 A_x 的期望值 $E[A_x]$ 即為最佳估計值 $\overline{X}$，而其變異數 $\mathrm{Var}[A_x]$ 則為不確定度 $u(X)$ 的平方

$$E[A_x] = \overline{A_x} = \text{最佳估計值 } \overline{X}$$

$$\mathrm{Var}[A_x] = \overline{(A_x)^2} - (\overline{A_x})^2 = [\text{ 不確定度 } u(X)]^2$$

也就是說，最佳估計值與其不確定度都是隨機變數 A_x 的統計特性而已。

我們可以進一步推導出課本的公式。由於是相同但獨立的測量，$\overline{x_1} = \overline{x_2} = \cdots = \overline{x_n} = \overline{x}$，故可以依此計算隨機變數 A_x 的期望值

$$\overline{A_x} = \frac{1}{n}(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}) = \frac{1}{n} \cdot n\overline{x} = \overline{x}$$

由上式可知，隨機變數 A_x 的期望值即為該測量結果的最佳估計值。

再來計算隨機變數 A_x 的變異數，這計算過程稍稍複雜一些。由於是相同且獨立的測量，若是 i，j 不同，$\overline{x_i x_j} = \overline{x_i} \cdot \overline{x_j} = \overline{x}^2$，若是對應到同一次的測量，則其變異數皆相同，$\overline{x_i x_j} = \overline{x^2}$。依此計算隨機變數 A_x 的變異數為

$$\mathrm{Var}[A_x] = \overline{(A_x)^2} - (\overline{A_x})^2 = \frac{1}{n^2}\left[n \cdot \overline{x^2} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\overline{x}^2\right] - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = \frac{1}{n}s^2$$

上式中 s 為測量數據的標準差。將以上的結果開根號，即可求得 A 類不確定度為

$$u(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[A_x]} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

經過這些統計分析後，我們終於降落在高中課本的公式，原來 A 類不確定度公式中的根號，背後有這麼深刻的統計意涵。

B 類不確定度

我們也可以藉由統計分析，來估算 B 類不確定度。舉最小刻度為例，若測量結果呈現均勻分布，則測量值 x 可視為連續的隨機變數，其機率分布則由圖中 $P(x) = \frac{1}{a}$ 描述。可利用統計分析方法計算隨機變數 X 的期望值與變異數，並依此求出最佳估計值與不確定度。

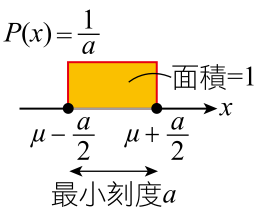


圖 1　測量值 x 所遵循的均勻分布

由於隨機變數 X 是連續的，最佳估計值必須由積分才能算出

$$E(X) = \int P(x)x\,dx = \int_{\mu-\frac{a}{2}}^{\mu+\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\cdot x\,dx = \frac{1}{2a}x^2\Big|_{\mu-\frac{a}{2}}^{\mu+\frac{a}{2}} = \frac{1}{2a}\cdot 2\mu a = \mu$$

這個結果與我們的直覺吻合：最佳估計值就是測量結果上下限的代數平均。不確定度可藉由隨機變數 X 的變異數求出，而變異數可以寫成以下積分

$$\mathrm{Var}[X] = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \int P(x)x^2\,dx - \mu^2 = \int_{\mu-\frac{a}{2}}^{\mu+\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\cdot x^2\,dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{3a}x^3\Big|_{\mu-\frac{a}{2}}^{\mu+\frac{a}{2}} - \mu^2 = \frac{1}{3a}\cdot\left(3a\mu^2 + \frac{1}{4}a^3\right) - \mu^2 = \frac{1}{12}a^2$$

不確定度 $u(X)$ 可以藉由變異數開根號求出，其結果為

$$u(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$$

由上式可看出 B 類不確定度公式中的 2 根號 3 並無神秘之處，只是推導過程較為繁瑣。

本章圖片來源

第 1 章
CH1 章首 shutterstock 圖庫提供
實驗題日幣 1 元 Misogi
實驗題游標卡尺 shutterstock 圖庫提供