

4-1 一維彈性碰撞

熱點 1 碰撞的種類

1. 按能量的變化可分為：

(1) **彈性碰撞**：兩物體碰撞過程**力學能守恆**，碰撞前後總動能 不變。

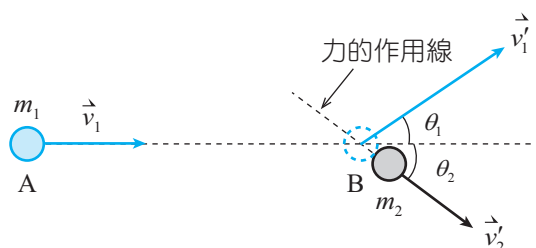
(2) **非彈性碰撞**：兩物體碰撞過程**力學能不守恆**，碰撞後總動能 減少。減少的動能轉換為其他能量，因此總能量仍守恆。

2. 按碰撞的方向可分為：

(1) **正向碰撞**：兩物體碰撞前後的軌跡均在**同一直線上**，又稱為**一維碰撞**或**對正碰撞**，如下圖(a)、(b)。



(2) **斜向碰撞**：兩物體碰撞前後的軌跡不在同一直線上，若在同一平面上，則可稱為**二維碰撞**，如下圖。



熱點 2 碰撞的共同性質

1. 兩物體無論發生彈性或非彈性碰撞，彼此的碰撞力均為兩物系統的**內力**，若碰撞過程**外力和為零**，則此系統會遵守**動量**守恆，且質心速度 不變。

2. 按牛頓第三運動定律，碰撞期間，兩物體的「受力」會**量值相等**、**方向相反**，又受力時距相等，所以碰撞過程兩物體所受的「衝量」與「動量變化量」也會**量值相等**，**方向相反**。另外，兩物體的「加速度」、「速度變化量」則與**質量成反比**且**方向相反**。

◆ 說明

兩物體因碰撞而受的力分別為 \vec{F}_1 、 \vec{F}_2 ，此兩力互為作用力與反作用力，

$$\text{則 } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 \Delta t = -\vec{F}_2 \Delta t \Rightarrow \vec{J}_1 = -\vec{J}_2$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \Rightarrow m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta \vec{v}_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{又 } m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow \frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = -\frac{m_2}{m_1}。$$

觀念小試 1

兩物體發生碰撞，碰撞過程外力和為零。請完成下表，對的打「○」，錯的打「×」。

| 碰撞種類 | 系統的動量守恆 | 系統的力學能守恆 | 系統的能量守恆 | 系統的質心速度不變 |
|-------|---------|----------|---------|-----------|
| 彈性碰撞 | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 非彈性碰撞 | ○ | × | ○ | ○ |

觀念小試 2

鋼球 1 公斤，鋁球 0.2 公斤，兩球發生正向碰撞，下列敘述何者正確？

- (A) 鋁球受到撞擊力的量值是鋼球的 5 倍
- (B) 鋁球動量改變量的量值是鋼球的 5 倍
- (C) 鋁球速度改變量的量值是鋼球的 5 倍
- (D) 鋁球動能改變量的量值是鋼球的 5 倍

83 學測

答 C

解 (A) 5 倍 \rightarrow 1 倍；(B) 5 倍 \rightarrow 1 倍；

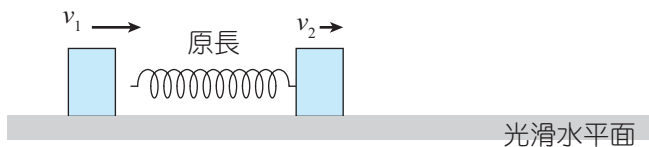
$$(C) \text{ 設鋁球為 1 號球，鋼球為 2 號球。} \frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{0.2} = 5；$$

$$(D) \frac{|\Delta K_1|}{|\Delta K_2|} = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 (v_{1f}^2 - v_{1i}^2) \right|}{\left| \frac{1}{2} m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \right|} \Rightarrow \text{兩球的初速未知，無法判斷 } |\Delta K_1| \text{ 是 } |\Delta K_2| \text{ 的幾倍。}$$

熱點 3 一維彈性碰撞

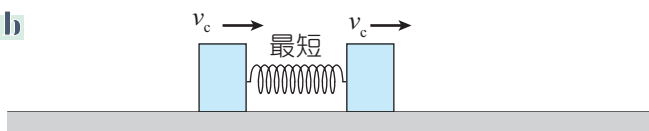
1. 一維彈性碰撞的性質

a



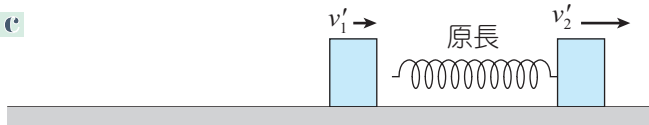
碰撞前，系統的總動能最大，總位能為零。

b



兩物體最接近時，兩物等速，此時系統的總動能最小，總位能最大。

c



碰撞後，系統恢復碰撞前的總動能，總位能為零。

(1) 碰撞過程：

兩物體在碰撞過程中因為只有彈力作功，所以系統的**力學能守恆**。

① 接近過程：系統的總動能減少，總位能增加。

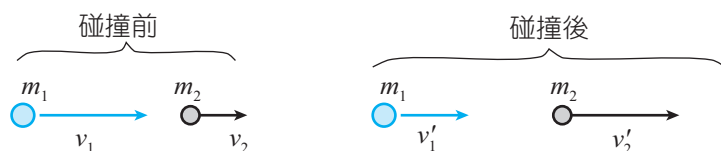
② 最接近時：兩物 **等速**（此速度即**質心速度**），系統的總動能 **最小**，總位能 **最大**。

③ 遠離過程：系統的總動能增加，總位能減少。

(2) 碰撞後：

碰撞後兩物分離，此時系統總位能為**零**，總動能與碰撞前**相等**。

2. 一維彈性碰撞的數學分析



兩物體的質量各為 m_1 及 m_2 ，同在一直線上運動，在碰撞前的速度各為 v_1 及 v_2 ，正向碰撞後的速度各為 v_1' 及 v_2' ，若為彈性碰撞，則：

$$\begin{cases} \text{由動量守恆} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \cdots \cdots ① \\ \text{由動能相等} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

解①、②得：

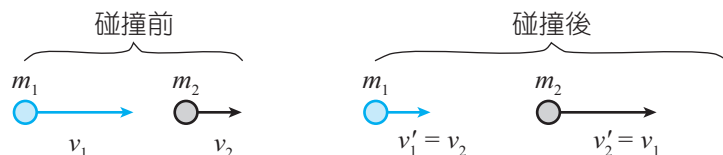
$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2$$

$v_2' - v_1'$ ：分離速度； $v_1 - v_2$ ：接近速度。

(1)若 $m_1 = m_2$ ，則 $v_1' = v_2$ ， $v_2' = v_1$ ，即碰撞後兩物體的 速度交換，如下圖。



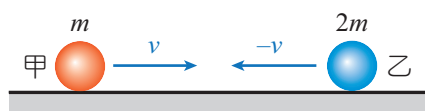
(2)若 $v_2 = 0$ ，則 $v_1' = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})v_1$ ， $v_2' = (\frac{2m_1}{m_1 + m_2})v_1$ 。

各種情形如下表：

| | 碰撞前 | 碰撞後 | 碰撞後 |
|---------------|-----|-----|---|
| $m_1 = m_2$ | | | 兩物速度交換， m_1 將 <u>所有動能</u> 轉移給 m_2 |
| $m_1 > m_2$ | | | m_1 繼續 <u>向前</u> 運動 |
| $m_1 < m_2$ | | | m_1 <u>反向</u> 彈回 |
| $m_1 \gg m_2$ | | | m_1 約以 <u>原速度向前</u> 運動， m_2 約獲得 $2v_1$ 的速度 |
| $m_1 \ll m_2$ | | | m_1 約以 <u>原速度反向</u> 彈回， m_2 <u>幾乎靜止</u> |

範例 1 求一維彈性碰撞的末速

如右圖，在光滑平面上，質量為 m 的甲物體，以速度 v 碰撞質量為 $2m$ 、速度 $-v$ 的乙物體，若兩者作一維彈性碰撞，則碰後甲、乙的速度各為多少？(以 v 表示)



答 $-\frac{5}{3}v$ ； $\frac{1}{3}v$

解 $v_1' = (\frac{m-2m}{m+2m})v + (\frac{2 \times 2m}{m+2m})(-v) = -\frac{5}{3}v$ ； $v_2' = (\frac{2 \times m}{m+2m})v + (\frac{2m-m}{m+2m})(-v) = \frac{1}{3}v$ 。

類題

質量 4 公斤、速度 5 公尺/秒的甲球和質量 6 公斤、速度 2 公尺/秒的乙球，在一直線上方向皆向東進行，作正向彈性碰撞。求碰撞後兩球的速度各為何？

答 甲：1.4 m/s；乙：4.4 m/s

解 令向東為「+」方向，甲為 1 號球，乙為 2 號球

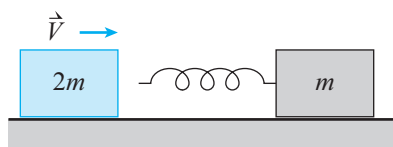
$$v_1' = (\frac{4-6}{4+6}) \times 5 + (\frac{2 \times 6}{4+6}) \times 2 = 1.4 \text{ (m/s)}；v_2' = (\frac{2 \times 4}{4+6}) \times 5 + (\frac{6-4}{4+6}) \times 2 = 4.4 \text{ (m/s)}。$$

範例 2

一維彈性碰撞



如右圖，質量為 m 的木塊上繫有力常數為 k 的彈簧（質量不計）並靜置於光滑的水平面上。質量為 $2m$ 的木塊以速度 \vec{V} 向右撞擊質量 m 的木塊，撞擊過程兩木塊都在同一直線上運動，試求：



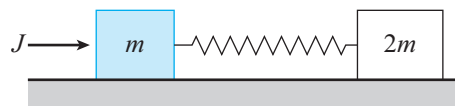
- (1) 隨後整個木塊與彈簧系統的質心速度。
- (2) 當兩木塊最接近時，系統的總動能。
- (3) 彈簧的最大壓縮量。
- (4) 相撞分開後， m 木塊與 $2m$ 木塊之個別速度。
- (5) 相撞後， m 木塊對 $2m$ 木塊之相對速度。

答 (1) $\frac{2}{3}\vec{V}$ (2) $\frac{2mV^2}{3}$ (3) $\sqrt{\frac{2m}{3k}}V$ (4) $\frac{1}{3}\vec{V}$; $\frac{4}{3}\vec{V}$ (5) \vec{V}

解 (1) $\vec{v}_c = \frac{2m \cdot \vec{V} + 0}{2m + m} = \frac{2}{3}\vec{V}$ 。(2) 當兩木塊最接近時，兩木塊等速，都等於質心速度，此時系統的總動能 $= \frac{1}{2}(2m + m)(\frac{2}{3}V)^2 = \frac{2mV^2}{3}$ 。(3) 當兩木塊最接近時，彈簧有最大壓縮量，由力學能守恒， $\Rightarrow \frac{1}{2}(2m)V^2 + 0 = \frac{2mV^2}{3} + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2m}{3k}}V$ 。(4) $v_1' = \frac{2m - m}{2m + m}\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{V}$, $v_2' = \frac{2 \times 2m}{2m + m}\vec{V} = \frac{4}{3}\vec{V}$ 。(5) $v_2' - v_1' = \frac{4}{3}\vec{V} - \frac{1}{3}\vec{V} = \vec{V}$ ，另解： $v_2' - v_1' = v_1 - v_2 = \vec{V} - 0 = \vec{V}$ 。

類題

兩木塊質量分別為 m 及 $2m$ ，以力常數為 k 的彈簧相聯，靜置於光滑水平地面上。今以水平衝量 J 在極短的時間內施於質量為 m 之木塊，使整個系統沿直線前進，如圖所示，則下列敘述哪些正確？（多選）



- (A) 質量為 m 之木塊初速為 $\frac{J}{m}$ (B) 質量為 $2m$ 之木塊初速為 $\frac{J}{2m}$ (C) 當兩木塊最靠近時，兩木塊速度都是 $\frac{J}{3m}$ (D) 當兩木塊最接近時，系統總動能為 $\frac{J^2}{9m}$ (E) 當兩木塊最接近時，彈簧被壓縮

$$\sqrt{\frac{2J^2}{3mk}}$$

改自聯考題

答 ACE

解 (A) 質量 m 木塊： $J = \Delta p = mv_1 - 0 \Rightarrow v_1 = \frac{J}{m}$ ；(B) $v_2 = 0$ ；(C) 當兩木塊最靠近時，兩木塊速度 $= v_c = \frac{mv_1}{m + 2m} = \frac{J}{3m}$ ；(D) $K = \frac{1}{2}(m + 2m)(\frac{J}{3m})^2 = \frac{J^2}{9m}$ ；(E) 力學能守恒 $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{J^2}{6m} + \frac{1}{2}kx^2$ ， $v_1 = \frac{J}{m} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2J^2}{3mk}}$ 。



補充練習

基本題

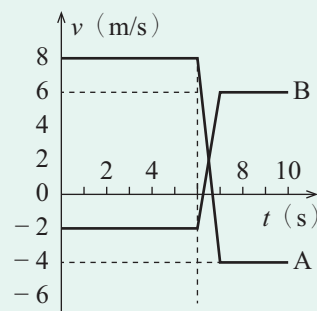
* 為多選題

- * (BCD) 1. 有兩物體，質量分別為 m_1 與 m_2 ，兩者間壓縮一彈簧，而被線縛在一起，靜置於光滑水平面上。將線剪斷後，兩物體被彈開，兩物與彈簧完全分開 t 秒後， m_1 滑過 ℓ_1 公尺， m_2 滑過 ℓ_2 公尺，則

(A) $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{m_1}{m_2}$ (B) $\frac{m_1 \text{ 所受的衝量大小}}{m_2 \text{ 所受的衝量大小}} = 1$ (C) $\frac{m_1 \text{ 的動量大小}}{m_2 \text{ 的動量大小}} = 1$
 (D) $\frac{m_1 \text{ 的動能}}{m_2 \text{ 的動能}} = \frac{m_2}{m_1}$

2. 位於一直線上的 A、B 兩球發生碰撞，過程中無其他外力作用，其碰撞 $v-t$ 圖如右，試回答下列問題：

- (1) 若 A 球質量為 3 公斤，試推算 B 球質量為何？
 (2) 此碰撞是否為彈性碰撞？

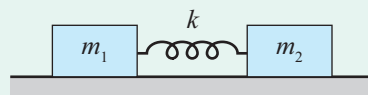


2. 答 (1) 4.5 kg (2) 是

- (A) 3. 質量相同的甲、乙兩球各以 20 公尺/秒、10 公尺/秒相向作正向彈性碰撞，碰撞後甲以 10 公尺/秒的速率反彈，則乙反彈的速率為何？

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 4 (E) 2 公尺/秒

4. 兩相同木塊（質量 $m_1 = m_2 = m$ ），中間連以彈力常數為 k 的彈簧（質量不計），靜置於光滑的水平面上，如圖所示。假設左方木塊（ m_1 ）瞬間由系統外獲得向右的速度 \vec{v} ，試求隨後整個木塊與彈簧系統的



- (1) 質心速度 (2) 最大彈性位能

聯考題

4. 答 (1) $\frac{1}{2}\vec{v}$ (2) $\frac{1}{4}mv^2$

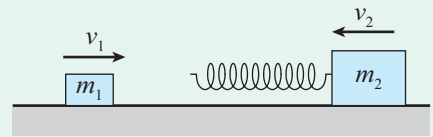
5. 在光滑水平桌面上，有質量分別為 m_1 及 m_2 之兩方塊。 m_1 起初靜止， m_2 以初速 v_0 向 m_1 接近。 m_2 之前端，有力常數為 k 之彈簧，彈簧質量可以不計。求在正面彈性碰撞過程中：

- (1) 彈簧被壓縮成最短時，其縮短量為多少？
 (2) 相撞後， m_1 和 m_2 之相對速度為何值？

聯考題

5. 答 (1) $\sqrt{\frac{m_1 m_2 v_0^2}{k(m_1 + m_2)}}$ (2) v_0

6. 如圖所示之 m_1 及 m_2 兩物體， $m_1 = 3 \text{ kg}$ ， $m_2 = 4 \text{ kg}$ ，各以 $v_1 = 3 \text{ m/s}$ 、 $v_2 = -4 \text{ m/s}$ 相向在同一直線上運動， m_2 上繫一力常數為 21 N/m 之彈簧，求兩物體在碰撞期間彈簧壓縮的最大量為多少公尺？（設彈簧夠長且質量不計）



6. 答 2 公尺

- * (ABD) 7. 質量 m_1 的物體 A 以初動量 P 與靜止質量是 m_2 的物體 B 作正向彈性碰撞。若碰撞過程外力和為零，下列敘述哪些正確？

(A) 碰撞過程中系統的總動量是 P (B) 碰撞過程中系統動能的最小值是 $\frac{P^2}{2(m_1 + m_2)}$

(C) 碰撞後物體 B 的動量不大於 P (D) 碰撞後物體 B 的末速度是 $\frac{2P}{m_1 + m_2}$

(E) 碰撞後物體 B 的末動能是 $\frac{P^2}{4m_1}$

- (E) 8. 中子與 16 倍質量的靜止氧原子核發生正向彈性碰撞後（無發生任何核反應），氧原子核的碰撞後動能與中子的碰撞前動能之比值為何？

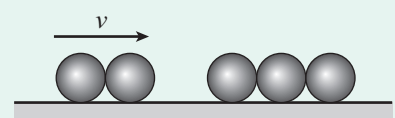
(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{16}{255}$ (C) $\frac{31}{256}$ (D) $\frac{31}{289}$ (E) $\frac{64}{289}$

- (A) 9. 在平直光滑軌道上有一運動中的甲玩具車，質量為 m_1 ，與另一質量為 m_2 的靜止乙玩具車發生正面的彈性碰撞，碰撞後甲車反彈，乙車則沿甲車碰撞前之運動方向前進，若碰撞後兩車的速率相同，則 m_1 與 m_2 的關係為下列何者？

106 指考

(A) $3m_1 = m_2$ (B) $2m_1 = m_2$ (C) $m_1 = 2m_2$ (D) $m_1 = 3m_2$ (E) $2m_1 = 3m_2$

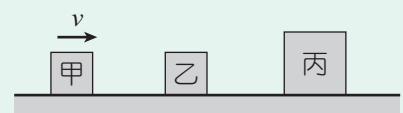
- (B) 10. 設於無摩擦之桌面上置有五個相同之鋼球，其中三個接連排放一列，另兩個自左方以速度 v 正面碰撞此三球（如圖）。假定碰撞為完全彈性，則碰撞後有幾球離開？



(A) 1 球 (B) 2 球 (C) 3 球 (D) 4 球 (E) 5 球

聯考題

- * (BCE) 11. 圖中一光滑水平面上有三物體，甲、乙的質量均為 m ，丙的質量為 $2m$ 。開始時，乙和丙均為靜止而甲以等速度 v 向右行進。設該三物體間的碰撞皆為一維彈性碰撞，則在所有碰撞都結束後，各物體運動速度的敘述哪些正確？

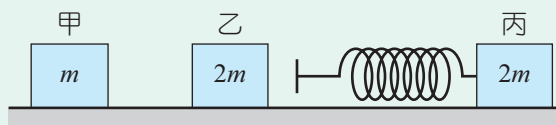


(A) 甲靜止不動 (B) 乙靜止不動 (C) 甲以等速度 $\frac{1}{3}v$ 向左行進

(D) 乙以等速度 $\frac{1}{3}v$ 向右行進 (E) 丙以等速度 $\frac{2}{3}v$ 向右行進

102 指考

- (D) 12. 在光滑水平面上，有甲、乙、丙三個金屬塊，質量分別為 m 、 $2m$ 及 $2m$ ，其質心成一直線，其中丙連接一理想彈簧，如圖所示。初始時，乙、丙為靜止，而甲以速度 v 向右與乙進行正面彈性碰撞，若所有金屬塊間的碰撞可視為質量集中於質心的質點間彈性碰撞，且彈簧質量可以忽略，則碰撞後，丙的最大速率為何？



- (A) $\frac{1}{5}v$ (B) $\frac{2}{5}v$ (C) $\frac{1}{2}v$ (D) $\frac{2}{3}v$ (E) v

104 指考

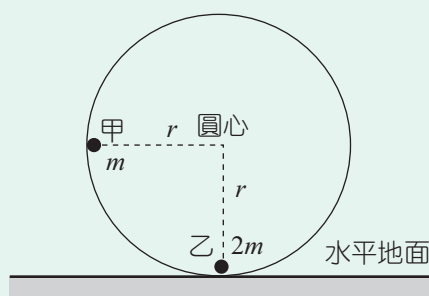
- (D) 13. 老師以彈珠遊戲作示範教學，將半徑相同的彈珠都放置在一水平直線軌道中，由左到右質量分別為 M 、 $2M$ 、 $2M$ 、 $4M$ ，如圖所示。一開始時所有的彈珠皆處於靜止狀態，老師將左邊數來第三顆質量為 $2M$ 的彈珠，以 1.5 m/s 的速度水平射向右邊質量為 $4M$ 的彈珠，造成一系列的碰撞。若所有碰撞皆為彈性碰撞，且摩擦力均可忽略不計，則下列敘述何者正確？



- (A) 所有彈珠總共發生四次彈性碰撞
(B) 在經過多次碰撞後，最後左邊數來的第三顆彈珠向右運動
(C) 在經過多次碰撞後，質量為 $2M$ 的兩顆彈珠，最後都向左運動
(D) 在經過多次碰撞後，質量為 M 與 $4M$ 的彈珠，最後運動的方向相反
(E) 在經過多次碰撞後，質量為 M 的彈珠，最後的運動速率是所有彈珠中最慢的

109 指考補考

- (D) 14. 如圖所示，一個被固定在鉛直面上，半徑為 r 的圓形光滑軌道玩具，將質量分別為 m 與 $2m$ 的甲與乙兩質點，靜置於光滑圓形軌道內緣，甲離水平地面的高度為 r ，而乙位於軌道最低點。當甲自靜止開始沿著軌道下滑後，與乙發生正面彈性碰撞。碰撞後乙沿軌道可爬升的最大鉛直高度為下列何者？



- (A) r (B) $\frac{2}{3}r$ (C) $\frac{1}{2}r$ (D) $\frac{4}{9}r$ (E) $\frac{1}{3}r$

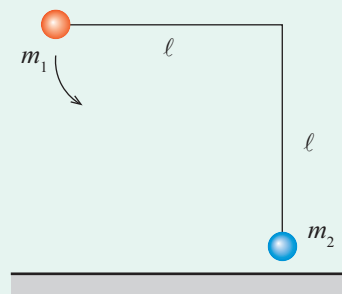
108 指考

進階題

* 為多選題

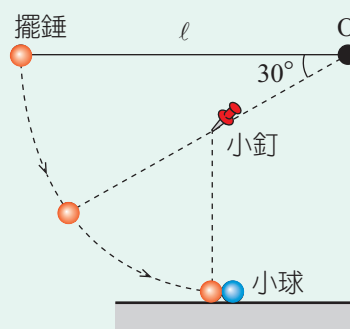
- (B) 15. 兩單擺，擺長均為 ℓ ，其一擺錘質量為 m_1 ，另一擺錘質量為 m_2 ，今將 m_1 拉起來至水平狀態後放開，使其與 m_2 產生彈性碰撞， m_1 反彈至原來一半之高度，則 $\frac{m_1}{m_2}$ 之值介於下列哪一範圍之中？

- (A) $\frac{m_1}{m_2} < 0.1$ (B) $0.1 < \frac{m_1}{m_2} < 0.5$ (C) $0.5 < \frac{m_1}{m_2} < 1.5$
(D) $1.5 < \frac{m_1}{m_2} < 2.0$ (E) $2.0 < \frac{m_1}{m_2}$



聯考題

16. 一擺長為 ℓ 之單擺懸於 O 點，其擺錘質量為 m ，被拉至水平後放開，當擺線與水平成 30° 夾角時，擺線的中點被一小釘卡住，擺錘則繼續掉落，見右圖。當擺錘擺至最低點時，恰碰上一個靜止於光滑地面，質量也是 m 的小球。假設擺錘與小球作一維之完全彈性碰撞，試問：



- (1) 當擺線卡在小釘前一瞬間，擺錘的速率及擺線上的張力為何？
(2) 當擺線下落至最低點，且碰上小球的前一瞬間，擺錘的速率及線上的張力為何？
(3) 當擺錘碰上小球後，若擺錘不觸及地面，則擺線上的張力又為何？

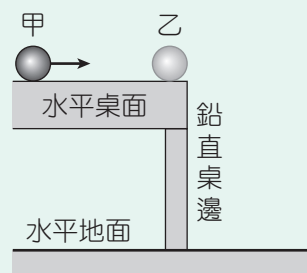
聯考題

16. 答 (1) $\sqrt{g\ell}$; $\frac{3}{2}mg$ (2) $\sqrt{\frac{3}{2}g\ell}$; $4mg$ (3) mg

- * (AC) 17. 一個皮球從高度 H 處自由落下到地面後又反彈跳起，設忽略所有的摩擦效應，皮球與地面的撞擊為彈性碰撞，則下列之敘述中，哪些是正確的？
(A) 這是一個週期運動 (B) 這是一個簡諧運動 (C) 反彈之高度為 H (D) 皮球的動能與重力位能之和在任何時刻均相同 (E) 在運動期間內，皮球動量之大小為一常數

改自聯考題

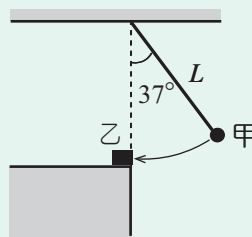
- (D) 18. 如圖所示，水平光滑桌面上的甲球向右等速滑行，過程中無滾動，接著與靜置於桌邊的乙球作正向（面）彈性碰撞。碰撞後兩球各自落於水平地面上，落地過程中兩球僅受重力。已知甲、乙兩球半徑相同，質量分別為 $2m$ 及 m ，落地點與鉛直桌邊底部的水平距離分別為 P 和 Q ，則 $\frac{P}{Q}$ 之值為何？



- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{8}$

100 指考

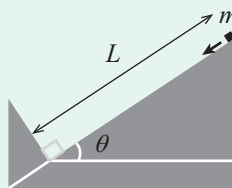
- (B) 19. 甲、乙兩物體有相同的質量，且體積可忽略，乙靜置於水平面上，而甲以長度為 L 、質量可忽略的細繩繫於乙上方的一點，並在與鉛直方向成 37° 處自靜止被釋放後，在最低點與乙發生正向彈性碰撞，如圖所示。已知碰撞時間極短，且碰撞後甲靜止不動，而乙在桌面上往左滑行了距離 L 後停下來。令乙跟水平面之間的動摩擦係數為 μ_k ，則 μ_k 的值為何？（已知 $\sin 37^\circ \approx 0.6$ ）



(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4 (E) 0.5

109 指考補考

20. 有一個斜角為 θ 、長度為 L 的固定斜面，其底端設有一與斜面垂直的牆面，如圖所示。一個質量為 m 的小木塊從斜面上端滑下，其初速度為零。小木塊滑至斜面底端與牆面發生彈性碰撞，設小木塊與斜面間的動摩擦係數為 μ ，重力加速度為 g 。



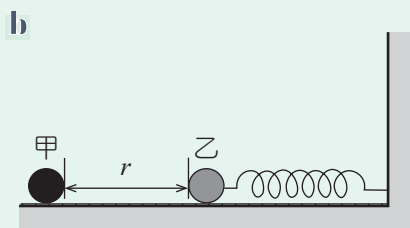
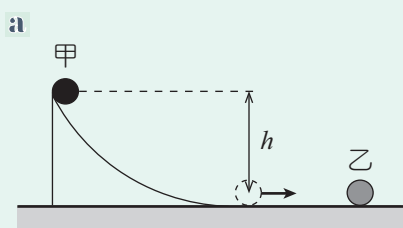
- (1) 求小木塊從斜面上端滑到斜面底端時，碰撞前瞬間的動能。
- (2) 計算第一次碰撞牆面後，小木塊沿斜面向上滑行的加速度。
- (3) 計算第一次碰撞牆面後，小木塊沿斜面向上滑行的最大距離。

100 指考

20. 答 (1) $mgL(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ (2) $g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$ ，沿斜面向下 (3) $\frac{(\sin \theta - \mu \cos \theta)L}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$

21. 兩物體碰撞並與彈簧作用的運動：

109 指考



- (1) 大小相同的甲、乙兩個均勻物體，質量分別為 $3m$ 、 m 。甲物體自靜止沿固定於地面的光滑曲面下滑後，與靜止在光滑水平地面上的乙物體發生正面彈性碰撞，如圖(a)所示。若甲物體的質心下降高度為 h ，重力加速度為 g ，則碰撞後瞬間，甲、乙兩物體的速率各為多少？（以 m 、 g 、 h 表示）
- (2) 承第(1)小題，碰撞後隔一段時間，當甲、乙兩物體相距 r 時，乙物體恰正向接觸前方一處於自然長度、力常數為 k 、右端固定於牆壁之理想彈簧（其質量可忽略不計），如圖(b)所示。乙物體壓縮彈簧後反彈，當作簡諧運動的彈簧第一次恢復至原自然長度時，乙物體恰與甲物體發生第二次碰撞。
 - ① 乙物體剛接觸彈簧時，甲、乙兩物體間的距離 r 為何？（以 m 、 g 、 h 、 k 表示）
 - ② 在乙物體與甲物體發生第二次碰撞前，從彈簧開始接觸乙物體至彈簧到達最大壓縮量時，彈力對乙物體所作的功與最大壓縮量之值各為何？（以 m 、 g 、 h 、 k 表示）

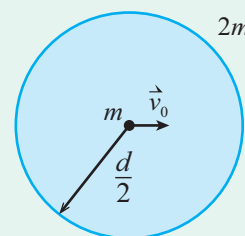
21. 答 (1) 甲： $\frac{\sqrt{2gh}}{2}$ ，乙： $\frac{3\sqrt{2gh}}{2}$ (2) ① $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$ ；② $-\frac{9mgh}{4}$ ， $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

- (C) 22. 將位於同一高度的甲、乙兩相同質量之質點，以相同初速同時鉛直上拋。甲在僅受重力的情況下，自初始上拋至再回到起點所需的時間為 $t_{\text{甲}}$ ，過程中最大的上升高度離起點為 h 。但乙在上升時，與一片固定在離起點高度為 $\frac{h}{2}$ 的水平鋼板面發生彈性碰撞而向下折返，自初始上拋至再回到起點所需的時間為 $t_{\text{乙}}$ 。若空氣阻力可忽略，則下列敘述何者正確？(已知鋼板質量遠大於乙質點，且乙質點與鋼板的撞擊接觸時間極短可忽略)

(A) $t_{\text{甲}} = t_{\text{乙}}$ (B) 乙再回到起點瞬間，甲的速度方向為向下 (C) 在各自再回到起點瞬間，甲、乙兩者的動能相同 (D) 就上拋至再回到起點的整個過程而言，重力對甲所作之功大於對乙所作之功 (E) 乙發生碰撞後，向下運動的加速度量值，大於甲向下運動的加速度量值

改自 108 指考

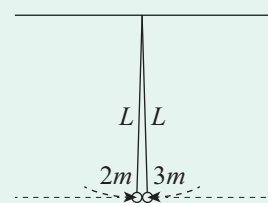
- * (BD) 23. 質量為 $2m$ 、內側直徑為 d 的圓環平放於光滑桌面上。今有一質量為 m 的小球從圓環中心以初速 \vec{v}_0 發射出去，設小球與圓環之間作彈性碰撞且環的內側光滑。下列敘述中哪些是正確的？



(A) 第一次碰撞前，圓環與小球系統的質心速度為 \vec{v}_0 (B) 第一次碰撞後及第二次碰撞前，環與小球系統的質心速度為 $\frac{\vec{v}_0}{3}$ (C) 第一次碰撞後及第二次碰撞前，圓環的速度為 $\frac{\vec{v}_0}{3}$ (D) 第一次碰撞後及第二次碰撞前，小球的速度為 $-\frac{\vec{v}_0}{3}$ (E) 第一次與第二次碰撞之間的時間差為 $\frac{3d}{\vec{v}_0}$

參考試題

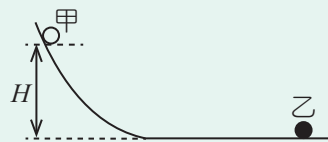
- (A) 24. 有兩顆大小相同的小球，各以長度為 L 、質量可忽略不計的擺繩掛在天花板同一點，左邊小球的質量為 $2m$ ，右邊小球的質量為 $3m$ 。某生拉起兩小球至高度分別為 h_L 和 h_R ，將小球由靜止釋放，讓小球擺向中間，使兩小球恰在最低點時發生正向彈性碰撞，如右圖所示。碰撞後，若左邊的小球擺回到最高點的高度仍然為 h_L ，則 $h_L : h_R$ 為何？



(A) 9:4 (B) 3:2 (C) 1:1 (D) 2:3 (E) 4:9

110 指考

- (D) 25. 如圖所示，質量 m 的甲球自高度 H 處，由靜止開始沿光滑軌道下滑至水平部分後，與質量亦為 m 的靜止乙球發生總動能守恆的一維碰撞。已知重力加速度為 g ，且取水平向右為正值速度的方向，則兩球碰撞後，甲球的速度 v_1 與乙球的速度 v_2 為下列何者？



- (A) $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}$
 (B) $v_1 = -v_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2gH}$
 (C) $v_1 = -v_2 = \sqrt{gH}$
 (D) $v_1 = 0, v_2 = \sqrt{2gH}$
 (E) $v_1 = 0, v_2 = \sqrt{gH}$

111 分科

26. 一質量為 m 的小木塊，前方繫有一理想彈簧，如圖所示。此系統由光滑斜面頂端自靜止滑下，進入光滑水平面後正向撞上鉛直牆面，彈簧因被壓縮而使木塊減速，並將木塊原本的動能轉換為彈簧位能，之後木塊在某一瞬間停止不動，定義此為終點。木塊自初始靜止至終點的整個過程，木塊下降的鉛直高度為 h ，令重力加速度為 g ，且過程中力學能守恆、系統到達最大速率前尚未撞上牆面，回答下列問題。

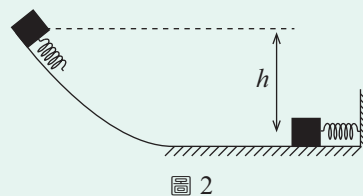
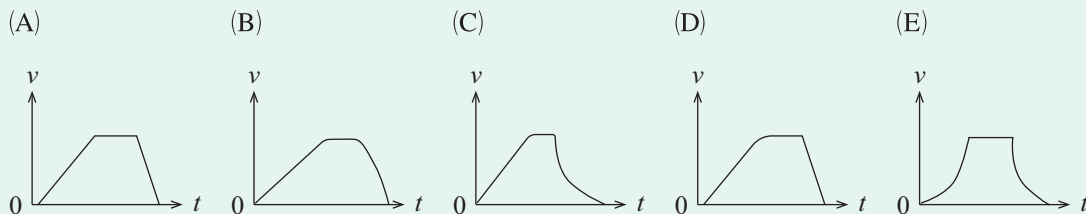


圖 2

(1) 下列敘述何者正確？

- (A) 木塊所達到的最大動能為 mgh
 (B) 整個過程中，彈簧對木塊所作的功為正值，且等於 mgh
 (C) 彈簧的彈性能在終點時比在初始靜止時增加 $\frac{mgh}{2}$
 (D) 木塊在終點的瞬間，彈簧對牆面的水平作用力量值必小於 mg
 (E) 彈簧被壓縮的過程中，木塊進行等加速運動

(2) 考慮木塊的速率 v 對時間 t 的變化，下列圖形何者正確？



112 分科

26. 答 (1) A (2) B

4-2 一維非彈性碰撞

熱點 1 非彈性碰撞

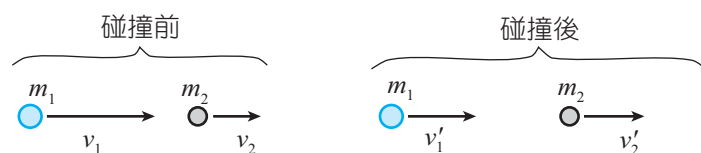
1. 一維非彈性碰撞的性質

- (1) 碰撞過程中兩物體之間的力為**非保守力**，所以碰撞過程系統的**力學能不守恆**。
- (2) 碰撞後兩物體分離，系統的總動能較碰撞前**減少**。雖然力學能不守恆，但**能量仍守恆**。



▲ 發生碰撞的兩車可視為非彈性碰撞。

2. 一維非彈性碰撞的數學分析



在同一直線上運動的兩物體，其質量各為 m_1 及 m_2 ，在碰撞前的速度各為 v_1 及 v_2 ，碰撞後的速度各為 v_1' 及 v_2' ，若此碰撞為非彈性碰撞，則

$$\begin{cases} \text{由動量守恆} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \cdots \cdots \text{①} \\ \text{由能量守恆} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \text{損失的力學能} \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

熱點 2 完全非彈性碰撞

若兩物體碰撞後**合為一體**，則稱為完全非彈性碰撞。



▲ 子彈與木塊作完全非彈性碰撞，子彈穿入木塊後，兩者的相對速度為 0。

- 1. 由於碰撞後兩物體的**速度相同**，所以 $v_1' = v_2' = v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ 。
- 2. 碰撞後系統的總動能 = **質心動能** = $K_c = \frac{1}{2} \times (m_1 + m_2) v_c^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$ 。

觀念小試 1

下列哪些是一維（正向）非彈性碰撞的性質？（多選）

- (A) 動量守恆 (B) 力學能守恆 (C) 質心速度不變 (D) 分離速度等於接近速度 (E) 若為完全非彈性碰撞，則碰撞後系統的總動能等於質心動能

答 ACE

觀念小試 2

兩物體 A、B 發生迎面碰撞，碰撞後 A、B 都朝 A 原來移動的方向運動，下列推論何者正確？

(A)碰撞前 A 的動量量值一定比 B 大 (B)碰撞前 A 的動能一定比 B 大 (C)碰撞前 A 的速率一定比 B 大 (D) A 的質量一定比 B 大 (E) A 的密度一定比 B 大

85 學測

答 A

解 令 A 原來的移動方向為正方向 $\Rightarrow \vec{p}_A > 0, \vec{p}_B < 0, \vec{p}'_A > 0, \vec{p}'_B > 0$
 $\Rightarrow \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B > 0 \Rightarrow |\vec{p}_A| > |\vec{p}_B|$ 。

範例 1 一維非彈性碰撞



在光滑水平地面上，質量為 $3m$ 、速度為 v 的甲木塊，與質量為 m 的靜止乙木塊，發生一維的正面碰撞。若碰撞後乙木塊相對於甲木塊的速度為 $0.6v$ ，則下列敘述哪些正確？

(A)此碰撞為彈性碰撞 (B)在碰撞過程中，甲、乙兩木塊的總動量守恆 (C)碰撞後甲木塊的速率為 $0.6v$ (D)碰撞後乙木塊的速率為 $1.0v$ (E)碰撞後甲、乙兩木塊的總動能較碰撞前減少了 $0.24mv^2$

105 指考

答 BCE

解 (A)兩木塊的分離速度 $0.6v \neq$ 接近速度 $v \Rightarrow$ 此碰撞為非彈性碰撞；

(C)(D)設碰撞後甲木塊的速度為 v' ，則乙木塊的速度為 $v_{乙地} = v_{乙甲} + v_{甲地} = 0.6v + v'$ 。

由動量守恆 $\Rightarrow 3mv + 0 = 3mv' + m(v' + 0.6v) \Rightarrow v' = 0.6v, v_{乙地} = 0.6v + 0.6v = 1.2v$ ；

(E) $\frac{1}{2}(3m)v^2 - [\frac{1}{2}(3m)(0.6v)^2 + \frac{1}{2}m(1.2v)^2] = 0.24mv^2$ 。

類題

如圖所示，質量 M 的木塊懸吊於長度為 L 的輕繩下端。一質量 m 的子彈以水平速度 v 射穿木塊後，速度減為 $\frac{v}{2}$ ，設子彈穿過木塊的時間極短，重力加速度為 g ，木塊上升高度不超過 L ，則：

(1)木塊可以上升的最大高度 = ？

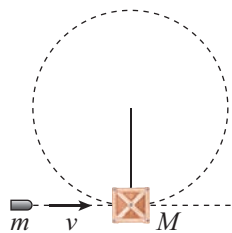
(2)此射穿過程，損失多少力學能？

答 (1) $\frac{m^2v^2}{8M^2g}$ (2) $\frac{(3M-m)mv^2}{8M}$

解 (1)設木塊剛被子彈射穿後的速度為 v' ，由動量守恆 $\Rightarrow mv = m \times \frac{v}{2} + Mv' \Rightarrow v' = \frac{mv}{2M}$ ，

由 $v_{低}^2 = v_{高}^2 + 2g\Delta h \Rightarrow (\frac{mv}{2M})^2 = 0 + 2g\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{m^2v^2}{8M^2g}$ 。

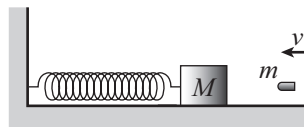
(2)損失力學能 $= \frac{1}{2}mv^2 - [\frac{1}{2}m(\frac{v}{2})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{mv}{2M})^2] = \frac{(3M-m)mv^2}{8M}$ 。



範例 2

一維完全非彈性碰撞

如右圖，質量為 M 之木塊，靜置於一光滑水平面上，其一側繫於一力常數 k 之彈簧。有一質量 m 的子彈以 v 之速率射入木塊，且留於木塊中，求此彈簧之最大壓縮量。



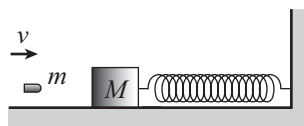
答 $\frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$

解 合體速度 $= v_c = \frac{mv}{M+m}$ ，合體壓縮彈簧過程系統的力學能守恆，可得

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 = \frac{1}{2}kR^2 \Rightarrow R = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}。$$

類題

右圖中彈簧的力常數 $k = 250 \text{ N/m}$ ，其右端固定，左端聯結一質量 $M = 10 \text{ kg}$ 的木塊，靜置於無摩擦力的水平面上。今一顆體積很小、質量 $m = 10 \text{ g}$ 的子彈，向右以水平速度 v 射入且留於木塊上，形成子彈與木塊的組合體，從子彈與木塊接觸到子彈與木塊相對靜止的這段碰撞時間為 Δt 。碰撞後組合體作左右向的簡諧運動，其週期為 T ，彈簧最大壓縮量為 0.20 m 。如果 $\Delta t \ll T$ ，且彈簧的質量可以忽略不計，下列敘述哪些選項為正確？（多選）



- (A) 子彈射入木塊過程為完全彈性碰撞 (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$ (C) 簡諧運動的過程中，組合體的最大速率為 $\frac{M}{M+m}v$ (D) 簡諧運動系統之總力學能為 5 焦耳 (E) 子彈水平速度 v 約為 1000 m/s

研究試題

答 BDE

解 (A) 為完全非彈性碰撞；

(C) 組合體的最大速率 = 剛結合時一起運動的速率 $= v_c = \frac{mv}{M+m}$ ；

(D) $E = U_{\max} = \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2} \times 250 \times 0.20^2 = 5 \text{ (J)}$ ；

(E) $K_{\max} = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 = \frac{(mv)^2}{2(M+m)} = \frac{(0.01v)^2}{2(10+0.01)} \approx \frac{0.0001v^2}{20}$ ；

由 $K_{\max} = U_{\max} \Rightarrow \frac{0.0001v^2}{20} = 5 \Rightarrow v \approx 1000 \text{ (m/s)}$ 。

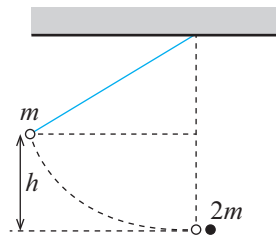
範例 3

一維完全非彈性碰撞



一單擺，擺錘質量為 m 。今將擺錘向一側拉高 h 後釋放，當擺錘擺至最低點時，與另一質量 $2m$ 的靜止小球發生正向碰撞，若碰撞後合為一體，不計空氣阻力，則下列哪些正確？（多選）

- (A) 擺錘下墜與碰撞過程動量均守恒 (B) 單擺擺動時力學能守恒，碰撞過程力學能不守恒 (C) 碰撞後瞬間，組合體速率為 $\sqrt{2gh}$ (D) 組合體上升高度可達 $\frac{h}{9}$ (E) 碰撞過程，系統的能量變化為 $-\frac{1}{3}mgh$



答 BD

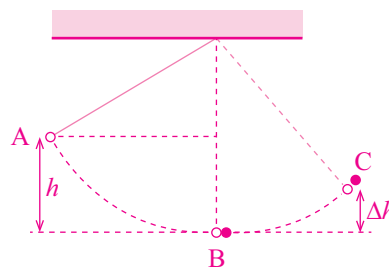
解 (A) 擺錘下墜過程速度會改變，所以動量不守恒；碰撞過程水平方向無外力，水平方向動量守恒；

(C) 如圖，擺錘： $A \rightarrow B$ ， $v_B^2 = 0^2 + 2gh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$ ，

合體在 B 點的速度： $v'_B = \frac{mv_B}{m+2m} = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$ ；

(D) 合體： $B \rightarrow C$ ， $v'^2 = 0^2 + 2g\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{h}{9}$ ；

(E) $\Delta E = (3m)g \cdot \frac{h}{9} - mgh = -\frac{2}{3}mgh$ 。



類題

右圖為一衝擊擺，用來測量子彈之速率。若子彈與木塊質量分別為 0.1 公斤與 0.9 公斤，木塊被擊中後，子彈鑲嵌在木塊之中，且盪到最大高度 $h = 0.2$ 公尺，若重力加速度 g 為 10 公尺/秒²，則

- (1) 子彈鑲嵌在木塊後的瞬間，木塊與子彈的速率為多少公尺/秒？
- (2) 子彈射入木塊前之速率為多少公尺/秒？
- (3) 因碰撞所損失的動能為多少焦耳？

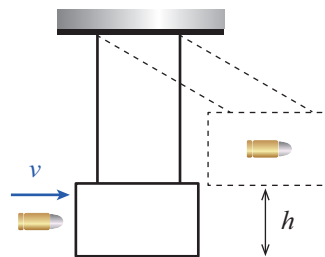
答 (1) 2 公尺/秒 (2) 20 公尺/秒 (3) 18 焦耳

解 (1) 設子彈鑲嵌在木塊後瞬間的合體速率為 v_c ，

由 $v_{低}^2 = v_{高}^2 + 2g\Delta h \Rightarrow v_c^2 = 0 + 2 \times 10 \times 0.2 \Rightarrow v_c = 2$ (m/s)。

(2) 由 $v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow 2 = \frac{0.1 v_1}{0.1 + 0.9} \Rightarrow v_1 = 20$ (m/s)。

(3) 損失的動能 $= \frac{1}{2} \times 0.1 \times 20^2 - \frac{1}{2} \times (0.1 + 0.9) \times 2^2 = 18$ (J)。





補充練習

基本題

* 為多選題

- (B) 1. 兩物體作非彈性碰撞，下列敘述哪一個是正確的？
(A) 碰撞前後之動能相等，動量亦相等 (B) 碰撞前後之動能不相等，動量相等 (C) 碰撞前後之動能相等，動量不相等 (D) 碰撞前後之動能不相等，動量也不相等 **聯考題**

- * (BD) 2. 甲、乙兩球在光滑的水平直線軌道上以相反方向作等速率 v_0 的運動，當發生正面碰撞後，甲球反向以速率 v_0 運動，而乙球依原方向繼續以小於 v_0 的速率運動，則下列敘述哪些正確？
(A) 碰撞過程中，甲球的受力量值比乙球的受力量值大 (B) 碰撞前後兩球的動量向量和保持不變 (C) 碰撞後兩球的動量向量和變小 (D) 甲球的質量比乙球的質量小 (E) 此碰撞為彈性碰撞 **107 學測**

- (C) 3. 在光滑水平面上一質量 M 的質點以 2.0 m/s 的速率向右運動，與靜止的另一質量 $4M$ 的質點發生一維非彈性碰撞。碰撞後質量 M 的質點反彈，以速率 0.50 m/s 向左運動，則質量 $4M$ 質點碰撞後向右的速率約為多少 m/s ？
(A) 0 (B) 0.38 (C) 0.63 (D) 0.94 (E) 2.5 m/s **102 學測**

- (E) 4. 一質量為 60 kg 的成人駕駛質量 920 kg 的汽車，在筆直的高速公路上以時速 108 km/h (30 m/s) 等速度行駛，車上載著質量 20 kg 的小孩，兩人皆繫住安全帶。途中不慎正向追撞總質量為 2000 kg 、時速為 54 km/h (15 m/s) 的卡車，碰撞後兩車糾結在一起，但駕駛人與小孩仍繫在座位上。假設碰撞時間為 0.2 s 且所有阻力的影響均可忽略不計，則在碰撞期間，安全帶對小孩的平均作用力大約多少 N ？
(A) 3000 (B) 2500 (C) 2000 (D) 1500 (E) 1000 **104 學測**

- (D) 5. 一質量為 0.1 千克 的木塊在光滑地板上以 0.1 公尺/秒 的速度作等速運動，此時有一子彈迎面射來而嵌入木塊中，設子彈質量為 1 克 ，速率為 1 公里/秒 ，則子彈射入木塊之後，木塊之速率為何？
(A) 0.92 (B) 1.96 (C) 4.9 (D) 9.8 (E) 19.6 公尺/秒 **聯考題**

* (BE) 6. 一質量為 m 的物體甲靜置於光滑水平面上，物體甲連接在一質量可忽略、長度為 ℓ 的細桿上，細桿上有一圓環，套住固定在水平面上的釘子，圓環與釘子之間的摩擦可以忽略，如下圖所示。另一相同質量的物體乙，在水平面上以 v 的速度，沿垂直細桿的方向作直線運動。甲、乙物體作正向碰撞後黏在一起，則下列敘述哪些正確？

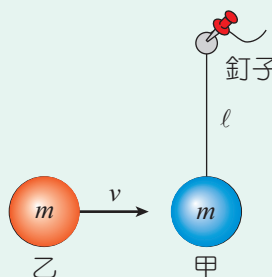
(A) 碰撞後，甲、乙兩物體作等速度圓周運動

(B) 碰撞後，甲、乙兩物體作等速率圓周運動

(C) 碰撞後，兩物體的加速度為 $\frac{4v^2}{\ell}$

(D) 碰撞後，兩物體的加速度為 $\frac{v^2}{2\ell}$

(E) 碰撞後，兩物體的加速度為 $\frac{v^2}{4\ell}$



93 指考補考

7. 下列敘述與能量守恆定律和動量守恆定律有關：

(甲) 自高度 h_0 處落下的石頭，在高度 h 處的速度 v 符合公式 $v^2 = 2g(h_0 - h)$ (g 為重力加速度)。

(乙) 步槍射擊時，在子彈向前射出後，槍身會後退。

(丙) 將燒熱的鐵塊放入冷水中，鐵塊溫度降低時，水的溫度會升高。

(丁) 行進中的車子因煞車而靜止後，其煞車裝置會發熱。

(戊) 沿一直線以相同速率運動的輕、重兩球，若碰撞後黏在一起，則此黏合體必沿重球原來的運動方向前進。

試回答(1)~(2)題。

88 學測

* (ACD) (1) 上列敘述中哪些比較適合作為能量守恆定律的例證？

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁 (E) 戊

* (BE) (2) 上列敘述中哪些比較適合作為動量守恆定律的例證？

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁 (E) 戊

* (ABD) 8. 在光滑的水平面上有一靜止且質量為 M 的木塊，一質量為 m 的子彈以速度 v 向右水平射入該木塊。在陷入木塊的過程中，子彈受摩擦力而減速。子彈最後停留在木塊中，兩者以相同的速度運動。下列敘述哪些正確？

(A) 當射入的子彈減速時，摩擦力對木塊作正功 (B) 子彈與木塊互施摩擦力，且兩力量值相同方向相反 (C) 當子彈減速停留在木塊後，木塊的末速為 $\frac{mv}{M}$ (D) 在子彈陷入木塊後，當兩者的速度相等時，摩擦力消失 (E) 由於沒有外力作用於子彈與木塊的系統，故系統的動能守恆

103 學測

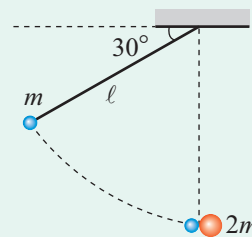
* (ACD) 9. 一質量為 m 的子彈，以速度 v 水平射入一個放在光滑平面上的靜止木塊，木塊的質量為 M ，子彈射入木塊後嵌入其中。下列敘述哪些正確？

(A) 碰撞前後，動量守恆 (B) 碰撞前後，動能守恆 (C) 碰撞前後，總能量守恆 (D) 嵌有子彈的木塊，其速度為 $\frac{mv}{M+m}$ (E) 若木塊用一質量可忽略之輕繩吊著，則嵌有

子彈的木塊上升之高度為 $\frac{v^2}{2g}$ (g 為重力加速度)

聯考題

10. 一單擺長 ℓ ，擺錘質量 m 。今將 m 拉至擺線在水平之下 30° 俯角之位置（如圖）放開。當 m 擺至最低點時，與一質量為 $2m$ 的另一靜止小球發生正向碰撞：



(1) 若 m 與 $2m$ 為彈性碰撞，則碰撞後 m 可反彈多高？

(2) 若 m 與 $2m$ 碰撞後，合為一體，則碰撞後的一瞬間，擺線的張力為何？

10. 答 (1) $\frac{1}{18}\ell$ (2) $\frac{10}{3}mg$

聯考題

進階題

* 為多選題

(B) 11. 質量 m_1 的物體以初速 v 與質量 m_2 的靜止物體作完全非彈性碰撞。若知碰撞後系統總動能損失 20%，求兩物體質量比 $\frac{m_1}{m_2}$ 為何？

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 4 (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5 (E) 1

* (BCE) 12. 質量為 m_1 的甲物體，以初速度 v_0 朝 $+x$ 方向運動 ($v_0 > 0$)，與質量為 m_2 ，原為靜止之乙物體產生一維碰撞。碰撞後甲物體之速度為 v_1 ，乙物體之速度為 v_2 (朝 $+x$ 方向為正值)，則下列敘述，哪些為正確？

(A) 如 $v_1 > 0$ ，則 m_1 一定大於 m_2 (B) 如 $v_1 = 0$ 、 $v_2 = v_0$ ，則 m_1 一定等於 m_2

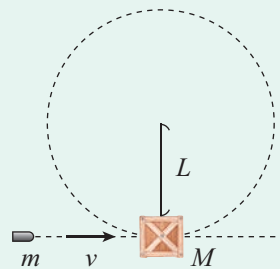
(C) 如 $v_2 - v_1 = v_0$ ，則此碰撞一定是彈性碰撞

(D) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0$ ，則此碰撞一定是彈性碰撞

(E) 如 $v_1 = v_2$ ，則此碰撞一定是非彈性碰撞

聯考題

13. 如圖所示，質量 M 的木塊懸吊於長度為 L 的輕繩下端。一質量 m 的子彈以水平速度射入木塊後，嵌入其中並與木塊一起運動，重力加速度為 g ，則：

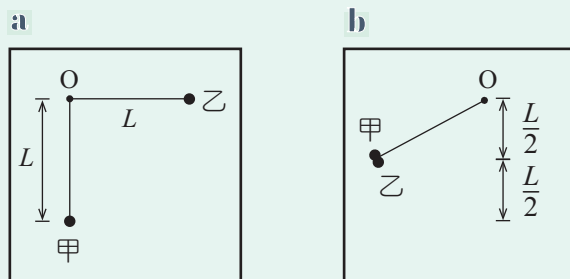


(1) 若木塊可以上升的最大高度為 L ，則子彈的初速為何？

(2) 若木塊可以轉一整圈，則子彈的初速至少為何？

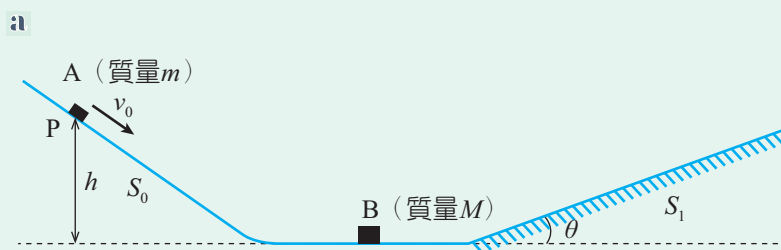
13. 答 (1) $\frac{M+m}{m}\sqrt{2gL}$ (2) $\frac{M+m}{m}\sqrt{5gL}$

14. 如圖(a)所示，今有質量分別為 $m_{\text{甲}}$ 與 $m_{\text{乙}}$ 之甲、乙兩小球，其質量比值 $\frac{m_{\text{甲}}}{m_{\text{乙}}} = \alpha < 1$ ，將兩小球分別用長度為 L 的細線懸掛於同一固定點 O ，甲球靜止懸掛，而乙球向右拉直至細線呈現水平，然後靜止釋放乙球使其與甲球產生碰撞，且兩球立即黏在一起，黏在一起後盪起的最大高度為 $\frac{L}{2}$ ，圖(b)為其示意圖，細繩質量及空氣阻力均可忽略。



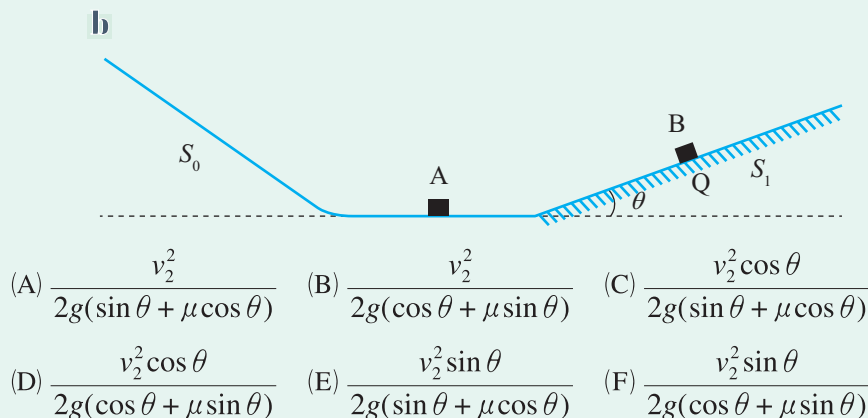
- (C) (1) 假設以兩球自然下垂時的最低點為位能零點，則因碰撞而損失的力學能占原來總力學能的比例為下列何者？
 (A) $\frac{1}{\alpha}$ (B) $\frac{\alpha}{2}$ (C) $\frac{1-\alpha}{2}$ (D) $\frac{1+\alpha}{2}$ (E) 0
- (C) (2) 質量比值 α 最接近下列何者？
 (A) 0.9 (B) 0.6 (C) 0.4 (D) 0.25 (E) 0.1

15. 下圖(a)中，斜面 S_0 與銜接的平面均光滑，斜面 S_1 則是粗糙的。質量為 m 的物體 A 自高度為 h 的 P 點以速率 v_0 沿斜面向下射出，之後在斜面下方的平面上與質量為 M 的 B 物體作正向碰撞。已知斜面 S_1 的斜角為 θ ，與物體 B 之動摩擦係數為 μ ，重力加速度為 g 。



- (E) (1) 物體 A 在撞擊物體 B 前瞬間的速率 $v_1 = ?$
 (A) $v_0 + \sqrt{gh}$ (B) $\sqrt{v_0^2 - gh}$ (C) $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$ (D) $v_0 + \sqrt{2gh}$ (E) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$
- (D) (2) 物體 A 在撞擊物體 B 後靜止不動，求碰撞後物體 B 的速率 $v_2 = ?$
 (A) $\frac{M}{m}v_1$ (B) $\sqrt{\frac{M}{m}}v_1$ (C) v_1 (D) $\frac{m}{M}v_1$ (E) $\sqrt{\frac{m}{M}}v_1$

(E) (3) 下圖(b)中，物體 B 被碰撞後到達斜面 S_1 的 Q 點時速率為 0，則 Q 點的高度 = ?



日本大學入學考試

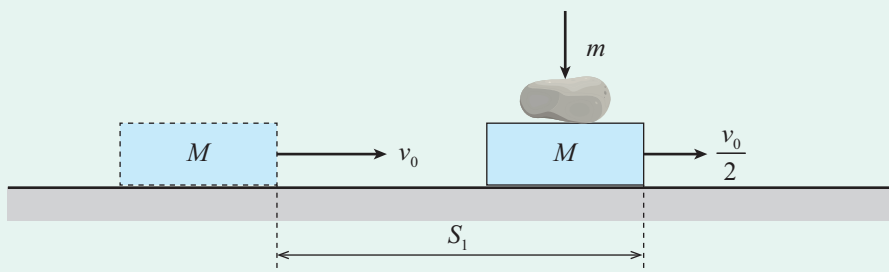
16. 質量 M 的木塊在水平地面上以初速度 v_0 滑出。已知木塊與地面間的動摩擦係數為 μ_k ，回答下列各問題：

93 指考

(1) 若木塊滑行一段距離 S_1 後，速度變成 $\frac{v_0}{2}$ ，求 S_1 。

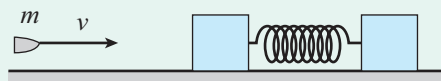
(2) 試問木塊滑行多少時間（以符號 t_1 表示）後，速度由 v_0 變成 $\frac{v_0}{2}$ ？

(3) 當木塊的速度變成 $\frac{v_0}{2}$ 的瞬間，有一質量為 m 的物體從木塊的正上方以接近零的速度落下，如下圖所示，並和木塊黏在一起。試問這兩個物體可繼續滑行多遠（以符號 S_2 表示）後才停住？



16. 答 (1) $\frac{3v_0^2}{8\mu_k g}$ (2) $\frac{v_0}{2\mu_k g}$ (3) $\frac{M^2 v_0^2}{8(M+m)^2 \mu_k g}$

17. 如右圖，有兩質量均為 m 的相同木塊，中間以力常數 k 的輕彈簧相連，靜置於光滑的水平面上。假設左方有質量為 m 的子彈，以 v 的速率水平射入左方木塊，並留在木塊中，求彈簧的最大壓縮量。



17. 答 $\sqrt{\frac{m}{6k}} v$

挑戰題

18. 為了將質量 $m = 3.0 \text{ g}$ 的鋼釘打入固定不動的木塊中，某人持質量 $M = 0.60 \text{ kg}$ 的鐵鎚，以 $v = 0.50 \text{ m/s}$ 的速度敲擊鋼釘一次，發現鋼釘進入木塊的深度 $d = 0.30 \text{ cm}$ 。已知木塊對鋼釘的阻力與鋼釘的長度方向平行，且阻力大小與鋼釘進入木塊的深度 x 成正比，即 $F = -kx$ 。若鐵鎚敲擊鋼釘可視為完全非彈性碰撞，且在鋼釘停下前，鐵鎚與鋼釘不分離，重力可以忽略，試回答以下問題：

- (1) 在鋼釘進入木塊停下的過程，木塊阻力 F 對鋼釘所作的功 W 為何？
- (2) 若用鐵鎚以同一速度 v 敲擊鋼釘共 4 次，則鋼釘進入木塊中的總深度 D 為何？
- (3) 求比例常數 k 。

研究試題

18. 答 (1) -0.075 J (2) 0.60 cm (3) $1.7 \times 10^4 \text{ N/m}$

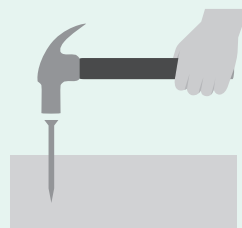
19. 以質量為 M 的鐵鎚沿水平方向正面敲擊鐵釘，欲將長為 L 、質量為 m 的鐵釘垂直釘入牆內。若鐵鎚每次均以相同之速度 v_0 敲擊鐵釘，敲擊後鐵鎚與鐵釘一起運動，使鐵釘進入牆內一段距離。設鐵鎚與鐵釘碰撞過程所經歷的時間極短，可以忽略不計，且每次鐵釘被鐵鎚敲擊入牆時所受之阻力，均為前次阻力之 n 倍 ($n > 1$)。忽略重力，回答下列各子題：

96 指考

- (1) 鐵鎚剛敲擊到鐵釘而與鐵釘一起運動時，兩者的總動能為何？(以 M 、 m 及 v_0 表示)
- (2) 如果鐵釘受鐵鎚敲擊兩次後就完全釘入牆內，求證第一次敲擊時的阻力

$$\text{為 } F_1 = \frac{1}{2} \frac{M^2 v_0^2}{M+m} \frac{1}{L} \left(1 + \frac{1}{n}\right)。$$

- (3) 若第一次敲擊時，釘入牆內的深度為 d_1 ，當 d_1 夠大，則敲擊多次後，鐵釘會完全進入牆內。求證若 $d_1 > L(1 - \frac{1}{n})$ ，則鐵釘才有可能在有限次的敲擊後完全被釘入牆內。



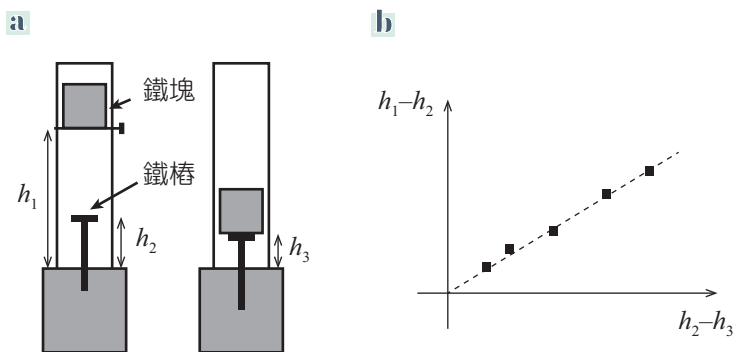
19. 答 (1) $\frac{M^2 v_0^2}{2(M+m)}$ (2) 詳見解析 (3) 詳見解析

素養混合題

打樁機

下圖(a)所示為一種打樁機的簡化模型，它可藉由鐵塊從靜止開始自由下落，將鐵樁打入堅硬的岩層中，其中鐵塊最初高度為 h_1 ，而鐵樁露出在地面上的高度由 h_2 減少為 h_3 。已知鐵塊與鐵樁碰撞後瞬間合而為一，若針對不同的 h_1 與 h_2 組合，測得的 $(h_1 - h_2)$ 對 $(h_2 - h_3)$ 的關係如圖(b)所示，試回答下列各題。

改自 105 學測



(C) 1. 鐵塊撞擊鐵樁前瞬間的速率 = ?

- (A) $\sqrt{2gh_1}$ (B) $\sqrt{2gh_2}$ (C) $\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ (D) $\sqrt{2g(h_1 - h_3)}$ (E) $\sqrt{2g(h_2 - h_3)}$

1. 設鐵塊撞擊鐵樁前的速率為 $v_1 \Rightarrow v_1^2 = 2g(h_1 - h_2) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ 。

(D) 2. 若鐵塊的質量為 m_1 ，鐵樁的質量為 m_2 ，則鐵塊與鐵樁碰撞後瞬間的合體速率 = ?

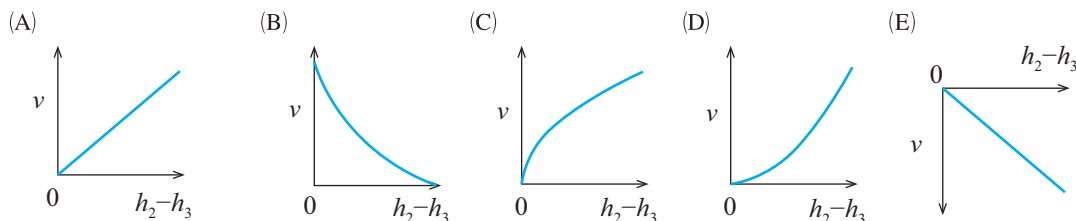
- (A) $\frac{m_1}{m_2} \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$ (B) $\frac{m_2}{m_1} \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$ (C) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$
(D) $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ (E) $\frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

2. 詳見解析。

3. 由圖(b)的 $(h_1 - h_2)$ 對 $(h_2 - h_3)$ 的關係，請推論鐵樁在岩層中受到的平均阻力與鐵樁深入距離的關係，並寫出推論過程。

3. 詳見解析。

(C) 4. 承上題，若 h_1 保持定值，但以不同 h_2 進行打樁實驗。假設鐵樁與鐵塊碰撞後合為一體並以最初速率 v 進入岩層，則下列何者最接近 v 對 $(h_2 - h_3)$ 的正確作圖？



4. 詳見解析。