實驗物理與理論物理密切相關，搞實驗沒有理論不行，但只停留於理論而不去實驗，科學是不會前進的。

——丁肇中

CHAPTER 1

測量與不確定度

1-1 不確定度與有效數字
1-2 不確定度的組合
1-3 因次與因次分析

科學研究常常需要進行測量，即使在日常生活中，測量也是很普遍的經驗。然而要完成測量，工具是不可或缺的。

例如偵測人體的心率時，可利用具有偵測功能的智慧型手錶；量取木板長度時，需要使用米尺或捲尺。

▲ 測量長度工具——捲尺

科學觀點

測量總有不確定度

將小球從樓頂由靜止釋放，並用碼錶測量落地時間，如果重複幾次，會發現每次測量的結果總是不盡相同。

如果換用其他測量時間的儀器（如手錶）重新測量，測量結果仍然會出現差異。

從這個結果可發現測量都會有不確定度，而使用不同的儀器進行測量也會影響到測量結果的不確定度。

▼ 測量時間儀器——碼錶

導讀

科學的最大特點就是實證，任何主張都要通過實驗檢驗才能確立，而測量經驗告訴我們，對同一物理量重複測量的結果總是難以一致，這就顯示測量都有**不確定度**（uncertainty）。

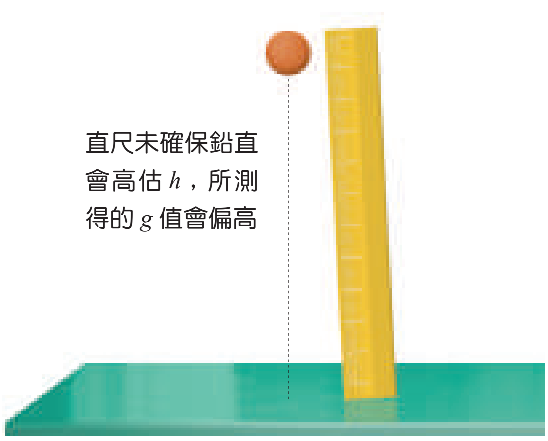
為了建立一套表示測量結果與不確定度的共同規則，國際標準組織（以下簡稱 ISO）於 1993 年發表「量測不確定度表示指引」（以下簡稱 GUM），如今已成為數據分析的國際標準。

本章將介紹導致測量值難以確定的原因，認識如何表示測量值與評估不確定度，並討論測量值作運算後，不確定度該如何表示，最後討論物理量的因次與因次分析的應用。

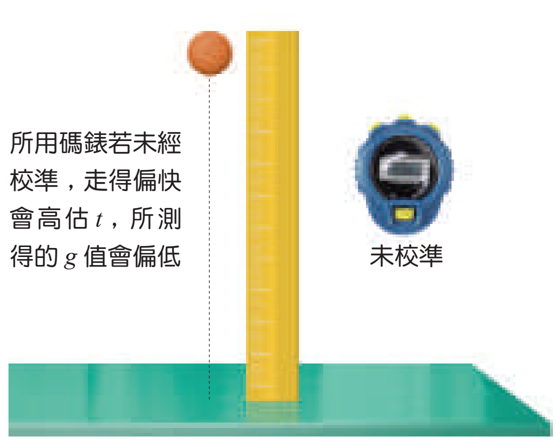
1-1 不確定度與有效數字

1 待測值與不確定度

測量的目的就是希望獲得某物理量在特定條件下的值，稱為**待測值**（measurand）。由於許多原因，使得測量值未必與待測值吻合。例如利用自由落體公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 來測量所在地的重力加速度 g 時，若高估落體高度 h，測得的 g 值就會偏高（圖 1-1）；而高估落體時間 t，測得的 g 值就會偏低（圖 1-2）。



▲ 圖 1-1　直尺不鉛直會高估 h



▲ 圖 1-2　碼錶走得快會高估 t

縱使謹慎地將上述失誤都排除，碼錶的運作方式、測量者的反應時間、環境的溫溼度、氣壓等的微小變動，還是會使每次落體時間 t 的測量值不盡相同，算出的 g 值也不一致。

由此可看出測量的不確定度是不可避免的，這種不確定度並非來自犯錯，它和被測量物與測量儀器的特性都有關係，而且也會受到測量者及環境的影響。為了避免與錯誤或偏差等概念混淆，GUM 改以**不確定度**取代傳統的「**誤差**（error）[註]」一詞，並逐漸成為數據分析之主流。

GUM 將**標準不確定度**（standard uncertainty）評估分成 A、B 兩類，其中 A 類評估是依據多次重複測量結果的統計方式來評估不確定度，而不屬於 A 類的其他評估方式則歸屬於 B 類，本節將簡介相關內容。

知識探索+ 有效數字與其位數 知識延伸

1. 測量值通常是由一組精確數字與估計數字所組成，這當中有意義的數字稱為有效數字。
2. 辨別有效數字的簡單規則如下：
   (1) 非零數字與非零數字之間的零都是有效數字。
   例如：2.03 有 3 位有效數字。
   (2) 小數的後綴零都是有效數字，而前綴零都是無效數字。
   例如：0.020 30 有 4 位有效數字。
   (3) 整數的後綴零中，做記號的零與其前方的零都是有效數字。
   例如：203 0$\underline{0}$0 有 5 位有效數字。
3. 欲知數值中哪些位數是有效數字時，可先將該數值以科學記號 $A \times 10^n$ 表示，其中 $1 \leq A < 10$，A 中所有數字都是有效數字。
   例如：$203\ 0\underline{0}0 = 2.030\ 0 \times 10^5$，因此有 5 位有效數字。

註 以往在進行數據分析時，將誤差定義為：誤差 = 測量值 − 真值。但嚴格來說，真值往往並不可知，因此誤差實際上也無法有效測得。

2 不確定度的 A 類評估

對同一物理量 x 重複測量 N 次而得測量值 x_1、x_2、⋯、x_N 時，其**平均值** $\bar{x}$ 為

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x_i}{N} \tag{1.1}$$

並以**樣本標準差** s 來表示這 N 個樣本測量值的離散程度，即

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\Sigma_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1.2}$$

根據 GUM 的規範，標準不確定度的 A 類評估 u_A（以下簡稱 A 類不確定度）定義為

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{1.3}$$

不難看出，N 個樣本測量值彼此愈離散，則樣本標準差 s 會愈大，因此其 A 類不確定度 u_A 也會愈大；而透過測量次數的增加，能有效降低 A 類不確定度 u_A。

3 不確定度的 B 類評估

若不是來自重複測量的統計評估，則稱為不確定度的 B 類評估 u_B（以下簡稱 B 類不確定度），包括其中兩種類型：

1. 若引用書上、文獻或網頁等的數據時，直接引用其不確定度作為 u_B。
2. 若直接從儀器上讀取數據時，假設測量值會均勻分布，則每一測量值的 B 類不確定度為

$$u_B = \frac{\text{儀器最小刻度}}{2\sqrt{3}} \tag{1.4}$$

例如 讀取最小刻度為 1 mm 的直尺時，其 $u_B = 1\ \text{mm} \times \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \doteqdot 0.289\ \text{mm}$

4 標準不確定度與其位數

對同一物理量進行多次重複測量時，除了統計上有 A 類不確定度 u_A 之外，每個數據在測量時仍受儀器最小刻度的限制而有 B 類不確定度 u_B，因此其標準

不確定度 u 實為 A 類與 B 類不確定度的組合，根據 GUM 的規範

$$u=\sqrt{{u_A}^2+{u_B}^2} \tag{1.5}$$

為何必須考慮 B 類不確定度，說明如下：如果用最小刻度為秒（s）的手錶來測量落體時間，若 4 次測量數據都是 3 秒，其 u_A 將為 0；若未考慮每個數據之 u_B，將產生標準不確定度竟為 0 的荒謬結果。

在計算過程中，不確定度的位數可多保留幾位，但在記錄時以無條件進位，遇 0 不進位，最多保留 2 位不確定度位數。

例如 多次測量某一物體長度得到：

1. 不確定度 $u=0.036\ 17$ m 時，記為 $u=0.037$ m
2. 不確定度 $u=0.036\ 07$ m 時，記為 $u=0.036$ m

5 最佳估計值與其位數

某物理量經多次測量後，我們將其**平均值** $\bar{x}$ 以四捨五入進位，使其末位數字與不確定度末位對齊，所得作為該待測值的**最佳估計值** X。

例如 多次測量某一物體長度得到：

1. 平均值 $\bar{x}=3.581\ 42$ m，標準不確定度 $u=0.037$ m
2. 取該長度的最佳估計值 $X=3.581$ m

對齊 四捨五入

3.581 42

0.037

6 測量結果的表示

表示測量結果時，除了需指出待測值的最佳估計值之外，也應評估其不確定度才算完整。根據 GUM 的規範，測量結果表示成

$$\text{待測值 } x=\text{最佳估計值 } X\pm\text{標準不確定度 } u \tag{1.6}$$

這表示在測量值遵守常態分布的情況下，待測值大約有 68.3 % 的機率會落在 $X-u$ 到 $X+u$ 的範圍內。

例如 上述例子，測量結果可表示成：(3.581 ± 0.037) m，其中最佳估計值有 4 位有效數字。

7 舉例說明 1

甲、乙兩生分別以不同方法測量小球從樓頂釋放到落地所需時間，為避免單次測量有失偏頗，兩人都測量了 4 次。兩生的測法如圖 1-3 所示，而測量結果與分析參見表 1-1。

▼圖 1-3　甲、乙兩生的測法。

▼表 1-1　甲、乙兩生不同測法的比較。

	甲	乙
測量數據 （次數 $N=4$）	$t_1=2.61$ s $t_2=2.99$ s $t_3=3.12$ s $t_4=2.52$ s	$t_1=2.77$ s $t_2=2.83$ s $t_3=2.78$ s $t_4=2.86$ s
平均值 $\overline{t}=\dfrac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}$	$\overline{t}=2.810\,0$ s	$\overline{t}=2.810\,0$ s
樣本標準差 $s=\sqrt{\dfrac{(t_1-\overline{t})^2+(t_2-\overline{t})^2+(t_3-\overline{t})^2+(t_4-\overline{t})^2}{4-1}}$	$s=0.290\,2$ s	$s=0.042\,4$ s
A 類不確定度 $u_A=\dfrac{s}{\sqrt{N}}=\dfrac{s}{\sqrt{4}}$	$u_A=0.145\,1$ s	$u_A=0.021\,2$ s
B 類不確定度 $u_B=\dfrac{\text{儀器最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{0.01\text{ s}}{2\sqrt{3}}$	$u_B=0.002\,89$ s	$u_B=0.002\,89$ s
標準不確定度 $u=\sqrt{{u_A}^2+{u_B}^2}$ （無條件進位，遇 0 不進位，最多保留 2 位不確定度位數）	$u=0.145\,1$ s 記為 0.15 s	$u=0.021\,4$ s 記為 0.022 s
最佳估計值 T （四捨五入進位，末位數字與不確定度末位對齊）	$T=2.81$ s	$T=2.810$ s
測量結果	(2.81 ± 0.15) s	(2.810 ± 0.022) s

1　由上述實驗可知，所用碼錶與光電計時器之最小刻度雖然相同，均為 0.01 s，但利用光電計時器可免去肉眼判斷與人工操作所產生的各種不確定因素，所測得的不確定度更小，因此會有更好的測量品質。由此可知，測量方法的差異確實會影響不確定度的大小。分科趨勢 習題 12.

範例 1-1

素養題

某生以碼錶測量一小球懸掛於彈簧下端上下的振動週期，共測量 4 次，所得數據整理如右表，試回答下列問題：

編　號	第一次	第二次	第三次	第四次
振動週期	3.33 s	3.28 s	3.35 s	3.32 s
平均值	3.32 s			
樣本標準差	0.029 4 s			

(1) 振動週期的 A 類不確定度為何？

(2) 振動週期的 B 類不確定度為何？

(3) 振動週期的標準不確定度為何？

(4) 如何表示振動週期的測量結果？

相關練習：習題 3.、8.、12.

分析 1. A 類不確定度 $u_A = \dfrac{s}{\sqrt{N}}$，B 類不確定度 $u_B = \dfrac{\text{儀器最小刻度}}{2\sqrt{3}}$

2. 標準不確定度 $u = \sqrt{{u_A}^2 + {u_B}^2}$，記錄時以無條件進位，遇 0 不進位，最多保留 2 位不確定度位數。

3. 最佳估計值 T 即為平均值 $\bar{t} = \dfrac{\Sigma t_i}{N}$，以四捨五入進位，使其末位數字與不確定度末位對齊。

解 (1) A 類不確定度 $u_A = \dfrac{s}{\sqrt{N}} = \dfrac{0.029\ 4\ \text{s}}{\sqrt{4}} = 0.014\ 7\ \text{s}$

(2) 由題表中振動週期數據可知，碼錶最小刻度為 0.01 s，故每個數據的 B 類不確定度 $u_B = \dfrac{0.01\ \text{s}}{2\sqrt{3}} = 0.002\ 89\ \text{s}$

(3) 標準不確定度 $u = \sqrt{{u_A}^2 + {u_B}^2} = \sqrt{(0.014\ 7\ \text{s})^2 + (0.002\ 89\ \text{s})^2} = 0.014\ 98\ \text{s}$

記錄時以無條件進位，遇 0 不進位，最多保留 2 位不確定度位數，故 $u = 0.015$ s。

(4) 記錄最佳估計值 T 時，以四捨五入進位，使其末位數字與不確定度末位對齊，記為 $T = 3.320$ s，故振動週期的測量結果表示為 (3.320 ± 0.015) s。

迷思概念辨析

正確概念

當測量結果表示成 $X \pm u$ 時，表示若為常態分布，待測值 x 大約有 68.3 % 的機率會落在下列範圍：$X - u < x < X + u$

易錯概念

當測量結果表示成 $X \pm u$ 時，表示待測值 x 一定會落在下列範圍：$X - u < x < X + u$

1-2 不確定度的組合

1 兩測量值作加減時的不確定度

將兩個物理量作加減運算是人們常見的經驗，此時該如何評估加減運算後的不確定度呢？依照 GUM 的規範，若獨立測量兩物理量 x、y，其最佳估計值分別以 X 與 Y 表示，不確定度分別以 u_x 與 u_y 表示，所得結果各為 $X \pm u_x$ 與 $Y \pm u_y$ 時，在作以下加減運算時，其最佳估計值、不確定度與測量結果如表 1-2 所示。

▼表 1-2　加減運算時的表示法

運算種類	最佳估計值	不確定度	測量結果
$z = x + y$	$Z = X + Y$	$u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$(X + Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$z = x - y$	$Z = X - Y$	$u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$(X - Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

範例 1-2

如右圖，藥師在調配中藥時用到了 A、B 兩種藥材，其中 A、B 兩藥材重量的測量值各為 (20.00 ± 0.40) gw 與 (15.00 ± 0.30) gw，試回答下列問題：

(1) A、B 兩藥材總重量的不確定度為何？

(2) A、B 兩藥材總重量應如何表示？　　相關練習：習題 5.、9.

分析 1. $z = x + y$ 時，z 的不確定度 $u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

2. $z = x + y$ 時，z 的表示法為 $(X + Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

解 (1) A、B 兩藥材總重量的不確定度為

$$\sqrt{(0.40\ \text{gw})^2 + (0.30\ \text{gw})^2} = 0.50\ \text{gw}$$

(2) A、B 兩藥材總重量為

$$(20.00\ \text{gw} + 15.00\ \text{gw}) \pm 0.50\ \text{gw} = (35.00 \pm 0.50)\ \text{gw}$$

2 兩測量值作乘除時的不確定度

將兩個物理量作乘除運算也是人們常見的經驗，此時又該如何評估乘除運算後的不確定度呢？依照 GUM 的規範，若獨立測量兩物理量 x、y，其最佳估計值分別以 X 與 Y 表示，不確定度分別以 u_x 與 u_y 表示，所得結果各為 $X \pm u_x$ 與 $Y \pm u_y$ 時，在作以下乘除運算時，其最佳估計值、不確定度與測量結果如表 1-3 所示。

▼表 1-3　乘除運算時的表示法

運算種類	最佳估計值	不確定度	測量結果
$z = xy$	$Z = XY$	$u_z = \lvert XY \rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$	$XY \pm \lvert XY \rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$
$z = \frac{x}{y}$	$Z = \frac{X}{Y}$	$u_z = \left\lvert \frac{X}{Y} \right\rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$	$\frac{X}{Y} \pm \left\lvert \frac{X}{Y} \right\rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$

迷思概念辨析

正確概念

z 的不確定度 $u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$，一定比 x 的不確定度 u_x 大。

易錯概念

$z = x - y$ 的運算中，z 的不確定度會比 x 的不確定度小。

正確概念

因不確定度只能是正值，不加絕對值符號可能導致不確定度為負值的謬誤。

易錯概念

$z = xy$ 或 $z = \frac{x}{y}$ 運算中，z 的不確定度中加入絕對值符號似乎是多此一舉。

範例 1-3

試回答以下關於導出量的問題：

(1) 一長方形之長與寬的測量值各為 (20.00 ± 0.30) cm 與 (10.00 ± 0.20) cm，則其面積應如何表示？

(2) 某人等速沿一直線跑步，位移為 (100.00 ± 0.30) m，歷時 (25.00 ± 0.10) s，則其平均速度量值應如何表示？

相關練習：習題 6.、10.

分析 1. $z = xy$ 時，z 的表示法為 $XY \pm |XY| \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$

2. $z = \frac{x}{y}$ 時，z 的表示法為 $\frac{X}{Y} \pm \left|\frac{X}{Y}\right| \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$

解 (1) 面積 = 長 × 寬，其

最佳估計值為 $20.00\ \text{cm} \times 10.00\ \text{cm} = 200.0\ \text{cm}^2$

不確定度為 $|200.0\ \text{cm}^2| \times \sqrt{(\frac{0.30\ \text{cm}}{20.00\ \text{cm}})^2 + (\frac{0.20\ \text{cm}}{10.00\ \text{cm}})^2} = 5.0\ \text{cm}^2$

所以面積可表示為 $(200.0 \pm 5.0)\ \text{cm}^2$。

(2) 平均速度 $= \frac{\text{位移}}{\text{時間間隔}}$，其

最佳估計值為 $\frac{100.00\ \text{m}}{25.00\ \text{s}} = 4.000\ \text{m/s}$

不確定度為 $|4.000\ \text{m/s}| \times \sqrt{(\frac{0.30\ \text{m}}{100.00\ \text{m}})^2 + (\frac{0.10\ \text{s}}{25.00\ \text{s}})^2} = 0.020\ \text{m/s}$

所以平均速度量值可表示為 $(4.000 \pm 0.020)\ \text{m/s}$。

1-3 因次與因次分析

在高中物理必修課程中，學過 SI 的七個基本物理量與其單位，如表 1-4 所示。利用這七個基本物理量可以組合出許多導出量，例如密度就是質量與體積相除而得。以密度這個物理量為例，如果採用不同的單位系統，其單位可以是 g/cm^3、kg/m^3，甚至是 lb/in^3。縱使單位不同，可是其本質仍是質量與長度立方的比值，此種以七個基本物理量表示出物理量的組成，稱為該物理量的**因次**（dimension）。

表 1-4　SI 的七個基本物理量與其單位

基本物理量	單位名稱		單位符號
時　間	秒	second	s
長　度	米或公尺	meter	m
質　量	千克或公斤	kilogram	kg
電　流	安　培	ampere	A
熱力學溫度	克耳文	kelvin	K
物　量	莫　耳	mole	mol
光強度	燭　光	candela	cd

在力學中，分別以 L、M、T 表示**長度**（length）、**質量**（mass）與**時間**（time）三個物理量的因次，以符號 [　] 代表括號內物理量的因次，例如密度 D 之因次為 $[D] = ML^{-3}$。力學中常見的物理量之單位與因次，如表 1-5 所示。

表 1-5　力學中常見物理量之單位與因次

物理量	速　度	加速度	力	功	動　能
SI 單位	m/s	m/s^2	$kg{\cdot}m/s^2$	$kg{\cdot}m^2/s^2$	$kg{\cdot}m^2/s^2$
因　次	LT^{-1}	LT^{-2}	MLT^{-2}	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-2}

一個物理定律表示式，等式兩側的因次必須相同。引入因次的觀點對物理概念的理解幫助甚大，要求等式兩側的因次必須相同，可快速獲得物理公式的大致形式，這種方法稱為**因次分析**（dimensional analysis）。

範例 1-4

素養題

小全在探討質點作等速圓周運動時，發現其向心加速度量值 a，與該質點之速率 v 及其所繞圓周之半徑 r 都有關，初步懷疑 $a = kr^m v^n$，其中 k 是無單位的比例常數，試利用因次分析幫小全找出 m 與 n 之值。

相關練習：習題 7.、11.、13.

分析 1. L、M、T 分別表示長度、質量與時間三個物理量的因次。

2. 以 [ ] 表示該物理量之因次。

3. 等式兩側應該有相同之因次。

解 $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$

$[r] = \mathrm{L}$，故 $[r^m] = \mathrm{L}^m$

$[v] = \mathrm{LT}^{-1}$，故 $[v^n] = \mathrm{L}^n\mathrm{T}^{-n}$

又由 $[a] = [k][r^m][v^n]$，得 $\mathrm{LT}^{-2} = \mathrm{L}^m \cdot \mathrm{L}^n\mathrm{T}^{-n} = \mathrm{L}^{m+n}\mathrm{T}^{-n}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 1 \\ -n = -2 \end{cases}$$

可得 $m = -1$、$n = 2$

迷思概念辨析

正確概念

速度與速率有相同的因次，功與能量也有相同的因次，卻是不相同的物理量。

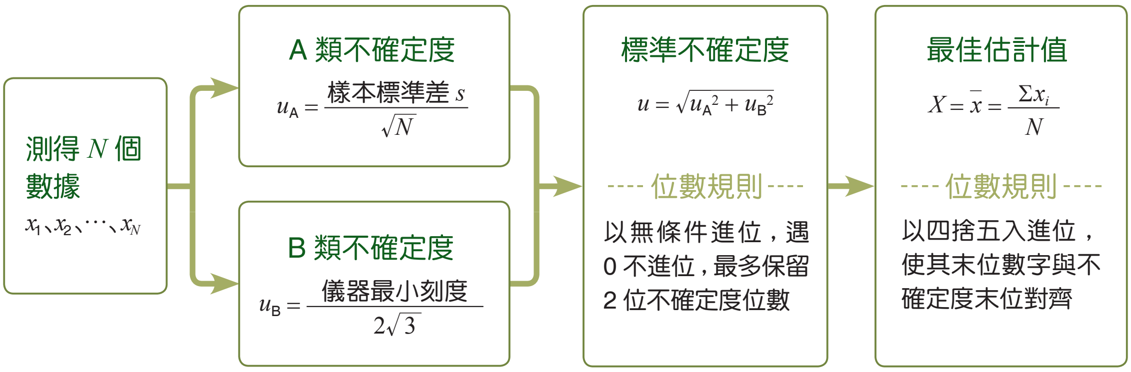
易錯概念

物理量的因次相同，就是相同的物理量。

重點整理

1-1 不確定度與有效數字 1

- 不確定度源於被測量物、測量儀器的特性，並受測量者及環境的影響。
- 對同一物理量 x 測量 N 次後，表示測量結果的流程如下圖所示。



- 測量結果記為 $X \pm u$，待測值大約有 68.3 % 的機率會落在 $X - u$ 至 $X + u$ 之間。

1-2 不確定度的組合 5

- 物理量 z 由獨立測量值 x、y 運算而得時，z 的表示法如下表：

運算種類	測量結果
$z = x + y$	$(X + Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$z = x - y$	$(X - Y) \pm \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$z = xy$	$XY \pm \lvert XY \rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$
$z = \frac{x}{y}$	$\frac{X}{Y} \pm \left\lvert \frac{X}{Y} \right\rvert \sqrt{(\frac{u_x}{X})^2 + (\frac{u_y}{Y})^2}$

1-3 因次與因次分析

- 以七個基本物理量表示出物理量的組成，稱為該物理量的**因次**。
- 可以藉由因次分析，比較等式兩邊之因次來檢驗等式是否有誤。

習題

基本題

1-1 不確定度與有效數字

1. 在測量單擺擺動週期時，下列㈠～㈣哪一項不能算是造成不確定度的原因？
   ㈠溫度的微小波動　　㈡氣壓的微小變動
   ㈢測量者的緊張　　㈣所用碼錶走得過慢
2. 不斷增加測量次數，最終可以使標準不確定度趨於零，這說法是否正確？
3. 用最小刻度為 1 mg 的天平多次測量一塊黏土的質量，算得 A 類不確定度為 0.432 mg，則其標準不確定度為何？
4. 一根木棒長度的測量結果表示為 (40.30 ± 0.40) cm 時，則：
   (1) 最佳估計值為何？
   (2) 標準不確定度為何？
   (3) 測量結果的含意為何？

1-2 不確定度的組合

5. A、B 兩物體質量的測量結果各為 (68.0 ± 1.6) g 與 (42.0 ± 1.2) g，則 A、B 兩物體總質量的：
   (1) 標準不確定度為何？
   (2) 最佳估計值為何？
6. 一塑膠塊之質量與體積的測量值各為 (60.0 ± 1.8) g 與 (40.0 ± 1.6) cm^3，則塑膠塊密度的：
   (1) 標準不確定度為何？
   (2) 最佳估計值為何？

1-3 因次與因次分析

7. 如何表示位能的因次？

進階題

1-1 不確定度與有效數字

8. 以最小刻度為 0.01 s 之碼錶對某單擺週期 T 測量 9 次，得平均值 $\overline{T} = 2.375\ 42$ s，且樣本標準差 $s = 0.045\ 19$ s 時，應如何表示單擺週期之測量結果？

1-2 不確定度的組合

9. A、B 兩物體質量的測量值各為 (68.00 ± 0.80) g 與 (42.00 ± 0.60) g，則 A、B 兩物體的質量差應如何表示？

10. 若定義測量值 x 的相對不確定度 u_x' 為不確定度 u_x 與最佳估計值 X 絕對值的比值，即 $u_x' = \dfrac{u_x}{|X|}$。今有一物理量 $z = xy$，則 u_z' 與 u_x'、u_y' 有何關係？

1-3 因次與因次分析

11. 功與動能的因次為何？是否相同？

分科趨勢題 配合 P.11

12. 以同一把直尺對一支鉛筆的長度測量 4 次，結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、樣本標準差平方與 $\frac{1}{12}$，則鉛筆長度的測量值應如何表示？

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	樣本標準差平方	$\frac{1}{12}$
長　度（mm）	120.1	120.9	120.5	121.3	120.700	0.266 667	0.083 333

素養題

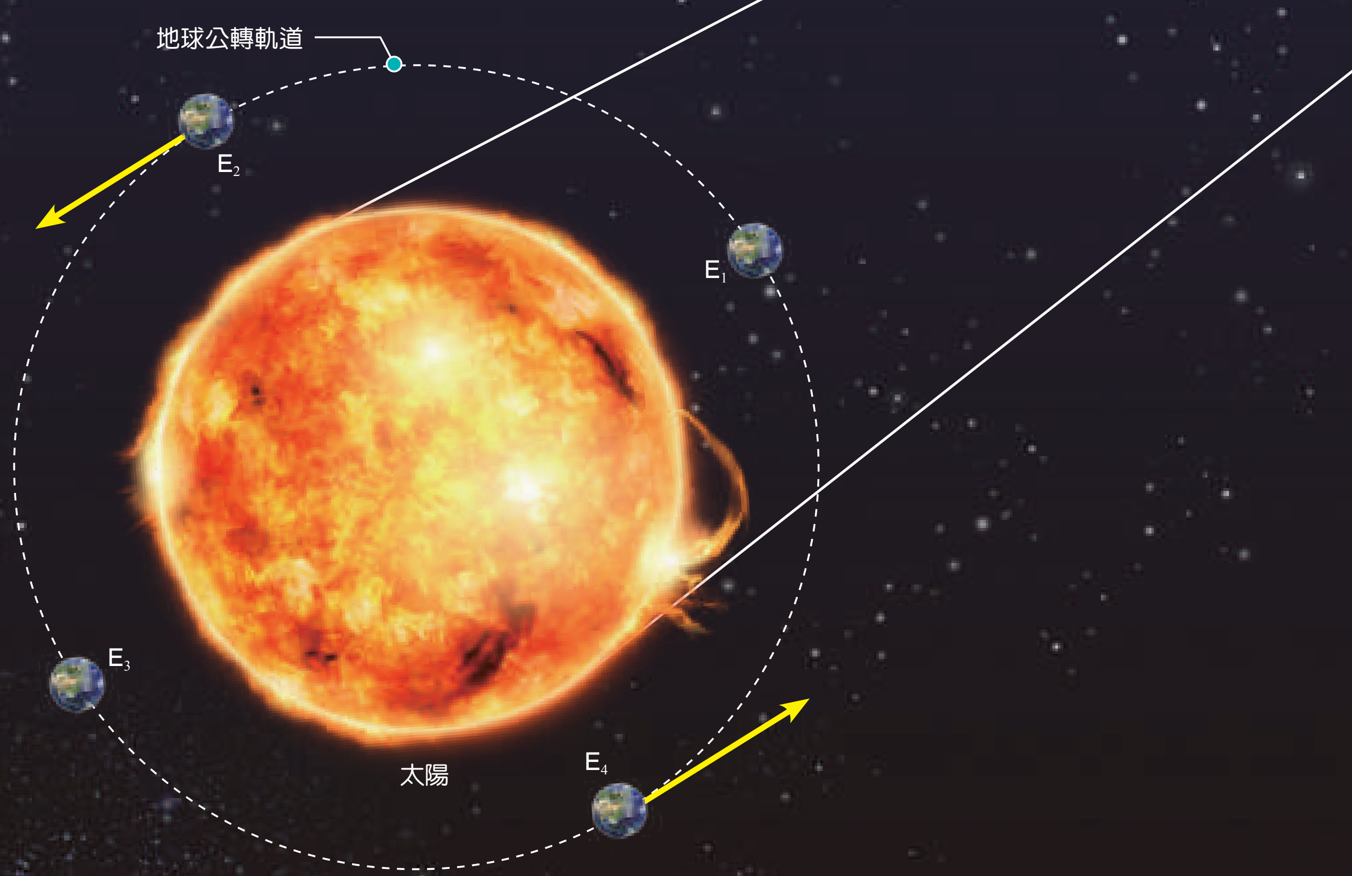
13. 戰繩（Battling Rope）是在繃緊繩子的一端上下揮動繩子，繩上會產生波動往另一端傳播，產生的波動會造成我們的身體不穩定，除了依靠核心肌群維持穩定外，全身的肌肉也將做出對抗反應，是一種全身性高強度的訓練，能提高新陳代謝與燃脂效率。運動員在健身的過程中，發現影響訓練強度的波速 v 與繩上繃緊的張力 F、繩子的密度 d、繩子的截面積 A 似乎都有關係，於是他大膽假設 $v \propto F^x d^y A^z$，請利用因次分析幫忙運動員找出 x、y、z 各為何？

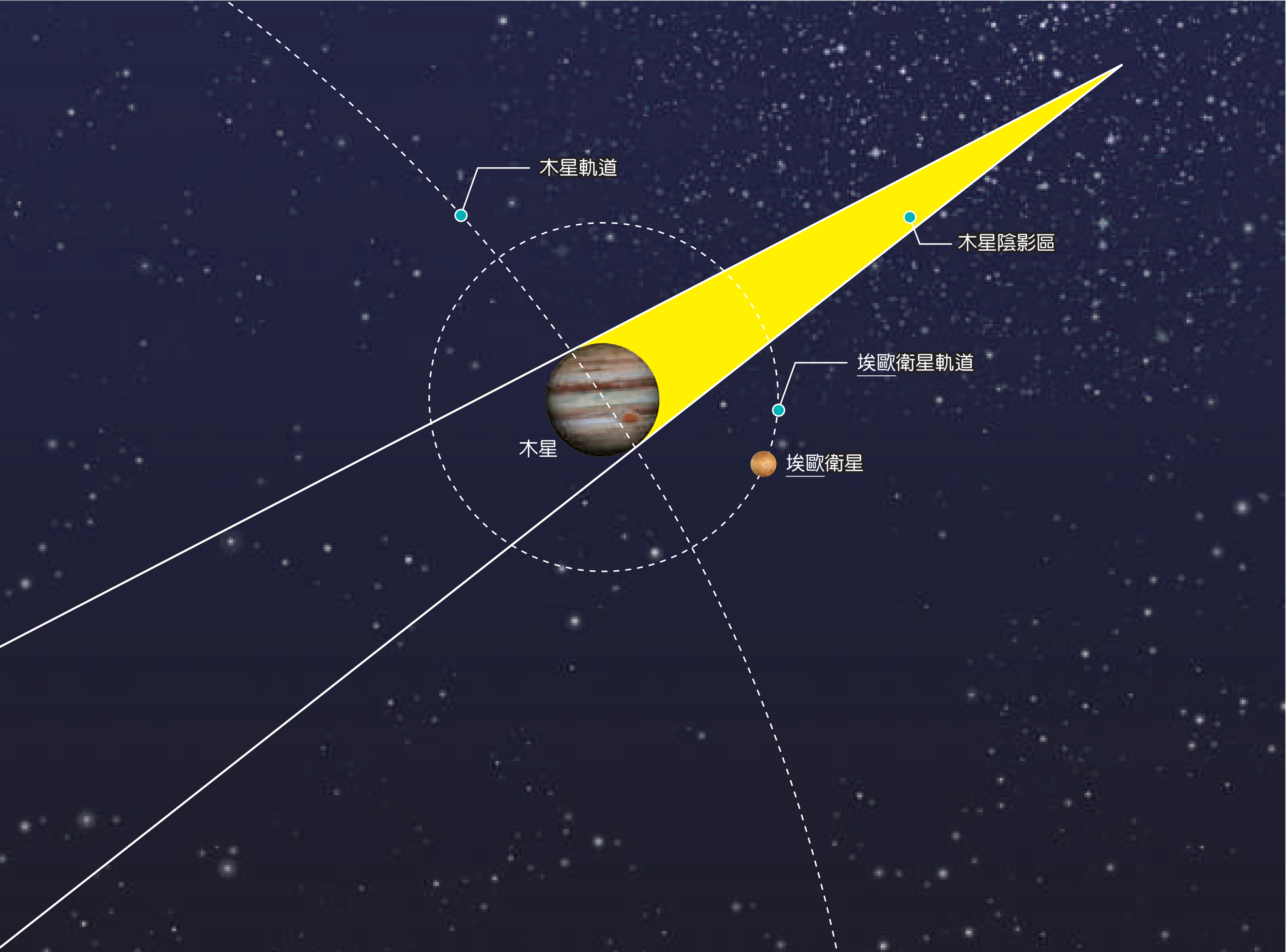
SPEED OF LIGHT
最早測出光速的方法

羅默觀察木星的衛星埃歐

1675 年，丹麥天文學家羅默（Ole Rømer，1644 ～ 1710）觀察木星的衛星埃歐（Io）離開木星陰影的時間，前後埃歐兩次離開陰影的時間差，就是埃歐繞木星的週期。

但在長期的測量後，羅默發現，當地球因自己的公轉而遠離木星時所測得的週期，比靠近木星時所測得的週期來得長。這個現象是因為當地球遠離木星時，埃歐離開木星陰影時反射出的光，要多走一段路（在一個週期中地球遠離木星的距離）才到達地球；反之，當地球靠近木星時，就少走一段路。測量這個時間差，加上地球在一個埃歐週期中走的距離，就可以測出光速。當然這個時間差很小，必須累積許多週期才能測量到，所以羅默測量整個地球由 E_1 經 E_2 到達 E_3 的過程中之埃歐週期的累積，首先成功地測出光速大約的數值。





羅默測出光速的方法

地球從離木星最近的 E_1 運行至離木星最遠的 E_3 時，累計埃歐週期較平均值總共多出 1320 秒，這相當於光從 E_1 沿地球公轉軌道直徑傳至 E_3 所需的時間，後人以今日所知的地球公轉軌道直徑（2.99×10^8 公里）來計算，測得的光速為 $\frac{2.99 \times 10^{11}\text{公尺}}{1320\text{秒}} = 2.27 \times 10^8$ 公尺 / 秒，約為光速準確值的四分之三。雖然這個測量方法因為沒有考慮到木星位置的變動，以致測量結果仍有相當程度的偏差，但羅默仍是歷史上第一個成功測得光速並非無限大的人。