天體的運動，即使包含行星的逆行現象，必須是均勻規則的圓周運動之組合；為什麼？因為它是最簡單與最完美的運動。

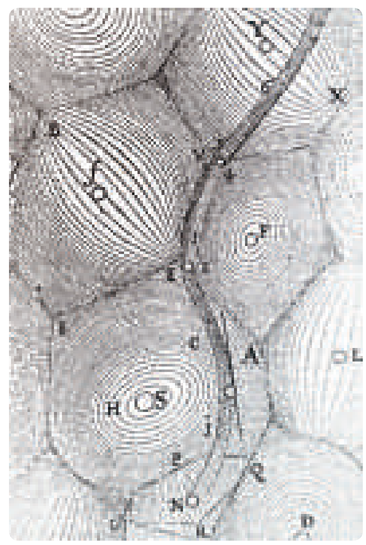
——柏拉圖

CHAPTER 3

運動學——平面運動

幾乎每位同學都知道自己出生時的星座，星座觀點是早在三千多年前首先由巴比倫人所提出，他們認為星座每天會隨太陽繞地球作圓周運動，但繞完一圈後便會稍微離開日出時的太陽 1°，所以一年之後又會再出現在太陽附近。

直到十六世紀哥白尼提出日心說時，仍是以圓周運動來描述複雜的自然現象。之後，笛卡兒（René Descartes，1596～1650）提出渦漩理論與惠更斯（Christiaan Huygens，1629～1695）的離心力，也全都是嘗試以圓周運動來解釋天體及落體現象。圓周運動是歷史上常被討論的一種平面運動，它為何如此重要呢？該如何清楚地描述其他的平面運動與圓周運動呢？



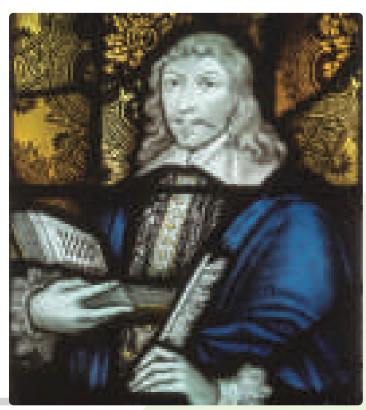
▲ 笛卡兒的渦漩理論圖

科學觀點

運動現象

笛卡兒為近代哲學之父，解析幾何創始人。他主張物理現象應該由不可質疑的基礎出發，而最不可質疑的便是幾何學，也就是由點線面延伸成占有空間的「物體（body）」或「質點」作為物理思維的出發點。進一步而言，所有的感官經驗都是由這些質點的位置變化（運動）所造成，此種觀點稱為「機械論」。笛卡兒這種將精神從物質中完全剔除的態度，雖然讓物質世界變得蒼白毫無生命，但他是圍著近代科學之目的而設計的，也讓近代科學的物理本性正式誕生。

▼ 笛卡兒



導讀

只作直線運動的物體畢竟並不多見，例如打擊者揮出全壘打時棒球的運動、行星繞日的轉動，都不屬於直線運動。為了解與處理非直線的平面運動情形，我們將先從拋體運動出發，藉著拋體所具有特殊的運動獨立性，即水平方向與鉛直方向的運動互不干擾，將平面上運動加以分解與合成，推演出運動質點在平面上的位移、速度與加速度所具有的向量性質，最後再找出描述拋體的運動方程式。

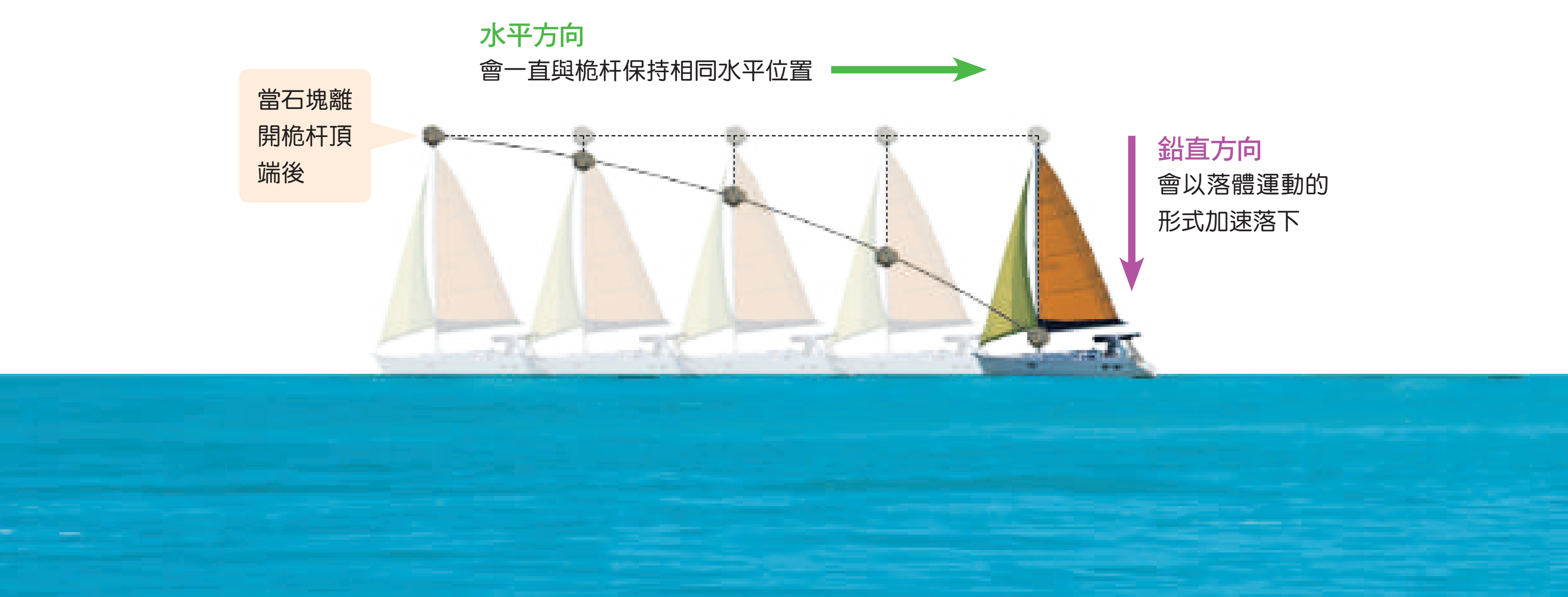
運動基本上可分為三種形式：移動、振動與轉動。利用此三種基本運動及其合成，大致上就可把握住許多複雜的運動現象。等速圓周運動（轉動）及簡諧運動（振動）即是其中最常見，且最重要的兩種基本運動形式，這兩種運動都具有週期的規律性，以後也將描述及分析它們之間的關聯性。

3-1 向量的意義、分解與合成

1 運動的獨立性與向量

早在歐洲的中世紀時期，便有很多人著手討論行進中船的桅杆上釋放一石塊的運動情形，認為石塊脫離桅杆，會落在杆後。但直到伽利略才開始質疑此觀點，並主張脫離的石塊會與桅杆一起運動（圖 3-1）。同理，這也可從水平等速飛行的直升機投下救援物資，看出物資與直升機在水平方向有相同的位置（圖 3-2）。

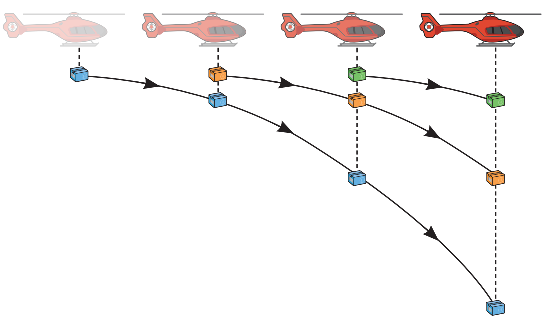
▼圖 3-1　伽利略對石塊自桅杆上釋放後，運動情形的描述。



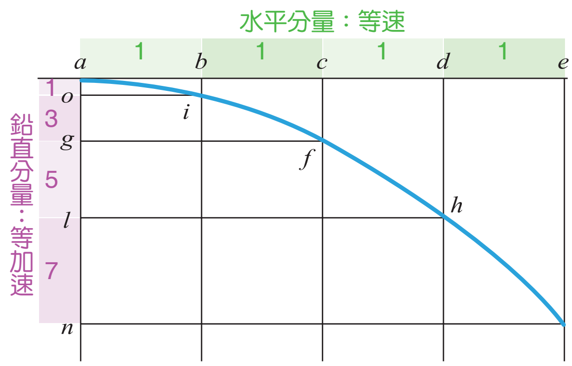
在圖 3-1 與圖 3-2 的例子中，向人們揭示了作非直線運動的物體總是可以將它劃分成兩個部分：一個為水平部分，另一個為鉛直部分，而此兩部分的運動或速度，彼此不會互相改變、干擾或阻礙，也可稱此運動的特徵為**運動的獨立性**。水平與鉛直這兩部分又要如何組成一個整體的量呢？伽利略曾說：

「當一物體的運動（或速度）是由水平與鉛直兩個運動合成的結果（圖 3-3），則兩部分各別位移的平方之和就是兩者合成位移的平方。」

此種關係有如由直角三角形的兩邊，求得其斜邊長的方法一樣，滿足此種加法原則的物理量，稱為**向量**（vector）。後人對物體在平面上運動的描述，一直都跟著伽利略的這種思考方式來分析討論。

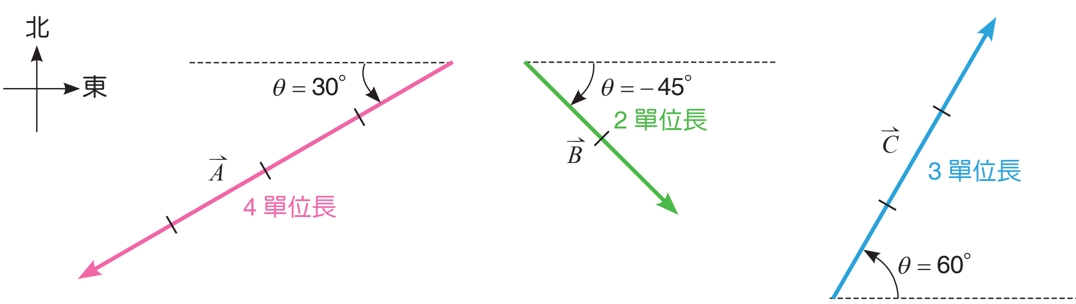


▲ 圖 3-2　物資自水平等速飛行的直升機上釋放後，一直與直升機保持在相同的水平位置。



▲ 圖 3-3　水平分量與鉛直分量，此兩分量之合成，即代表拋物線軌跡。

以現代的術語來說，向量是有量值、方向的量，例如物體在直線上運動的位移、速度與加速度都是向量。在直線上的向量比較簡單，它的方向只有向右（正）、向左（負），或向上（正）、向下（負）。若推廣到平面上，則向量的方向可以指向任意方向（圖 3-4）。

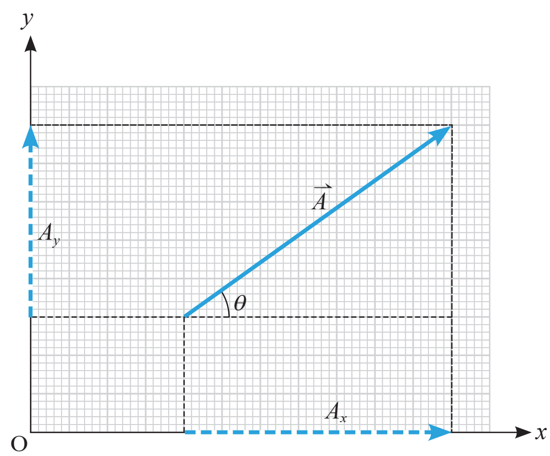


▲ 圖 3-4　$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 三向量的量值，方向為沿著箭號所指的方向。

數學上可用線段的長度來代表此向量的量值，在末端加上箭頭符號來代表此向量的方向。如圖 3-4 中，向量 $\vec{A}$ 為 4 個單位長，方向指向西偏南 30°；向量 $\vec{B}$ 為 2 個單位長，方向指向東偏南 45°；向量 $\vec{C}$ 為 3 個單位長，方向指向東偏北 60°。向量主要是以量值 A，與方向角 θ（向量與 $+x$ 軸的夾角）來表示，至於其起點在平面上何處並不重要。

2 向量的分解

在一平面上，取兩互相垂直的線，一線稱為橫軸 x，另一線稱為縱軸 y，其單位相同，交點為原點 O，構成**直角坐標**（rectangular coordinates）。向量 $\vec{A}$ 除了可用量值 A、方向角 θ 來表示外，還可將它分解成在 x 方向的投影量值 A_x，與在 y 方向的投影量值 A_y 來表示，A_x 與 A_y 分別稱為向量 $\vec{A}$ 在 x 方向與在 y 方向的分量（圖 3-5）。



▲ 圖 3-5　向量 $\vec{A}$ 的量值與方向，及其分量 A_x 與 A_y 表示的意義。

由正弦與餘弦函數的定義：$\sin\theta = \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，$\cos\theta = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$ 可知，若已知一向量的量值 A 與方向角 θ，則其分量為

$$A_x = A\cos\theta \quad \text{3.1a}$$

$$A_y = A\sin\theta \quad \text{3.1b}$$

我們也可用分量 A_x 與 A_y，來表示向量 $\vec{A}$ 的量值 A（也可以 $|\vec{A}|$ 表示）與方向角 θ，即

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{3.2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}\text{（}\theta\text{ 可由查表得知）} \quad \text{3.3}$$

其中正切函數的定義：$\tan\theta = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$，而式（3.2）的意義就是伽利略當初對向量的描述。一般常見的特殊角度，及其正弦、餘弦與正切函數之值，簡列於表 3-1。

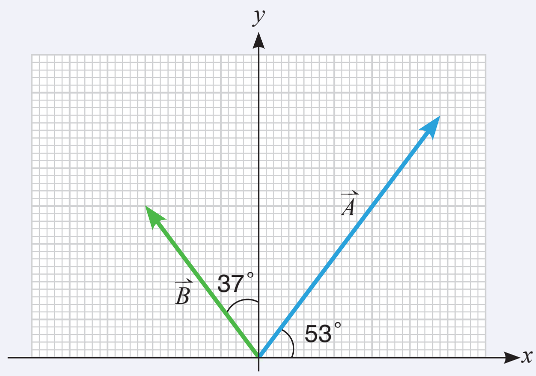
▼ 表 3-1 sin、cos 與 tan 在一些特殊角度的值（37° 與 53° 為近似值）。

函數 \ θ	30°	45°	60°	37°	53°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

範例 3-1

如右圖，試求向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 在水平及垂直方向之分量。（$A = 8.0$，$B = 5.0$）

相關練習：習題 1.



分析 1. 向量的水平分量 $A_x = A\cos\theta$

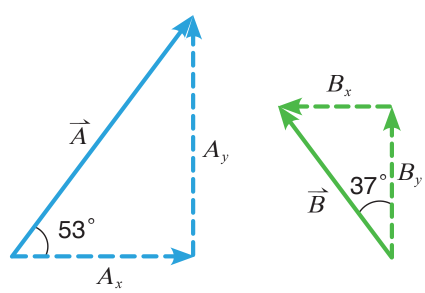
向量的垂直分量 $A_y = A\sin\theta$

2. $A_x = +8.0\cos 53^\circ$

$A_y = +8.0\sin 53^\circ$

$B_x = -5.0\sin 37^\circ$

$B_y = +5.0\cos 37^\circ$



解

$$\begin{cases} A_x = +8.0\cos 53^\circ = 8.0 \times \dfrac{3}{5} = 4.8 \\ A_y = +8.0\sin 53^\circ = 8.0 \times \dfrac{4}{5} = 6.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = -5.0\sin 37^\circ = -5.0 \times \dfrac{3}{5} = -3.0 \\ B_y = +5.0\cos 37^\circ = 5.0 \times \dfrac{4}{5} = 4.0 \end{cases}$$

3 向量的加法

圖形法：三角形法

由於向量只強調其量值與方向，而與它的起點及終點無關。利用此特性，我們可定義如圖 3-6(A)的兩向量 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的加法如下：將 $\vec{B}$ 平移（不改變其方向與長度），並將其起點與 $\vec{A}$ 的終點重疊，則自 $\vec{A}$ 的起點至 $\vec{B}$ 的終點之向量 $\vec{C}$，即為兩向量之和（圖 3-6(B)）。並以

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

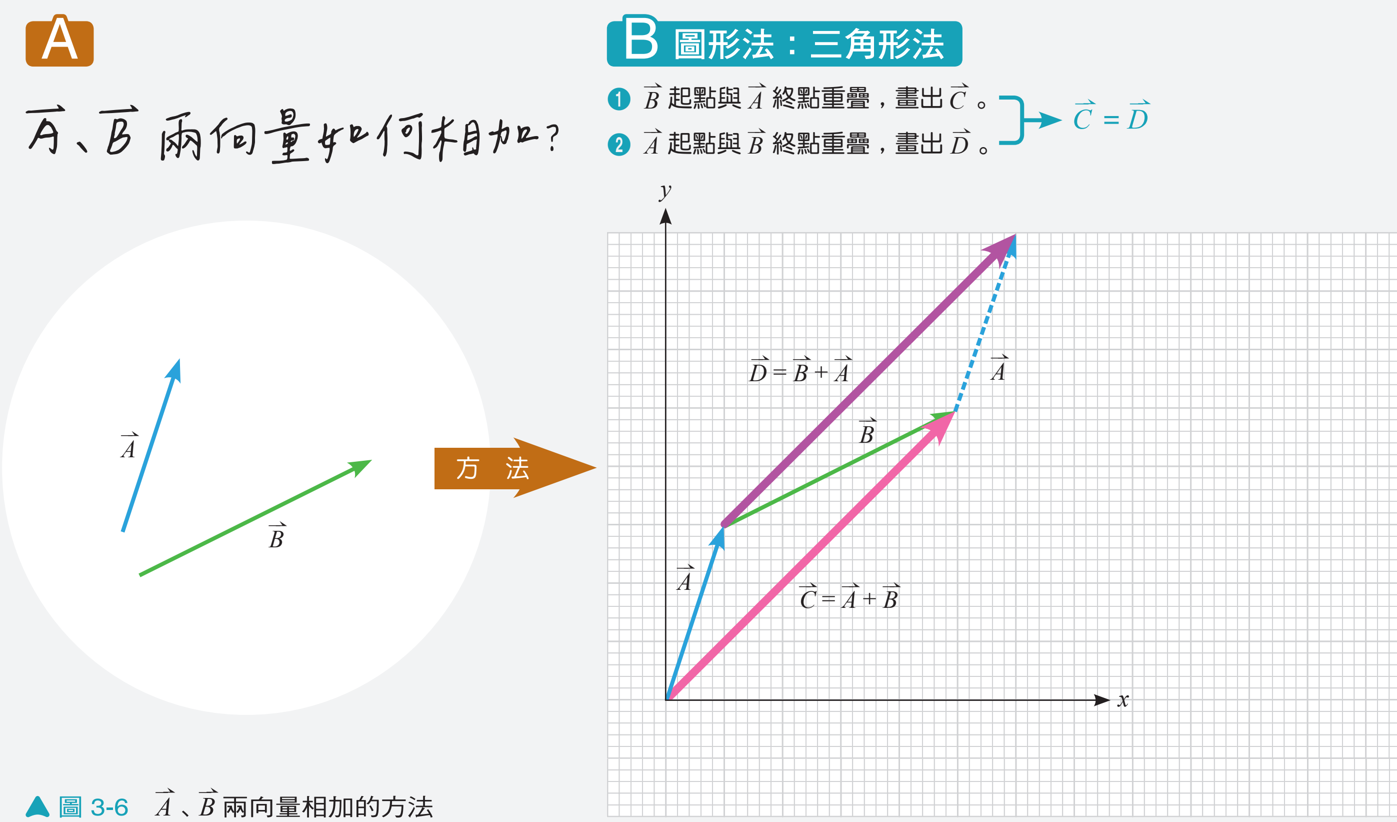
來表示，此種向量相加的方法，稱為三角形法。

同理，若先將 $\vec{A}$ 平移，並將其起點與 $\vec{B}$ 的終點重疊，再自 $\vec{B}$ 的起點至 $\vec{A}$ 的終點所代表的向量 $\vec{B}+\vec{A}=\vec{D}$（圖 3-6(B)），而 $\vec{C}$ 與 $\vec{D}$ 之長度相等、方向相同，故

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

圖形法：平行四邊形法

另外，也可自 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 兩向量的終點，分別畫出與 $\vec{B}$、$\vec{A}$ 向量平行的直線，而



▲ 圖 3-6　$\vec{A}$、$\vec{B}$ 兩向量相加的方法

形成一平行四邊形（圖 3-6(C)），則 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之向量和，即為此平行四邊形自起點所引出之對角線 $\vec{C}$ 所代表的向量，此種向量相加的方法，稱為平行四邊形法。

以上圖形法的兩種方法所表示向量相加或合成之規則，是向量最主要的一種特性。

分量法

我們可以先將 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 的水平與垂直分量表示出來，再將兩向量之水平與垂直分量對應相加，而得到兩向量之和 $\vec{C}$ 的水平及垂直分量（圖 3-6(D)），即

$$C_x = A_x + B_x \text{，} C_y = A_y + B_y \tag{3.4}$$

接著再將 C_x 與 C_y 平移相加開根號，即可得 $\vec{C}$ 之量值。

使用圖形法與分量法所得之向量和的結果，是一致沒有差別的。

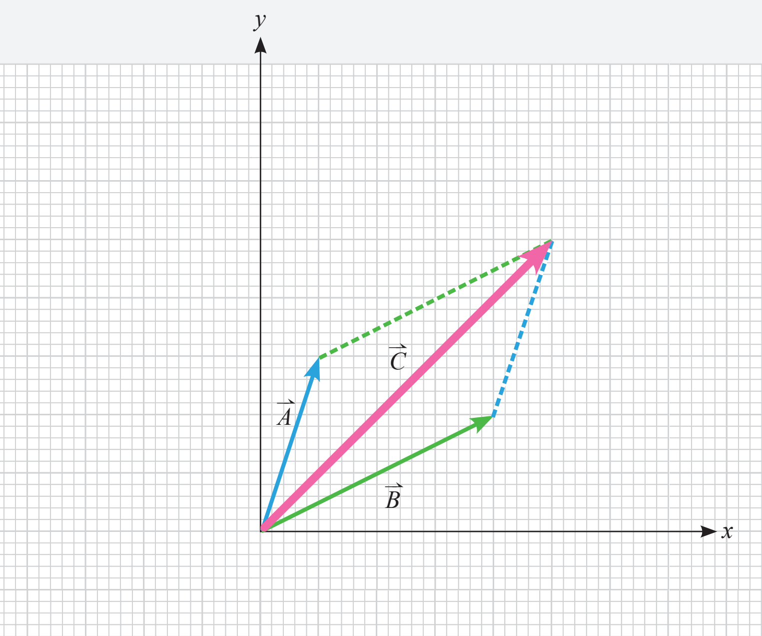
腦力Plus

判斷下列敘述正確或錯誤：

(1) 向量的分量與所選取的坐標系統有關。
(2) 向量的量值與所選取的坐標系統有關。
(3) 直角坐標向量的量值不會小於其分量。

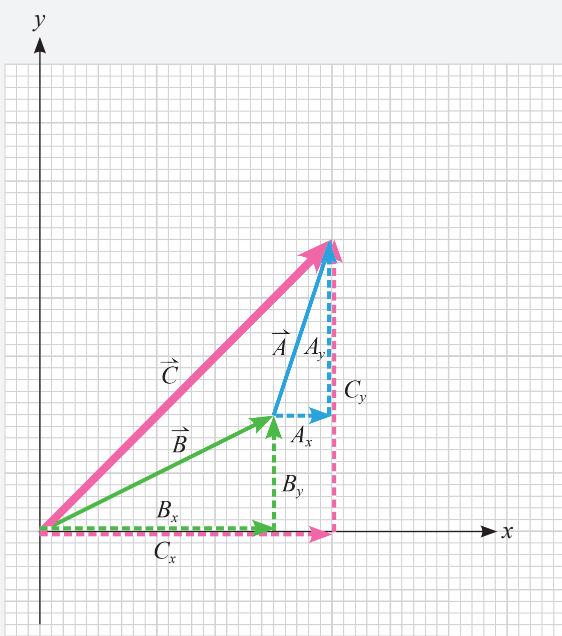
C 圖形法：平行四邊形法

$\vec{A}$、$\vec{B}$ 起點重疊，畫出對角線 $\vec{C}$。



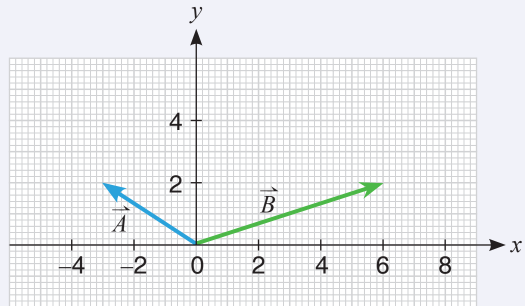
D 分量法

$\vec{A}$、$\vec{B}$ 水平與垂直分量各別表示，再對應相加，得到 $\vec{C}$ 的水平與垂直分量。



範例 3-2

向量 $\vec{A}$ 與向量 $\vec{B}$ 表示如右圖，試求 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之向量和。 相關練習：習題 9.(1)



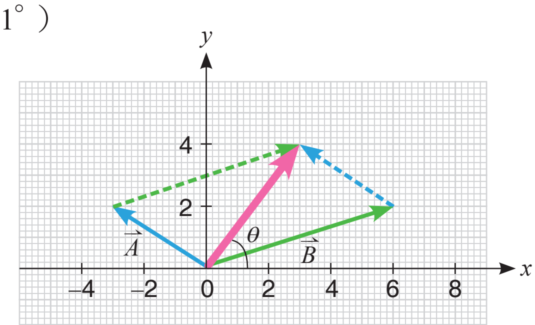
分析 1. 向量和的分量法：$C_x = A_x + B_x$，$C_y = A_y + B_y$

2. 由題圖可讀出 $A_x = -3.0$，$A_y = 2.0$，$B_x = 6.0$，$B_y = 2.0$

解 $C_x = -3.0 + 6.0 = 3.0$，$C_y = 2.0 + 2.0 = 4.0$，即可代表 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的向量和 $\vec{C}$。

（或者，向量和 $\vec{C}$ 之量值為 $C = \sqrt{3.0^2 + 4.0^2} = 5.0$，方向角 θ 的正切函數 $\tan\theta = \dfrac{4.0}{3.0} = 1.33$，查表得 $\theta = 53.1°$）

應用 若利用平行四邊形法，亦可得相同結果，如右圖。



迷思概念辨析

正確概念

向量是有量值又有方向的量，平面上的向量必含有兩個分量。向量的加法是將分量對應相加，而非長度相加。

易錯概念

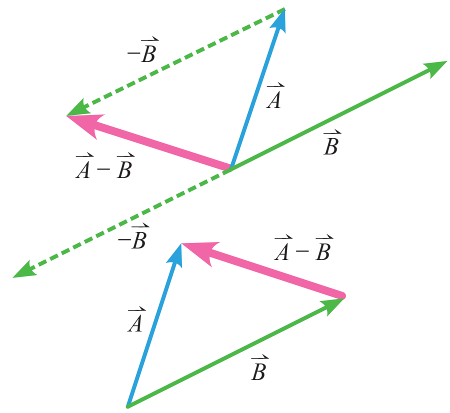
向量的加法，就是將兩向量的長度相加。

4 向量的減法

兩向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 的減法 $\vec{A}-\vec{B}$，定義為 $\vec{A}$ 與 $-\vec{B}$ 之和，即

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

而 $-\vec{B}$ 之量值與 $\vec{B}$ 相同，但方向相反，故以圖形法表示（圖 3-7）：就是將向量 $-\vec{B}$ 平移至 $\vec{A}$ 的終點，則自 $\vec{A}$ 的起點至 $-\vec{B}$ 的終點之向量，即為向量差 $\vec{A}-\vec{B}$。



▲ 圖 3-7　兩向量 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之差，即是自 $\vec{B}$ 的終點指向 $\vec{A}$ 的終點。

簡單來看，也就是若令 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的起點重疊，則以向量 $\vec{B}$ 終點位置為新起點，再指向至 $\vec{A}$ 終點之向量，就可代表向量差 $\vec{A}-\vec{B}$。跟加法的情形類似，也可用分量法求得兩向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 之差，即 $\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}$，則

$$C_x=A_x-B_x\text{，}C_y=A_y-B_y \tag{3.5}$$

使用圖形法與分量法所得之向量差的結果，仍然是一致的。

5 向量與純量（數）的乘法

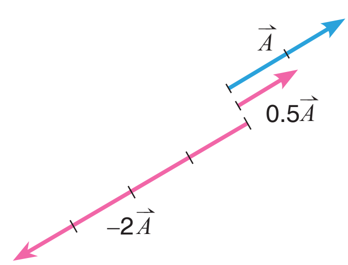
向量 $\vec{A}$ 可與數值 c 相乘，其乘積

$$c\vec{A}=\vec{B}$$

此意義為將 $\vec{A}$ 之量值變大 c 倍，仍為一向量，且

$$B_x=cA_x\text{，}B_y=cA_y \tag{3.6}$$

即新向量的水平與垂直分量，分別為原水平與垂直分量乘上數值 c。若 c 為正數，則方向與 $\vec{A}$ 相同；若 c 為負數，則方向與 $\vec{A}$ 相反。若 $|c|>1$，則 $\vec{B}$ 之量值大於 $\vec{A}$ 之量值；若 $|c|<1$，則 $\vec{B}$ 之量值小於 $\vec{A}$ 之量值（圖 3-8）。



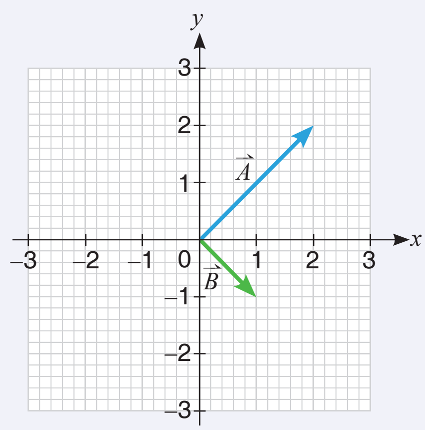
▲ 圖 3-8　數與向量相乘，仍為向量，方向沿著原向量或與原向量相反，新的向量量值與原向量量值不同。

純量（scalar）為只有量值，而沒有方向的物理量，例如長度、速率、質量、溫度等。純量也可與向量相乘，所得的新向量為一不同的物理量，例如時間（純量）與速度（向量）相乘，所得結果為位移（向量）；質量（純量）與加速度（向量）相乘，所得結果為力（向量）。而新向量的分量，則可由純量量值與原向量的分量依照式（3.6）的乘法規則得知。

範例 3-3

兩向量 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 表示如右圖，試求 $\vec{A}-3\vec{B}$。

相關練習：習題 2.、9.(2)、10.



分析 1. 若 $c\vec{B}=\vec{D}$，則 $D_x=cB_x$，$D_y=cB_y$

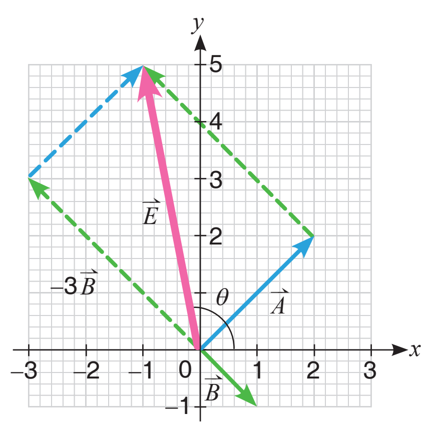
2. 由題圖可讀出 $A_x=2.0$，$A_y=2.0$，$B_x=1.0$，$B_y=-1.0$

解 若 $\vec{A}-3\vec{B}=\vec{E}$，則其分量為

$$E_x=A_x-3B_x=2.0-3\times1.0=-1.0$$

$$E_y=A_y-3B_y=2.0-3\,(-1.0)=5.0$$

亦可由圖形法得知，如右圖所示。



應用 試求 $\vec{A}-3\vec{B}=\vec{E}$ 之量值與方向角。

〔$E=\sqrt{(-1.0)^2+5.0^2}=\sqrt{26}=5.1$，方向角 θ 的正切函數 $\tan\theta=\dfrac{5.0}{-1.0}=-5.0$，查表得 $\theta=101.3^\circ$〕

3-2 平面運動的位移、速度與加速度

1 位置向量與位移

物體在平面上的位置與位移均為向量，如同在直線運動裡所選取的直線坐標，在平面上我們也先選取一固定點 O 作為參考原點，然後自原點取兩條相互垂直的線，分別定為水平軸 x 與垂直軸 y，則連結原點 O 與物體所在的位置 P_1、P_2，即為物體的位置向量 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$（圖 3-9(A)）。

若物體在平面上，自 t_1 時刻的 P_1 點運動至 t_2 時刻的 P_2 點時，若 $\vec{r}_1$ 與 $\vec{r}_2$ 分別代表 P_1 與 P_2 點之位置向量，則其**位移**定義為

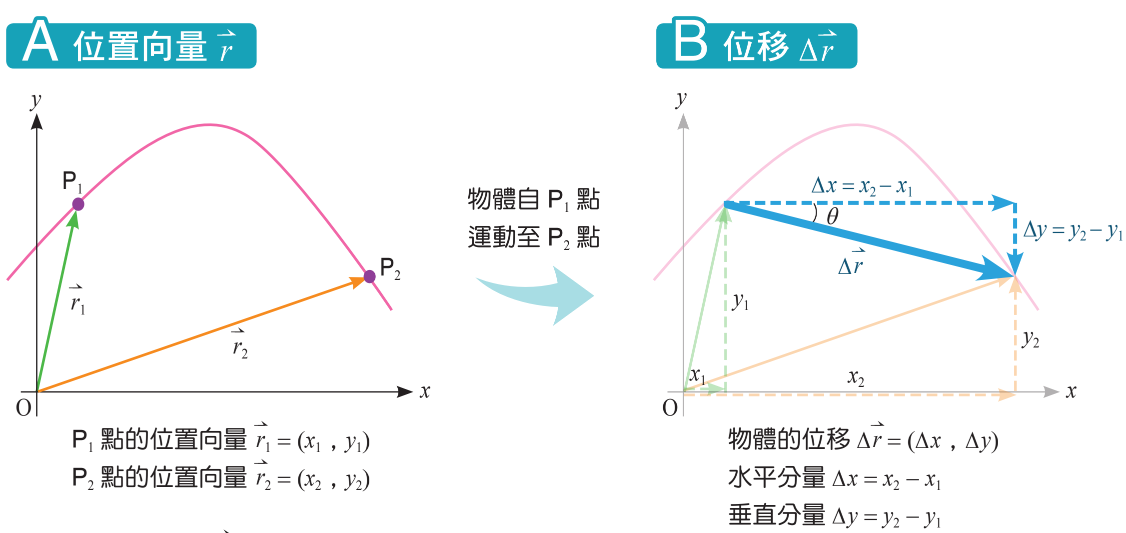
$$\text{末位置向量} - \text{初位置向量} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} \qquad (3.7)$$

若以分量來表示，則

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad (3.8)$$

位移的量值與方向，可用位移分量分別表示為（圖 3-9(B)）

$$\text{量值：} \Delta r = \left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
$$\text{方向角 } \theta \text{ 的正切函數：} \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ (\theta \text{ 可由查表得知}) \qquad (3.9)$$



▲ 圖 3-9　位移 $\Delta\vec{r}$ 的水平、垂直分析。

2 平均速度

在平面上運動的物體，自 t_1 至 t_2 之時間間隔內的**平均速度** $\vec{v}_{\text{av}}$，定義為對應的位移 $\Delta\vec{r}$ 除以時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ ，即

$$\vec{v}_{\text{av}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad 3.10$$

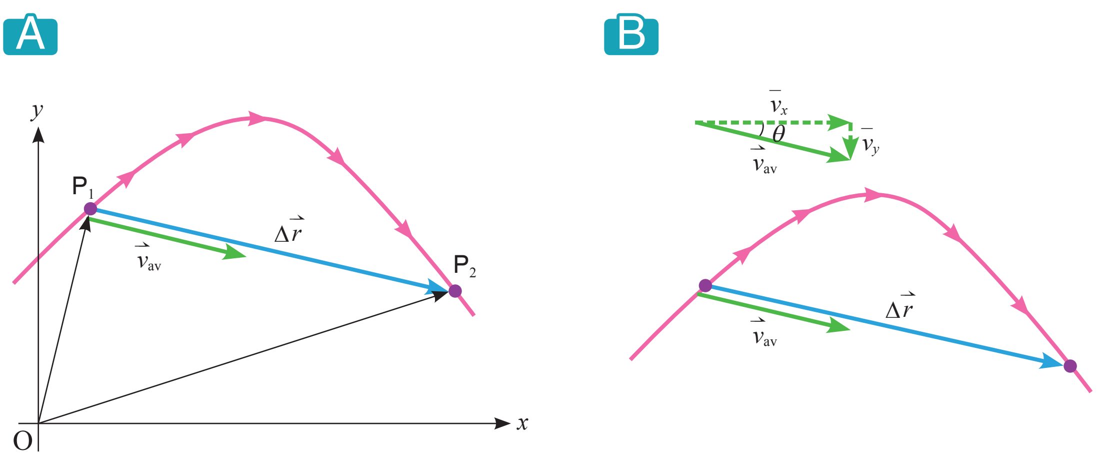
即平均速度的量值等於 $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$，其方向與位移 $\Delta\vec{r}$ 的方向相同（圖 3-10(A)）。若以分量來表示，則可將位移向量 $\Delta\vec{r}$ 的分量 Δx 與 Δy 除以時間間隔 Δt，得到平均速度的分量 $\bar{v}_x$ 與 $\bar{v}_y$（圖 3-10(B)）

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad 3.11$$

且平均速度的量值及方向，可由式（3.12）、式（3.13）算得

量值：$v_{\text{av}} = |\vec{v}_{\text{av}}| = \sqrt{\bar{v}_x^{\,2} + \bar{v}_y^{\,2}}$ 3.12

方向角 θ 的正切函數：$\tan\theta = \dfrac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x}$（$\theta$ 可由查表得知） 3.13



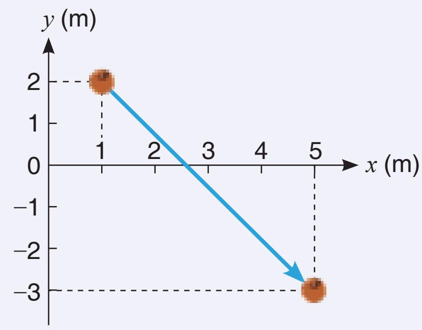
▲ 圖 3-10 (A)物體在平面上自 P_1 運動至 P_2 之平均速度 $\vec{v}_{\text{av}}$ 的方向，與位移 $\Delta\vec{r}$ 的方向相同。(B)平均速度 $\vec{v}_{\text{av}}$ 之水平分量 $\bar{v}_x$ 與垂直分量 $\bar{v}_y$。

範例 3-4

一臺掃地機器人在時間 $t = 0$ 位置的水平與垂直分量分別為 $r_{1x} = 1.0\ \text{m}$、$r_{1y} = 2.0\ \text{m}$，經 2.0 s 後，掃地機器人運動至 $r_{2x} = 5.0\ \text{m}$、$r_{2y} = -3.0\ \text{m}$，如右圖所示，試求在此段時間內：

(1) 掃地機器人平均速度的分量為何？

(2) 掃地機器人平均速度的量值與方向為何？

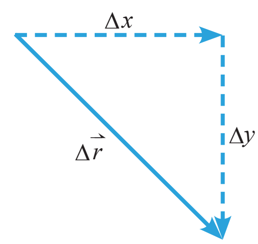


相關練習：習題 4.、11.、12.

分析

1. 由 $\bar{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，$\bar{v}_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$，得平均速度的量值 $|\vec{v}_{av}| = \sqrt{\bar{v}_x^{\,2} + \bar{v}_y^{\,2}}$
2. 方向角 θ 的正切函數 $\tan\theta = \dfrac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x}$
3. $\Delta x = r_{2x} - r_{1x} = 5.0\ \text{m} - 1.0\ \text{m} = 4.0\ \text{m}$

   $\Delta y = r_{2y} - r_{1y} = -3.0\ \text{m} - 2.0\ \text{m} = -5.0\ \text{m}$
4. $\Delta t = 2.0\ \text{s}$

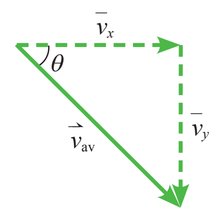


解

(1) 平均速度的分量為

$$\bar{v}_x = \frac{4.0\ \text{m}}{2.0\ \text{s}} = 2.0\ \text{m/s}$$

$$\bar{v}_y = \frac{-5.0\ \text{m}}{2.0\ \text{s}} = -2.5\ \text{m/s}$$



(2) 平均速度 $\vec{v}_{av}$ 的量值與方向分別為

$$|\vec{v}_{av}| = \sqrt{(2.0\ \text{m/s})^2 + (-2.5\ \text{m/s})^2}$$

$$= \sqrt{10.25\ \text{m}^2/\text{s}^2}$$

$$= 3.2\ \text{m/s}$$

方向角 θ 的正切函數 $\tan\theta = \dfrac{-2.5\ \text{m/s}}{2.0\ \text{m/s}} = -1.25$，查表得 $\theta = -51.3^\circ$

3 瞬時速度

物體在平面上於某一時刻 t_1 的**瞬時速度**，或稱**速度**之定義：當 $t_2 \rightarrow t_1$ 或 $\Delta t = t_2 - t_1$ 趨近於零時，物體在 t_1 至 t_2 的時間間隔內之平均速度，即

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}，且\ \Delta t \rightarrow 0\ （或\ t_2 \rightarrow t_1） \quad 3.14$$

其中 $\Delta \vec{r}$ 為物體的位移。若以分量表示，則在 t_1 時之速度分量為

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}，v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}，且\ \Delta t \rightarrow 0 \quad 3.15$$

其中 $\Delta x = x_2 - x_1$、$\Delta y = y_2 - y_1$ 為位移 $\Delta \vec{r}$ 之 x 與 y 分量。物體速度 $\vec{v}$ 的量值與方向，可用速度分量分別表示為

$$量值：v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad 3.16$$

$$方向角\ \theta\ 的正切函數：\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}\ （\theta\ 可由查表得知） \quad 3.17$$

另一方面，若物體速度的量值為 v，與水平軸之夾角為 θ，可得速度分量如下：

$$v_x = v\cos\theta，v_y = v\sin\theta \quad 3.18$$

例如一人使用座圈在彎曲滑水道上行進，由圖 3-11 可以看出，當末時間與初時間愈來愈接近時，末位置向量（$\overrightarrow{OD}$）與初位置向量（$\overrightarrow{OA}$）也會愈來愈靠近，最後形成速度 $\vec{v}$ 的方向是沿著在初時間運動路徑的切線方向。

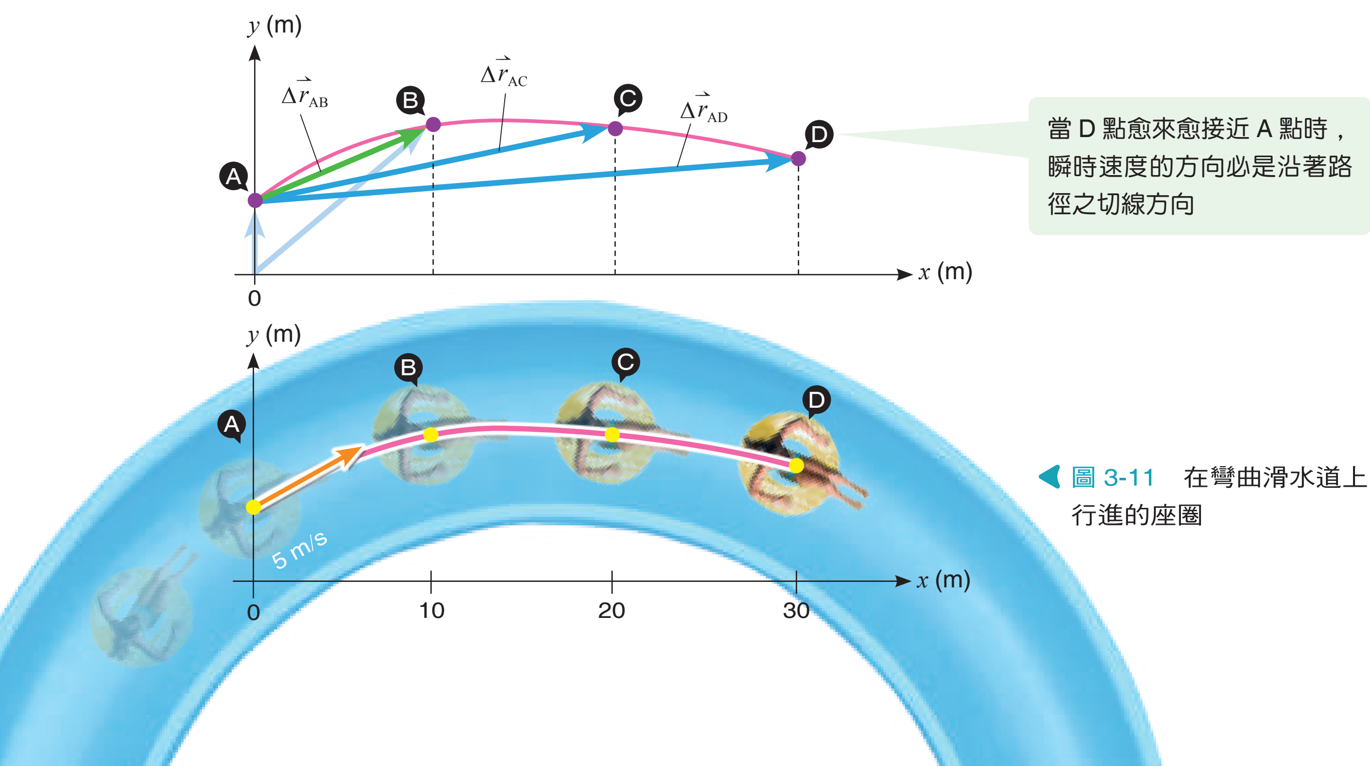


圖 3-11　在彎曲滑水道上行進的座圈

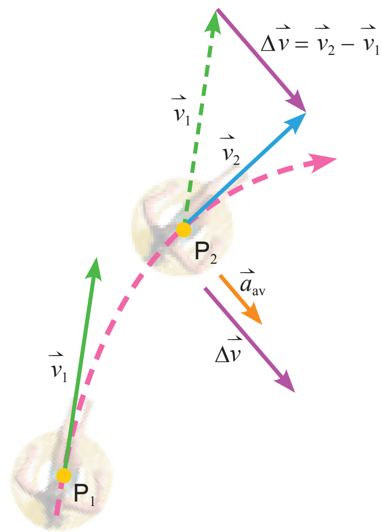
4 加速度

在平面上運動的物體，自 t_1 至 t_2 的時間間隔內之**平均加速度** $\vec{a}_{av}$，定義為速度變化 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ 除以時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$，即（圖 3-12）

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad 3.19$$

當時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 趨近於零時或 $t_2 \to t_1$，物體在此時間間隔內之平均加速度，稱為在時刻 t_1 之**瞬時加速度**或**加速度**，即物體在 t_1 之加速度為

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\text{，且 } \Delta t \to 0 \text{（或 } t_2 \to t_1\text{）} \qquad 3.20$$

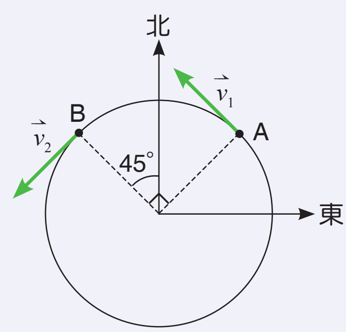


▲ 圖 3-12 速度變化 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ 與平均加速度 $\vec{a}_{av}$ 關係示意圖

範例 3-5

如右圖，在水平面上沿著圓周以等速率 1.0 m/s 運動的物體，若自 A 點至 B 點費時 2.0 s，試求其平均加速度。

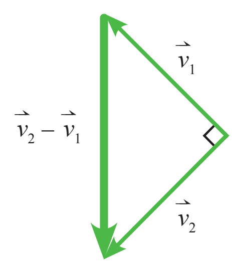
相關練習：習題 13.



分析 1. $\vec{a}_{av} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$

2. $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ 之向量為將 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 之起點重疊後，自 $\vec{v}_1$ 的終點至 $\vec{v}_2$ 的終點，如右圖。

3. $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 兩向量量值相等，均為 1.0 m/s。



解 $\vec{a}_{av} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \begin{cases} \text{量值：} \dfrac{\sqrt{(1.0\ \text{m/s})^2 + (1.0\ \text{m/s})^2}}{2.0\ \text{s}} = 0.71\ \text{m/s}^2 \\ \text{方向：向南} \end{cases}$

應用 若 A、B 兩點分別在正南與正東處之圓周上，則 $\vec{a}_{av}$ 之方向指向何處？

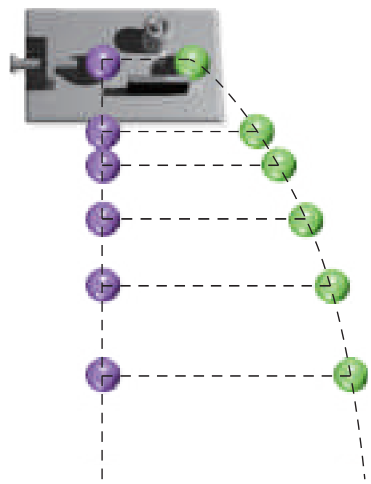
〔$\vec{a}_{av}$ 之方向指向西北方〕

3-3 水平拋射

1 水平速度與鉛直速度

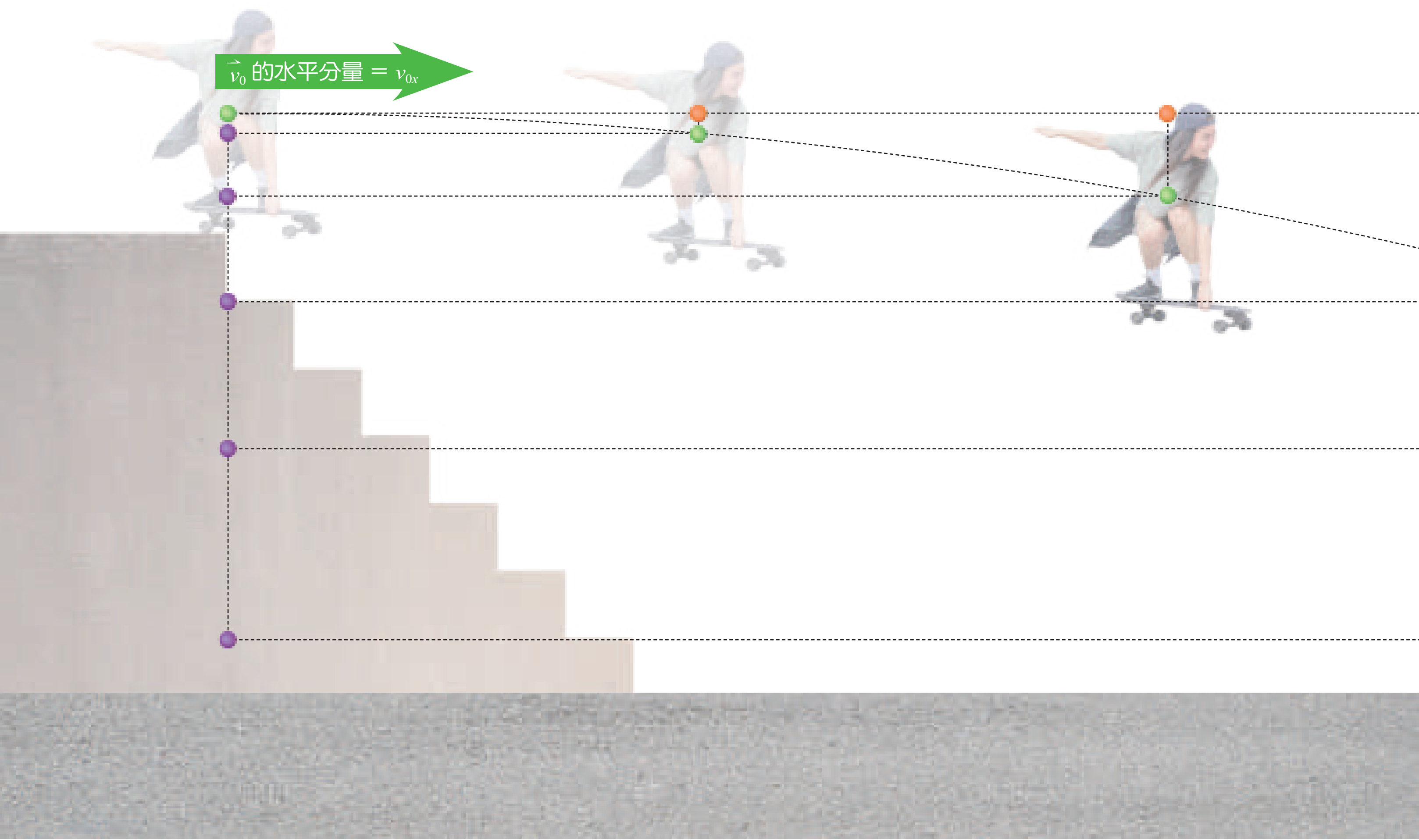
觀察一實驗：放在同一高度的兩顆球，紫色球靜止、綠色球有一水平速度，同時自由釋放落下，哪一顆球會先著地呢？實驗發現：不論綠球的水平速度有多大，兩顆球都將同時著地。不僅如此，若用快速連續照相的相機拍照，可以看出在鉛直部分，任意時刻兩顆球的高度都相同（圖 3-13）。

若物體最初在較高的原點處以最簡單的方式運動，即僅有水平方向的初速 v_{0x}，而鉛直方向的初速 $v_{0y}=0$，此種運動稱為**水平拋射**（圖 3-14）。由於在地表附近，任何物體僅會受到鉛直向下的重力



▲ 圖 3-13　同時水平拋出一球（綠球）與鉛直釋放另一球（紫球），兩球會一直處於相同的鉛直高度。

▼ 圖 3-14　滑板手在平面上的初速度 $\vec{v}_0$ 僅有水平分量 v_{0x}，稱為水平拋射。



加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 影響，而不存在有水平加速度，即加速度的分量（取向上為正，且忽略所有阻力）

$$a_x = 0\text{，}a_y = -g \tag{3.21}$$

依運動的獨立性，水平拋射運動可分成水平與鉛直兩個獨立部分，在水平部分將一直維持著等速運動，在鉛直部分則是作向下加速度為 g、初速為 0 之等加速運動，彼此互不影響。因此，若取起點為原點，在物體被水平拋出後且未落地前的任意時間 t，其水平方向的速度與位移分別為

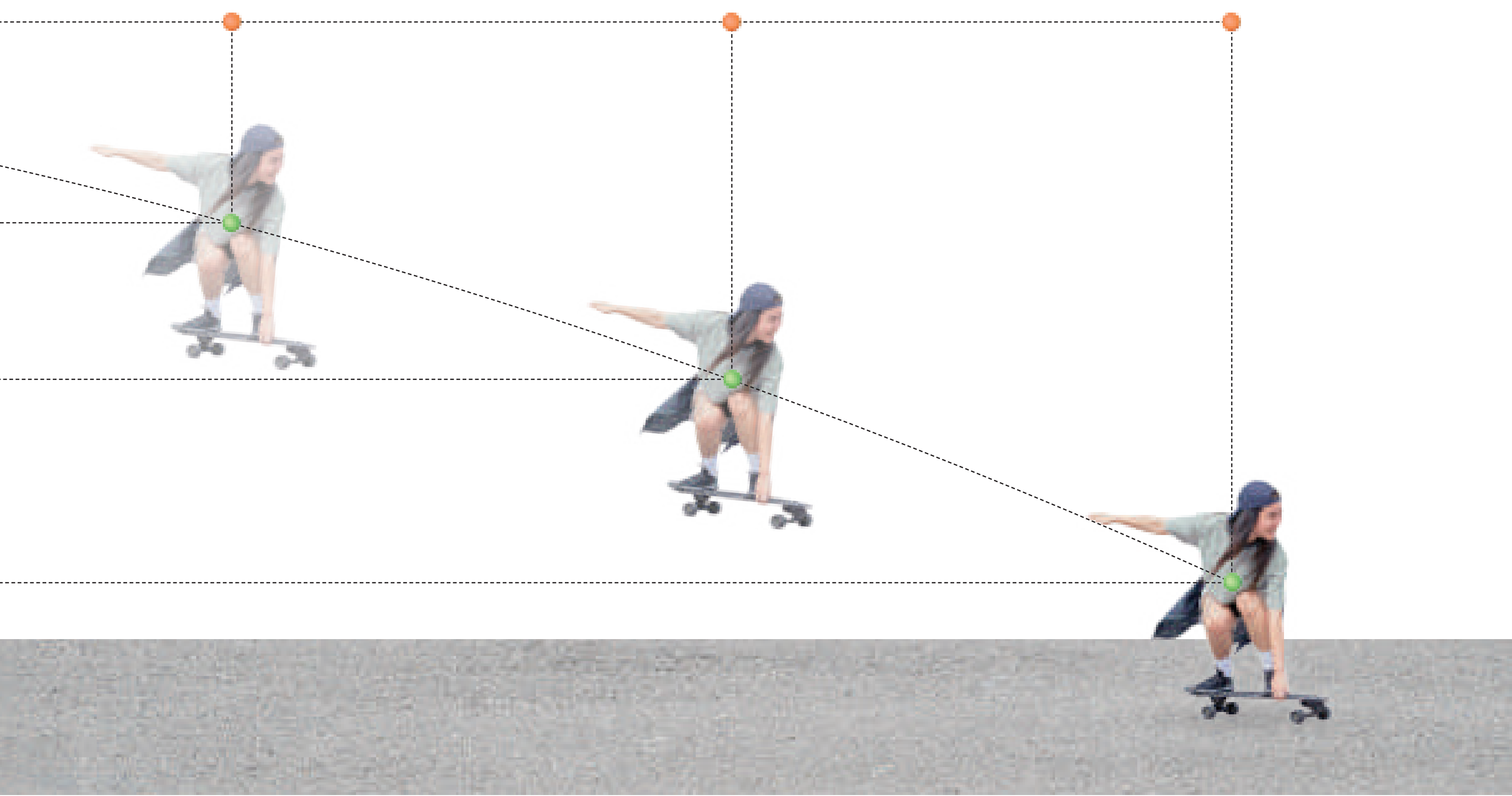
$$v_x = v_{0x} \tag{3.22}$$

$$x = v_{0x}t \tag{3.23}$$

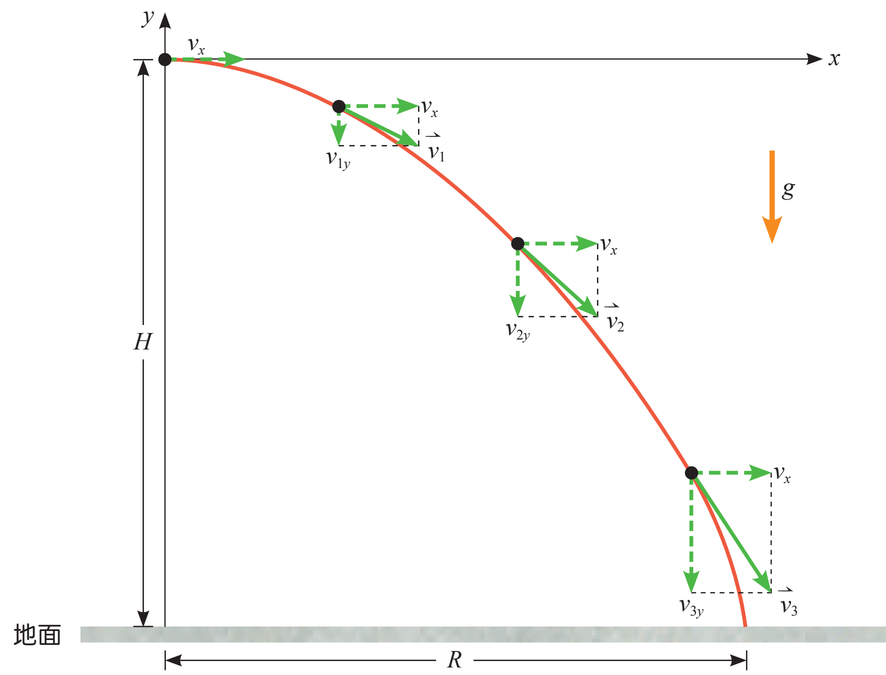
在鉛直方向的速度與位移分別為

$$v_y = v_{0y} - gt = -gt \tag{3.24}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{3.25}$$



也就是在 x 方向的速度永遠維持不變，在 y 方向的速度隨著時間均勻增加，這意味著 x 方向之位移會與時間 t 成正比的增加，而 y 方向之位移則會與 t^2 成正比的增加。在任意時間的速度量值，則可如式（3.16）$v=\sqrt{v_x^{\,2}+v_y^{\,2}}$ 所述，是由水平與鉛直的速度分量所合成，它的運動軌跡可由圖 3-15 所描述。



▲ 圖 3-15　物體以初速 v_x 水平拋出後，在不同時間的速度及其分量、運動軌跡、鉛直高度與水平射程。

2 落地時間與水平射程

自高處作水平拋射的物體，其落地時間完全由鉛直高度 H（圖 3-15）來決定，與水平速度 v_x 無關。水平拋射表示鉛直方向初速 $v_{0y}=0$，若落地時間為 T，由式（3.25）$y=-H=0-\dfrac{1}{2}gT^2$，可得

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{3.26}$$

因此，在相同高度以不同水平速度拋出物體，其落地時間皆相同。

由於物體在水平方向恆以 v_x 作等速運動，故落地時物體的水平射程 R（圖 3-15），由式（3.23）可得

$$R=v_xT=v_x\sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{3.27}$$

範例 3-6

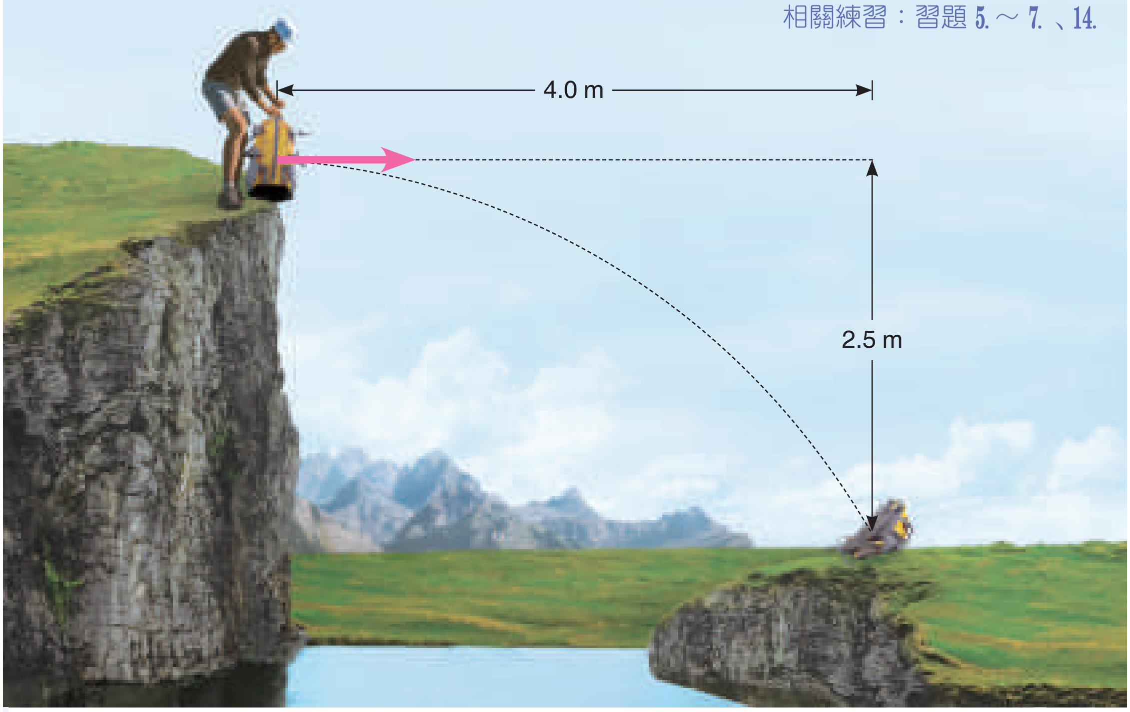
素養題

如下圖所示，在寬度 4.0 m 的河兩邊，各有一處高低不同的平地，兩平地的鉛直高度相差 2.5 m。在高處的登山者欲將背包沿著水平方向拋至對岸，若重力加速度 $g = 9.8\ \text{m/s}^2$，試求：

(1) 背包從拋出至落在對岸所需時間為何？

(2) 背包水平拋出的速度至少需為多少，才能順利落在對岸？

相關練習：習題 5.～7.、14.



分析 1. 水平拋射落地所需時間＝鉛直方向靜止下落高度 H 所需時間

2. 鉛直靜止下落所需時間，由 $-H = -\frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

3. 背包能順利落在對岸的水平射程 R 至少需為 4.0 m，則背包水平拋出的速度至少需為 $v_{0\,最小} = \frac{R}{T} = R\sqrt{\frac{g}{2H}}$

解 (1) 背包落在對岸所需時間 $T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.5\ \text{m}}{9.8\ \text{m/s}^2}} = 0.71\ \text{s}$

(2) $v_{0\,最小} = R\sqrt{\frac{g}{2H}} = 4.0\ \text{m} \times \sqrt{\frac{9.8\ \text{m/s}^2}{2 \times 2.5\ \text{m}}} = 5.6\ \text{m/s}$

背包水平拋出的速度至少需為 5.6 m/s，才能順利落在對岸。

3-4 斜向拋射

1 水平速度與鉛直速度

在地表附近物體較普遍的運動情形是物體並不以水平方向拋出，而是以任意方向拋出，也就是還有鉛直方向的速度分量，此種運動稱為**斜向拋射**。通常我們取最初物體被投射出的位置為原點 O，即

$$x_0 = y_0 = 0$$

沿著傾斜方向拋出物體的初速 v_0 可分解成水平與鉛直方向之分量（圖 3-16），其分量由式（3.18）可知，分別為

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad (3.28)$$

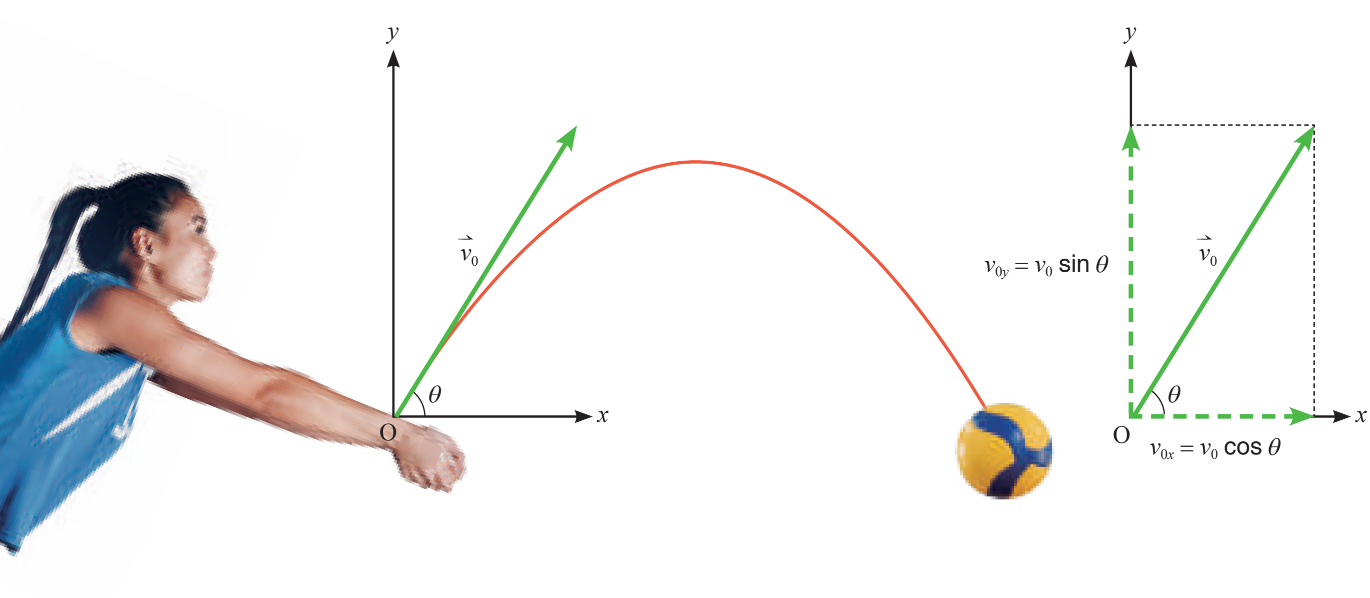
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \quad (3.29)$$

由運動的獨立性，物體在水平方向將一直維持等速運動，在鉛直方向則是加速度為 $-g$（取向上為正，且忽略所有阻力）的等加速運動。因此，在物體被拋出後的任意時間 t，其水平方向的速度與位移分別為

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad (3.30)$$

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta)\, t \quad (3.31)$$

▼圖 3-16　運動物體的初速度 $\vec{v}_0$、仰角 θ，具有水平及鉛直分量，稱為斜向拋射。



在鉛直方向的速度與位移分別為

$$v_y = v_{0y} + (-g)\,t = v_0 \sin\theta - gt \tag{3.32}$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)\,t^2 = (v_0 \sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.33}$$

在任意時間 t 的速度量值與方向，則可由水平與鉛直兩速度分量合成，如式（3.16）與式（3.17）所述：

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

2 落地時間、最大高度與水平射程

由斜向拋射初速 v_0 的水平與鉛直分量，可描述出物體在空中停留或落地時間 T、最大高度 H 與水平射程 R。就**如同沿著鉛直線上靜止釋放與鉛直上拋具有的對稱性**（參考圖 2-15），在斜向拋射自地面拋射處到最高點的上升時間 $t_{上升}$ 等於自最高點落地的下降時間 $t_{下降}$。由式（3.32），到達最高點時的末速 $v_y = 0$，可得

$$t_{上升} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = t_{下降} \tag{3.34}$$

物體在空中停留的時間（或自拋出到落地的全程時間），則為

$$T = 2t_{上升} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{3.35}$$

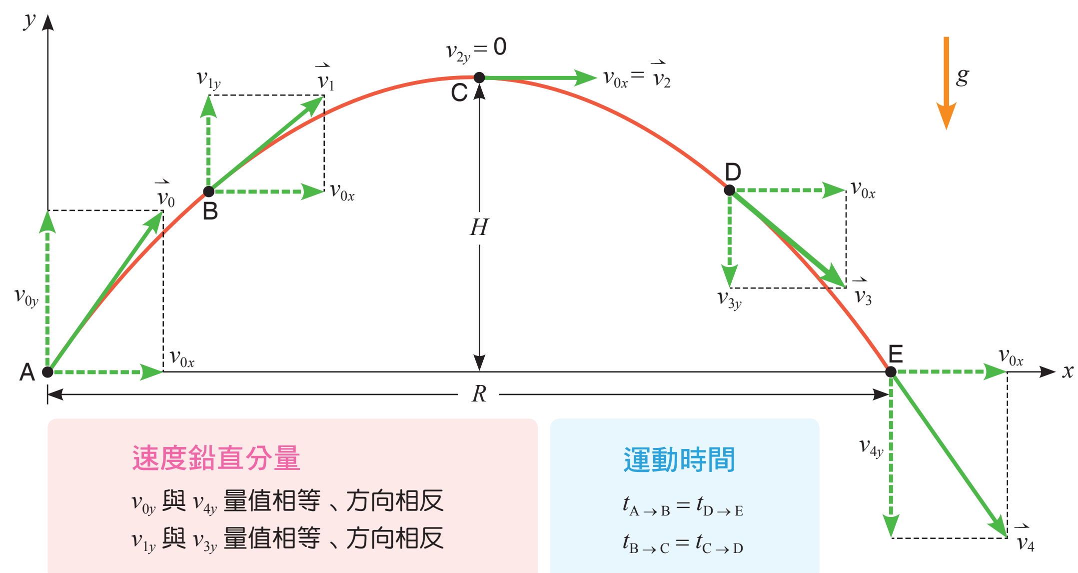
如圖 3-17 所示，斜向拋射能達到的最大高度 H 等於自最大高度處沿著鉛直方向靜止釋放的下降距離，即

$$H=\frac{1}{2}gt_{\text{下降}}^{\ 2}=\frac{v_{0y}^{\ 2}}{2g}=\frac{v_0^{\ 2}\sin^2\theta}{2g} \tag{3.36}$$

水平射程 R 則可由沿著水平方向恆以 $v_x=v_0\cos\theta$ 作等速運動的距離得知，即

分科趨勢 習題 20.

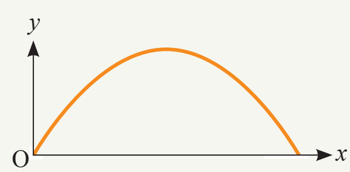
$$R=v_xT=(v_0\cos\theta)(\frac{2v_0\sin\theta}{g})=\frac{v_0^{\ 2}\sin 2\theta}{g} \tag{3.37}$$



▲ 圖 3-17　斜向拋射的物體，在不同時間的速度及其分量、運動軌跡、最大高度、水平射程。

腦力Plus

如右圖，在斜向拋射運動中，哪一點物體的速率最小？哪一點物體的速度與加速度垂直？是否有哪一點物體的速度與加速度平行？



迷思概念辨析

正確概念

斜向拋射當物體達到最高點時的加速度仍為 9.8 m/s² 向下，且在最高點處只有速度的鉛直分量為 0，速度的水平分量不為 0。

易錯概念

斜向拋射當物體達到最高點時的加速度為 0，速度亦為 0。

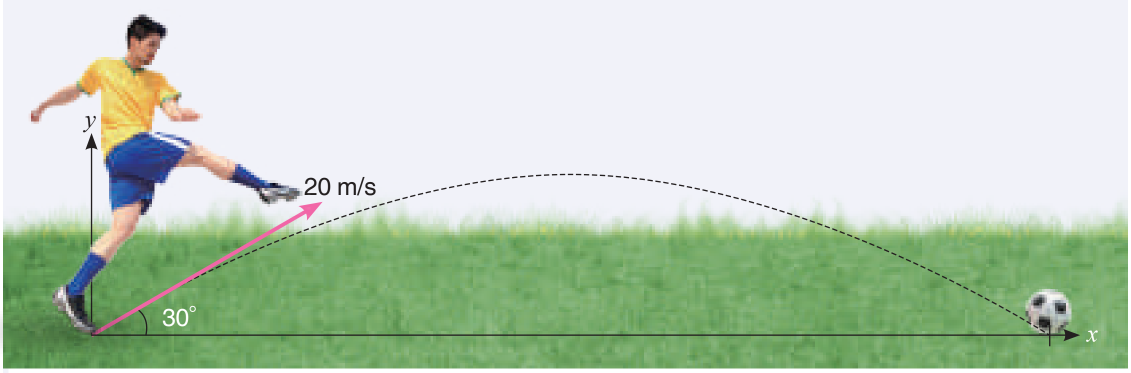
範例 3-7

足球員阿輝在足球場上以 20 m/s 的初速沿著與水平面夾角為 30° 的方向踢出一足球，如下圖。若重力加速度 $g = 10\ \text{m/s}^2$，試求：

(1) 足球所能達到的最大高度為多少？

(2) 足球會在何時著地？

相關練習：習題 8.、17.、18.

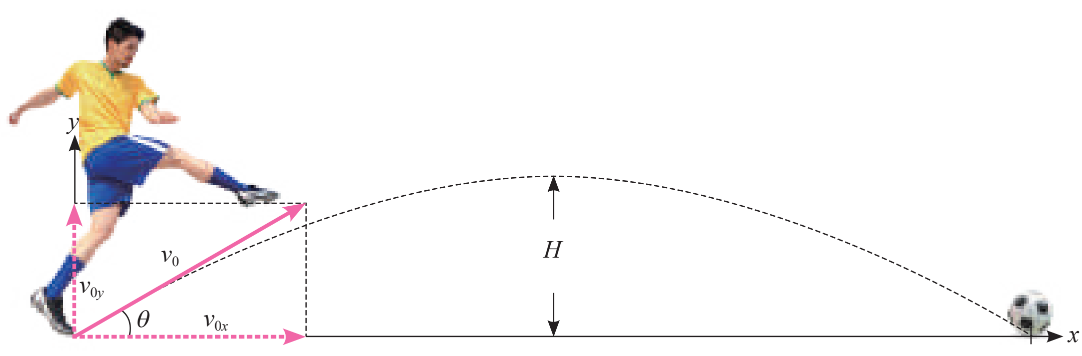


分析 1. 鉛直方向的初速 $v_{0y} = v_0 \sin\theta = (20\ \text{m/s})(\sin 30^\circ) = 10\ \text{m/s}$

2. 由最大高度與鉛直速度之關係：$v_y^{\ 2} = v_{0y}^{\ 2} - 2gy$

在最大高度時，$v_y = 0$，可求得最大高度 $H = \dfrac{v_{0y}^{\ 2}}{2g} = \dfrac{v_0^{\ 2}\sin^2\theta}{2g}$

3. 到達最高處時 $v_y = 0$，所需時間 $t_{上升} = \dfrac{v_{0y}}{g}$



解 (1) 最大高度 $H = \dfrac{v_{0y}^{\ 2}}{2g} = \dfrac{(10\ \text{m/s})^2}{2 \times 10\ \text{m/s}^2} = 5.0\ \text{m}$

(2) 球著地時間 $T = 2t_{上升} = 2 \times \dfrac{v_{0y}}{g} = 2 \times \dfrac{10\ \text{m/s}}{10\ \text{m/s}^2} = 2.0\ \text{s}$

應用 球著地時的水平射程 R 為多少？

〔$R = v_x T = (v_0 \cos\theta)(\dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}) = \dfrac{v_0^{\ 2} \sin 2\theta}{g} = \dfrac{(20\ \text{m/s})^2 \times \sin 60^\circ}{10\ \text{m/s}^2} = 20\sqrt{3}\ \text{m}$〕

知識探索+ 斜向拋射之路徑為何是一拋物線

概念延伸

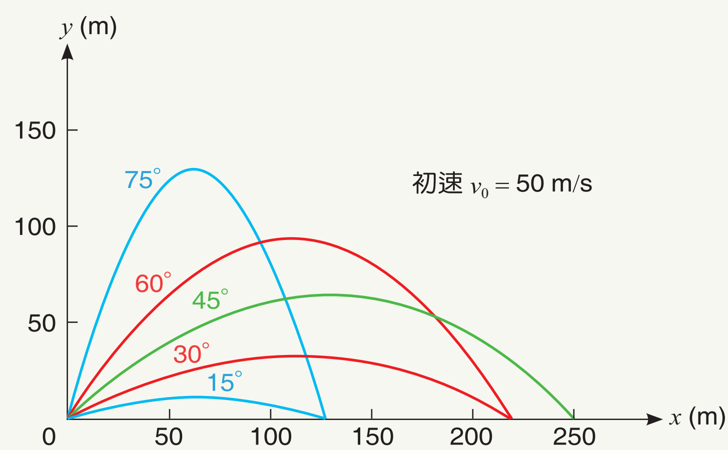
在 $t=0$ 時以初速 v_0 沿著仰角 θ 自原點拋出的物體，由式（3.31）可得任意時間 t 與水平位移 x 之關係為

$$t=\frac{x}{v_0\cos\theta}$$

代入式（3.33）可得鉛直位移 y 與水平位移 x 之關係式為

$$\begin{aligned} y &= v_0\sin\theta\times\frac{x}{v_0\cos\theta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\theta}\right)x^2+(\tan\theta)\,x \\ &= ax^2+bx \end{aligned}$$

其中 $a=-\dfrac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\theta}$、$b=\tan\theta$ 為兩常數，滿足此種函數關係的圖形為一拋物線，此拋物線之對稱軸在 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{v_0^{\,2}\sin 2\theta}{2g}$ 時有最高點或極大值 $y=-\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\theta}{2g}$。因此，斜向拋射物體之路徑必為一拋物線（圖 3-18）。



視圖問答

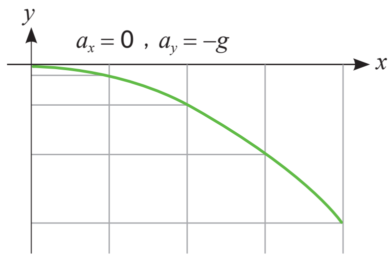
(1) 斜向拋射仰角為多少時，水平射程最大？
(2) 拋射仰角愈小時，水平速度愈大，是否水平射程也愈大？

▲ 圖 3-18　初速相同，不同仰角的斜向拋射物體之水平射程。

重點整理

3-1 向量的意義、分解與合成

- **拋體運動的獨立性**：物體在平面上運動時，可以分成水平與鉛直兩個獨立部分。水平方向如右圖所示維持等速運動（$a_x = 0$），鉛直方向為等加速運動，其加速度 $a_y = -g$



- **向量**：向量是具有量值及方向的量。
- **向量的分解**：向量 $\vec{A}$ 分解成水平方向的分量 A_x 與垂直方向的分量 A_y，其中

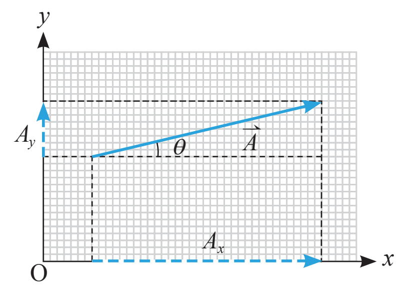
$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$

向量 $\vec{A}$ 的量值 A，方向角 θ 的正切函數 $\tan\theta$，即

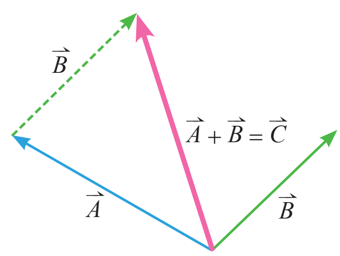
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}\text{（}\theta\text{ 可由查表得知）}$$

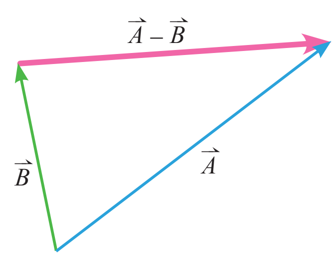


- **向量的加法**：將向量 $\vec{B}$ 平移，並將其起點與 $\vec{A}$ 的終點重合，則自 $\vec{A}$ 的起點至 $\vec{B}$ 的終點之向量 $\vec{C}$，即為兩向量之和，寫成

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$



- **向量的減法**：兩向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 之差 $\vec{A} - \vec{B}$，為將兩向量起點重疊，以向量 $\vec{B}$ 終點位置為新起點，再指向 $\vec{A}$ 終點之向量。



3-2 平面運動的位移、速度與加速度

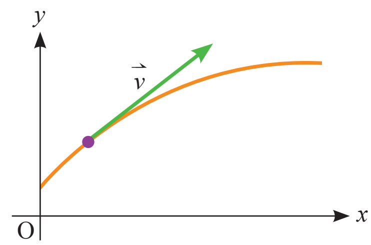
- **位移**：在平面上運動的物體，其位移 $\Delta\vec{r}$ 為末位置向量減初位置向量，即

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- **平均速度**：在平面上運動物體的平均速度為物體之位移除以時間間隔，即

$$\vec{v}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- **速度**：平面上運動物體在時刻 t 的速度為在該時刻附近所取非常小時間間隔的平均速度。
- **速度與切線**：速度 $\vec{v}$ 的方向為沿著路徑的切線方向。



- **平均加速度與加速度**：在平面上運動物體的平均加速度為物體之速度變化除以時間間隔，即

$$\vec{a}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

當 Δt 趨近於零時，此平均加速度稱為物體在該時刻的（瞬時）加速度。

3-3 水平拋射

- **水平拋射**：在水平與鉛直方向的速度與位移分別為

$$v_x = v_{0x} \quad , \quad x = v_{0x}t$$

$$v_y = -gt \quad , \quad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

落地時間 T 與鉛直高度 H 之關係：$T = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$，水平射程：$R = v_x\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

3-4 斜向拋射

- **斜向拋射**：在水平與鉛直方向的速度與位移分別為

$$v_x = v_0\cos\theta \quad , \quad x = (v_0\cos\theta)\,t$$

$$v_y = v_0\sin\theta - gt \quad , \quad y = (v_0\sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

落地時間：$T = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$，最大高度：$H = \dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\theta}{2g}$，水平射程：$R = \dfrac{v_0^{\,2}\sin 2\theta}{g}$

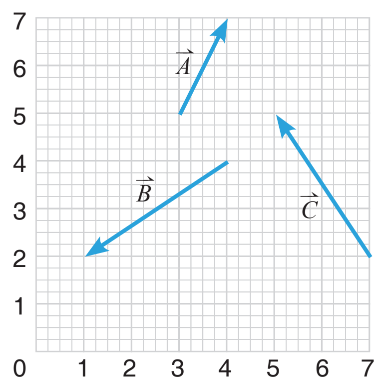
習題

基本題

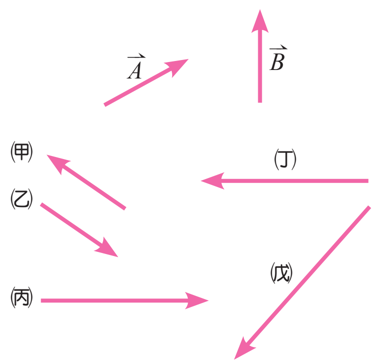
3-1 向量的意義、分解與合成

1. 試將圖(一)中三向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 以分量方式表示出來。

2. 若向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 如圖(二)所示，則圖中(甲)至(戊)哪一個向量可代表 $2\vec{A}-\vec{B}$？



圖(一)



圖(二)

3-2 平面運動的位移、速度與加速度

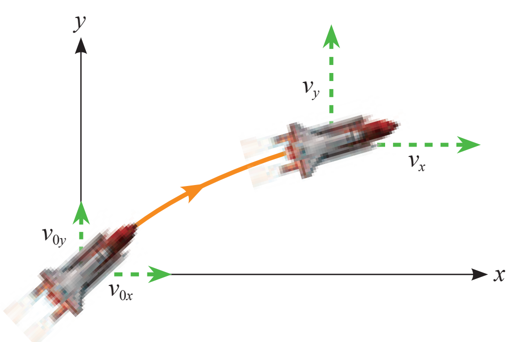
3. 一位小孩在 $t=0$ 時在坐標原點，若他從 $t=0$ 開始運動至 $t=5.0$ s，此期間平均速度的水平分量與垂直分量分別為 -1.0 m/s 與 2.0 m/s，試求小孩在 $t=5.0$ s 時：

   (1) 位置向量為何？　　(2) 距離原點多遠？

4. 如右圖，一太空船沿著水平方向與垂直方向的初速分別為 v_{0x} = 16 m/s、v_{0y} = 12 m/s，以水平加速度 a_x = 8.0 m/s^2、垂直加速度 a_y = 6.0 m/s^2 自原點作等加速運動，試求此太空船 3.0 s 時的：

   (1) 位置向量。

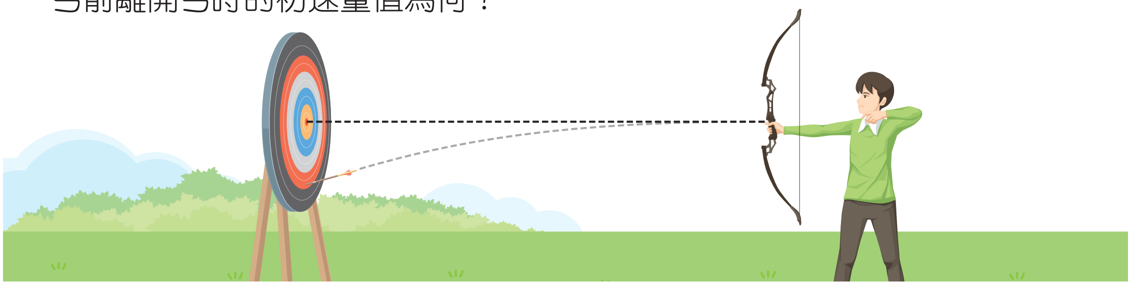
   (2) 速度量值與方向。



3-3 水平拋射

5. 棒球迷在看臺上將一顆棒球以 1.8 m/s 的初速水平拋出，棒球離開手瞬間與地面距離為 3.2 m，若重力加速度 g = 10 m/s^2，則棒球著地時的速率為何？

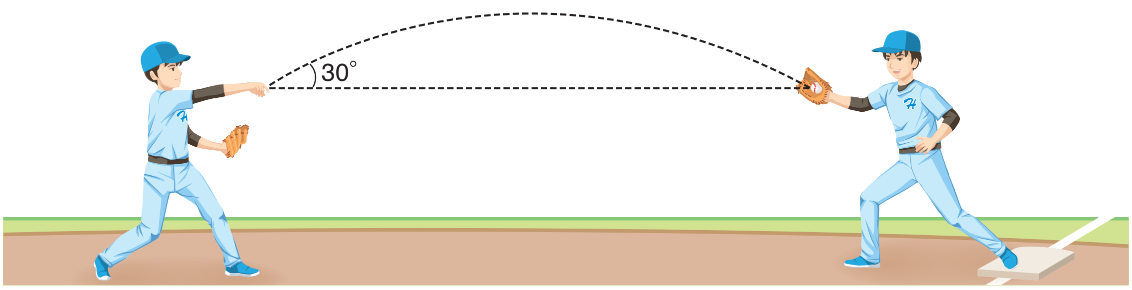
6. 如下圖，一位弓箭手朝 15.0 m 遠之目標水平瞄準一靶心後，發射出一弓箭，但弓箭最後落在靶心下方 44.1 cm 處，當地的重力加速度 $g = 9.80\ \text{m/s}^2$，試求弓箭離開弓時的初速量值為何？



7. 一架救援直升機以 10 m/s 的水平速度在海面 20 m 高處向前飛行，並準備投擲救生衣給在海面上的待救者，當地的重力加速度 $g = 10\ \text{m/s}^2$，則此直升機必須在離待救者多遠的水平距離處投擲救生衣，才可剛好落在待救者處？

3-4 斜向拋射

8. 如下圖，二壘手以 17 m/s 的初速，沿著與水平呈 30° 角的方向將棒球快傳給一壘手，一壘手接住球時，球與被拋出時的高度相同，試求：
(1) 球在空中的水平速度分量。
(2) 球在被接到瞬間的鉛直速度分量。
(3) 球在被接到瞬間的速度方向。



進階題

3-1 向量的意義、分解與合成

9. 量值為 3.0 單位的向量 $\vec{A}$ 指向 $+y$ 軸方向，量值為 4.0 單位的向量 $\vec{B}$ 指向 $-x$ 軸方向，試求：
(1) $\vec{A}+\vec{B}$ 的量值與方向。　(2) $\vec{A}-\vec{B}$ 的量值與方向。

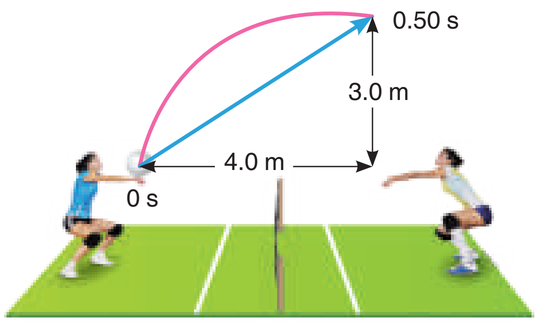
10. 向量 $\vec{A}$ 的水平分量與垂直分量分別為 $A_x = 1.3\ \text{m}$、$A_y = 2.0\ \text{m}$，向量 $\vec{B}$ 的水平分量與垂直分量分別為 $B_x = 4.1\ \text{m}$、$B_y = -3.7\ \text{m}$，試求：

⑴ $\vec{A} - \vec{B}$ 的水平分量與垂直分量。

⑵ $\vec{B} - \vec{A}$ 的水平分量與垂直分量。

3-2 平面運動的位移、速度與加速度

11. 一名排球隊員接球，經 0.50 s 後，球升高 3.0 m，且水平移動 4.0 m，如右圖所示，試求此段時間內排球的平均速度。



12. 一質點在 2.0 s 內，自 A 處運動至 B 處的路徑如右圖，試求各小題的水平分量與垂直分量：

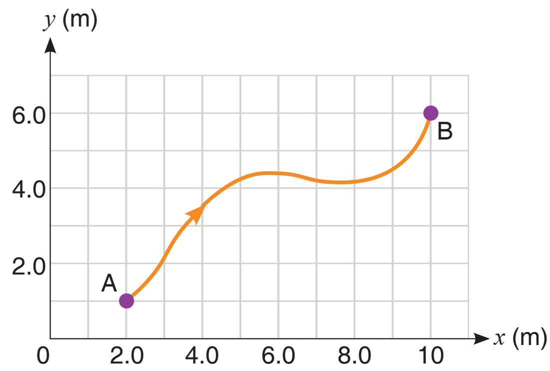
⑴ A 點的位置向量 $\vec{A}$。

⑵ B 點的位置向量 $\vec{B}$。

⑶ $\vec{B} - \vec{A}$。

⑷ A 點至 B 點的位移。

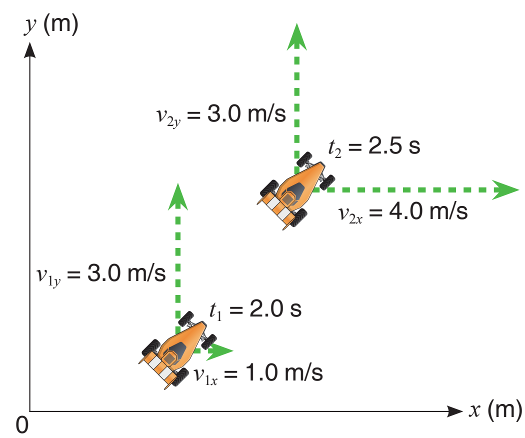
⑸ A 點至 B 點的平均速度。



13. 如右圖所示，一遙控玩具車在時間 $t_1 = 2.0\ \text{s}$ 時，速度的水平分量與垂直分量分別為 $v_{1x} = 1.0\ \text{m/s}$、$v_{1y} = 3.0\ \text{m/s}$；在時間 $t_2 = 2.5\ \text{s}$ 時，速度的水平分量與垂直分量分別為 $v_{2x} = 4.0\ \text{m/s}$、$v_{2y} = 3.0\ \text{m/s}$。試求在這段時間玩具車的：

⑴ 平均加速度的水平分量與垂直分量。

⑵ 平均加速度的量值與方向。



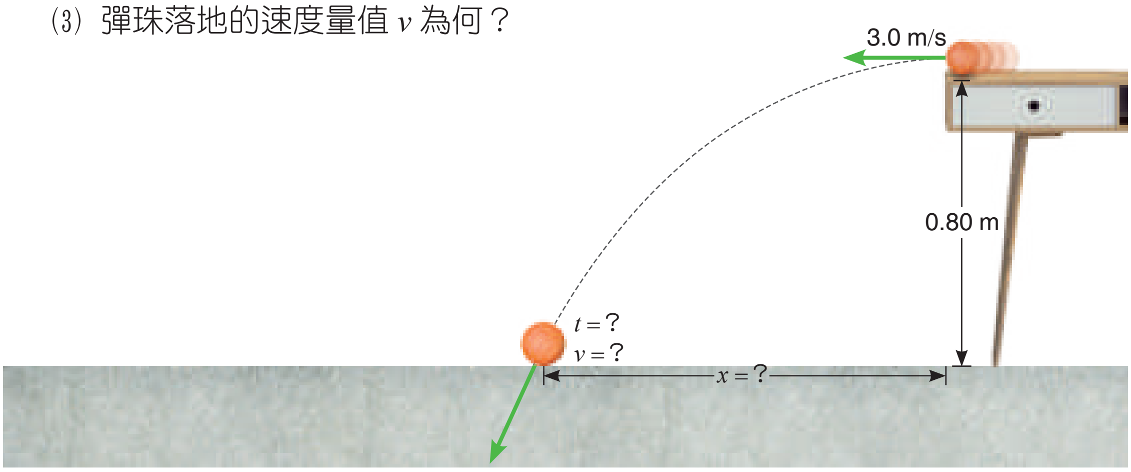
3-3 水平拋射

14. 如下圖，彈珠以 3.0 m/s 的等速度在光滑桌面上移動，至桌邊後落到 0.80 m 下之地面。若重力加速度 $g = 10\ \text{m/s}^2$，試求：

(1) 彈珠離開桌面至抵達地面花費的時間 t 為何？

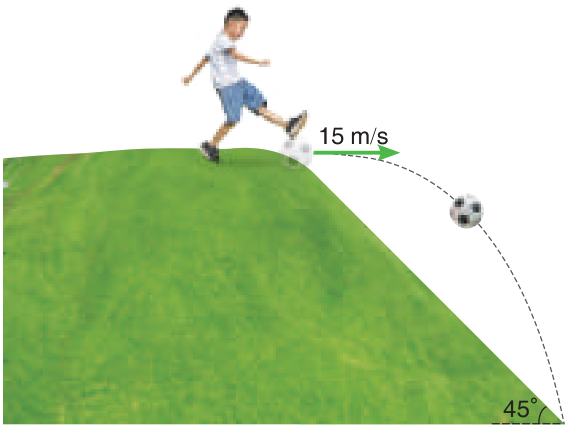
(2) 彈珠落地處離開桌邊的水平距離 x 為何？

(3) 彈珠落地的速度量值 v 為何？



15. 以 v_0 的初速水平拋射一物體，當水平前進距離與落下之距離相等時，其速度的水平分量與鉛直分量之比值為何？

16. 如右圖，在一傾斜 45° 的斜坡上，一位小孩將足球以 15 m/s 的速度朝水平方向踢出，假設斜坡足夠長，重力加速度 $g = 10\ \text{m/s}^2$，則多久後此足球會落在斜坡上？



3-4 斜向拋射

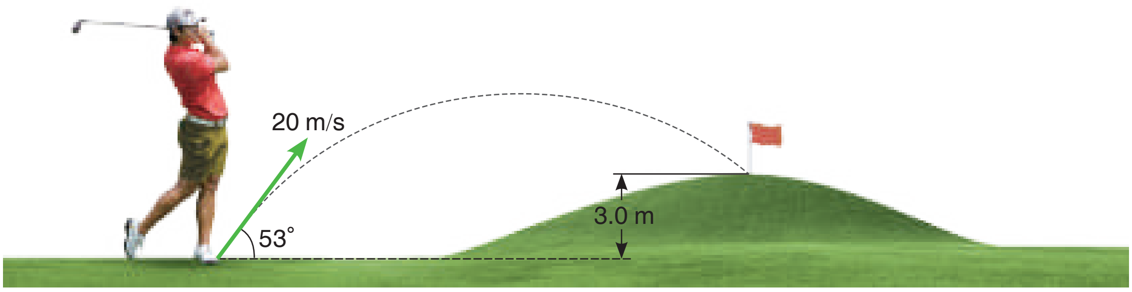
17. 足球員小仁沿著與水平呈 53° 角的方向，自地面踢出一足球，球著地前在空中飛行 2.4 s。若重力加速度 $g = 10\ \text{m/s}^2$，則足球被踢出時的速率為何？

18. 如下圖，一高爾夫球員以 20 m/s 的速率沿與水平呈 53° 角的方向擊出一球，球最後抵達高出擊球位置 3.0 m 處的果嶺上。若重力加速度 g 的量值為 10 m/s^2，試求：

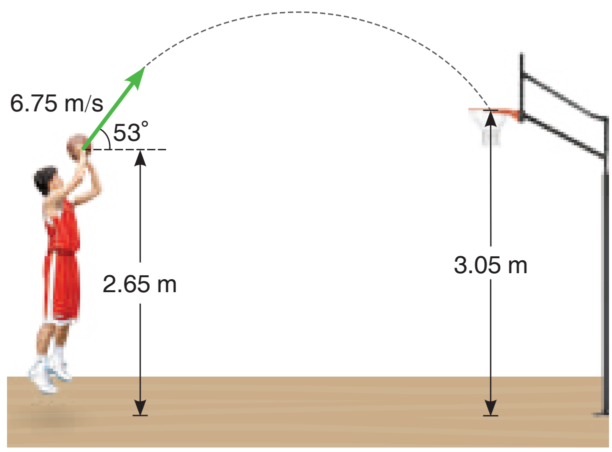
(1) 球在空中飛行的時間為何？

(2) 當球著地時，球在水平方向前進多少距離？

(3) 球著地時的速度量值與方向為何？



19. 如右圖，一職業球員以 6.75 m/s 的初速、53° 的傾斜角將籃球由離地 2.65 m 高處投出，若重力加速度 $g = 10$ m/s^2，則球員需離籃框多遠的水平距離處，才能將籃球投進籃框？



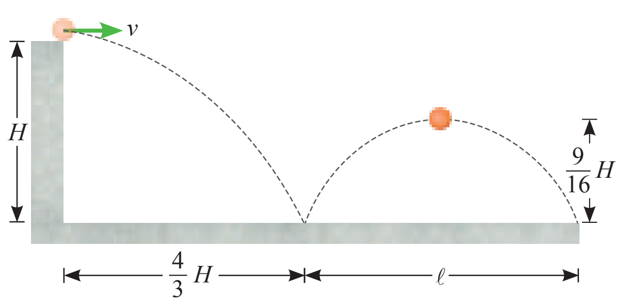
分科趨勢題 配合 P.100

20. 如右下圖所示，一小球從離地 H 處水平射出，第一次落地時的水平位移為 $\frac{4}{3}H$，反彈高度為 $\frac{9}{16}H$。若地板光滑，重力加速度為 g，反彈後小球速度水平分量維持不變，試求：

(1) 水平初速 v。(以 g、H 表示)

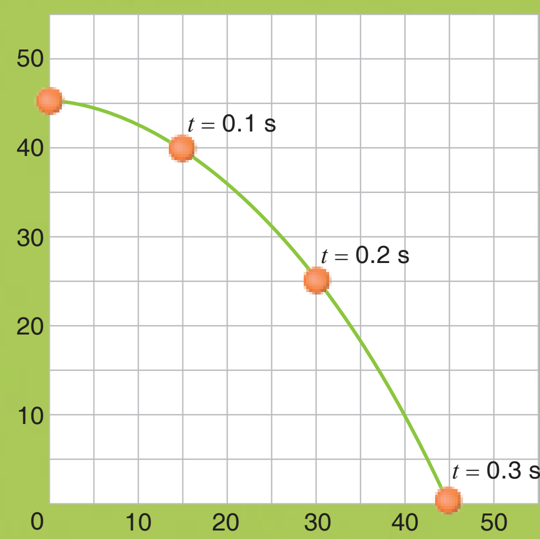
(2) 小球第一次落地到第二次落地所需時間。(以 g、H 表示)

(3) 兩落地點的距離 ℓ。(以 H 表示)



素養題

21. 快速連續照相技術經常使用在日常生活現象的細緻分析上，它可以記錄下一般人無法看到的瞬間行為。右圖為一小球作水平拋射運動時，被快速連續照相技術所拍下的結果，其中背景方格的每小格為 5 cm。依據此張圖片試求：



(1) 小球在水平方向作什麼運動？原因為何？

(2) 小球的初速度。

(3) 小球在時間 $t = 0.2$ s 時的鉛直速度。

解題的科學方法

「在解題的過程中，也許問題不大，但如能引起你的好奇心，而且如果你是用自己的方法去解決它們的，你就會體驗到這種緊張心情，享受到發現的喜悅，並在心中留下深刻的印象，甚至會影響到你一生的性格！」

美國數學家波利亞（George Polya，1887 ～ 1985）

怎樣解題

一、弄清問題

1. 未知數是什麼？已知數據是什麼？條件是什麼？
2. 引入適當的符號。
3. 把條件的各個部分分開，你能把它們寫下來嗎？

二、擬定計畫（找出已知數與未知數的關係）

1. 你是否見過相同的問題，而形式稍有不同？
2. 你是否知道一個可能用得上的定理或定律？
3. 試想出一個具有相同或相似未知數，且較熟悉的問題。
4. 你能不能用不同方法重新敘述它？
5. 回到定義去。
6. 你能不能想出一個更容易著手的有關問題？
7. 你能否解決這個問題的一部分？
8. 你能不能從已知數據導出某些有用的東西？
9. 你能不能想出或確定與未知數有關的其他數據？
10. 你是否利用了整個條件及所有的數據？
11. 你是否考慮了包含在問題中所有的必要概念？

三、實行計畫

- 檢驗每一步驟，實現你的求解計畫。

四、回　顧

1. 你能不能一下子看出它來？
2. 你能不能把這結果或方法用在其他問題上？

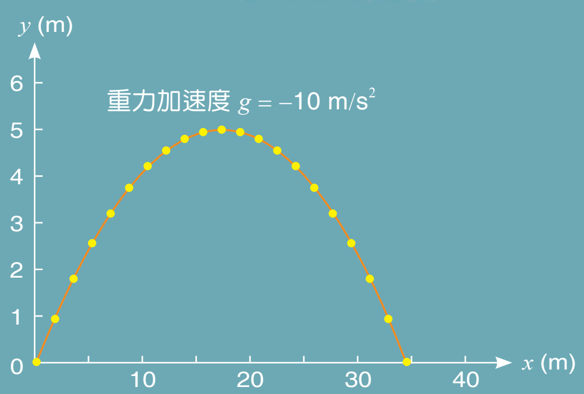
結　語

當一位學生的錯誤很大令人惱火時，原因幾乎總是相同的：他根本不想解題。因此，想協助學生的老師或學生自己，首先是要有好奇心，有解題的願望，然後下定決心，定下心來做功課。

科普趣聞

JUMPING GRACE
跳躍的優美性

由水平位置 x 與鉛直位置 y 之關係圖可看出：斜向拋射的物體在最高點附近之鉛直速度為零或非常小，觀看時會覺得物體在最高點附近滯留的時間較久。在觀賞舞者躍起時，感覺異常優美；籃球選手飛身灌籃時，所展現的滯空能力，這些都反應出斜向拋射的物體在最高處附近之速率最小，所以從照片上看起來，其滯留的時間也較其他處久。



▲ 以 20 m/s 初速、仰角 30° 斜向拋射物體，在每 0.1 s 所呈現的位置點及運動軌跡（x 軸與 y 軸之比例尺不同，實際拋射角度與圖上所呈現角度不同）。