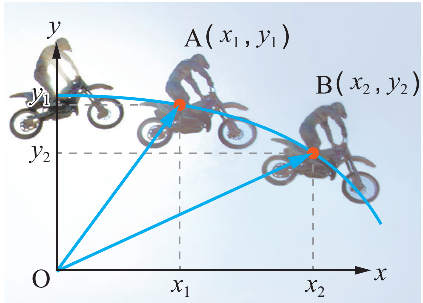
學習重點

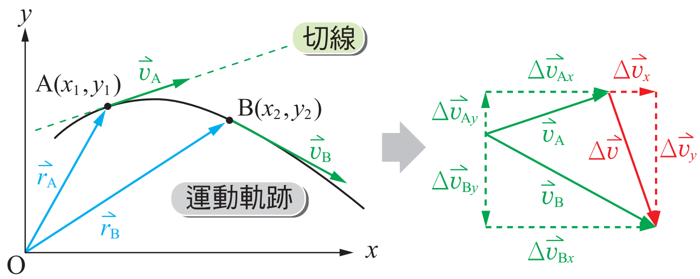
平面運動的描述

- 平面運動需要兩個參數描述
- 位置向量與位移



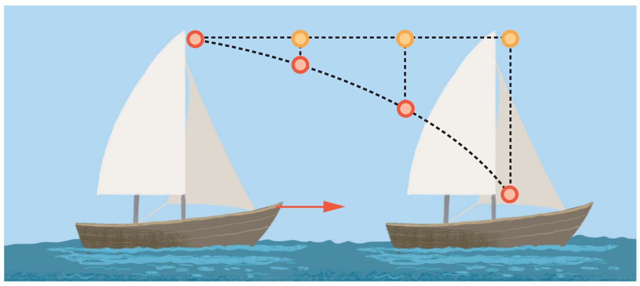
平面運動的速度與加速度

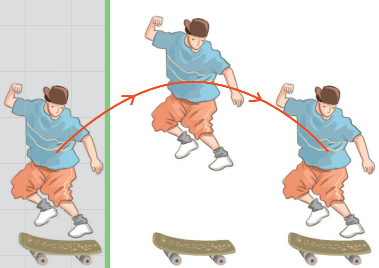
- 平面運動中的速度
- 平面運動中的加速度
- 切線加速度與法線加速度

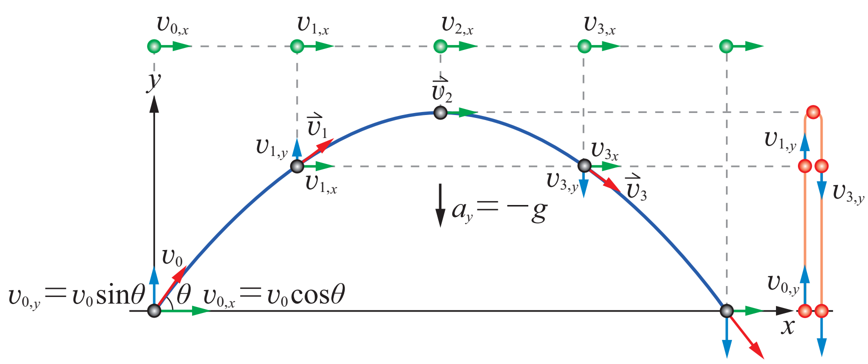


拋體運動

- 運動的獨立性
- 水平拋射運動
- 斜向拋射運動







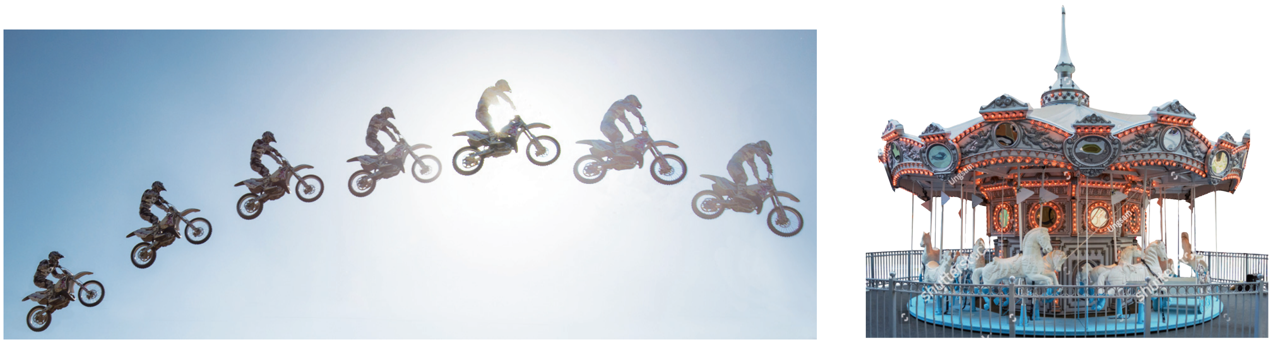
CH. 3 平面運動

3-1 平面運動的描述

學習概念 1 平面運動需要兩個參數描述

配合課本 71 頁

1. 直角坐標系：當物體的運動軌跡為拋物線或圓形等的曲線運動時，將需要兩個坐標軸才能完整描述物體的運動過程；最常用的就是兩個互相垂直的座標軸，稱為直角坐標系。

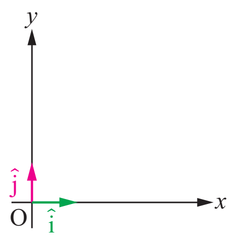


⊙特技機車的運動與旋轉木馬的運動屬於平面運動

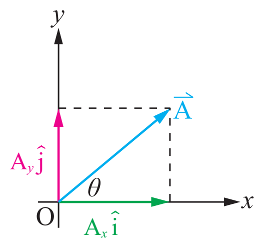
2. 直角坐標系的單位向量：

(1) x 軸的單位向量 $\hat{i}$：在 x 軸上取長度為一個單位的向量，方向指向 $+x$ 方向。

(2) y 軸的單位向量 $\hat{j}$：在 y 軸上取長度為一個單位的向量，方向指向 $+y$ 方向。



圖(一)：$\hat{i}$ 與 $\hat{j}$ 為 x 軸與 y 軸之單位向量



圖(二)：向量 $\vec{A}$ 可寫為 $\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}$

3. 直角坐標系的空間向量：

以 O 參考點，位置坐標為（A_x，A_y）的 A 點，則從 O 點（起點）指向 A 點（終點）的有向線段 $\overline{OA}$（和 $+x$ 軸之間的夾角為 θ）稱為 A 點的位置向量 $\vec{A}$，如上圖(二)。

(1) 位置向量 $\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}$，其中 $A_x=A\cos\theta$，$A_y=A\sin\theta$。

(2) 位置向量的量值等於它的長度，簡記為 $|\vec{A}|$；其方向則以和 x 軸之間的夾角 θ 表示。

① 量值：$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^{\,2}+A_y^{\,2}}$。

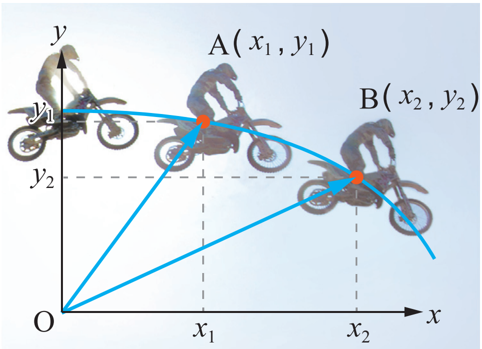
② 方向：和 $+x$ 軸夾 θ 角，則 $\tan\theta=\dfrac{A_y}{A_x}$。

學習概念 2 位置向量與位移

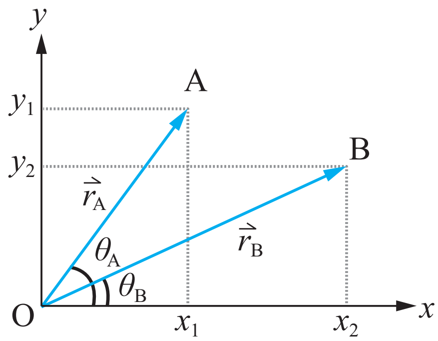
配合課本 72 頁

1. 位置向量：

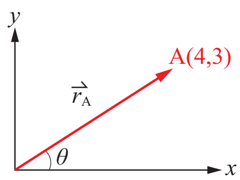
在平面上任取一適當的位置為參考點 O，將時刻 t_1 的質點位置標示為 **A 點**，其位置坐標為（x_1，y_1），再將時刻 t_2 的質點位置，標示為 **B 點**，其位置坐標為（x_2，y_2）。



描述特技機車運動的方式



簡化後的圖形

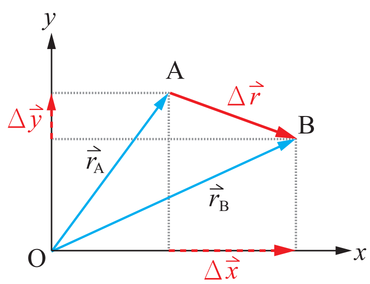
<table>
<tr><th>A 點的位置向量 $\vec{r}_A$</th><th>B 點的位置向量 $\vec{r}_B$</th></tr>
<tr><td>$\vec{r}_A = x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j}$
量值：$|\vec{r}_A| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
$x_1 = r_A\cos\theta_A$，$y_1 = r_A\sin\theta_A$</td><td>$\vec{r}_B = x_2\,\hat{i} + y_2\,\hat{j}$
量值：$|\vec{r}_B| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$
$x_2 = r_B\cos\theta_B$，$y_2 = r_B\sin\theta_B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">例：
$\vec{r}_A = x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j} = 4\,\hat{i} + 3\,\hat{j} = (4, 3)$，$|\vec{r}_A| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
$\tan\theta = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{3}{4}$，$\theta = 37^\circ$
</td></tr>
</table>

2. 位移：

質點由位置向量為 $\vec{r}_A$ 的 A 點移至位置向量為 $\vec{r}_B$ 的 B 點，正好是由 A 點（初位置）直接畫向 B 點（末位置）的有向線段，質點的位移以 $\Delta\vec{r}$ 表示，則：

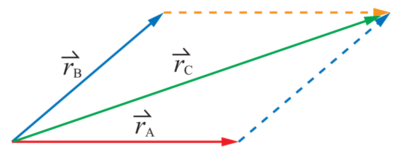
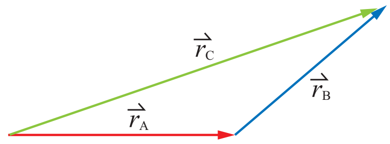
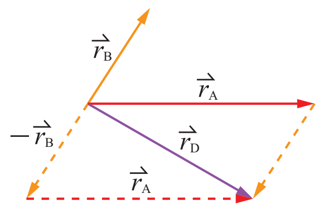
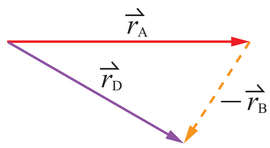
$\Delta\vec{r} = \overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j}$

$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$（**分量獨立性，同方向進行加減**）



上式即為 $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$。（利用向量的減法：先讓兩個向量具有共同的起點 O，接著從初向量的終點 A 畫至末向量的終點 B 所得的向量 $\overline{AB}$ 即為 $\overline{OB} - \overline{OA}$。）

3. 向量加減法：

<table>
<tr><td rowspan="3">向量相加</td><td colspan="2">$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{r}_B$
可運用平行四邊形法或三角形法。</td></tr>
<tr><td>平行四邊形法</td><td>三角形法</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">向量相減</td><td colspan="2">$\vec{r}_D = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_A + (-\vec{r}_B)$
先將要減的向量改為反向，再使用向量加法，求出兩向量的差。</td></tr>
<tr><td>平行四邊形法</td><td>三角形法</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

範例 1　平面位置向量的表示方式

一隻螞蟻在平面直角坐標（6 cm，8 cm）位置上，求它的位置向量：

(1) 以向量的分量表示。

(2) 以量值和方向表示。

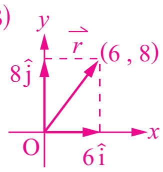
(3) 將此位置向量在坐標上畫出。

答 (1) $6\hat{i} + 8\hat{j}$ cm；(2) 10 cm，方向為 x 偏 y 53°；(3)見解析

解 (1)（6，8）$= 6\hat{i} + 8\hat{j}$ cm；

(2)量值 $|\vec{r}| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ cm，方向：和 $+x$ 軸夾 θ 角，則 $\tan\theta = \frac{4}{3}$ 為 x 偏 y 53°。

(3)



類題：一直角坐標上有一質點之坐標為（－4 cm，4 cm），求此質點的位置向量：

(1) 以向量的分量表示。

(2) 以量值和方向表示。

答 (1)$-4\hat{i}+4\hat{j}$ cm；(2) $4\sqrt{2}$ cm，方向為$-x$偏y 45°

（(1)（－4，4）$=-4\hat{i}+4\hat{j}$ cm；

(2)量值 $|\vec{r}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$ cm，

方向：和$-x$軸夾θ角，則 $\tan\theta=\dfrac{4}{-4}=-1$ 為$-x$偏y 45°。）

範例 2 平面向量位置與位移

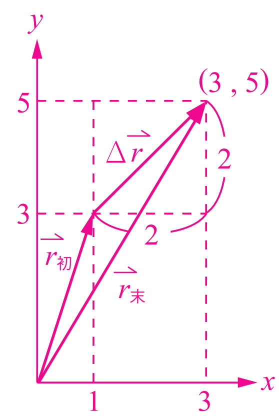
一直角坐標軸上有一質點從坐標（1 m，3 m）的 A 點沿一曲線移至坐標（3 m，5 m）的 B 點，求該質點初位置及末位置之位置向量以及位移，並作圖表示之。

答 初位置 $1\hat{i}+3\hat{j}$ m；末位置 $3\hat{i}+5\hat{j}$ m；位移 $2\hat{i}+2\hat{j}$ m；作圖見解析

解 如右圖，根據題意，先畫出初位置 A（1，3），向量為 $1\hat{i}+3\hat{j}$ m；

再畫出末位置 B（3，5），向量為 $3\hat{i}+5\hat{j}$ m；

位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=2\hat{i}+2\hat{j}$ m。



類題：有一隻螞蟻從坐標（6 m，8 m）的 A 點爬到坐標（－3 m，－4 m）的 B 點，求：

(1) 以向量的分量表示出位移。

(2) 螞蟻在 B 點相對原點的距離和方向。

答 (1)$-9\hat{i}-12\hat{j}$ m；(2) 5 m，方向$-x$偏$-y$53°

（(1) $\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(-3-6)\hat{i}+(-4-8)\hat{j}=-9\hat{i}-12\hat{j}$ m；

(2)量值 $|\vec{r}_B|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$ m，

方向：和$-x$軸夾θ角，則 $\tan\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$ 為$-x$偏$-y$53°。）

3-1 課後練習

＊為多選題

基礎題

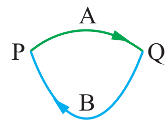
概念 位置向量與位移

（解析見解答本）

（ A ）1. 小明向東走 1 公里，再向北走 1 公里，則其位移為何？
(A) $\sqrt{2}$ 公里東北方 (B) $\sqrt{2}$ 公里西南方 (C) 2 公里東南方 (D) 2 公里東北方
(E) 2 公里西南方

（ D ）2. 有一個指針式時鐘，其秒針的長度為 10 公分，轉動 1 周費時 60 秒。考慮秒針移動 45 秒的前後，針尖的位移量值為多少公分？
(A) 0 (B) 5 (C) 10 (D) $10\sqrt{2}$ (E) 20

（ D ）3. 如右圖，一質點沿著路徑 A 由 P 點移動到 Q 點，再沿著路徑 B 經由 Q 點回到 P 點，則下列有關該移動的敘述，何者正確？
(A) P 到 Q 的位移與 Q 到 P 的位移相同 (B) P 到 Q 的位移量值小於 Q 到 P 的位移量值 (C) P 到 Q 的路徑長等於 Q 到 P 的路徑長 (D) P 到 Q 的路徑長小於 Q 到 P 的路徑長 (E)全程的位移量值與路徑長均為零



◎ 一質點由原點 O 出發向東移動 10 公尺來到 A 點，再向東偏北 60°，移動 10 公尺來到 B 點，試回答下列 4. ～ 5. 題：

（ C ）4. B 點的位置為何？
(A) $10\hat{i}+10\hat{j}$ (B) $10\hat{i}+5\sqrt{3}\,\hat{j}$ (C) $15\hat{i}+5\sqrt{3}\,\hat{j}$ (D) $10\hat{i}+10\sqrt{3}\,\hat{j}$
(E) $20\hat{i}$

（ B ）5. 總位移與正東方夾角的正切值為何？
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3

教師用書 貼心伴隨・敬請賜教

◎ 平面上有兩個位置向量，其中$\vec{A}=6\hat{i}+5\hat{j}$、$\vec{B}=2\hat{i}+1\hat{j}$，試回答下列第 6. ～ 8. 題：

（ D ）6. 向量$\vec{A}+\vec{B}$的量值為何？
(A) 2　(B) 6　(C) 8　(D) 10　(E) 14

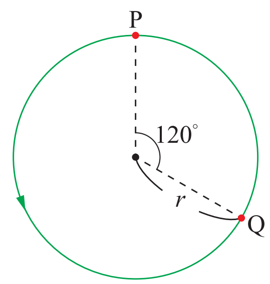
（ B ）7. 向量$\vec{A}+\vec{B}$的方向與$+x$軸夾角為何？
(A) 30°　(B) 37°　(C) 45°　(D) 53°　(E) 60°

（ A ）8. 向量 $2\vec{A}-6\vec{B}$的量值為何？
(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　(E) 12

（ C ）9. 物理課堂中，老師在紙上以箭矢畫出兩個位移向量，其中$\vec{A}$由坐標（0 , 0）到（3 , − 4）、$\vec{B}$由坐標（2 , 2）到（x , y）。$\vec{A}$等於$\vec{B}$，則坐標（x , y）為何？
(A)（5 , 6）　(B)（1 , − 6）　(C)（5 , − 2）　(D)（− 1 , − 2）　(E)（− 1 , 6）

（ E ）10. 有一個指針式時鐘，若其秒針針尖在 0 ～ 15 秒的位移為$\vec{d_1}$，15 ～ 30 秒的位移為$\vec{d_2}$，0 ～ 30 秒的位移為$\vec{d_3}$，30 ～ 45 秒的位移為$\vec{d_4}$，45 ～ 60 秒的位移為$\vec{d_5}$，則下列各項關係，何者正確？
(A) $\vec{d_1}=\vec{d_2}$　(B) $\vec{d_1}=\vec{d_4}$　(C) $\vec{d_1}=\vec{d_5}$　(D) $\vec{d_1}+\vec{d_2}=\vec{d_4}+\vec{d_5}$　(E) $\vec{d_3}+\vec{d_4}+\vec{d_5}=0$

（ B ）11. 如右圖，小鐘以逆時針方向沿著半徑為 r 的圓形跑道散步，若小鐘由 P 點走至 Q 點，則其（路徑長 , 位移量值）為何？
(A) ($\frac{2}{3}\pi r$, $\sqrt{2}\,r$)　(B) ($\frac{4}{3}\pi r$, $\sqrt{3}\,r$)　(C) ($\frac{1}{3}\pi r$, $\frac{\sqrt{2}}{2}r$)
(D) ($\frac{2}{3}\pi r$, $\frac{\sqrt{3}}{2}r$)　(E) ($\frac{4}{3}\pi r$, $2r$)

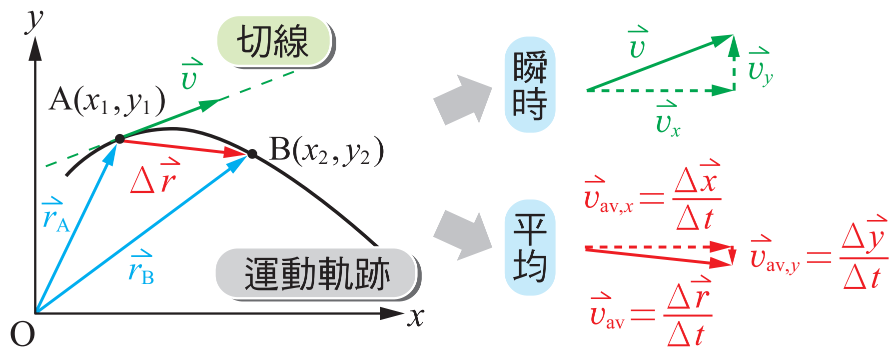


3-2 平面運動的速度與加速度

學習概念 1 平面運動中的速度

配合課本 76 頁

若一質點在 t_1 時刻的位置 A（x_1，y_1），在 t_2 時刻移至 B（x_2，y_2），經時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$、質點的位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ 和路徑長 $\Delta\ell$ 之間變化的關係如下。



⊙質點在平面上的運動軌跡

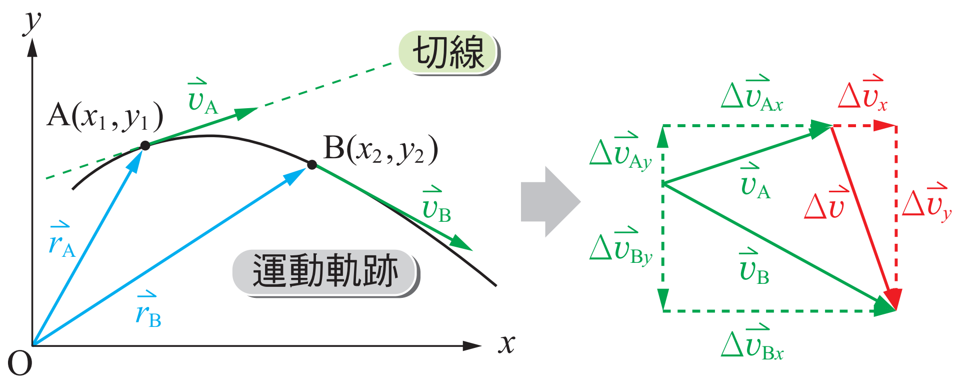
名稱	種類	公式	方向
速度 (m/s)	平均速度 $\vec{v}_{av}$	$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} = v_{av,x}\hat{i} + v_{av,y}\hat{j} = (\vec{v}_{av,x}, \vec{v}_{av,y})$ $\lvert\vec{v}_{av}\rvert = \sqrt{v_{av,x}^2 + v_{av,y}^2}$	與位移 $\Delta\vec{r}$ 方向一致，恰為軌跡上 A、B 兩點的**割線方向**
	瞬時速度 $\vec{v}$	Δt 時距趨近於零 $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t})\hat{i} + (\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t})\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y)$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	為軌跡上 A 點的**切線方向**
速率 (m/s)	平均速率 $v_{s,av}$	$v_{s,av} = \frac{\Delta\ell}{\Delta t}$	**無方向**
	瞬時速率 v_s	Δt 時距趨近於零 $v_s = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\ell}{\Delta t}$	

註 如平面運動的等速圓周運動：平均速率 $v_{s,av}$ ＝瞬時速度量值 $\lvert\vec{v}\rvert$ ＝瞬時速率 v_s

學習概念 2 平面運動中的加速度

配合課本 78 頁

若一質點在空間中沿著曲線軌跡移動時，其瞬時速度的大小或方向發生改變，表示**有速度變化**，即過程**必然有加速度**。在 t_1 至 t_2 的時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 內，質點的速度變化與時間的關係如下。

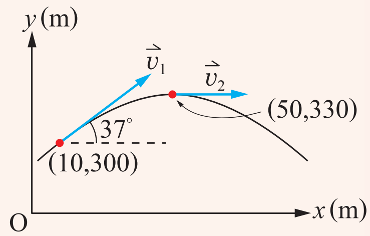


質點瞬時速度改變，則作加速運轉。

名稱	種類	公式	方向
加速度 (m/s^2)	平均加速度 $\vec{a}_{av}$	$\vec{a}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_2 - t_1} = \left(\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \left(\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\hat{j}$ $= a_{av,x}\,\hat{i} + a_{av,y}\,\hat{j} = (\vec{a}_{av,x}, \vec{a}_{av,y})$ $\lvert\vec{a}_{av}\rvert = \sqrt{a_{av,x}^{\,2} + a_{av,y}^{\,2}}$	與速度變化 $\Delta\vec{v}$ 方向一致
	瞬時加速度 $\vec{a}$	Δt 時距趨近於零 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\hat{j}$ $= a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} = (\vec{a}_x, \vec{a}_y)$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$	與瞬時速度變化 $\Delta\vec{v}$ $(\Delta t \to 0)$ 方向一致

範例 1　平面運動 — 直角坐標（向量分解）

柯南利用渦輪引擎滑板由 300 公尺的大廈飛躍到另一棟 330 公尺的高塔，兩處水平距離為 50 公尺。右圖將柯南視為一質點，在 xy 平面上的移動軌跡，若假設時刻 $t_1=1$ s 時的速度 $\vec{v}_1=25$ m/s 與 $+x$ 軸夾 37°；$t_2=3$ s 時的速度 $\vec{v}_2=20$ m/s 與 $+x$ 軸同向，則柯南在這段時間內的位移量值、平均速度量值、平均加速度量值各為若干？

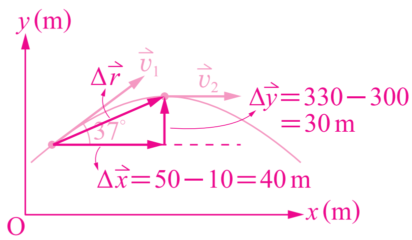


答　(1) 50 m；(2) 25 m/s；(3) 7.5 m/s^2

解　(1)初位置 A（10, 300），A 點位置向量 $\vec{r}_A=10\,\hat{i}+300\,\hat{j}$；B 點（50, 330），B 點位置向量 $\vec{r}_B=50\,\hat{i}+330\,\hat{j}$；位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\Delta x\,\hat{i}+\Delta y\,\hat{j}$

$=(50-10)\,\hat{i}+(330-300)\,\hat{j}=40\,\hat{i}+30\,\hat{j}$ m。

$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{40^2+30^2}=50$ m。



(2)平均速度 $\vec{v}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}=v_{av,x}\,\hat{i}+v_{av,y}\,\hat{j}$

$=\dfrac{40}{(3-1)}\hat{i}+\dfrac{30}{(3-1)}\hat{j}=20\,\hat{i}+15\,\hat{j}$，平均速度量值

$|\vec{v}_{av}|=\sqrt{{v_{av,x}}^2+{v_{av,y}}^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$ m/s。

(3)坐標分解法：由瞬時速度 $\vec{v}=v_x\,\hat{i}+v_y\,\hat{j}=v\cos\theta\,\hat{i}+v\sin\theta\,\hat{j}$，將瞬時速度分解，則：

$\vec{v}_1=25\cos37°\,\hat{i}+25\sin37°\,\hat{j}=(25\times\dfrac{4}{5})\,\hat{i}+(25\times\dfrac{3}{5})\,\hat{j}=20\,\hat{i}+15\,\hat{j}$

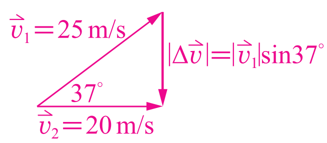
$\vec{v}_2=20\cos0°\,\hat{i}+20\sin0°\,\hat{j}=(20\times1)\,\hat{i}+(20\times0)\,\hat{j}=20\,\hat{i}+0\,\hat{j}$

$\vec{a}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i}+\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}=\dfrac{(20-20)}{(3-1)}\hat{i}+\dfrac{(0-15)}{(3-1)}\hat{j}$

$=0\,\hat{i}-7.5\,\hat{j}$ m/s^2

〈另解〉向量圖解：$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}_1|\sin37°=25\times\dfrac{3}{5}=15$ m/s（方向向下），

$\vec{a}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{15}{(3-1)}=7.5$ m/s^2（方向向下）



類題：承範例題，(1) 若這段時間內的軌跡長度為 62 公尺，則平均速率為多少 m/s？
(2) 於時刻 t_1 瞬間，其鉛直方向的瞬時速度量值為多少 m/s？

答　(1) 31 m/s；(2) 15 m/s

((1)平均速率 $v_{s,av}=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}=\dfrac{62}{(3-1)}=31$ m/s。

(2)瞬時速度 $\vec{v}=v_x\,\hat{i}+v_y\,\hat{j}=v\cos\theta\,\hat{i}+v\sin\theta\,\hat{j}$，所以 $v_{1,x}=v_1\sin37°=25\times\dfrac{3}{5}=15$ m/s。)

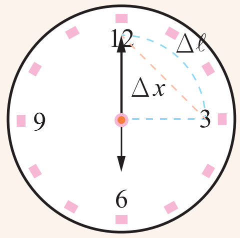
3

教師用書

貼心伴隨．敬請賜教

範例 2　平面運動 — 時鐘問題（向量圖解）

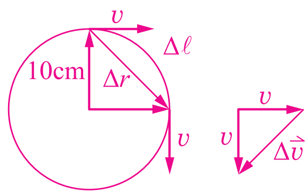
一時鐘的秒針長 10 cm，從 0 秒位置移動至 15 秒位置的時間間隔內，秒針尖端平均速度量值為若干？平均速率為若干？平均加速度量值為若干？（時鐘秒針視為等速率運動）



註　各點的瞬時速率＝任一時距的平均速率

答　$|\vec{v}_{av}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm/s，$v_{s,av}=\dfrac{\pi}{3}$ cm/s，$|\vec{a}_{av}|=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{45}$ cm/s^2

解　位移量值 $|\Delta\vec{r}|=10\times\sqrt{2}$；路徑長 $\Delta\ell=2\pi\times10\times\dfrac{90^\circ}{360^\circ}=5\pi$；



平均速度量值 $|\vec{v}_{av}|=\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\dfrac{10\sqrt{2}}{15}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm/s；

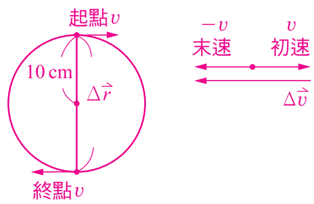
平均速率 $v_{s,av}=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}=\dfrac{2\pi\times10\times\dfrac{90^\circ}{360^\circ}}{15}=\dfrac{5\pi}{15}=\dfrac{\pi}{3}$ cm/s；

因秒針針尖瞬時速率 v＝平均速率 $v_{s,av}=\dfrac{\pi}{3}$ cm/s，針尖在 15 秒內速度變化量值 $|\Delta\vec{v}|$

$=\sqrt{2}\,v=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{3}$，故平均加速度量值 $|\vec{a}_{av}|=\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{3}}{15}=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{45}$ cm/s^2。

類題：承範例題，若從 0 秒位置移動至 30 秒位置的時間間隔內，秒針尖端之位移、平均速度、平均速率和平均加速度各為若干？

答　(1) 20 cm（向下）；(2) $\dfrac{2}{3}$ cm/s（向下）；(3) $\dfrac{\pi}{3}$ cm/s；(4) $\dfrac{\pi}{45}$ cm/s^2（向左）



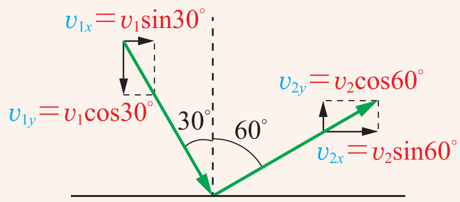
（(1)位移 $\Delta\vec{r}=20$ cm（向下）；(2)平均速度 $\vec{v}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$ cm/s（向下）；

(3)平均速率 $v_{s,av}=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}=\dfrac{2\pi\times10\times\dfrac{180^\circ}{360^\circ}}{30}=\dfrac{\pi}{3}$ cm/s；

(4)平均加速度 $\vec{a}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}}{30}=-\dfrac{\pi}{45}$ cm/s^2 $\Rightarrow$ $\dfrac{\pi}{45}$ cm/s^2（向左）。）

範例 3 平面運動 —— 向量分解

有一網球以速度 $v_1=12\ \text{m/s}$、入射角 30° 之初速撞擊地面，然後以 $v_2=4\sqrt{3}\ \text{m/s}$、反射角 60° 反彈，若球與地面接觸時間為 0.01 秒，則球在接觸地面時之平均加速度為多少 m/s^2 ？



答 $800\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$（向上）

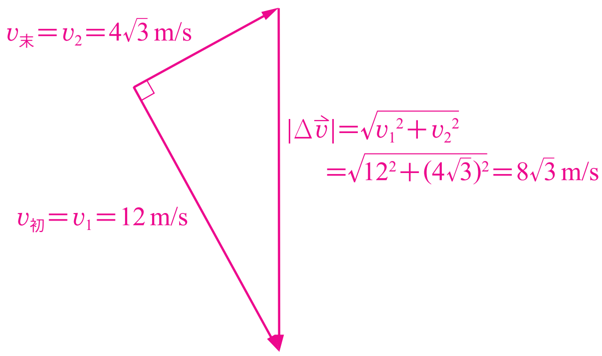
解 先將碰撞前初速與撞後末速向量分解 $v_{初}=v_1=6\hat{i}-6\sqrt{3}\ \hat{j}$，$v_{末}=v_2=6\hat{i}+2\sqrt{3}\ \hat{j}$，

假設向上、向右為正，所以速度變化量

$\Delta v=v_{末}-v_{初}=(6-6)\hat{i}+(2\sqrt{3}-(-6\sqrt{3}))\hat{j}=8\sqrt{3}\ \hat{j}$。

故平均加速度 $\vec{a}_{av}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{8\sqrt{3}\ \hat{j}}{0.01}=800\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$（向上）。

〈另解〉向量圖解



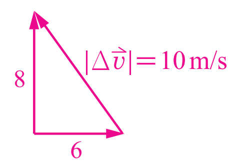
類題：物體在水平面上運動，在 5 秒內速度由 6 m/s 向東，變成 8 m/s 向北，則物體的平均加速度量值為多少 m/s^2 ？

(A) 10 (B) 8 (C) 4 (D) 2 (E) 1

答 (D)

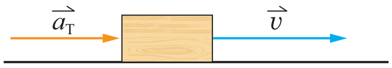
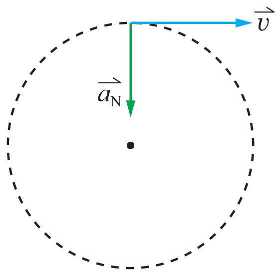
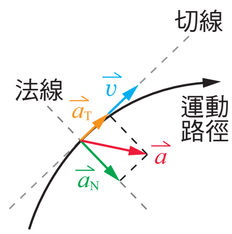
（$\Delta\vec{v}=\Delta v_x\hat{i}+\Delta v_y\hat{j}=6\hat{i}+8\hat{j}\Rightarrow|\Delta\vec{v}|=\sqrt{6^2+8^2}=10\ \text{m/s}$，

$|\vec{a}_{av}|=\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\dfrac{10}{5}=2\ \text{m/s}^2$。故選(D)。）



學習概念 3 切線加速度與法線加速度

補充資料

形成原因	當質點做曲線運動時，可將質點的加速度分解為切線與法線上的分量	
種類	切線加速度 $\vec{a}_{\mathrm{T}}$	法線加速度 $\vec{a}_{\mathrm{N}}$
方向	與瞬時速度方向平行	與瞬時速度方向垂直
作用	僅改變速度的大小	僅改變速度的方向
圖示		
舉例	加速度 $\vec{a}$ 與速度 $\vec{v}$ 的夾角為 θ 加速 $\vec{a}$ 分解 $\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{\mathrm{T}} = \vec{a}\cos\theta \\ \vec{a}_{\mathrm{N}} = \vec{a}\sin\theta \end{cases}$ $\Rightarrow$加速度量值 $\lvert a \rvert = \sqrt{a_{\mathrm{T}}^{2} + a_{\mathrm{N}}^{2}}$	

◎ **討論：**

(1) 由於切線加速度僅改變速度的大小，不會改變速度的方向，所以一運動質點若切線加速度為零則必作等速率運動（方向可能會變）。

(2) 由於法線加速度僅改變速度的方向，不會改變速度的大小，所以一運動質點若法線加速度為零則必作直線運動（速度大小可能會變）。

(3) 各種運動之切線加速度、法線加速度：

等速率直線運動	$a_{\mathrm{T}} = 0$，$a_{\mathrm{N}} = 0$	變速率直線運動	$a_{\mathrm{T}} \neq 0$，$a_{\mathrm{N}} = 0$
等速率曲線運動	$a_{\mathrm{T}} = 0$，$a_{\mathrm{N}} \neq 0$	變速率曲線運動	$a_{\mathrm{T}} \neq 0$，$a_{\mathrm{N}} \neq 0$

〈★ 補充題型〉

範例 4 切線加速度與法線加速度

某物初速度為 16.0 m/s（向東），加速度為 3.0 m/s²（向南），以向東為 $+x$ 方向，向北為 $+y$ 方向，出發點為原點。則求：

(1) 4.0 秒內位移量值。

(2) 第 4.0 秒末之速度量值。

(3) 第 4.0 秒末之切線加速度量值與法線加速度量值。

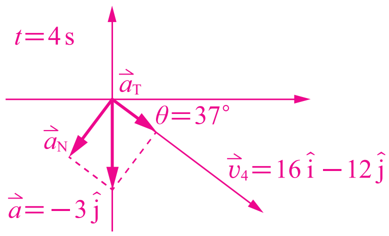
答 (1) $8\sqrt{73}$ m；(2) 20 m/s；(3) 1.8 m/s²，2.4 m/s²

解 (1) $\Delta\vec{r}=\Delta x\,\hat{i}+\Delta y\,\hat{j}=(v_{0,x}t)\,\hat{i}+(\frac{1}{2}a_yt^2)\,\hat{j}$

$=(16\times4)\,\hat{i}+[\frac{1}{2}\times(-3)\times4^2]\,\hat{j}$

$=64\,\hat{i}-24\,\hat{j}$

$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{64^2+(-24)^2}=8\sqrt{73}$ m；



(2) $\vec{v}_t=v_x\,\hat{i}+v_y\,\hat{j}=(v_{0,x})\,\hat{i}+(a_yt)\,\hat{j}\Rightarrow\vec{v}_4=16\,\hat{i}+(-3)\times4\,\hat{j}=16\,\hat{i}-12\,\hat{j}$；

$|\vec{v}_4|=\sqrt{16^2+(-12)^2}=20$ m/s；

(3) $\vec{v}_4$ 方向為 $+x$ 方向偏 $-y$ 37°

$$\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}_T|=|a\sin\theta|=|a\times\sin37°|=1.8\ \text{m/s}^2\\|\vec{a}_N|=|a\cos\theta|=|a\times\cos37°|=2.4\ \text{m/s}^2\end{cases}$$ 。

類題：一質點在平面上運動，初速度 5 m/s（向東偏北 53°），受等加速度 4 m/s²（向南），以向東為 $+x$ 方向、向北為 $+y$ 方向，出發點為原點。下列關於質點 2 秒內的運動描述哪些正確？（$\sin53°=0.8$，$\cos53°=0.6$）（多選）

(A) 1 秒末質點瞬間靜止

(B) 1 秒末質點達最北位置

(C)質點先向東北，後轉向東南

(D)質點向北最遠位移 2 m

(E)質點全程向東位移了 8 m

答 (B)(C)(D)

（初速度分解為 $v_{0,x}=3$ m/s（向東）、向北 $v_{0,y}=4$ m/s（向北），y 方向為等加速運動（向南），$v_y=v_{0,y}+a_yt=4+(-4)t$，$r_y=v_{0,y}t+\frac{1}{2}a_yt^2=4t+\frac{(-4)}{2}t^2$。(1) $t=1$ s 時 $v_y=0$，$r_y=4+\frac{(-4)}{2}=2$ m，y 方向達最北位置，但此時仍有向東的速度。(2)全程位移：$t=2$ s 時 $r_x=3\cdot2=6$ m，$r_y=v_{0,y}t+\frac{1}{2}a_yt^2=4\cdot2+\frac{(-4)}{2}\cdot2^2=0$ m。故選(B)(C)(D)。）

3

教師用書 貼心伴隨・敬請賜教

3-2 課後練習

＊為多選題

基礎題

概念 平面運動的速度與速率

（解析見解答本）

（ B ）1. 一質點由初位置（12 m，10 m）處出發，2 秒後抵達末位置（18 m，18 m），質點在此 2 秒內的平均速度量值為多少 m／s ？

(A) 7 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

＊（ BDE ）2. 下列有關「平面運動」的敘述，哪些正確？

(A)平均速率等於平均速度的量值 (B)瞬時速率等於瞬時速度的量值 (C)速度改變時，速率必隨之改變 (D)速率改變時，速度必隨之改變 (E)曲線運動必為變速度運動

（ C ）3. 一質點以速率 v 作半徑為 R 之等速圓周運動，繞 $\frac{1}{6}$ 圈之時間內，其平均速度的量值為何？

(A) v (B) $\frac{v}{2}$ (C) $\frac{3v}{\pi}$ (D) $\frac{v}{2\pi}$ (E) $\frac{v}{6}$

4. 一質點在 5 秒內由初位置 $(x, y) = (3, 2)$，運動至末位置 $(x', y') = (-1, 5)$，採 SI 制，則質點在該時距內平均速度量值為__1__m／s。

5. 一質點在某時刻的速度為 $3\hat{i} - 4\hat{j}$ m／s，則：

(1) 當時的速率為多少 m／s ？

(2) 速度與 $+x$ 軸的夾角為多少度？（以逆時針方向夾角為正）

答：(1) 5 m／s；(2) $-53°$

6. 一汽車以等速度 60 km／h 向東行駛 50 秒後，再改以等速度 40 km／h 向南行駛 50 秒，則在這 100 秒內：

(1) 平均速度量值為多少 km／h ？

(2) 平均速率為多少 km／h ？

答：(1) $10\sqrt{13}$；(2) 50

概念 平面運動的加速度

（ D ）7. 一質點沿曲線運動且速率漸減，則其加速度與速度之夾角 θ 應為何？

(A) $\theta = 0°$ (B) $0° < \theta < 90°$ (C) $\theta = 90°$ (D) $90° < \theta < 180°$

(E) $\theta = 180°$

(　D　) 8. 一質點在平面上運動，初速度為 7 m/s（向東），5 秒末的速度變為 $4\sqrt{2}$ m/s（向東北），求此 5 秒內質點的平均加速度量值為多少 m/s^2？

(A) 5　(B) 4　(C) 2　(D) 1　(E) 0

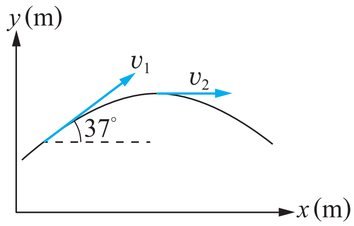
(　C　) 9. 一物體初速為 v，於時間 t 內運動方向偏轉 120°，則此時段內其平均加速度量值為何？

(A) $\frac{v}{t}$　(B) $\frac{\sqrt{2}\,v}{2t}$　(C) $\frac{\sqrt{3}\,v}{t}$　(D) $\frac{2v}{t}$　(E) $\frac{\sqrt{3}\,v}{2t}$

(　D　)10. 一質點以 10 m/s 的速度向東運動，今受到向北加速度 1 m/s^2 作用 10 s，繼而受向東加速度 2 m/s^2 作用 5 s，則全程質點的速度變化量為多少 m/s？

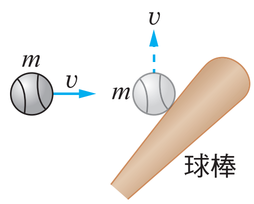
(A)向東 10　(B)向北 10　(C)向東北 10　(D)向東北 $10\sqrt{2}$　(E)向北$\sqrt{2}$

(　C　)11. 一質點在 xy 平面移動的軌跡如右圖所示，時刻 t_1＝1 s 時的速度 v_1＝5 m/s，方向與＋x 軸夾角 37°；時刻 t_2＝2 s 時的速度 v_2＝4 m/s，方向與＋x 軸同向，則質點在這段時間內平均加速度量值為多少 m/s^2？



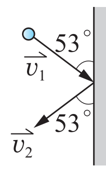
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5

(　E　)12. 如右圖所示，一棒球以速率 v 水平飛向擊球手，擊球手揮棒擊球，使球以速率 v 鉛直向上飛出，設水平投出方向為＋x，鉛直向上飛出方向為＋y，則打擊前後，棒球速度變化的量值及方向為何？



(A) $2v$，為＋y 方向　(B) v，與＋x 方向夾 45°　(C) v，與＋x 方向夾 135°
(D) $\sqrt{2}\,v$，與＋x 方向夾 45°　(E) $\sqrt{2}\,v$，與＋x 方向夾 135°

(　B　)13. 一鋼球與牆面碰撞如右圖所示，若 v_1 = 40 m/s，v_2 = 30 m/s，θ = 53°，球與牆接觸時間為 0.02 s，則在接觸時球之平均加速度量值約為多少 m/s^2？



(A) 3500　(B) 2800　(C) 500　(D) 400　(E) 300

14. 有一輛賽車在圓形賽道上作等速圓周運動。最初速度為 100 m/s 向北，經 20 s 繞了四分之一圈後，速度變為 100 m/s 向西，在這 20 s 時距內，則：

(1) 此車的速度變化量量值為多少 m/s？

(2) 此車的平均加速度量值為多少 m/s^2？

答：(1) $100\sqrt{2}$；(2) $5\sqrt{2}$

進階題

1. 某時鐘之秒針長 12 cm，從 12 點鐘的位置起秒針走 10 秒，求秒針尖端：
   (1) 10 秒內之位移量值
   (2) 10 秒內之運動路程長
   (3) 10 秒內之平均速度量值
   (4) 10 秒內之平均速率
   (5) 第 10 秒之瞬時速率
   (6) 第 10 秒之瞬時速度量值

   答：(1) 12 cm；(2) 4π cm；(3) $\frac{6}{5}$ cm/s；(4) $\frac{2}{5}\pi$ cm/s；(5) $\frac{2}{5}\pi$ cm/s；(6) $\frac{2}{5}\pi$ cm/s

2. 一擺長 $L = 0.6$ m 的單擺，將其擺錘由最高點（懸線與鉛垂線夾角 $\theta = 60°$）自由釋放，若經 0.8 秒後擺錘首次擺至最低點，試問此段過程擺錘的：
   (1) 平均速度量值為多少 m/s？
   (2) 平均速率為多少 m/s？

   答：(1) 0.75 m/s；(2) $\frac{\pi}{4}$ m/s

3. 一物體以 $\vec{v}_0 = 3\,\hat{i}$ m/s 之初速自原點開始運動，等加速度 $\vec{a} = -1\,\hat{i} - 0.5\,\hat{j}$ m/s^2，求此物在 $+1\,\hat{i}$ 方向到達最遠時：
   (1) 其速度為多少 m/s？
   (2) 其位置為多少 m？

   答：(1) $-1.5\,\hat{j}$；(2) $4.5\,\hat{i} - 2.25\,\hat{j}$

4. 一物體的初速有兩個分量，分別為 $\vec{v}_x = 6$ m/s（向東）、$\vec{v}_y = 8$ m/s（向南），若沿著東方與北方的單位向量分別為 $\hat{i}$ 與 $\hat{j}$，試回答下列問題：
   (1) 初速的合成向量為多少 m/s？
   (2) 初速量值為多少 m/s？
   (3) 物體初速方向與北方的夾角為多少度？
   (4) 若物體受沿著北方的等加速度 $\vec{a_y} = 4$ m/s^2（向北），則 2 s 後物體的速度 $\vec{v}'$ 為多少 m/s？

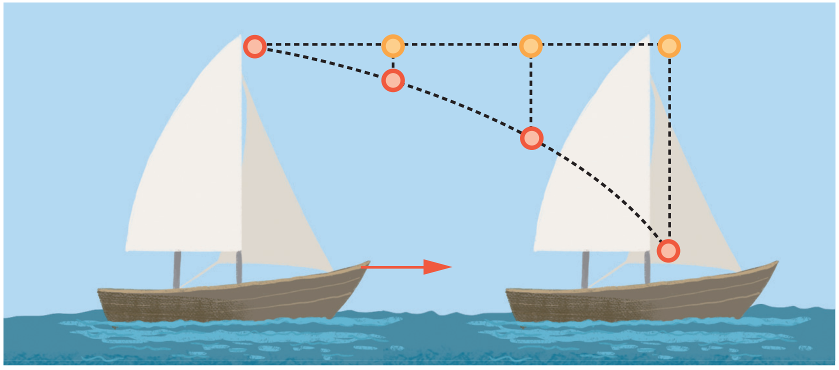
   答：(1) $6\,\hat{i} - 8\,\hat{j}$；(2) 10；(3) 143°；(4) 6 m/s（向東）

3-3 拋體運動

學習概念 1 運動的獨立性

配合課本 81 頁

1. **拋體運動**：物體被拋出後，在空中的運動皆稱為拋體運動。若忽略一切阻力，在地表附近的拋體將作表面的**等加速運動**。
2. **慣性原理**：伽利略發現可以利用**慣性原理**處理拋體運動。



帆船以等速前進，且空氣阻力可忽略，則從桅杆頂端掉下的小球必然掉在桅杆底部。

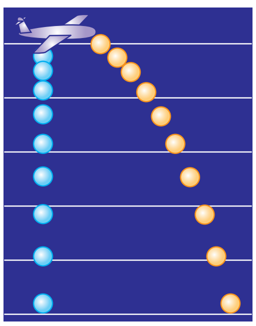
3. **運動的獨立性（*independence of motion*）**：

伽利略獲得一項極其重要的深刻體認：拋體運動是水平方向的等速運動與鉛直方向的等加速運動組合而成，且這兩種運動彼此互不影響，可以分開處理，這樣的特性稱為**運動的獨立性**。

這項特性使得某些難度較高的二維平面運動，可直接分解成兩個互相垂直的一維運動來處理，這也是前面先學習一維直線運動的重要原因，以一維直線運動為基礎，讓我們得以化繁為簡地解決二維平面運動的問題。若空氣阻力忽略不計，則拋體運動的狀況：

(1) 水平方向：**等速運動**，水平方向的加速度 $\vec{a_x} = 0$。

(2) 鉛直方向：**等加速運動**，垂直方向的加速度 $\vec{a_y} = -g$。



同時開始運動的自由落體與水平拋體，由於鉛直方向初速度均為零，且均受重力加速度 g 向下，故在相同的時間內會落下相同的高度。

3

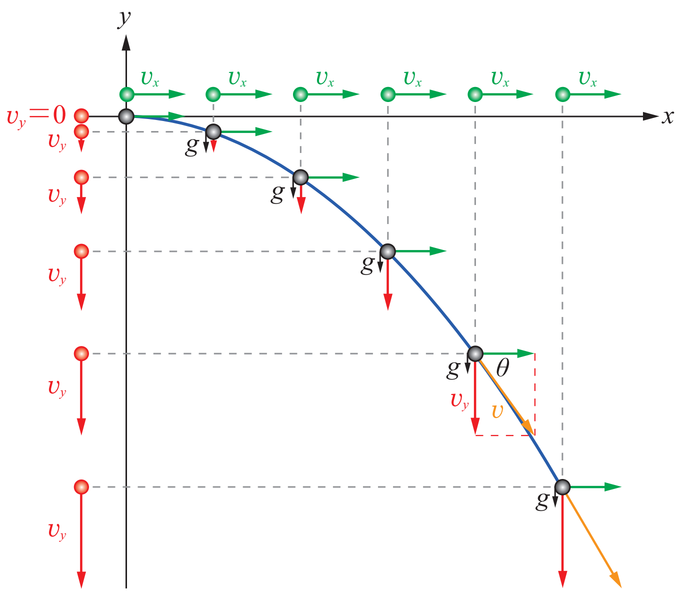
教師用書 貼心伴隨・敬請賜教

學習概念 2 水平拋射運動

配合課本 82 頁

1. 運動的形式及物理量：自高度 H 處拋出時僅有水平初速度 v_0，只考慮重力加速度 g 的影響，取水平方向為 x 軸，鉛直向上為 y 軸，將各物理量整理如下：

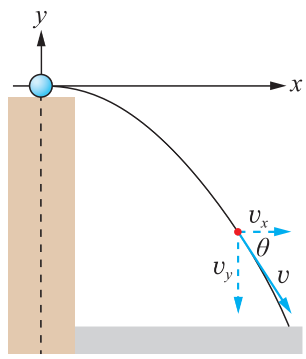
	受力	加速度	初速度	運動方式	t 秒時的速度	t 秒內位移
x 方向	$F_x=0$	$a_x=0$	v_0	等速運動	$v_x=v_0$	$x=v_0t$
y 方向	$F_y=-mg$	$a_y=-g$	0	等加速運動 由靜止作自由落體	$v_y=-gt$	$y=-\frac{1}{2}gt^2$



2. 運動軌跡方程式：

	鉛直方向（y 軸）	水平方向（x 軸）
t 秒時的速度	$v_y=-gt$	$v_x=v_0$
速度量值 v	$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+(-gt)^2}$	
速度與 水平夾角 θ	$\tan\theta=\dfrac{v_y}{v_x}=\dfrac{-gt}{v_0}$	
t 秒內的位移	$y=-\frac{1}{2}gt^2$ …①	$x=v_0\,t$ …②
飛行時間 T 與 水平射程 R	由鉛直方向位移可得飛行時間 $\Rightarrow -H=-\frac{1}{2}gT^2\Rightarrow T=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	水平射程＝水平速度×飛行時間 $\Rightarrow R=v_0\times T=v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$
軌跡方程式	由②得 $t=\dfrac{x}{v_0}$，代入① 得 $y=-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2=-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$	

◎ 關鍵題型分析：求飛行時間 t



題型一：提供 x 方向的位移

x 方向為等速運動，利用 $x=v_0t$，可得 t

題型二：提供 y 方向的位移

y 方向為自由落體，利用 $y=-\frac{1}{2}gt^2$，可得 t

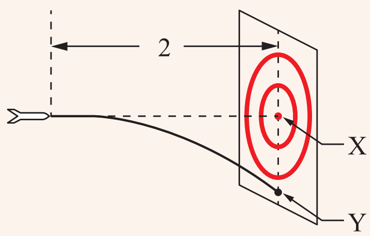
題型三：提供速度與水平夾角

利用 $\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-gt}{v_0}$，可得 t

註 落地時間僅與高度有關，而落地時間 × 水平初速就是水平射程。

範例 1　水平拋射運動 ── 提供 x 方向位移

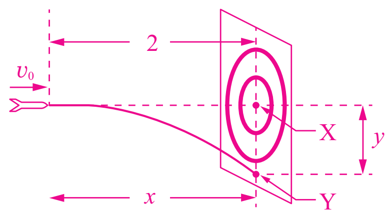
同學們玩飛鏢遊戲，某生持一飛鏢水平瞄準靶心 X 點，將飛鏢在距離 X 點 2 m 處，以 20 m／s 速率水平射出，如右圖所示。若飛鏢被射出後擊中 Y 點，則 XY 之間的距離為何？（假設飛鏢可視為質點、空氣阻力可略，重力加速度約為 10 m／s^2）　109 指考補考



(A) 0.5 m　(B) 0.2 m　(C) 0.1 m　(D) 0.05 m　(E) 0.02 m

答 (D)

解 設飛鏢飛行時間為 t，已知水平射程 $x=2$ m。



(1)水平方向運動：$x=v_0t\Rightarrow t=\frac{x}{v_0}=\frac{2}{20}=0.1$ s

(2)垂直方向運動：XY 之間的位移 $y=-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}\times10\times0.1^2=-0.05$ m（負號表方向）。

故選(D)。

類題：承範例題，當水平瞄準靶心 X 點，飛鏢拋出速率變成 40 m／s，則下列哪些物理量會變成原來的 $\frac{1}{2}$ 倍？（多選）

(A)飛行過程的加速度　(B)飛行時間　(C)擊中點與 X 之間的距離
(D)擊中瞬間的水平速度　(E)擊中瞬間的垂直速度

答 (B)(E)

（(A)飛行過程的加速度仍為 $g=10$ m／s^2 向下；(B)飛行時間 $t=\frac{x}{v_0}=\frac{2}{40}=0.05$ s；(C)擊中點與 X 之間的位移 $y=-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}\times10\times0.05^2=-0.0125$ m（負號表方向）；(D)擊中瞬間的水平速度由 20 m／s→ 40 m／s；(E)擊中瞬間的垂直速度 $v_y=gt\Rightarrow$ 由 $10\times0.1=1$ m／s→ $10\times0.05=0.5$ m／s。故選(B)(E)。

範例 2 水平拋射運動 — 提供 y 方向位移

一轟炸機以 100 公尺/秒的速率直線水平飛行而接近目標，若目標與飛機的垂直高度差為 500 公尺，則：（$g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$）

飛機應在距離目標上空水平距離多少公尺處就要投下炸彈，才能準確轟炸目標物？

(A) 1000 (B) 800 (C) 600 (D) 400 (E) 100

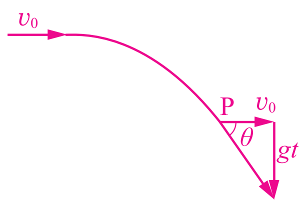
答 (A)

解 來自於慣性效應，炸彈被投出後作水平拋射運動，炸彈的初速與轟炸機皆為 $v_0 = 100\ \mathrm{m/s}$，離地高度 $h = 500\ \mathrm{m}$，可先由炸彈的鉛直運動 (y 方向)，作初速為零的自由落體，得知落地時間 t 為：$500 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 10\ \mathrm{s}$，再由炸彈的水平運動 (x 方向) 為等速運動，計算出水平射程 $x = v_x t = 100 \times 10 = 1000\ \mathrm{m}$。故選(A)。

類題 1：承範例 2，若炸彈落下其瞬時速度方向與水平線的夾角由 37° 增至 45° 的過程中經歷多少秒？

答 2.5 s

解 下落過程，水平方向 (x 方向) 速度不變 $v_x = 100\ \mathrm{m/s}$，鉛直方向 (y 方向) 速度 $v_y = gt$，假設落至 P 點為時間經過 t 時，則 P 點速度 v_p 方向為該點切線方向，再將 v_p 分解成 v_x，v_y，如右圖。



可推得正切值 $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$。

正切值 37° 時，$\tan 37° = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0} = \frac{10t_1}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow t_1 = 7.5\ \mathrm{s}$。

正切值 45° 時，$\tan 45° = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0} = \frac{10t_2}{100} = 1 \Rightarrow t_2 = 10\ \mathrm{s}$。

則經歷的時間為 $\Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 7.5 = 2.5\ \mathrm{s}$。

類題 2：一架救援飛機沿水平方向，以 432 km/h 的等速度飛行接近目標，若飛機的高度為 500 m，則：（忽略所有空氣阻力影響，$g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$）

(1) 該飛機應在距離目標上空多遠處投下救濟包裹？

(2) 包裹瞬時速度方向與水平線的夾角由 37° 增至 53° 所經歷的時間間隔為幾秒？

答 (1) 1200 公尺；(2) 7 秒

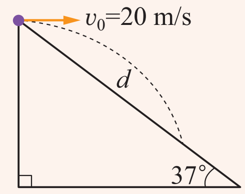
（$v = 432\ \mathrm{km/h} = \frac{432}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 120\ \mathrm{m/s}$，(1)包裹從釋放到著地，其飛行時間 $t = \sqrt{\frac{2 \times 500}{10}} = 10\ \mathrm{s}$，$R = 120 \times 10 = 1200\ \mathrm{m}$。(2)水平速度不變，$\tan 37° = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{120} = \frac{3}{4} \Rightarrow v_y = 90$；$\tan 53° = \frac{v_y'}{v_x} = \frac{v_y'}{120} = \frac{4}{3} \Rightarrow v_y' = 160$，垂直方向等加速公式 $v_y' = v_y + gt \Rightarrow 160 = 90 + 10 \times t \Rightarrow t = 7\ \mathrm{s}$。）

範例 3　水平拋射運動 —— 斜面題型（速度與水平夾角）

如右圖，視為質點的一棒球，自傾斜角 37° 之夠長的斜面頂，被以初速 20 m/s 水平拋出，則：（$g \approx 10$ m/s²）

(1) 經過多少秒後會落於斜面上？

(2) 棒球位移為多少公尺？

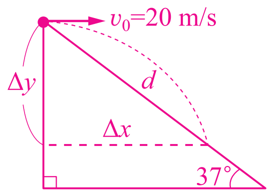


答 (1) 3；(2) 75

解 (1)球將以水平拋射運動飛行，當落至斜面時，則由右圖可推知：

$$\frac{\text{鉛直方向位移}\Delta y}{\text{水平方向位移}\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\frac{5t^2}{20t}=\tan 37°=\frac{3}{4}，$$

則 $t=3$ 秒時會落於斜面上。



(2)球位移 $d=\dfrac{\text{水平位移}\Delta x}{\cos 37°}=\dfrac{v_0t}{\cos 37°}=\dfrac{20\times 3}{\frac{4}{5}}=75$ m。

類題：有一石階，每一階高 20 cm 寬 30 cm，令一物體自頂階水平拋出 $v_0=5$ m/s，則此物將落於第幾階？（$g \approx 10$ m/s²）

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 12　(E) 14

答 (D)

（階梯題型即斜面題型。

如右圖，作輔助線形成假想斜面，則 $\dfrac{\text{台階高}}{\text{台階寬}}=\dfrac{20\text{cm}}{30\text{cm}}=\dfrac{2}{3}=\tan\theta$

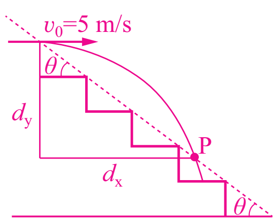
設水平拋軌跡與假想斜面之交點為 P 點，先找 P 點位置。

由斜面題型之作法，物於斜面上拋出，

又落於斜面上 $\dfrac{d_y}{d_x}=\tan\theta \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$ s。

$\therefore$ P 點水平坐標 x = 水平位移 $d_x=v_0t=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$ m，

$\dfrac{\text{水平位移}}{\text{台階寬度}}=\dfrac{\frac{10}{3}\text{ m}}{0.3\text{ m}}=11\cdots\cdots 1\Rightarrow$ 超過 11 階 $\Rightarrow$ 落在第 12 階上。故選(D)。）

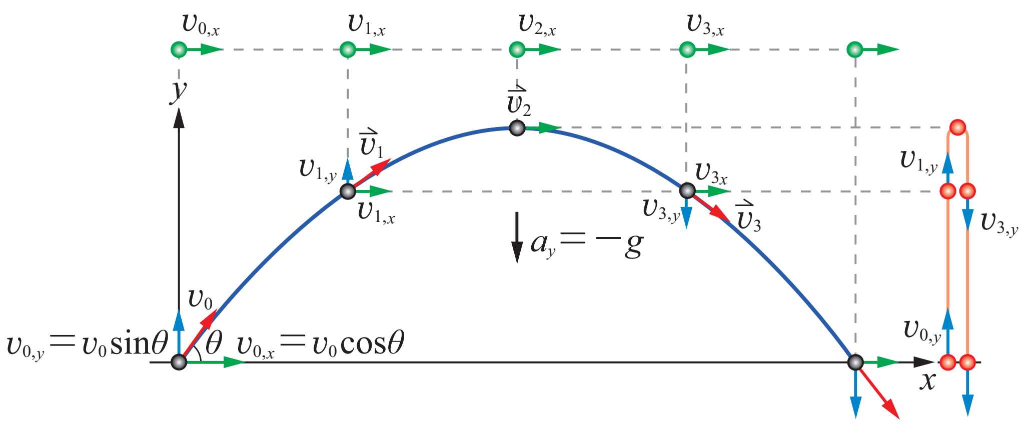


學習概念 3 斜向拋射運動

配合課本 85 頁

1. 運動的形式及物理量： 自水平地面上以仰角 θ 及初速度 v_0 拋出，只考慮重力加速度 g 的影響，取水平方向為 x 軸，鉛直向上為 y 軸，將各物理量整理如下：

	受力	加速度	初速度	運動方式	t 秒時的速度	t 秒內位移
x 方向	$F_x=0$	$a_x=0$	$v_0\cos\theta$	等速運動	$v_x=v_0\cos\theta$	$\Delta x=v_0\cos\theta\times t$
y 方向	$F_y=-mg$	$a_y=-g$	$v_0\sin\theta$	等加速運動 鉛直上拋運動	$v_y=v_0\sin\theta-gt$	$\Delta y=v_0\sin\theta\times t-\frac{1}{2}gt^2$

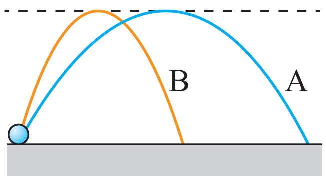
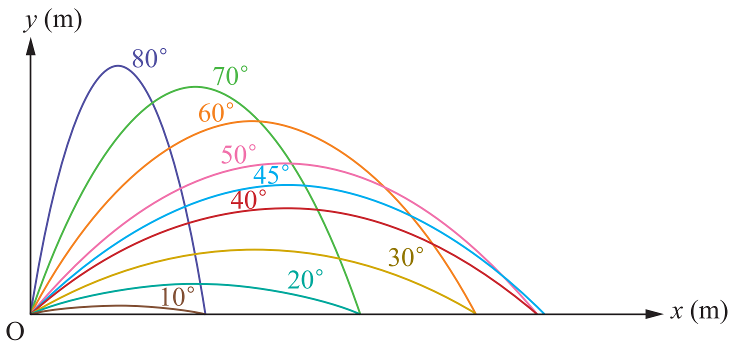


2. 運動軌跡方程式：

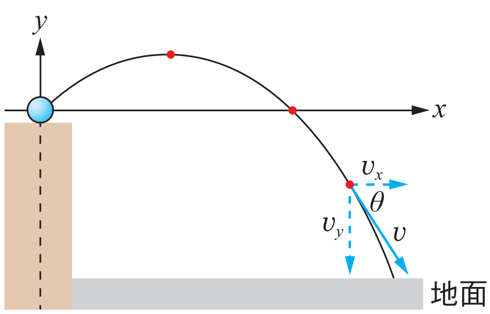
	鉛直方向（y 軸）	水平方向（x 軸）
t 秒內的位移	$\Delta y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$ ……①	$\Delta x=v_0\cos\theta t$ ……②
上升時間 $t_{上升}$	利用最高點鉛直方向速度為 0，代入 $v_y=v_0\sin\theta-gt$ 得 $t_{上升}=\frac{v_0\sin\theta}{g}$	
飛行時間 T	落至與拋出點相同高度 由斜拋對稱性可知上升時間 $t_{上升}$＝下降時間$t_{下降}$， $T=t_{上升}+t_{下降}=2t_{上升}=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$	
最大高度 H	由 $t_{上升}=\frac{v_0\sin\theta}{g}$，代入① ⇒ $H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$	
水平射程 R	由 $T=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$，代入② ⇒ $R=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$	
軌跡方程式	由②得 $t=\frac{x}{v_0\cos\theta}$，代入① ⇒ $y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$	

註 與鉛直上拋相同，具有對稱性。且後半程可視為水平拋射運動。

3. 斜向拋射的基本性質探討

特性	最大高度 H 的影響	水平射程 R 的影響
來源公式	$H=\dfrac{v_0^{\ 2}\sin^2\theta}{2g}$、$T=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$	$R=\dfrac{2v_0^{\ 2}\sin\theta\cos\theta}{g}=\dfrac{v_0^{\ 2}\sin 2\theta}{g}$
分析	(1) 飛行高度 $H\propto v_0^{\ 2}\sin^2\theta$ (2) 飛行時間 $T\propto v_0\sin\theta$、v_{0y} →最大高度 H **越大**，其飛行時間 T **越長** →最大高度 H **相等**時，其飛行時間 T **必相同**	(1) 若最大高度相同，$R\propto v_0\cos\theta$、v_{0x} (2) 若 v_0 為定值，以仰角 45° 拋射時，有**最大水平射程** $R=\dfrac{v_0^{\ 2}}{g}$ (3) 由 $\sin 2(90^\circ-\theta)=\sin 2\theta$ 可知，若 v_0 相同，兩次拋射的**仰角互餘時水平射程相同**
圖示	 ⊙ $T_A=T_B$，$v_{A0,x}>v_{B0,x}$，$v_A>v_B$。  ⊙以相同的初速但不同仰角射出的拋物線，45°時，水平射程最大。	

◎ 關鍵題型分析：求飛行時間 t



題型一：**提供 y 方向的速度**
利用 $v_y=v_0\sin\theta-gt$，可得 t

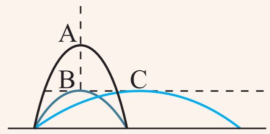
題型二：**提供 y 方向的位移**
利用 $y=v_0\sin\theta\times t-\dfrac{1}{2}gt^2$，可得 t

題型三：**提供 x 方向的位移**
利用 $x=v_0\cos\theta\times t$，可得 t

註▸ 落地時間與高度及鉛直初速有關，而落地時間 × 水平初速就是水平射程。

範例 4 斜向拋射運動 — 基本性質

如右圖所示將 A、B、C 三個視為質點的小球在同一鉛直面同時被拋出的軌跡，則下列敘述哪些正確？（多選）



(A) A 球在空中停留的時間最久　(B) A、B 兩球的水平初速相同
(C) B、C 兩球落地時間相同　(D) B、C 兩球著地速率以 B 球較大
(E) A、C 可在空中相碰

答 (A)(C)

解 (A)(C)由公式整理可得知，當斜拋飛行高度 H 越大，代表初速 y 分量 $v_{0,y}$ 越大，飛行時間 T 越長。由最大高度公式 $H=\dfrac{{v_{0,y}}^2}{2g}=\dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}\propto {v_0}^2\sin\theta^2$，因 $H_A>H_B=H_C$，推得 $v_{0,A}\sin\theta>v_{0,B}\sin\theta=v_{0,C}\sin\theta$，而飛行時間 $T=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}\propto v_{0,y}=v_0\sin\theta$，$T_A>T_B=T_C$。

(B)由(A)得知，$T_A>T_B$，而水平射程 $R=v_{0,x}T$，由圖得知水平射程 $R_A=R_B$，所以水平初速 $v_{0,B}>v_{0,A}$。

(D)由(A)得知，$v_B\sin\theta_B=v_C\sin\theta_C$，且由圖可知 $\theta_B>\theta_C$，$\sin\theta_B>\sin\theta_C$。$\therefore v_B<v_C$，故 C 球的著地速率較大。

(E)由(A)得知，飛行時間 $T_A>T_C$，故 C 在最高點時，A 還在上升，故不可在空中相撞。
故選(A)(C)。

類題：承範例題，將 A、B、C 三個視為質點的小球在同一鉛直面同時拋出的軌跡，已知高度比 $H_A:H_B:H_C=2:1:1$，射程比 $R_A:R_B:R_C=1:1:2$，則飛行時間比為何？
(A) $2:1:1$　(B) $1:1:2$　(C) $\sqrt{2}:1:1$　(D) $1:1:1$　(E) $3:2:1$

答 (C)
$\left(H=\dfrac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}，R=\dfrac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}，T=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}\propto\sqrt{H}\Rightarrow T_A:T_B:T_C=\sqrt{2}:1:1\text{。故選(C)。}\right)$

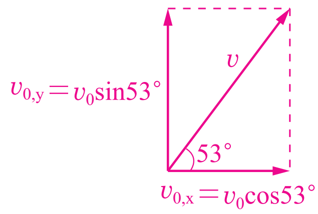
範例 5 斜向拋射運動 ── 拋點與落點同高度

一足球選手於地表將一足球以 25 m／s 的初速，仰角 53°斜向上方踢出，經一段時間後落於地面，若不計空氣阻力的影響，則下列敘述哪些正確？（多選）（$g \approx 10$ m／s^2）

(A)鉛直方向的初速度量值為 15 m/s　(B) 2 秒後到達最高點　(C)足球的飛行時間為 4 s　(D)最大高度為 20 m　(E)水平射程為 80 m

答 (B)(C)(D)

解 (A)由圖可知水平方向的初速度量值 $v_{0,x} = v_0\cos53^\circ = 15$ m／s，鉛直方向的初速度量值 $v_{0,y} = v_0\sin53^\circ = 20$ m／s。



(B)由 $v_y = v_{0,y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \Rightarrow 0 = 20 - 10t \Rightarrow t = 2$ s。

(C)飛行時間 $T = \dfrac{2v_{0,y}}{g} = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g} = \dfrac{2\times25\times\frac{4}{5}}{10} = 4$ s。

(D)最大高度 $H = \dfrac{{v_{0,y}}^2}{2g} = \dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{(25\times\frac{4}{5})^2}{2\times10} = 20$ m。

(E)水平射程 $R = v_{0,x}T = \dfrac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{2\times25^2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}{10} = 60$ m。

故選(B)(C)(D)。

類題：一足球選手於地表將一足球以 25 m／s 的初速，仰角 θ 斜向上方踢出，經一段時間後落於地面，若不計空氣阻力的影響。（$g \approx 10$ m／s^2）

(1) 若仰角 $\theta = 37^\circ$，則足球的飛行時間為幾秒？最大高度為多少公尺？水平射程為多少公尺？

(2) 當仰角 $\theta =$ ＿＿＿＿度，足球可達最大水平射程為多少公尺？

答 (1) 3 s、11.25 m、60 m；(2) 45、62.5 m

（(1) $T = \dfrac{2v_0\sin37^\circ}{g} = \dfrac{2\times25\times0.6}{10} = 3$ s，$H = \dfrac{(v_0\sin37^\circ)^2}{2g} = \dfrac{(25\times0.6)^2}{20} = 11.25$ m，

$R = \dfrac{2{v_0}^2\sin37^\circ\cos37^\circ}{g} = \dfrac{2\times25^2\times0.6\times0.8}{10} = 60$ m；(2)因 $R = \dfrac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{{v_0}^2\sin2\theta}{g}$，

當 $\theta = 45^\circ \Rightarrow R_{max} = \dfrac{{v_0}^2}{g} = \dfrac{25^2}{10} = 62.5$ m。）

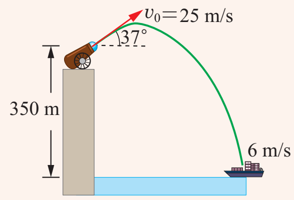
〈★ 補充題型〉

範例 6　斜向拋射運動 ── 拋點高於落點

一砲臺在高 350 公尺處向海面射擊，砲彈初速度 25 m／s，仰角 37°，若欲擊中正以 6 m／s 速度向砲臺直線行進的敵艦，則：（$g \approx 10\ \text{m/s}^2$）

(1) 砲彈從發射到落海時間為多少秒？

(2) 發射時敵艦與砲臺相距的水平距離為多少公尺？

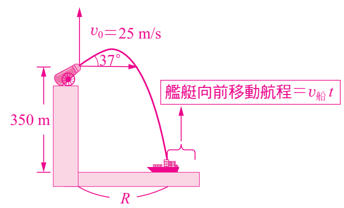


答 (1) 10 s；(2) 260 m

解 (1)先設定坐標軸。以拋射點為原點，向上為正，當砲彈落海瞬間，過程中砲彈的鉛直方向（y 方向）位移為 $y = -350$ m，

利用斜拋鉛直方向位移公式：$y = v_0 \sin\theta \times t - \frac{1}{2}gt^2$，

則時間為：$-350 = 25\sin37°t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 10$ 或 -7（不合）；



(2)飛行過程中，砲彈水平方向（x 方向）為等速運動，則砲彈飛行的水平射程 $R = v_0\cos37°t = 200$ m，所以發射砲彈時砲彈與船的距離應為 x ＝砲彈飛行的水平距離＋艦艇向前移動航程＝ $R + v_{船}t = 200 + 6 \times 10 = 260$ m。

類題：一砲臺在高 65 公尺上向海面射擊，初速為 20 m／s，仰角 37°，恰可擊中停泊於海面之戰艦，則：（$g \approx 10\ \text{m/s}^2$）

(1) 砲彈在空中飛行的時間為多少秒？

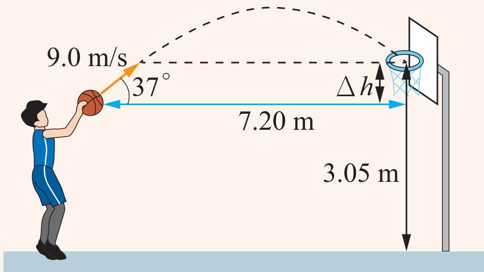
(2) 戰艦與砲臺間之水平距離為多少公尺？

(3) 若戰艦改以 5 m／s 之速度向砲臺前行，則發射時戰艦與砲臺之水平距離為多少公尺？

答 (1) 5 s；(2) 80 m；(3) 105 m

（(1)由 $-h = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$，$-65 = 20 \times \sin37°\ t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 5$ s；
(2)水平射程 $R = v_0\cos\theta \times t = 20 \times \cos37° \times 5 = 80$ m；
(3) $x = 80 + 55 = 105$ m。）

範例 7 斜向拋射運動 — 生活物理



籃球比賽中，進攻球隊的當家射手運球在三分線外，突然急停跳投，以與水平面夾角 $\theta = 37^\circ$ 的仰角、初速 $v_0 = 9.00\ \text{m/s}$ 將籃球投出，並通過籃框中心入網，已知籃框距離水平地面的高度 $H = 3.05\ \text{m}$，籃球被投出時，距離地面高度 h、與籃框中心點的水平距離 $d = 7.20\ \text{m}$，若將籃球視為質點，且忽略籃球的旋轉與空氣阻力，則：（$g \approx 10\ \text{m/s}^2$） 109 指考改

(1) 籃球從被投出至運動軌跡最高點經過的時間約多少秒？

(2) 籃球從被投出至通過籃框中心經過的時間約多少秒？

(3) 籃球被投出時，距離地面高度 h 約多少公尺？

3

答 (1) 0.54 s；(2) 1 s；(3) 2.65 m

解 先設定座標軸，以出手點為座標原點：

(1)因球飛至最高點時瞬間鉛直方向 (y 方向) 速度為零，利用鉛直方向速度公式：

$$0 = v_{0,y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{9\times\frac{3}{5}}{10} = 0.54\ \text{s}。$$

(另解：由公式可得：$t_{上升} = \dfrac{v_{0,y}}{g} = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g} = 0.54\ \text{s}$。

(2)利用水平方向 (x 方向) 為等速運動得知：與籃框中心點的水平距離

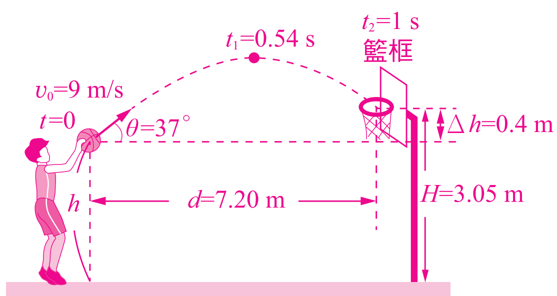
$$d = v_x t = v_0 \cos\theta \times t \Rightarrow t_2 = \frac{d}{v_0 \cos\theta} = \frac{7.2}{9\times\frac{4}{5}} = 1\ \text{s}。$$

(3)利用鉛直方向位移公式：$y = v_0 \sin\theta \times t - \dfrac{1}{2}gt^2$，則球由出手點到籃框中心點垂直方向

位移 $\Delta h = v_0 \sin\theta \times t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 9\times\dfrac{3}{5}\times 1 - \dfrac{1}{2}\times 10\times 1^2 = 0.4\ \text{m}$

所以籃球被投出時離地高度 h = 籃框離地高度 H − 籃球投出後的垂直方向位移 Δh，

故 $h = H - \Delta h = 3.05 - 0.4 = 2.65\ \text{m}$。



類題：棒球抵達本壘板上方時，在離地 1.0 m 的高度，被打擊者以與水平面夾角為 θ（$\cos\theta = \frac{3}{5}$）的仰角、量值 126 km/h 的速度反向擊出，該球在被擊出後 5.0 s 恰好飛越全壘打牆的上空，試問球飛越全壘打牆瞬間，離地高度為多少 m？（假設棒球場地面為水平，棒球的旋轉與空氣阻力可被忽略，取 $g \approx 10\ \text{m/s}^2$）

(A) 4　(B) 8　(C) 10　(D) 12　(E) 16　58% 答對率 110 指考

答 (E)　（初速 $v_0 = 126\ \text{km/h} = 35\ \text{m/s}$，鉛直方向的初速度 $v_{0,y} = v_0 \sin\theta = 35 \times \frac{4}{5} = 28\ \text{m/s}$。
因球在被擊出後 5.0 s 恰好飛越全壘打牆的上空，
故球離擊球點的垂直高度 $y = v_{0,y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2 = 28 \times 5 - \frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 = 15\ \text{m}$，
全壘打牆離地高度 $H = h_0 + y = 1 + 15 = 16\ \text{m}$。故選(E)。）

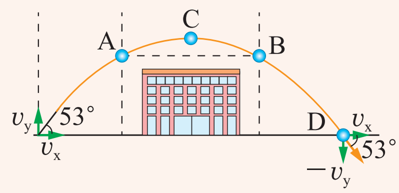
範例 8　斜向拋射運動 — 拋體的對稱性

〈★ 補充題型〉

右圖中將一球自地面以 53° 仰角斜向拋射，於第 2 秒、第 4 秒時通過同一高度的 A、B，則：（$g \approx 10\ \text{m/s}^2$）

(1) 球的初速為多少 m/s？

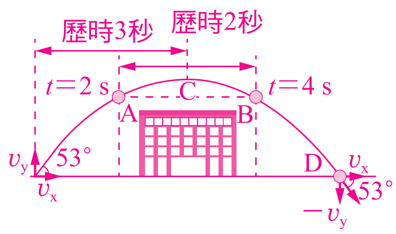
(2) A、B 間距離為多少 m？



答 (1) 37.5 m/s；(2) 45 m

解 (1)設拋射點為 O 點，最高點為 C 點，落地為 D 點，則：
已知 $t_{OA} = 2\ \text{s}$，$t_{OB} = 4\ \text{s}$，利用斜拋運動的對稱性可得知，$t_{BD} = t_{OA} = 2\ \text{s}$，
而 $t_{AB} = t_{OB} - t_{OA} = 4 - 2 = 2\ \text{s}$，則由拋射點到最高點時間 $t_{OC} = t_{上升} =$
$(t_{OA} + t_{AB} + t_{BD})/2 = 3\ \text{s}$，又因為斜拋到最高時間 $t_{上升} = \frac{v_0 \sin 53°}{g}$，$v_0 = 37.5\ \text{m/s}$。

(2)利用斜拋運動的對稱性與後半程為平拋運動，
而 $t_{CB} = t_{AB}/2 = 1\ \text{s}$，則 C 到 B 的水平位移 $x_{CB} = v_0 \cos 53° \times t_{CB} = \frac{45}{2} \times 1 = \frac{45}{2}\ \text{m}$，
所以 A、B 間距離 $x_{AB} = 2x_{CB} = 2 \times \frac{45}{2} = 45\ \text{m}$。



類題：忽略空氣阻力，棒球在水平面上作斜向拋出，則在上升過程中，最後一秒所爬升的鉛直高度為何者？（重力加速度為 g）

(A) $0.25g$　(B) $0.5g$　(C) g　(D) $1.25g$　(E)條件不足

答 (B)　（上升過程的最後一秒＝下降過程的第一秒又下降過程的鉛直向作自由落體，
$\therefore \Delta h = \frac{1}{2}g(1)^2 = 0.5g$。故選(B)。）

3-3 課後練習

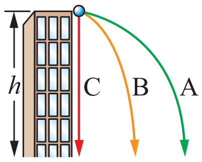
＊為多選題

基礎題

概念 水平拋射基本性質

（解析見解答本）

（ A ）1. 設想三個學生於足夠高的高樓陽臺上作拋體實驗，取三顆體積相同的小球，質量大小依序為 C＞B＝A，三個學生同時將球丟出，運動軌跡如右圖所示，若忽略空氣阻力，則下列敘述何者錯誤？



(A)三球由離手至落地所需時間長短順序為 $t_A > t_B > t_C$
(B)三球水平方向的速度大小順序為 $v_{A,x} > v_{B,x} > v_{C,x}$
(C)三球鉛直方向的速度大小順序為 $v_{A,y} = v_{B,y} = v_{C,y}$
(D)三球落地前的瞬間速率大小順序為 $v_A > v_B > v_C$
(E)球的質量不會影響下落時間

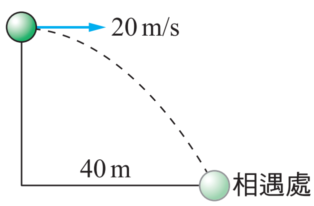
（ C ）2. 在離地同高度，水平拋出甲、乙兩球，若初速分別為 v 與 $2v$，則甲、乙兩球著地瞬間的鉛直速度比為何？
(A) 3：2 (B) 1：2 (C) 1：1 (D) 2：1 (E) 2：3

（ D ）3. 有一物體從高樓頂端沿著水平方向被拋出，已知高樓頂端離地高度為 45 公尺，而物體落地處與高樓之間的水平距離是 45 公尺，則物體被拋出時的初速量值為多少 m/s？（$g \approx 10\ m/s^2$）
(A) 3 (B) 5 (C) 10 (D) 15 (E) $45\sqrt{2}$

（ D ）4. 區間列車自甲站靜止出發，以 1 m/s^2 的加速度在水平軌道上等加速度行駛一段時間。在此期間小南把手伸到窗外距地面 1.25 公尺高處自由釋放一物體。若不計空氣阻力的作用，物體落地的時間為多少秒？（$g \approx 10\ m/s^2$）
(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.4 (D) 0.5 (E)需視物體釋放時火車的速度而定

（ C ）5. 有一架等速飛行的 B-5 轟炸機，高度為 8000 m、飛行速度為 200 m/s 方向正東，若想要轟炸一艘在海面上以速度 10 m/s 方向正西等速前進的補給船，請問應該在水平距離補給船多少公尺時投彈呢？（可忽略空氣阻力且炸彈是以自由落體方式放下，$g \approx 10\ m/s^2$）
(A) 10000 (B) 9400 (C) 8400 (D) 600 (E) 6400

＊（ A D ）6. 如右圖所示，將甲球從高 50 m 處以速度 20 m/s 水平拋射，同時刻將乙球從距甲球水平方向距離 40 m 處由地面以初速 25 m/s 鉛直上拋，不計空氣阻力，下列敘述哪些正確？（$g \approx 10\ m/s^2$）



(A)甲對乙而言，作等速直線運動 (B)從拋出到相遇的時間為 3 s (C)相遇時，乙球正在下降 (D)相遇點距地高度為 30 m (E)相遇時，甲的速率為 30 m/s

(C) 7. 以 v_0 的水平初速度水平拋出一石子，不計空氣阻力，其切向速度與水平夾角自 37°增至 53°，則所經歷的時間為何？（重力加速度為 g）

(A) $\frac{v_0}{g}$ (B) $\frac{v_0}{2g}$ (C) $\frac{7v_0}{12g}$ (D) $\frac{v_0}{5g}$ (E) $\frac{3v_0}{4g}$

概念 ***x*，*y* 方向位移比值**

(D) 8. 某生將一靜止置於長斜坡頂端的皮球沿水平方向踢出，結果皮球的落地處仍在斜坡上。已知斜坡的斜角為 45°，皮球被踢出的初速為 20 m／s，則皮球落地處距離坡頂有多少公尺？（$g \approx 10$ m／s²）

(A) $50\sqrt{2}$ (B) $60\sqrt{2}$ (C) $75\sqrt{2}$ (D) $80\sqrt{2}$ (E) 90

(D) 9. 一水平拋射之物體，不計空氣阻力，當在空中其前進之水平距離與鉛直距離比為 2：$\sqrt{3}$ 時，此時水平速度與鉛直速度量值之比為何？

(A) $\sqrt{3}$：1 (B) 1：2 (C) 2：1 (D) 1：$\sqrt{3}$ (E) 1：1

概念 **水平拋射軌跡方程式**

◎ 自某高處水平拋出一石，其軌跡方程式為 $y=-\frac{1}{20}x^2$，經 4 秒著地，設重力加速度 $g \approx$ 10 m／s²，試回答下列第 10. ～ 11. 題：

(D)10. 原來之高度為多少公尺？

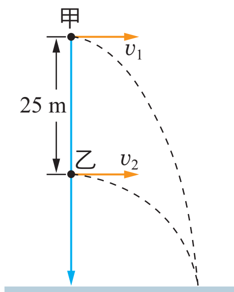
(A) 5 (B) 40 (C) 48 (D) 80 (E) 100

(B)11. 水平初速度量值為多少 m／s ？

(A) 48 (B) 40 (C) 36 (D) 25 (E) 10

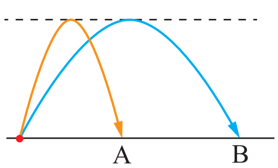
(B)12. 甲、乙兩球位於同一鉛直線上，甲的高度比乙高出 25 公尺。若甲比乙早 1 秒拋出，且兩球恰在落地時相遇，則乙球出發時的高度為多少公尺？（$g \approx 10$ m／s²）

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 45 (E) 50



概念 **斜向拋射基本性質**

*(A C E)13. 某人由地面同時斜向拋出 A、B 兩球，如右圖所示為 A、B 兩球的軌跡。已知兩球所達到的最大高度相同，落地水平射程為 1：2，則下列敘述哪些正確？



(A)兩球同時落地 (B)兩球初速之鉛直分量量值比為 1：2 (C)到達軌跡頂點時，A、B 兩球速度量值比為 1：2 (D) A、B 兩球初速量值比為 1：2 (E)到達軌跡頂點時，兩球之加速度相同

(C)14. 球從投射機發射出去，經 2 秒後，球的水平位移為 40 公尺，鉛直方向的位移為 10 公尺，則球的初速量值為多少 m／s ？（$g \approx 10$ m／s²）

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

(　C　)15. 不計空氣阻力，在水平地面分別以仰角 37° 與 53° 斜拋 A、B 兩石塊，若拋出軌跡之最大高度相等，則兩石塊之射程比為若干？
(A) 4：3　(B) 3：4　(C) 16：9　(D) 6：19　(E) 19：25

概念　斜向拋射 ── 拋點與落點同高度

◎ 一砲彈以仰角 53°、初速 400 m／s 由地面射出，若砲身高度及各種摩擦力都不計，重力加速度約為 10 m／s^2，請回答下列第 16. ～ 19. 題：

(　C　)16. 砲彈在最高點時其速度量值為多少 m／s ？
(A) 0　(B) 200　(C) 240　(D) 320　(E) 400

(　D　)17. 砲彈由出發到回到地面所需時間為多少 s ？
(A) 40　(B) 80　(C) 32　(D) 64　(E) 48

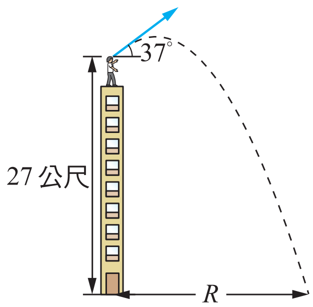
(　D　)18. 砲彈飛行過程中，離開地面的最大高度為多少 m ？
(A) 320　(B) 640　(C) 2560　(D) 5120　(E) 8000

(　A　)19. 砲彈回到地面，觸地前一瞬間，其速度量值為多少 m／s ？
(A) 400　(B) 320　(C) 240　(D) 160　(E) 120

＊(　B D　)20. 在地面上以仰角 37° 發射一砲彈，經過 6 秒落回地面，設重力加速度 $g=10$ m／s^2，哪些正確？
(A)砲彈的初速度量值為 100 m／s　(B)砲彈的水平射程為 240 m　(C)砲彈所能達的最大高度為 180 m　(D)全程的平均速度量值為 40 m／s　(E)全程的平均加速度為零

概念　斜向拋射 ── 拋點高於落點

◎ 某物從 27 公尺高的樓頂上，以速度 10 m／s 及仰角 37° 斜拋而出，如右圖所示，試回答下列第 21. ～ 25. 題：（$g \approx 10$ m／s^2）



(　C　)21. 從拋出至落地，需費時幾秒？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5

(　B　)22. 物體的水平射程 R 為多少公尺？
(A) 12　(B) 24　(C) 36　(D) 48　(E) 60

(　C　)23. 物體落地時的鉛直速度量值為多少公尺/秒？
(A) 8　(B) 16　(C) 24　(D) 32　(E) 48

(　A　)24. 物體落地時的水平速度量值為多少公尺/秒？
(A) 8　(B) 16　(C) 24　(D) 32　(E) 48

(　C　)25. 物體離地的最大高度為多少公尺？
(A) 1.8　(B) 3.6　(C) 28.8　(D) 32.2　(E) 36.6

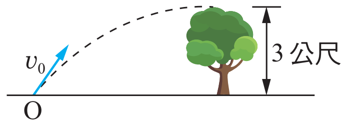
3

教師用書

貼心伴隨・敬請賜教

概念 斜向拋射 ── 拋點低於落點

◎ 如右圖所示，一物自 O 點以 53° 仰角斜向拋出，欲使它恰掠過前方 6 公尺處高度 3 公尺的耶誕樹，若 $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$，試回答下列第 26. ～ 27. 題：



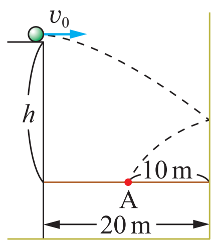
(A)26. 此物自拋出幾秒後恰抵達耶誕樹上方？
(A) 1.0 (B) 1.2 (C) 1.5 (D) 1.8 (E) 2.0

(D)27. 拋出之初速 v_0 為多少公尺/秒？
(A) 5.0 (B) 7.2 (C) 8.5 (D) 10.0 (E) 12.0

(C)28. 某人在地面上以初速度 25 m/s、仰角 53° 丟出一石子，恰好丟上正前方 15 公尺的樓頂。不計空氣阻力，$g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$，請問樓頂高度為多少公尺？
(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

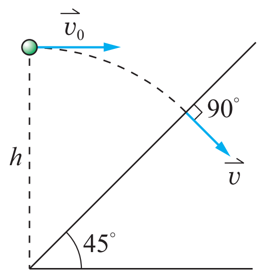
進階題

(C) 1. 如右圖，質量 1 kg 的小球，在離地面 h 處的高地以某一水平速度拋出，在球正前方 20 m 處有一垂直的山壁。拋出後 2 秒，球與山壁作彈性碰撞（碰撞前後速率沒變，入射角等於反射角）後落於圖中 A 點。不計空氣阻力，則 h 為多少 m ？（$g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$）
(A) 20 (B) 30 (C) 45 (D) 31 (E) 80



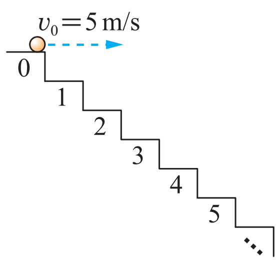
2. 如右圖，一物自斜角 45° 之斜面底端的正上方 h 高處水平拋向斜面，當落於斜面時，速度方向與斜面垂直，則拋出之初速為若干？（重力加速度為 g）

答：$\sqrt{\frac{2}{3}gh}$

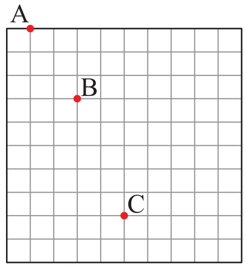


(D) 3. 從高度 h 處以初速 v_0 水平拋出物體，當物體落地瞬間，物體速度與水平方向夾角為 θ，則下列各組 h 及 v_0 的數據中，哪一組可使 θ 最大？
(A) $h=45$ m，$v_0=10$ m/s (B) $h=45$ m，$v_0=20$ m/s (C) $h=45$ m，$v_0=30$ m/s (D) $h=125$ m，$v_0=10$ m/s (E) $h=125$ m，$v_0=20$ m/s

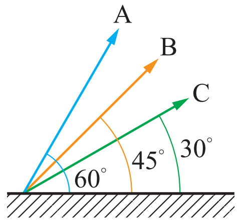
(B) 4. 如右圖所示，一石階夠長，每階高 25 公分、寬 30 公分，今將一物以 5 m/s 之速度水平拋出，設重力加速度 $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$，則該物會落至第幾階？
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 20 (E) 21



＊(B C) 5. 如右圖為物體作水平拋射運動時，利用閃光攝影術所得照片的一部分，圖中背景的小方格邊長為 5 cm，則下列敘述哪些正確？（$g \approx 10$ m/s^2）
(A)閃頻儀的頻率為 5 Hz　(B)閃頻儀的頻率為 10 Hz　(C)物體拋出的初速為 1 m/s　(D)物體拋出的初速為 2 m/s　(E)物體拋出的初速為 4 m/s

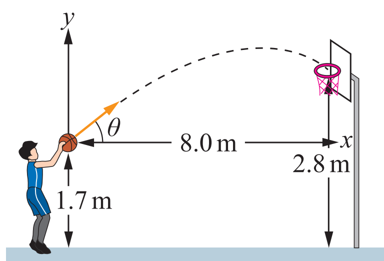


(　D　) 6. 一物體在水平地面上以相同初速，但不同仰角作斜向拋射，如右圖所示，其中 A 的仰角 60°、B 的仰角 45°、C 的仰角 30°，則下列敘述何者錯誤？
(A)水平射程 A＝C＜B　(B)飛行時間 A＞B＞C　(C)最大高度 A＞B＞C　(D)全程的速度變化量 A＜B＜C　(E)最高點速度 A＜B＜C



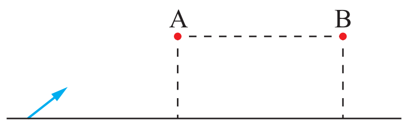
(　D　) 7. 一物體斜向拋出，若拋射角為 α 時，其水平射程與最大高度相等。若將初速加倍，而拋射角 α 不變，則其水平射程 R 與最大高度 H 之關係為何？
(A) $R=\sqrt{2}\,H$　(B) $R=2H$　(C) $R=4H$　(D) $R=H$　(E) $2R=H$

(　B　) 8. 小豪身高 170 cm，站在罰球線處投籃，已知籃框至罰球線的水平距離為 8.00 m，而籃框高度為 2.80 m。若小豪以初速度 $v_0=10$ m/s 從頭頂以仰角 37°將球投出卻屢屢落空（圖僅為示意圖），下面五位同學提出的建議，何者能讓小豪空心投入籃框內？（$g \approx 10$ m/s^2）



小欽：出手點提高 20 cm 再投出即可。　　小后：往後退 2 m 再投出即可。
小于：出手點提高 10 cm 再投出即可。　　小巴：往前進 4 m 再投出即可。
小哲：出手點降低 10 cm 再投出即可。
(A)小欽　(B)小于　(C)小哲　(D)小后　(E)小巴

(　E　) 9. 圖中一球自地面以 37°仰角斜向拋射，於第 4 秒、第 8 秒時通過 A、B，則球的初速為多少 m/s？（$g \approx 10$ m/s^2）
(A) 10　(B) 25　(C) 30　(D) 60　(E) 100



(　A　) 10. 物體以初速度 10 m/s、仰角 37°拋射，不計阻力，以拋出點為原點，則物體之運動軌跡方程式為何？（$g \approx 10$ m/s^2）
(A) $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{64}x^2$　(B) $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{32}x^2$　(C) $y=x-\frac{5}{64}x^2$　(D) $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{64}x^2$
(E) $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{32}x^2$

3

教師用書

貼心伴隨・敬請賜教

（解析見解答本）

馬赫

馬赫（英語：Mach number）是表示速度的量詞，又叫馬赫數。一馬赫即一倍音速：馬赫數小於 1 者為次音速，馬赫數大於 5 左右為極音速；馬赫數是飛行的速度和當時飛行的音速之比值，大於 1 表示比音速快，同理，小於 1 是比音速慢。馬赫數的命名是為了紀念奧地利學者恩斯特・馬赫（Ernst Mach，1838 ～ 1916）。

馬赫一般用於飛機、火箭等航空航太飛行器。由於聲音在空氣中的傳播速度隨著不同的條件而不同，因此馬赫也只是一個相對的單位，每「一馬赫」的具體速度並不固定。在低溫下聲音的傳播速度低些，一馬赫對應的具體速度也就低一些。因此相對來說，在高空比在低空更容易達到較高的馬赫數。

2020 年 1 月 25 日報導，俄羅斯軍方正式部署一種以 27 馬赫飛行的洲際武器，成為首個部署超高音速武器的國家。此超高音速導彈，將可強化俄國核武攻擊能力。俄羅斯總統普丁（Vladimir Putin）形容這款命名為「先鋒」（Avangard）的「超高音速助推滑翔導彈系統」（hypersonic boost-glide missile system）是科技上的突破，普丁表示，俄羅斯必須發展「先鋒」與其他武器系統，是因為美國宣稱正研發能威懾俄羅斯核子武器的導彈防禦系統。

目前俄國第一批配有「先鋒」超高音速導彈系統的地面移動發射裝置已完成戰鬥部署。俄羅斯媒體指出，「先鋒」會首先搭載於蘇聯製造，北大西洋公約組織（NATO）代號 SS-19 的 RS-18B 洲際彈道飛彈。在其可操作後，俄國預期會將其安裝於 Sarmat 重型熱核洲際彈道飛彈「先鋒」被裝載在洲際彈道飛彈（intercontinental ballistic missile）上，但不像一般的飛彈彈頭，在分離之後會遵循可預測路徑，它可以在到達目標途中，在大氣層中進行劇烈的移動，使其難以被攔截。

「先鋒」是使用新式複合材料所設計，能承受超音速飛行而上升達攝氏 2000 度的高溫。軍方表示，「先鋒」導彈能以 27 馬赫的速度飛行，且能攜帶達 2 萬噸的核子武器。2018 年 12 月，俄國試射「先鋒」導彈系統，並成功擊中 6000 公里外的預定目標。

此外，俄國軍方之前也曾經製造出一款飛行距離較短的超音速武器。由米格 -31K 戰鬥機攜帶的「匕首」（Kinzhal）超高音速導彈已於 2018 年服役。這種導彈飛行速度為音速的 10 倍，射程達 2000 公里，具有攜帶核彈頭的能力。俄國軍方表示，這種導彈能用來擊中地面目標或海上艦隊。

另外，中國也正在研發自己的超高音速導彈，據稱能以至少 5 倍的音速飛行。此款武器名稱為「東風 17」，在 2019 年慶祝中國國慶閱兵上已公開展示。

（　D　）1. 在地表 15℃的環境中，速度一馬赫約相當於：

(A) 340 km／h　(B) 680 km／h　(C) 1020 km／h　(D) 1224 km／h　(E) 2500 km／h

（　D　）2. 依據本文中，關於馬赫的下列敘述何者正確？

(A)馬赫是一個地名

(B)馬赫數是跟光速的比值

(C)馬赫是一個絕對單位

(D)同一個地點，高空中的馬赫數會比低空高

(E)光速大概是 100000 馬赫

（　B　）3. 2018 年 12 月，俄國試射「先鋒」導彈系統，並成功擊中 6000 公里外的預定目標，如果不考慮高速與空氣產生的阻力，且戰機可以飛行的高度不受地球大氣層的限制，那麼從與地面水平飛行的戰機上發射「先鋒」導彈到擊中目標約需要多少時間？

(A) 3 分鐘　(B) 10 分鐘　(C) 30 分鐘　(D) 1 小時　(E) 3 小時

4. 若考慮地球的重力加速度不受高度的影響，可以視為一個定值 $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$。那麼這部戰機需要在距離地球表面約＿2138 km＿的地方發射先鋒導彈，才能順利命中目標。

3