CHAPTER 1 測量與不確定度

1–1 測量的不確定性

熱點 1 測量的不確定性

由於儀器的精密度有限或是其他因素，測量時總會有**不確定性**。例如右圖中電表的指針位置，若以不同視角讀取時會略有差異。

熱點 2 從誤差到不確定度

1. **誤差**

 (1)誤差是指測量值與真值的差，即誤差＝測量值－真值。真值是指完美無誤的測量值；誤差可能為正值，也可能為負值。

 (2)誤差可分成兩類：隨機誤差與系統誤差。

知識充電站

隨機誤差

由於多次測量時，實驗條件、記錄方式等的微小變動，導致數據稍有不同，可能高於、也可能低於真值，並無規律。若是高估、低估的傾向相同，則增加測量次數後，其平均值會趨近真值。

系統誤差

由於儀器的設置或操作不當所造成的。例如天平砝碼本身不準確或儀器使用前沒正確歸零等。這類誤差無法經由增加測量次數來增加準確性，實驗時須反覆檢查以避免這類問題。

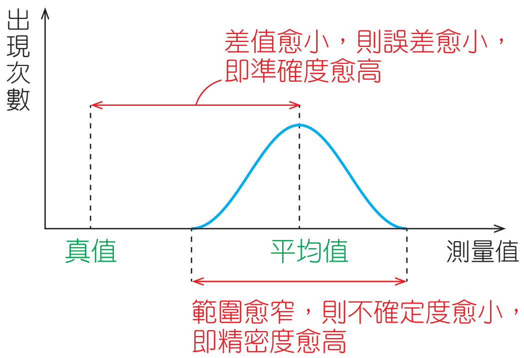
 (3)除了定義所得的量（例如光在真空中的速率）之外，我們其實**無法得知真值**，所以也就無法計算誤差，更何況如果一開始就知道真值，那為何還需要測量呢？為了避開這個問題，科學家改以**不確定度**來描述測量的品質，用一段區間來表示估計測量的結果。

2. **不確定度**

 (1)測量結果＝最佳估計值 ± 不確定度。

 (2)不確定度恆為正值，可用來表示測量值的 離散程度 。**不確定度愈小**，代表測量結果的數據愈集中（如右圖），即**精密度愈高，測量品質愈好**。

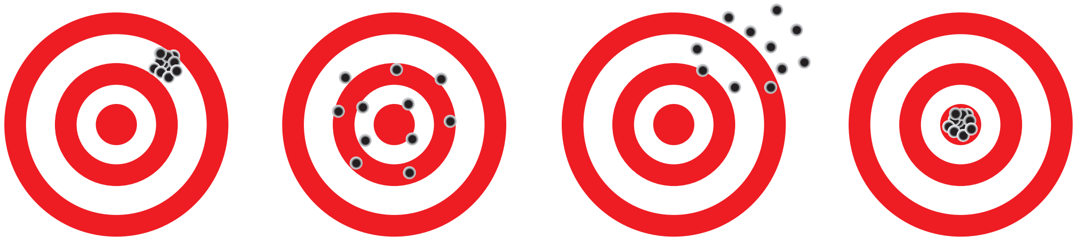
 (3)不確定度的計算與評估會在 1–3 小節進一步說明。



三民 僅供教學使用

知識充電站

多次測量的數據分布可以有各種型態，我們以射擊時彈著點的分布作比喻，擊中靶心表示零誤差。如果彈著點（實驗數據）的散開程度小，則其精密度高；如果彈著點較接近靶心（真值），則其準確度高。下圖中的(a)、(d)圖代表測量值的精密度高，即不確定度小，(b)、(c)圖代表測量值的精密度低，即不確定度大。



高精密度，低準確度 a　　低精密度，高準確度 b　　低精密度，低準確度 c　　高精密度，高準確度 d

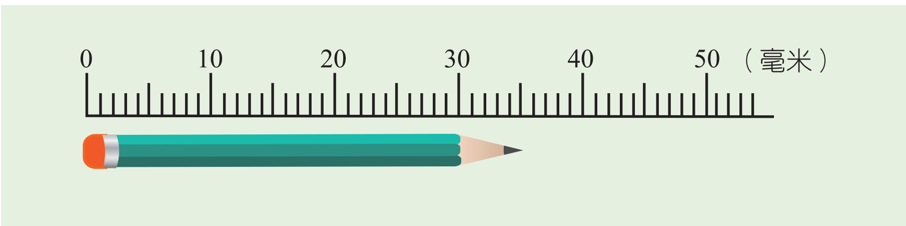
3. 1993 年國際標準化組織（ISO）聯合其他國際組織，**以不確定度的觀念取代誤差**，並建立**量測不確定度的評估與表示規則**（Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, **ISO-GUM**），成為比對分析量測結果的國際新標準。

1-2 測量的有效數字

熱點 1 有效數字的意義

1. 有效數字是用來呈現測量的結果，它是由一組準確數字（即準確值）和 1 位估計數字（即估計值）所組成。

◆ 例如：測量鉛筆長度時，尺的最小刻度為 1 毫米（如下圖），圖中鉛筆長度為 35 毫米多一點。記錄時我們不僅記下準確數字 35，還會多估計 1 位，因此測量值為 35.2 毫米，2 為估計數字。



2. 若是由儀器（例如電子秤）直接測得的數值，其**最後 1 位數字**可視為**估計數字**。

三民 僅供教學使用

知識充電站

依規定，測量紀錄裡非 0 的數字皆為有效數字；而 0 比較特別，是否為有效數字依下列規則判定：

(1)科學記號裡的 0 皆有效，例如 3.200×10^{3} 為 4 位有效。

(2)夾在非零數字間的 0 皆有效，例如 3.002 為 4 位有效。

(3)有小數點的數，位置靠左的 0 非有效數字，例如 0.0032 僅有 2 位有效；位置靠右的 0，則仍然有效，例如 0.003 20 為 3 位有效。

(4)整數尾數的 0 無法判斷是否有效，例如 3200 的有效數字可能為 2 位、3 位或 4 位。若要避免混淆，可以附加說明，或是改為科學記號，例如 3 位數字有效則記為 3.20×10^{3}。

$$\underbrace{0.00}_{\text{無效}}3\ \underbrace{00}_{\text{有效}}8\ \underbrace{0}_{\text{有效}}$$

熱點 2 處理有效數字的運算準則

1. 有效數字的最後 1 位是由估計而得，稱為**可疑數字**，而其前面的數字均為**可靠數字**。
   - ◆ 例如：5.32 公分，2 是可疑數字，5、3 是可靠數字。
2. **加減的運算準則**

   加減結果的有效數字中，其**可疑數字的位數**取到參與加減運算的數字中可疑數字的__最高__位數，其下 1 位數四捨五入。

   ◆ 例如

$$\begin{array}{rr} & 35.\boxed{\underline{8}} \\ & 1.32\underline{4} \\ + & 0.6\underline{6} \\ \hline & 37.\underline{7}\underline{8}\underline{4} \end{array} \qquad \text{參與運算的最高位數} \qquad \begin{array}{rr} & 15.\boxed{\underline{5}} \\ - & 6.28\underline{3} \\ \hline & 9.\underline{2}\underline{1}\underline{7} \end{array}$$

取可疑數字的最高位數　　　　取可疑數字的最高位數

答：37.8　　　　答：9.2

＊數字下面畫短線者表示有誤差的數位。

觀念小試 1

計算下列有效數字：

(1) $5.723+10.28=$__________

(2) $26.5-8.62=$__________

答 (1) 16.00　(2) 17.9

三民 僅供教學使用

3. **乘除的運算準則**

乘除結果的**有效數字之個數**，與參與乘除運算的數字中有效數字個數＿最少＿者相同，所得有效數字最後 1 位的下 1 位數四捨五入。

◆ 例如

$$
\begin{array}{rl}
12.56 & \leftarrow \text{4個有效數字} \\
\times \quad \boxed{6.3} & \text{—— 參與運算的最少有效數字個數 ——} \\
\hline
3768 & \\
7536 & \\
\hline
\underbrace{79}_{\text{取2個有效數字}}.128 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overbrace{4.3}^{\text{取2個有效數字}}5 \\
\boxed{36}\,\overline{)\,156.78} \ \leftarrow \text{5個有效數字} \\
144 \\
\hline
127 \\
108 \\
\hline
198 \\
180
\end{array}
$$

答：79　　　　答：4.4

觀念小試 2

計算下列有效數字：

(1) $5.721 \times 1.2 =$ ＿＿＿＿＿＿

(2) $26.5 \div 8.6 =$ ＿＿＿＿＿＿

答 (1) 6.9　(2) 3.1

4. **乘方、開根的運算準則**

乘方或開根號時，有效數字的＿個數不變＿，所得有效數字最後 1 位的下 1 位數四捨五入。

◆ 例如

$$
\underbrace{(1.982)^3}_{\text{4個有效數字}} = \underbrace{7.786}_{}
\qquad
\sqrt{\underbrace{12.5}_{\text{3個有效數字}}} = \underbrace{3.54}_{}
$$

同參與運算的有效數字

觀念小試 3

計算下列有效數字：

(1) $(5.7)^2 =$ ＿＿＿＿＿＿

(2) $\sqrt{26.5} =$ ＿＿＿＿＿＿

答 (1) 32　(2) 5.15

5. 在**物理題目的計算時**可參考上述的準則處理數據。至於**實驗測量結果的數據四則運算**，其不確定度的傳遞，在 1–3 小節的內容會說明。

三民 僅供教學使用

1-3 不確定度

根據不確定度的性質可分為 A 類不確定度以及 B 類不確定度。

A 類	依據多次測量進行統計分析所得的不確定度。
B 類	A 類以外的其他不確定度。

熱點 1 A 類不確定度的計算

在相同的實驗條件下對某物理量 x 重複測量 N 次，得到的數據為 x_1、x_2、……、x_N。則此次測量的數據處理之各項定義如下：

1. **平均值**：$\bar{x}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}{N}$。　2. **標準差**：$s(x)=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1}}$。　3. **A 類不確定度**：$u_A(x)=\dfrac{s(x)}{\sqrt{N}}$。

3. $u_A(x)$ 以**無條件進位法**（遇到 0 則不進位），**至多**保留 **2 位**有效數字。從上式可得知：
   ⑴測量的數據愈集中，則標準差愈小，A 類不確定度愈小。
   ⑵增加測量次數 N 後，標準差的變化不大，但卻可以降低 A 類不確定度。
   ◆ 例如：測量 16 次的 A 類不確定度約是測量 4 次的一半。

知識充電站

⑴計算標準差 s 時，其中的測量次數 N 建議至少 10 次會比較有意義（使測量值的發生次數對平均值接近常態分布），講義中題目的測量次數都很少，是為了方便同學們的計算體驗！

⑵標準差公式中的分母為「測量次數 N 減 1」，而非「測量次數 N」，是因為我們測量時，只能取得有限測量次數的樣本數字，其自由度為 $N-1$，而不可能取得全部測量次數（無限次）的母體數字。有關統計學自由度的意義可自行上網查詢。

4. **最佳估計值**：$x=$ 平均值 $\bar{x}$ 以**四捨五入進位法**，保留到與 $u_A(x)$ 的**末位**一致。
5. **測量結果**：測量結果 = 最佳估計值 ± 不確定度 $=x\pm u_A(x)$。

以下面範例 1 的數據為例，測量結果的平均值與標準差可利用 Excel 軟體的函數功能來計算，如下二表。

▼ 利用 Excel 的函數功能計算實驗數據 t_1～t_3 的平均值 $\bar{t}$。

B4　=AVERAGE(B1:B3)

	A	B	C	D
1	t_1	12.82		
2	t_2	12.85		
3	t_3	12.78		
4	$\bar{t}$	12.81667		
5	s	0.03512		

=AVERAGE(B1:B3)

▼ 利用 Excel 的函數功能計算實驗數據 t_1～t_3 的標準差 s。

B5　=STDEV(B1:B3)

	A	B	C	D
1	t_1	12.82		
2	t_2	12.85		
3	t_3	12.78		
4	$\bar{t}$	12.81667		
5	s	0.03512		

=STDEV(B1:B3)

三民 僅供教學使用

範例 1　以 A 類不確定度表示測量結果

測量某金屬溫度，在相同實驗條件下重複測量 3 次，得到下列結果：

12.82、12.85、12.78（單位為 °C）。求此次測量的：

(1)平均值。　(2)標準差。　(3) A 類不確定度。　(4)測量結果。

答 (1) 12.8167 °C　(2) 0.035 12 °C　(3) 0.021 °C　(4) (12.817 ± 0.021) °C

解 (1) $\overline{T}=\dfrac{12.82+12.85+12.78}{3}\simeq 12.8167$（°C）。

(2) $s=\sqrt{\dfrac{(12.82-12.8167)^2+(12.85-12.8167)^2+(12.78-12.8167)^2}{3-1}}\simeq 0.035\ 12$（°C）。

(3) $u_A=\dfrac{s}{\sqrt{N}}=\dfrac{0.035\ 12}{\sqrt{3}}=0.0202\cdots\simeq 0.021$（°C）。

(4)最佳估計值 $T=12.817$ °C，測量結果 $=T\pm u_A=(12.817\pm 0.021)$ °C。

類題

某生測量小角度（擺角 < 5°）單擺的週期，重複測量 4 次，所得數據分別為 2.00 s、1.98 s、2.02 s、1.97 s。求此次測量的：

(1)平均值。　(2)標準差。　(3) A 類不確定度。　(4)測量結果。

（可使用 Excel 軟體來練習(1)平均值與(2)標準差的計算）

答 (1) 1.9925 s　(2) 0.022 17 s　(3) 0.011 s　(4) (1.993 ± 0.011) s

解 (1) $\bar{t}=\dfrac{2.00+1.98+2.02+1.97}{4}=1.9925$（s）。

(2) $s=\sqrt{\dfrac{(2.00-1.9925)^2+(1.98-1.9925)^2+(2.02-1.9925)^2+(1.97-1.9925)^2}{4-1}}\simeq 0.022\ 17$（s）。

(3) $u_A=\dfrac{s}{\sqrt{N}}=\dfrac{0.022\ 17}{\sqrt{4}}=0.0110\cdots\simeq 0.011$（s）。

(4)最佳估計值 $t=1.993$ s，測量結果 $=t\pm u_A=(1.993\pm 0.011)$ s。

三民 僅供教學使用

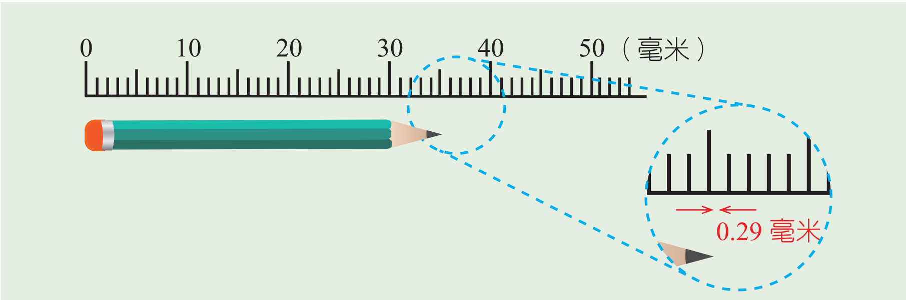
熱點 2 B 類不確定度的評估

1. **B 類不確定度**

B 類不確定度是指**涵蓋了 A 類以外的其他不確定度**，此類不確定度的評估包括測量儀器的精確度（或稱解析度）、儀器說明書記載規格的不確定度、引用文獻中數據來計算的不確定度……等，以 u_B 表示，而根據統計理論可得，B 類不確定度與儀器精確度的關係為 $u_B = \dfrac{精確度}{2\sqrt{3}}$。

◆ 例如：一量尺的最小刻度（精確度）為 1 毫米，則其 B 類不確定度可估計為**精確度除以 $2\sqrt{3}$**，並以**無條件進位法**，至多保留 **2 位**有效數字。即：

$$u_B = \frac{精確度}{2\sqrt{3}} \simeq 0.2887 \times 精確度 = 0.2887 \times 1 \simeq 0.29（毫米）$$



▲ 以最小刻度除以 $2\sqrt{3}$ 作為 B 類不確定度。

2. **最佳估計值**：x = 將物理量 x 的測量值以**四捨五入進位法**，保留到與 u_B 的**末位**一致。
3. **測量結果**：測量結果 = 最佳估計值 ± 不確定度 $= x \pm u_B(x)$。

觀念小試 1

薇如最近想瘦身，因此買了一臺新的電子磅秤每天記錄自己的體重。此電子磅秤的精確度為 0.1 kgw，當她測量結果為 48.5 kgw 時，該如何正確地記錄？（提示：記錄時，須包含 B 類不確定度）

答 (48.500 ± 0.029) kgw

解 $u_B = \dfrac{0.1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.029$（kgw），測量結果 $= W \pm u_B = (48.500 \pm 0.029)$ kgw。

熱點 3 A 類與 B 類的組合不確定度

若測量時同時存在 A 類與 B 類的不確定度，根據 ISO-GUM 的評估準則，其**組合不確定度**可表示為：$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$，u 以**無條件進位法**，至多保留 **2 位**有效數字。

三民 僅供教學使用

範例 2　A、B 類的組合不確定度

範例 1 中，溫度計的使用說明書有標註儀器的精確度為 0.1 °C，若考慮儀器規格造成的影響，則此次測量結果應如何表示？

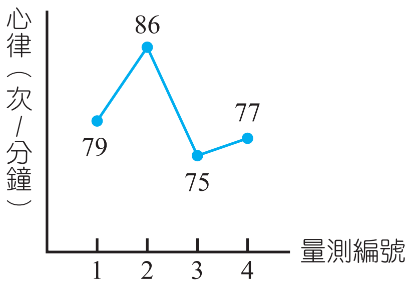
答 (12.817 ± 0.036) °C

解 $u_A = 0.021$，$u_B = \dfrac{0.1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.029$，$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0.021^2 + 0.029^2} = 0.0358 \cdots \simeq 0.036$，

測量結果 $= T \pm u = (12.817 \pm 0.036)$ °C。

類題

智慧型手錶的功能愈來愈多樣化，市面上大多的智慧型手錶都能測量心律，其原理是利用 LED 光學感測器，將 LED 所發出的綠光照射到手腕的皮膚內，由於心臟收縮與舒張時流經血管的血量不同，造成光線反射的能量有些微差異。某次小華利用智慧型手錶量測自己的心律，此手錶標示心律測量的儀器不確定度為 5%，量測數據如右圖所示，標準差約 4.8 次/分鐘，不確定度取一位有效數字，試問：　素養題



(1)本次量測的 A 類不確定度 u_A 為何？　(2)本次量測的 B 類不確定度 u_B 為何？

(3)該如何正確記錄此次實驗的心跳？

答 (1) 3 次/分鐘　(2) 4 次/分鐘　(3) (79 ± 5) 次/分鐘

解 (1) $u_A = \dfrac{s}{\sqrt{N}} = \dfrac{4.8}{\sqrt{4}} = 2.4 \simeq 3$（次/分鐘）。

(2) $\bar{x} = \dfrac{79 + 86 + 75 + 77}{4} = 79.25$，$u_B = \bar{x} \times 5\% = 79.25 \times 0.05 = 3.96 \simeq 4$（次/分鐘）。

(3) $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow$ 測量結果 $= x \pm u = (79 \pm 5)$ 次/分鐘。

熱點 4 物理量加減後的不確定度

獨立測量物理量 x、y 後，其測量結果分別為 $x \pm u(x)$、$y \pm u(y)$。

若**物理量 z = 物理量 $x \pm$ 物理量 y**，則：

1. **z 的不確定度**：$u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$，$u(z)$ 以**無條件進位法**，至多保留 **2 位**有效數字。
2. **z 的最佳估計值**：$z = x \pm y$，其有效數字以**四捨五入進位法**，保留到與 $u(z)$ 的**末位**一致。
3. **z 的測量結果**：測量結果 $= z \pm u(z)$。

知識充電站

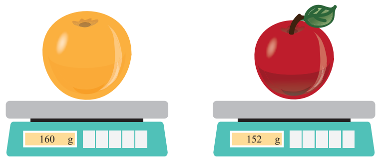
(1)物理量 x 乘上常數 a 後，其不確定度會放大 a 倍，即 $z = ax \Rightarrow u(z) = a \cdot u(x)$。

(2)若 $u = ax \pm by$，a、b 為常數，則 z 的不確定度為 $u(z) = \sqrt{a^2u^2(x) + b^2u^2(y)}$。

三民 僅供教學使用

範例 3 物理量加減後的不確定度

某生利用電子秤分別獨立測量一個梨子與一個蘋果的重量，所得結果分別為 160 公克重與 152 公克重，已知該電子秤的儀器精確度為 1 公克重，求兩顆水果的總重量。



答 (312.00 ± 0.41) gw

解 每一次測量的 $u_B = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.29$（gw）。

$u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)} = \sqrt{0.29^2 + 0.29^2} = 0.410 \cdots \simeq 0.41$（gw），

$z = x + y = 160.00 + 152.00 = 312.00$，

測量結果 $= z \pm u(z) = (312.00 \pm 0.41)$ gw。

類題

一根木桿長度經測量為 $L_1 = (23.220 \pm 0.029)$ 公分，截掉一段長 $L_2 = (8.420 \pm 0.029)$ 公分的木桿，則剩下的木桿長度 L 經推算應為多少？

答 (14.800 ± 0.41) cm

解 $u(L) = \sqrt{u^2(L_1) + u^2(L_2)} = \sqrt{0.029^2 + 0.029^2} = 0.0410 \cdots \simeq 0.041$（cm），

$L = L_1 - L_2 = 23.220 - 8.420 = 14.800$（cm），

測量結果 $= L \pm u(L) = (14.800 \pm 0.041)$ cm。

熱點 5 物理量乘除後的不確定度

1. 物理量 x 的測量結果為 $x \pm u(x)$，其**相對不確定度 $u_r(x)$** 定義如下：$u_r(x) = \dfrac{u(x)}{|x|}$。

2. 獨立測量物理量 x、y 後，其測量結果分別為 $x \pm u(x)$、$y \pm u(y)$。

   若**物理量 z = 物理量 x × 物理量 y** 或**物理量 z = $\dfrac{\text{物理量 } x}{\text{物理量 } y}$**，則：

   (1) **z 的相對不確定度**：$u_r(z) = \sqrt{u_r^2(x) + u_r^2(y)} \Rightarrow \dfrac{u(z)}{|z|} = \sqrt{\dfrac{u^2(x)}{x^2} + \dfrac{u^2(y)}{y^2}}$。

   (2) **z 的不確定度**：$u(z) = |z|\sqrt{\dfrac{u^2(x)}{x^2} + \dfrac{u^2(y)}{y^2}}$。$u(z)$ 以**無條件進位法**，至多保留 **2 位**有效數字。

   (3) **z 的最佳估計值**：$z = xy$ 或 $z = \dfrac{x}{y}$，其有效數字以**四捨五入進位法**，保留到與 $u(z)$ 的**末位**一致。

   (4) **z 的測量結果**：測量結果 $= z \pm u(z)$。

三民 僅供教學使用

知識充電站

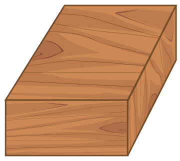
(1)若 $z=axy$ 或 $z=a\dfrac{x}{y}$，a 為常數，則 z 的相對不確定度為 $u_r(z)=\sqrt{u_r^2(x)+u_r^2(y)}$

$\Rightarrow u(z)=|z|\sqrt{\dfrac{u^2(x)}{x^2}+\dfrac{u^2(y)}{y^2}}$，即 $\boldsymbol{u(z)}$ 不受常數 $\boldsymbol{a}$ 影響。

(2)若 $z=x^n$，則 z 的相對不確定度為 $u_r(z)=|n|u_r(x)\Rightarrow\dfrac{u(z)}{|z|}=|n|\dfrac{u(x)}{|x|}$。應用例子可參閱課本範例 1–4。

範例 4　物理量乘除後的不確定度

有一長方形木塊經測量結果，其長寬高各為 (16.20 ± 0.03) 公分、(12.51 ± 0.03) 公分、(8.05 ± 0.03) 公分，質量為 (1230.0 ± 0.3) 公克，求：



(1)此木塊的體積。

(2)此木塊的密度。

答 (1) $(1631\pm8)\ \text{cm}^3$　(2) $(0.754\pm0.004)\ \text{g/cm}^3$

解 (1) $V=LWH=16.20\times12.51\times8.05\simeq1631.43$

$$\Rightarrow u(V)=|V|\sqrt{\frac{u^2(L)}{L^2}+\frac{u^2(W)}{W^2}+\frac{u^2(H)}{H^2}}$$

$$=1631.43\sqrt{(\frac{0.03}{16.20})^2+(\frac{0.03}{12.51})^2+(\frac{0.03}{8.05})^2}=7.835\cdots\simeq8\ (\text{cm}^3)$$

$\Rightarrow$ 體積 $=V\pm u(V)=(1631\pm8)\ \text{cm}^3$。

(2) $\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{1230.0}{1631}\simeq0.7541$

$$\Rightarrow u(\rho)=|\rho|\sqrt{\frac{u^2(m)}{m^2}+\frac{u^2(V)}{V^2}}=0.7541\sqrt{(\frac{0.3}{1230.0})^2+(\frac{8}{1631})^2}=0.003\,703\cdots\simeq0.004\,(\text{g/cm}^3)$$

$\Rightarrow$ 密度 $=\rho\pm u(\rho)=(0.754\pm0.004)\ \text{g/cm}^3$。

類題 1

某生測量長方形教室地面的長與寬，所得結果分別為 (5.62 ± 0.03) 公尺與 (2.45 ± 0.03) 公尺，求此長方形地面的面積。

答 $(13.8\pm0.2)\ \text{m}^2$

解 $A=LW=5.62\times2.45=13.769$

$$\Rightarrow u(A)=|A|\sqrt{\frac{u^2(L)}{L^2}+\frac{u^2(W)}{W^2}}=13.769\sqrt{(\frac{0.03}{5.62})^2+(\frac{0.03}{2.45})^2}=0.183\,9\cdots\simeq0.2$$

$\Rightarrow$ 面積 $=A\pm u(A)=(13.8\pm0.2)\ \text{m}^2$。

三民 僅供教學使用

類題 2

某物移動路徑長 $L=(32.0\pm0.3)$ 公尺所花的時間是 $t=(12.0\pm0.3)$ 秒，求其平均速率 v。

答 $(2.67\pm0.08)\ \text{m/s}$

解 $v=\dfrac{L}{t}=\dfrac{32.0}{12.0}\simeq2.667$

$$\Rightarrow u(v)=|v|\sqrt{\frac{u^2(L)}{L^2}+\frac{u^2(t)}{t^2}}=2.667\sqrt{(\frac{0.3}{32.0})^2+(\frac{0.3}{12.0})^2}=0.071\ 21\cdots\simeq0.08$$

$\Rightarrow$ 速率 $v\pm u(v)=(2.67\pm0.08)\ \text{m/s}$。

1–4 物理量的因次

熱點 1 物理量因次的意義與表示

1. 物理量 $\begin{cases}\text{基本量，其單位稱為基本單位。}\\\text{導出量，其單位稱為導出單位。}\end{cases}$

2. 力學的基本量 $\begin{cases}\textbf{質量}\text{：因次以} \underline{\ \text{M}\ } \text{表示。}\\\textbf{長度}\text{：因次以} \underline{\ \text{L}\ } \text{表示。}\\\textbf{時間}\text{：因次以} \underline{\ \text{T}\ } \text{表示。}\end{cases}$

3. 將物理量的代號加上中括弧，可用來表示該物理量的因次。例如 $[\Delta x]$ 代表位移 Δx 的因次。

4. 導出量的因次可以**基本量的因次之冪次組合**來表示。在力學中，物理量的因次都可以寫成 $\underline{\ \text{M}^a\text{L}^b\text{T}^c\ }$ 的冪次形式。

◆ 例如：(1)速度 $(v)=\dfrac{\text{位移}\ (\Delta x)}{\text{時距}\ (\Delta t)}\Rightarrow$ 速度的因次：$[v]=\dfrac{[\Delta x]}{[\Delta t]}=\dfrac{\text{L}}{\text{T}}=\text{LT}^{-1}$。

(2)力 $(F)=$ 質量 $(m)\times$ 加速度 $(a)=$ 質量 $(m)\times\dfrac{\text{速度變化量}\ (\Delta v)}{\text{時距}\ (\Delta t)}$

$\Rightarrow$ 力的因次：$[F]=[m]\dfrac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\text{M}\dfrac{\text{LT}^{-1}}{\text{T}}=\text{MLT}^{-2}$。

5. 求導出量的因次也可採用下面方法：

先將導出量的單位以**基本單位的組合**表示，再將基本單位對應的基本量因次加以組合。

◆ 例如：(1)面積 (A) 的單位為 $\text{m}^2\Rightarrow$ 面積的因次：$[A]=\text{L}^2$。

(2)速度 (v) 的單位為 $\text{m/s}\Rightarrow$ 速度的因次：$[v]=\text{LT}^{-1}$。

(3)力 (F) 的單位為 $\text{N}=\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\Rightarrow$ 力的因次：$[F]=\text{MLT}^{-2}$。

6. 有些物理量沒有因次，其單位則為**無因次**單位。

◆ 例如：角度 $(\theta)=\dfrac{\text{弧長}\ (S)}{\text{半徑}\ (r)}\Rightarrow$ 角度的因次：$[\theta]=\dfrac{[S]}{[r]}=\dfrac{\text{L}}{\text{L}}=$ 無因次。

所以角度的單位「弧度」為無因次單位。

三民 僅供教學使用

觀念小試 1

1. 完成下表：

物理量	SI 單位	因次
加速度	m/s^2	LT^{-2}
頻率	s^{-1}	T^{-1}

物理量	SI 單位	因次
力矩	$kg\cdot m^2s^{-2}$	ML^2T^{-2}
能量	$kg\cdot m^2s^{-2}$	ML^2T^{-2}

2. 上表中，與力矩有相同因次的物理量是 能量 。

熱點 2 因次的性質

1. 具有相同因次的物理量才能作相加或相減的代數運算。
2. 在等式兩邊的物理量必須具有相同的因次，等式才有意義。
   - 例如：等式 $v=v_0+at$ 中，等號兩邊的因次如右：$LT^{-1}=LT^{-1}+LT^{-2}\times T$。

熱點 3 因次分析的用途

1. 可找出各個物理量之間的關係，簡化看似複雜的難題，如範例 1。
2. 可檢驗理論（數學式）的推導過程中是否發生錯誤。

範例 1 利用因次分析導出物理量之間的關係

深海水面傳播的波速 v 與波長 λ 以及重力加速度 g 的關係為 $v^2=\frac{1}{2\pi}g^p\lambda^q$，試利用物理量因次的分析，求出 p 及 q 各為何？

(A) $p=1$、$q=1$　(B) $p=1$、$q=2$　(C) $p=2$、$q=1$
(D) $p=1$、$q=3$　(E) $p=2$、$q=2$　(F) $p=3$、$q=2$　日本大學入學考試

答 (A)

解 $v^2=\frac{1}{2\pi}g^p\lambda^q$，等式兩邊的因次相等 $\Rightarrow (LT^{-1})^2=(LT^{-2})^p\cdot L^q \Rightarrow L^2T^{-2}=L^{p+q}\cdot T^{-2p}$
$\Rightarrow p+q=2$，$-2p=-2 \Rightarrow p=1$、$q=1$。

類題

假設琴弦上橫波的波速為 v，v 只與琴弦所受拉力 T 以及單位長度的質量 ρ 有關，而三者之關係可以表示為 $v=T^a\rho^b$，且等式兩邊的單位必須一致，則下列選項何者正確？

(A) $a=1$、$b=1$　(B) $a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{2}$　(C) $a=\frac{1}{2}$、$b=-\frac{1}{2}$
(D) $a=-\frac{1}{2}$、$b=-\frac{1}{2}$　(E) $a=2$、$b=2$　參考試題

答 (C)

解 $v=T^a\rho^b$ 等式兩邊的單位相等：$m\cdot s^{-1}=(kg\cdot m\cdot s^{-2})^a(kg\cdot m^{-1})^b=kg^{a+b}m^{a-b}s^{-2a}$
$\Rightarrow a+b=0$，$a-b=1$，$-2a=-1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$。

三民 僅供教學使用

補充練習

基本題

＊為多選題

＊（ CDE ） 1.大部分的物理量都有因次，少數例如角度（弧長與半徑的比值）則沒有因次，下列的物理量哪些無因次？

(A)彈性常數 k（彈簧的受力與彈簧形變量的比值）

(B)壓力 P（物體垂直表面的力與該面積的比值）

(C)動摩擦係數 μ_k（動摩擦力與正向力的比值）

(D)物質的折射率 n（真空中的光速與在該物質中光速的比值）

(E)物質的比重 SG（物質密度與水密度的比值）

（ E ） 2.地表附近物體的重力位能之「因次」為何？

(A) MLT^{-2} (B) ML^2T^{-1} (C) M^2LT^{-2} (D) M^2LT^{-1} (E) ML^2T^{-2} 日本大學入學考試

3.在必修物理課中，我們學過光子的能量 $E=hf$，f 為光的頻率。試利用此式求普朗克常數 h 的因次。

3.答 ML^2T^{-1}

＊（ AD ） 4.國際太空站於地球表面高度 320 公里～350 公里的軌道上運行。它們的運行速率大約是 27 400 公里/小時，環繞地球一周的時間大約在 90 分鐘左右，速率 v 與週期 T 都可用地球半徑 R 以及重力加速度 g 來表示，下列的推論哪些是合理的？

(A) $v\propto\sqrt{gR}$ (B) $T\propto\sqrt{gR}$ (C) $v\propto\sqrt{\frac{R}{g}}$ (D) $T\propto\sqrt{\frac{R}{g}}$ (E) $T\propto\frac{R}{g}$

進階題

＊為多選題

（ A ） 5.欲瞭解聲波如何在金屬中傳播，可利用簡化的一維模型：將金屬原子視為質量 m 的小球，以間距 d 排列成一直線，且相鄰兩個小球間以彈性常數 k 的彈簧連結，藉以模擬原子間的作用力。在此簡化模型的假設下，應用因次分析來判定，下列何者可能為金屬中的聲速？(已知虎克定律：$F_s=kx\Rightarrow$ 彈性常數 $k=\frac{\text{彈力 } F_s}{\text{形變量 } x}$)

(A) $d\sqrt{\frac{k}{m}}$ (B) $d\sqrt{mk}$ (C) $\sqrt{\frac{dm}{k}}$ (D) $\frac{dk}{m}$ (E) $\frac{mk}{d}$ 105 指考

（ A ） 6.一質點作週期運動，經測量發現，位移平方的平均等於 X^2，動量平方的平均等於 P^2，總力學能等於 E，下列何者的因次與週期相同？

（提示：物體動量 = 質量 × 速度）

(A) $\frac{\sqrt{X^2P^2}}{E}$ (B) $\frac{X^2P^2}{E}$ (C) $\frac{\sqrt{X^2E^2}}{P^2}$ (D) $E\sqrt{\frac{X^2}{P^2}}$ (E) $E\sqrt{\frac{P^2}{X^2}}$ 改自 109 指考

三民 僅供教學使用

(C) 7. 假設在水波槽中，與水波波速可能有關的物理量為重力加速度 g、水的密度 ρ 與水深 D。若僅以上述三個物理量的因次來判斷波速 v，則下列何者正確？

(A) v 正比於 gD (B) v 正比於 ρgD (C) v 正比於 $\sqrt{gD}$

(D) v 正比於 $g\sqrt{\rho D}$ (E) v 正比於 $\dfrac{1}{\sqrt{gD}}$ 110 指考

(C) 8. 在研究浮體時，同學推測圓柱浮體能否穩定維持直立，與密度有關。故決定先測量圓柱體的體積，而以同一根米尺對圓柱體的直徑與高度各測量 4 次，結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、標準差平方與 1/12。

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	標準差平方	1/12
直徑 (mm)	121.2	121.5	121.0	121.9	121.400	0.1533333	0.083333
高度 (mm)	100.0	100.8	100.4	101.2	100.600	0.2666667	0.083333

若以下各測量值括弧內 ± 號後的數字代表組合不確定度，則下列敘述何者正確？

(A)直徑的測量值為 (121.4 ± 0.2) mm

(B)直徑的測量值為 (121.4 ± 0.5) mm

(C)高度的測量值為 (100.60 ± 0.39) mm

(D)高度的測量值為 (100.60 ± 0.26) mm

(E)圓柱體體積的組合不確定度等於高度與直徑兩者之組合不確定度的和 111 分科

(E) 9. 珠寶商使用最小刻度為 1 mg 的電子秤測量金飾質量 5 次，求得平均值為 m_{AV}，標準差為 SD。若以 u_A、u_B 與 u_C 分別代表標準的 A 類、B 類與組合不確定度，且已知分析過程計算機顯示 m_{AV} 為 95.367823 g 、 u_C 為 0.35686524 mg ， 則下列選項何者正確？

(A) $u_A = \dfrac{SD}{4}$

(B) $u_B = 1$ mg

(C) $u_C = \dfrac{u_A + u_B}{2}$

(D)金飾質量的報告應為 $m_{AV} = 95.4$ g，$u_C = 0.4$ mg

(E)金飾質量的報告應為 $m_{AV} = 95.36782$ g，$u_C = 0.36$ mg 112 分科

三民 僅供教學使用

素養混合題

伽利略嘗試製作了幾個鐘擺實驗。這些實驗的靈感據傳說是來自於觀察比薩大教堂中央銅質吊燈的擺動，並測算伽利略自己的脈搏而得到的（見溫琴佐．維維亞尼為伽利略寫的傳記）。這些實驗日後被記載在他的著作《兩種新科學》中。伽利略認為簡單的鐘擺是等時的，即無論幅度多大，擺的週期運動時長總是一定的。然而，根據克里斯蒂．惠更斯的研究，這只是近似成立，並不精確。伽利略發現了週期的平方與鐘擺的長度成正比。伽利略的助手溫琴佐根據伽利略的理論於 1642 年設計了一個大鐘。但大鐘沒能夠建造起來，主要是因為擺度太大，需要冕狀司行輪，導致計時不準。

改寫自《維基百科．伽利略．伽利萊》

▲比薩大教堂圓頂的「伽利略吊燈」。

小銘看完上述文章後，利用碼表來測量某一單擺的週期 T，得到下面兩種結果：

甲實驗：釋放角度固定為 10°

實驗次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
擺錘來回 1 次的時間 T（s）	1.51	1.46	1.52	1.51	1.50	1.55	1.53	1.46	1.56
平均值（s）	1.5111								
標準差（s）	0.0348								

乙實驗：釋放角度固定為 10°

實驗次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
擺錘來回 10 次的時間 T'（s）	15.61	15.33	15.45	15.53	15.44	15.46	15.45	15.61	15.71
$T=\frac{T'}{10}$（s）	1.561	1.533	1.545	1.553	1.544	1.546	1.545	1.561	1.571
平均值（s）	1.5510								
標準差（s）	0.0116								

（ AE ） 1.比較甲、乙兩實驗對單擺週期（T）的測量之 A 類不確定度（u_A）大小，並判斷哪一個實驗的測量品質較好。(A～C 選 1 項，D、E 選 1 項)

(A) $u_{A甲}>u_{A乙}$ (B) $u_{A甲}=u_{A乙}$ (C) $u_{A甲}<u_{A乙}$ (D)實驗甲 (E)實驗乙

1. $u_{A甲}=\frac{s_甲}{\sqrt{N}}=\frac{0.0348}{\sqrt{9}}=0.012$（s）；$u_{A乙}=\frac{s_乙}{\sqrt{N}}=\frac{0.0116}{\sqrt{9}}=0.0039$（s）。$u_{A甲}>u_{A乙}\Rightarrow$ 乙的測量品質較好。

三民 僅供教學使用

2.小銘所使用的碼表，其精確度（即最小讀值）為 0.01 秒，準確度為 ± 0.02 秒，以上兩種規格都會產生 B 類不確定度，其計算公式均為 $u_B = \dfrac{H}{2\sqrt{3}}$，$H$ 為測量儀器某規格的上下限範圍，則此碼表規格產生的 B 類不確定為何？（公式：$u_B = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2}$）

2.精確度規格的上下限範圍為 0.01 s $\Rightarrow u_{B1} = \dfrac{0.01}{2\sqrt{3}} = 0.0029$（s）；

準確度規格的上下限範圍為 0.04 s $\Rightarrow u_{B2} = \dfrac{0.04}{2\sqrt{3}} = 0.012$（s）。

$u_B = \sqrt{0.0029^2 + 0.012^2} \simeq 0.013$（s）。

3.若忽略空氣阻力、擺線的彈性及重量之影響。試利用因次分析法來探究單擺週期和下列物理量①～④的數學關係。

①擺錘質量 m

②擺線長度 L

③剛釋放擺錘時，擺線和鉛直面的夾角 θ

④實驗場所的重力加速度 g

3.設單擺週期 $P = km^aL^b\theta^cg^d$，k 為比例常數（無因次）。

等式兩邊的因次相等 $\Rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{M}^a\mathrm{L}^b(\mathrm{LT}^{-2})^d = \mathrm{M}^a\mathrm{L}^{b+d}\mathrm{T}^{-2d}$，$\theta$ 無因次，所以無法決定 c

$\Rightarrow a = 0$，$b + d = 0$，$-2d = 1 \Rightarrow a = 0$，$b = \dfrac{1}{2}$，$d = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P = kL^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = k\sqrt{\dfrac{L}{g}}$（$k$ 為可能含有 θ 變數的無因次項）。

4.承上題，試問物理量①～④中哪一個變因無法建立和週期的數學關係？為什麼？

4.剛釋放擺錘時，擺線和鉛直面的夾角 θ；因為 θ 無因次，無法做因次分析。

三民 僅供教學使用