第 1 章

測量與不確定度

學習脈絡

不確定度 $u=\sqrt{u_A^{\ 2}+u_B^{\ 2}}$

同時存在 A 類與 B 類

$\begin{cases} \text{不確定度 } u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2} \\ \text{測量結果：} \begin{cases} \text{相加 } =(X+Y)\pm u(Z) \\ \text{相減 } =(X-Y)\pm u(Z) \end{cases} \end{cases}$

加減後

基本統計

平均值：$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

標準差：$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

A 類評估

不確定度 $u_A(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

計算流程

步驟	說明
步驟 1	**求出 $\bar{x}$ 與 s** 分別算出 $\bar{x}$ 與 s，可暫時不需擔心保留位數，將計算結果寫下即可。
步驟 2	**求出不確定度** 將 $u_A(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 的計算結果，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度。
步驟 3	**求出最佳估計值 X** 將 $\bar{x}$ 的計算結果，以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X。
步驟 4	**寫出測量結果** 測量結果 $=X\pm u_A(X)$

測量與不確定度

不確定度的組合

相乘後

$$\begin{cases}\text{不確定度 } u(Z)=|XY|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}\\ \text{測量結果 }=XY\pm u(Z)\end{cases}$$

相除後

$$\begin{cases}\text{不確定度 } u(Z)=\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}\\ \text{測量結果 }=\dfrac{X}{Y}\pm u(Z)\end{cases}$$

物理量的因次

力學基本量與因次

長度 L
時間 T
質量 M

導出量的因次

表示為 $L^aM^bT^c$ 的冪次組合

因次分析法

方程式中之每一項必定具有相同的因次

不確定度的評估

B 類評估

不確定度

$$u_B(X)=\frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$$

計算流程

步驟	說明
步驟 1	**求出不確定度** 依據規格說明、過往數據分析、數據隨附資料等等估算，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度 $u_B(X)$。
步驟 2	**求出最佳估計值** 將測量值以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X。
步驟 3	**寫出測量結果** 測量結果 $=X\pm u_B(X)$

1-1 簡介不確定度

一 誤差與不確定度

1. 誤差（舊觀念）

⑴當我們想針對特定現象進行定量分析時，就必須進行一系列的測量，測量值與真值（或標準值、準確值）間的偏差，稱為**誤差** (error)，如圖 (a) 所示。誤差的定義為

誤差 ＝ 測量值 － 真值

⑵上列誤差的定義看似合理，但量測結果的**「真值」，實際上無法準確獲得，「誤差」自然無法估算。**以量身高為例，將測量值減真值就是誤差。但身高也是測量才得知的，因此我們並無法真確得知身高的真值是多少。

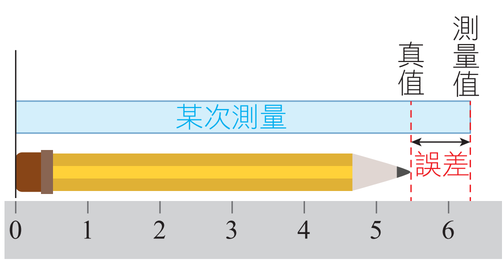
2. 不確定度（新觀念）

⑴原先國際上對於誤差分析並無共識，一直到了 1993 年，才由國際標準化組織 (International Organization for Standardization，ISO) 聯合其他國際組織，以**不確定度** (uncertainty) 的觀念取代誤差，並建立量測不確定度的評估與表示規則 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO-GUM)。ISO-GUM 最後的版本於 2008 年修訂，為現今分析量測結果的國際標準。

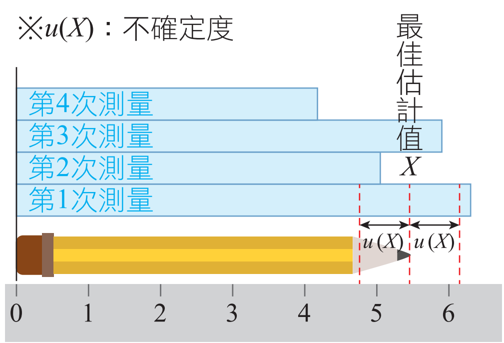
⑵所謂不確定度，是因為測量的真值難以確定，因此測量結果應該是一個估計區間才是合理的，如圖 (b) 所示（其計算的方法，後續會有詳細的討論）。測量結果可表示為

測量結果 ＝ 最佳估計值 $X \pm$ 不確定度 $u(X)$

⑶量測不確定度是以科學的程序估算被量測值的**離散程度**，其大小決定了量測結果的使用價值。**不確定度愈小，量測結果的品質愈好，使用價值也愈大。**



▲圖 (a)　誤差的概念



▲圖 (b)　不確定度的概念

3. 不確定度的種類

不確定度分為 A、B 兩類：

- 不確定度評估
  - A 類評估：依據多次測量數據進行統計分析而來。增加測量次數，可降低 A 類不確定度。
  - B 類評估：依其他資訊來源（權威機構發布的量值、材料或儀器特性、製造商提供的規格、校正證書……等等）研判而來。

4. 誤差和不確定度的比較

測量物理量 x	誤差	不確定度
意涵	測量值與真值的差	測量值的分散程度
數值	正負值皆有可能	恆為正值
符號	無規定	以 $u(X)$ 表示
分類	系統誤差、隨機誤差	A 類評估和 B 類評估

二 平均值與標準差

1. 平均值

假定某一物理量 x 的多次測量值為 x_1、x_2、⋯、x_n，則該物理量 x 的平均值為

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2. 標準差

(1) 高一數學曾學過，如果可以得到母體資料 x_1、x_2、⋯、x_n，其標準差定義為

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

式中標準差 σ（讀作 sigma）稱為**母體標準差**。標準差用以表示測量值之間的**離散程度**，標準差愈小表示離散程度愈小；標準差愈大表示離散程度愈大。

(2) 研究上為了節省時間與經費，在實驗室的狀況通常只是取得代表性樣本 x_1、x_2、⋯、x_n，而不是母體資料。經由統計上的計算，上式需修正為

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

上式的 s 稱為**樣本標準差**。當樣本個數 n 愈大時，s 與 σ 會愈趨近於相等。

3. 實例說明

情境	某小型學校全班 7 位同學的物理成績				物理老師為研究龍騰高中的物理學習狀況，隨機抽測 7 位學生所得的物理成績			
	分數 x_i	平均值 $\overline{x}$	差值平方 $(x_i-\overline{x})^2$	母體標準差 σ（取小數點後 2 位）	分數 x_i	平均值 $\overline{x}$	差值平方 $(x_i-\overline{x})^2$	樣本標準差 s（取小數點後 2 位）
#1	45		225		45		225	
#2	50		100		50		100	
#3	55		25		55		25	
#4	60	60	0	$\sigma=\sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}$ $=10.00$	60	60	0	$s=\sqrt{\frac{1}{7-1}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}$ $=10.80$
#5	65		25		65		25	
#6	70		100		70		100	
#7	75		225		75		225	

課外補充資料　以電腦軟體或手機 APP 輔助運算標準差

計算平均值和標準差乃至後續要討論的不確定度，都是極為繁瑣的事，**本章的學習重點在於學會處理實驗數據的正確方法**，至於繁瑣的計算，可以交給電腦、手機或計算機處理喔！下面我們將以最通行的試算表軟體 Excel，利用上述兩個例子來說明計算平均值、母體標準差和樣本標準差的方法。目前，該試算表的手機 APP 是免費的喔！

(1)母體標準差

	A	B	
1		物理成績	
2	#1	45	這邊輸入數據
3	#2	50	
4	#3	55	
5	#4	60	
6	#5	65	
7	#6	70	
8	#7	75	
9	平均值	60	=AVERAGE(B2:B8)
10	母體標準差	10.00	=STDEV.P(B2:B8)

(2)樣本標準差

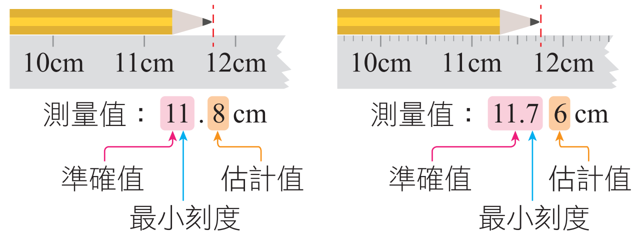
	A	B	
1		物理成績	
2	#1	45	這邊輸入數據
3	#2	50	
4	#3	55	
5	#4	60	
6	#5	65	
7	#6	70	
8	#7	75	
9	平均值	60	=AVERAGE(B2:B8)
10	樣本標準差	10.80	=STDEV(B2:B8)

※ AVERAGE 是 Excel 中用來算平均值的函數，其語法為：AVERAGE（範圍）。
※ STDEV.P 是 Excel 中用來算母體標準差的函數，其語法為：STDEV.P（範圍）。
※ STDEV 是 Excel 中用來算樣本標準差的函數，其語法為：STDEV（範圍）。

三 測量的有效數字

1. 有效數字的來源

如圖所示，單次測量結果由「**準確值＋1 位估計值**」所組成，準確值與估計值皆為測量的有效數字。



2. 有效數字位數的判定原則

條件	實例	
(1) 所有非零的數字皆為有效數字。	9876.54	6 位
(2) 介於非零數字間的 0，皆為有效數字。	40003	5 位
(3) 前綴零不是有效數字。	0.0036	2 位
(4) 小數點後綴零是有效數字。	0.03600	4 位
(5) 若一數用科學記號 $a\times10^n$ 表示，則 a 皆為有效數字。	3.58×10^4	3 位

四 不確定度的A類評估

1. 測量的不確定度

(1) 根據 ISO-GUM，不確定度的 A 類評估 $u_A(X)$ 之定義為 $u_A(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$。

(2) 由上式可知：不確定度 $u_A(X)$ 主要與測量方法及測量次數有關，如右圖所示。

$u_A(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

實驗方法愈好，標準差愈低，分子變小，故可降低不確定度

測量次數增加，分母變大，故可降低不確定度

(3) 依據 ISO-GUM 的規定，不確定度不應取過多有效位數，**至多保留兩位，採用無條件進位法**計算，但若下一位數值為 0 則捨去，例如 0.1417... 取為 0.15，但若是 0.1407... 則取為 0.14。

2. 測量的最佳估計值（僅考慮A類不確定度時）

(1) 每一個待測物理量的真值通常是無法知道的，但測量的次數 n 夠大時，平均值 $\bar{x}$ 即趨近於真值了。

(2) 將實驗所得的平均值 $\bar{x}$ 依據 ISO-GUM 使用四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為**最佳估計值**，記為 X。

3. 測量結果的表示法

$\dfrac{\text{標準差}}{\sqrt{\text{測量次數}}}$，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字

測量結果 ＝ 最佳估計值 ± 不確定度 $=X\pm u_A(X)$

將 $\bar{x}$ 四捨五入保留到與不確定度的末位一致

4. 不確定度A類評估的計算流程與實例

小龍測量小幅度擺動單擺的週期 4 次，所得 4 個數據為：

$x_1=2.10$ s、$x_2=2.08$ s、$x_3=2.09$ s、$x_4=2.04$ s

則計算不確定度的流程與方法如下：

01

求出 $\bar{x}$ 與 s

分別算出 $\bar{x}$ 與 s，可暫時不需擔心保留位數，將計算結果寫下即可。

① $\bar{x}=\dfrac{2.10+2.08+2.09+2.04}{4}=2.0775\,(\text{s})$

② $s=\sqrt{\dfrac{(2.10-2.0775)^2+(2.08-2.0775)^2+(2.09-2.0775)^2+(2.04-2.0775)^2}{4-1}}$

$=0.0262995\cdots\,(\text{s})$

02

求出不確定度 $u_A(X)$

將 $u_A(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 的計算結果，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度。

$$u_A(X)=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{0.0262995\cdots}{\sqrt{4}}=0.0131\cdots\,(\text{s})，$$

以無條件進位法保留 2 位有效數字，得 $u(X)=0.014\,(\text{s})$

03

求出最佳估計值 X

將 $\bar{x}$ 的計算結果，以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X。

$$X=2.078\,(\text{s})$$

04

寫出測量結果

測量結果 $=X\pm u_A(X)$

單擺週期 $=(2.078\pm0.014)$ s

範例 1 不確定度的A類評估

物理老師為了讓同學了解測量方法會影響測量的品質及不確定度，先請甲生以右圖所示的甲方法幫小英量身高（木尺加上輔助器材，木尺的最小刻度為 cm）。待甲生量測完畢，老師將輔助器材拆除，再請乙生以右圖所示的乙方法幫小英量身高（僅用木尺）。兩人所得的數據如下表所示，若僅考慮不確定度的 A 類評估，則：

甲方法：木尺加輔助器材

乙方法：僅用木尺

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次
甲方法 (cm)	166.2	165.6	165.5	166.4	166.8	165.2	165.4	165.6	165.8
乙方法 (cm)	163.2	169.6	168.5	169.4	168.8	164.2	161.4	162.6	164.8

(1) 請依據表格資料，完成不確定度、最佳估計值的計算，並將測量結果填寫到表格欄位中。

	平均值	標準差 s	A 類不確定度 $u_A(X)$	最佳估計值 X	測量結果
甲方法 (cm)	165.833	0.5244	0.18	165.83	(165.83±0.18) cm
乙方法 (cm)	165.833	3.2326	1.1	165.8	(165.8±1.1) cm

(2) 你認為哪一種方法的品質比較好呢？請說明你的理由並分析其原因。

解 (1) 甲方法：

① $u_{A甲}=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.5244}{\sqrt{9}}=0.1748\,(\text{cm})\approx 0.18\,(\text{cm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

② 最佳估計值 $X_甲=165.83\,(\text{cm})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。

③ 測量結果 ＝(165.83±0.18) cm。

乙方法：

① $u_{A乙}=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.2326}{\sqrt{9}}=1.0775\,(\text{cm})\approx 1.1\,(\text{cm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

② 最佳估計值 $X_乙=165.8\,(\text{cm})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。

③ 測量結果 ＝(165.8±1.1) cm。

(2) 甲方法的品質較好，因其不確定度較小。這是因為第一種有輔助器材，故測量值比較精確，不確定度較小。而乙方法則夾雜太多不確定性（目光是否對齊頭頂、木尺是否垂直等等因素），故不確定度較大。

馬解 (1)甲生：

① $u_{A甲}=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{1.5305}{\sqrt{4}}=0.76525\,(\text{mm})\approx 0.77\,(\text{mm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

② 最佳估計值 $X_{甲}=54.48\,(\text{mm})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。

③ 測量結果 $=(54.48\pm0.77)$ mm。

乙生：

① $u_{A乙}=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{2.8999}{\sqrt{4}}=1.44995\,(\text{mm})\approx 1.5\,(\text{mm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

② 最佳估計值 $X_{乙}=55.5\,(\text{mm})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。

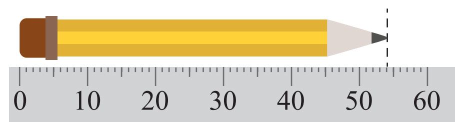
③ 測量結果 $=(55.5\pm1.5)$ mm。

(2)甲生的量測品質較好，因其不確定度較小。

馬上練習 1

下圖所示直尺的最小刻度為 mm，甲生和乙生測量同一支鉛筆的長度各 4 次，數據如下（單位為 mm），若僅考慮不確定度的 A 類評估：

	甲生 (mm)	乙生 (mm)
第 1 次	52.3	51.4
第 2 次	54.6	57.6
第 3 次	55.8	55.6
第 4 次	55.2	57.5
平均值 $\bar{x}$	54.475	55.525
標準差 s	1.5305	2.8999
A 類不確定度 $u_A(X)$	0.77	1.5
最佳估計值 X	54.48	55.5
測量結果	(54.48 ± 0.77) mm	(55.5 ± 1.5) mm



(1)請依據表格資料，完成不確定度、最佳估計值的計算，並將測量結果填寫到表格欄位中。

(2)你認為甲生或乙生的量測品質哪一個比較好呢？請說明你的理由。

五 不確定度的B類評估

1. B類評估簡介

(1)除了對多次測量統計分析外，藉由其他資訊來評估不確定度者，稱為 B 類評估。在高中的課程範圍內，大致可分為兩種類型：

① 直接引用權威機構發布的量值、製造商提供的規格、校正證書…等等所提供的不確定度 $u_B(X)$。

② 在測量值均勻分布的前提下，使用儀器測量直接獲得數據者，其 B 類不確定度與量測儀器的最小刻度有關，定義為：

B 類不確定度 $u_B(X)=\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$。

(2) 上式的最小刻度，其意義為儀器的最小讀數，不同的儀器可能會以精密度、精準度、精確度、精度、解析度、…等名詞來表現，但其意義都與最小刻度類似。

(3) 依據 ISO-GUM 的規定，不確定度不應取過多有效位數，至多保留兩位，採用無條件進位法計算，但若下一位數值為 0 則捨去，例如 0.1417... 取為 0.15，但若是 0.1407... 則取為 0.14。

2. 測量的最佳估計值

將實驗所得的測量值依據 ISO-GUM 使用四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值，記為 X。

3. 測量結果的表示法（僅考慮B類不確定度）

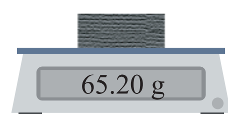
$\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}$，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字

測量結果 ＝ 最佳估計值 ± 不確定度 $=X\pm u_B(X)$

將測量值四捨五入保留到與不確定度的末位一致

4. 不確定度B類評估的計算流程與實例

小明以如圖所示的電子天平測量某物體質量，說明書上載明精確度為 0.01 g，其顯示的量測值為 65.20 g。



01 求出不確定度

① 直接引用儀器說明書或其他資料所提供的不確定度。
② 由最小刻度來估算不確定度 $u_B(X)$，至多保留 2 位有效數字。

$$u_B(X)=\frac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\frac{0.01}{2\sqrt{3}}=0.0028867\cdots\approx 0.0029\ \text{g}$$

（以無條件進位法保留 2 位有效數字）

02 求出最佳估計值

將測量值以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 X。

最佳估計值 $X=65.2000\,(\text{g})$
（此處最佳估計值需補二位零，才會與不確定度的末位一致。）

03 寫出測量結果

測量結果 $=X\pm u_B(X)$

測量值 $=(65.2000\pm 0.0029)\ \text{g}$

範例 2　不確定度的B類評估

圖 (a) 所示捲尺是家中常備測量長度的小工具，隨著科技的進步，現在我們可以用圖 (b) 所示的雷射測距儀來取代捲尺。小英買了一個雷射測距儀，說明書上揭露的資訊如圖所示。小英利用它來測量樓層高度，雷射測距儀顯示的高度數值為 2.600 m，小英該如何記錄此測量結果呢？

▲圖 (a)　捲尺

‧測量範圍：0.33~40(m)
‧測量單位：m
‧最小刻度：2mm

▲圖 (b)　雷射測距儀

解 B 類不確定度 $u_B(X)=\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}$

$=0.57735\cdots\approx0.58$ mm（以無條件進位法保留 2 位有效數字）

$=0.00058$ m

故應記為 (2.60000 ± 0.00058) m。

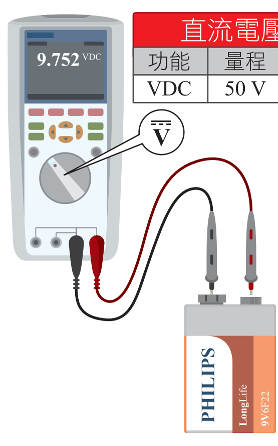
馬解 B 類不確定度 $u_B(X)=\dfrac{0.001}{2\sqrt{3}}=0.00028867\cdots\approx0.00029$ V，故應記為 (9.75200 ± 0.00029) V。

馬上練習 2

小柯想測試市售的 9 V 電池的電壓是否真的是 9 伏特，於是拿出如圖所示的三用電表測試。該三用電表的說明書上揭露的資訊顯示，測量小於 50 V 的直流電壓時，最小刻度為 0.001 V。他將檔位切換到直流電壓檔，液晶螢幕顯示為 9.752 VDC（直流電壓 9.752 V），則他應將此測量結果記為 $\underline{(9.75200\pm0.00029)\text{ V}}$。

直流電壓規格

功能	量程	最小刻度
VDC	50 V	0.001V



段考基礎練習題

主題練習

概念 不確定度的 A 類評估

1. 物理老師提供同一個測量儀器，請 196 位學生測量白板筆的直徑，此 196 個數據的資料如下表所示（單位為 mm）。老師已經用 Excel 算出平均值為 15.9097 mm，標準差為 0.3723 mm。

15.02	15.06	15.10	15.10	15.10	15.14	15.18	15.20	15.22	15.26	15.26	15.26	15.26	15.26	15.26
15.30	15.30	15.34	15.34	15.38	15.42	15.46	15.50	15.54	15.58	15.58	15.58	15.62	15.62	15.62
15.62	15.66	15.66	15.66	15.66	15.66	15.66	15.66	15.70	15.70	15.70	15.70	15.70	15.70	15.74
15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.74	15.78	15.78	15.78
15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.78	15.82	15.82	15.82	15.82
15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.82	15.86
15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.86	15.90
15.90	15.90	15.90	15.90	15.90	15.90	15.90	15.90	15.94	15.94	15.94	15.94	15.94	15.94	15.94
15.94	15.94	15.94	15.94	15.94	15.94	15.94	15.98	15.98	15.98	15.98	15.98	15.98	16.02	16.02
16.02	16.02	16.06	16.06	16.06	16.06	16.10	16.10	16.10	16.10	16.10	16.10	16.10	16.10	16.14
16.14	16.14	16.14	16.14	16.18	16.18	16.18	16.22	16.26	16.26	16.30	16.30	16.30	16.30	16.30
16.34	16.34	16.34	16.38	16.38	16.38	16.38	16.38	16.38	16.42	16.42	16.42	16.42	16.42	16.46
16.46	16.46	16.50	16.50	16.54	16.54	16.54	16.58	16.62	16.66	16.70	16.74	16.78	16.82	16.86
16.90														

若僅考慮不確定度的 A 類評估，根據這些資料，試回答下列問題：

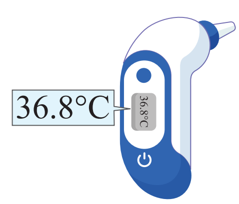
(1) 測量的 A 類不確定度為 <u>0.027</u> mm。

(2) 測量的最佳估計值為 <u>15.910</u> mm。

(3) 此次測量結果，白板筆的直徑應表示為 <u>(15.910±0.027) mm</u>。

1. 解析詳見解答本。

概念 不確定度的 B 類評估



2. 維妮感覺身體不舒服，因此拿出耳溫槍量測體溫，結果顯示的溫度是 36.8°C。她查了說明書，得知此溫度計的最小刻度為 0.1°C，則她的體溫應記為 <u>(36.800±0.029)°C</u>。

2. B 類不確定度 $u_B(X)=\dfrac{0.1}{2\sqrt{3}}=0.028867\cdots\approx 0.029$°C，故應記為 (36.800±0.029)°C。

1-2 不確定度的組合

一 同時存在A類與B類的不確定度

1. 若測量時同時存在 A 類與 B 類的不確定度，根據 ISO-GUM 評估準則，其組合不確定度可表示為 $u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}$
2. 此式推導雖然遠超出高中程度，但就跟在直角坐標系中計算距離的公式類似，有異曲同工之妙。

範例 1 組合不確定度

如圖所示，徐同學利用最小刻度為 1cm 的直尺，測量他的手機長度。他測量 4 次，所得數據如表所示：

第 1 次 (cm)	第 2 次 (cm)	第 3 次 (cm)
14.8	14.5	14.1
第 4 次 (cm)	平均值 $\bar{x}$(cm)	標準差 s(cm)
14.9	14.575	0.3594

(1) 此次測量的 A 類不確定度為 __0.18__ cm。
(2) 此次測量的 B 類不確定度為 __0.29__ cm。
(3) 此次測量結果的組合不確定度為 __0.35__ cm，測量值應表示為 __(14.58±0.35)__ cm。

解 (1) $u_A=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.3594}{\sqrt{4}}=0.1797\,(\text{cm})\approx 0.18\,(\text{cm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

(2) $u_B=\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=0.28867\cdots\approx 0.29\,(\text{cm})$ ←以無條件進位法保留 2 位有效數字。

(3) 組合不確定度 $u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{0.18^2+0.29^2}$
$=0.3413\approx 0.35\,(\text{cm})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。
⇒ 最佳估計值 $=14.58\,(\text{cm})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。
⇒ 測量結果 $=(14.58\pm 0.35)\text{cm}$。

馬解 (1) $u_A=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.2754}{\sqrt{4}}=0.1377\,(\text{gw})\approx 0.14\,(\text{gw})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

(2) $u_B=\dfrac{\text{最小刻度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=0.28867\cdots\approx 0.29\,(\text{gw})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。

(3) 組合不確定度 $u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{0.14^2+0.29^2}=0.32202\cdots\approx 0.33\,(\text{gw})$ ←以無條件進位法，保留 2 位有效數字。
⇒ 最佳估計值 $=187.63\,(\text{gw})$ ←以四捨五入法，將 $\bar{x}$ 保留到與不確定度的末位一致。
⇒ 測量結果 $=(187.63\pm 0.33)\text{gw}$。

馬上練習 1

承範例 1，徐同學也想知道手機的重量，利用最小刻度為 1gw 的彈簧秤，測量手機的重量。他測量 4 次，所得數據如表所示：

第 1 次 (gw)	第 2 次 (gw)	第 3 次 (gw)	第 4 次 (gw)	平均值 $\bar{x}$(gw)	標準差 s(gw)
187.3	187.9	187.5	187.8	187.625	0.2754

(1) 此次測量的 A 類不確定度為 <u>0.14</u> gw。
(2) 此次測量的 B 類不確定度為 <u>0.29</u> gw。
(3) 此次測量結果的組合不確定度為 <u>0.33</u> gw，測量值應表示為 <u>(187.63±0.33)</u> gw。

二 物理量加減後的不確定度

1. 物理量相加後的不確定度

若獨立測量物理量 x、y 後，加總所得的物理量為 $z=x+y$，根據 ISO-GUM 評估準則：

(1) 不確定度 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。
(2) 最佳估計值 $Z=X+Y$，其有效位數的取法，則需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算。
(3) 測量結果 $=(X+Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。

2. 物理量相減後的不確定度

若獨立測量物理量 x、y 後，加總所得的物理量為 $z=x-y$，根據 ISO-GUM 評估準則：

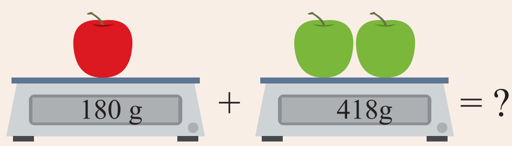
(1) 不確定度 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$（與加法相同）。
(2) 最佳估計值 $Z=X-Y$，其有效位數的取法，則需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算。
(3) 測量結果 $=(X-Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。

範例 2 相加後的不確定度

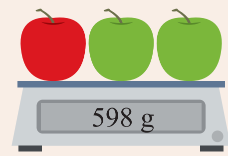
小張利用最小刻度是 1 g 的電子秤，以下列二種方法測量媽媽剛買回家的一顆紅蘋果和兩顆青蘋果之總質量。

方法一：分別對紅蘋果與青蘋果的質量，進行獨立的測量（兩次的測量沒有相關性），測得紅蘋果的質量為 180 g，而兩顆青蘋果的質量共為 418 g，如圖 (a) 所示（經多次測量所得數據皆相同）。

方法二：將三顆蘋果一起測量，經多次測量電子秤顯示的讀數皆為 598 g，如圖 (b) 所示。



▲圖 (a)　方法一



▲圖 (b)　方法二

(1) 方法一所得之蘋果總質量的不確定度為 __0.41__ g，最佳估計值為 __598.00__ g，此次測量結果，蘋果的總質量應表示為 __(598.00±0.41)g__。

(2) 方法二所得之蘋果總質量的不確定度為 __0.29__ g，最佳估計值為 __598.00__ g，此次測量結果，蘋果的總質量應表示為 __(598.00±0.29)g__。

(3) 你認為「方法一：將三顆蘋果分二次測量」和「方法二：將三顆蘋果一起測量」，何種方式的測量品質比較好？試簡述其理由。

解 (1) ① $\begin{cases} \text{經多次測量所得數據皆相同} \Rightarrow u_A=0 \\ u_B=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=0.28867\cdots\approx 0.29\text{ g} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 組合不確定度 $u=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}=\sqrt{0^2+0.29^2}=0.29\,(\text{g})$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{紅蘋果 } u(X)=0.29\text{ g} \\ \text{青蘋果 } u(Y)=0.29\text{ g} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 質量總和的不確定度為 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}=\sqrt{0.29^2+0.29^2}=0.4101\cdots\text{g}\approx 0.41\text{ g}$。

（雖然採用無條件進位法，但 2 位有效數字的下一位數為零時，應該捨去）

② 質量總和 $Z=X+Y=180+418=598\,(\text{g})$。此處最佳估計值需補二位零，如此才會與不確定度的末位一致，故最佳估計值為 $Z=598.00\,(\text{g})$。

③ 測量結果應寫成 (598.00 ± 0.41) g。

(2) ① $\begin{cases} \text{經多次測量所得數據皆相同} \Rightarrow u_A=0 \\ u_B=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=0.28867\cdots\approx 0.29\text{ g} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 組合不確定度 $u=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}=\sqrt{0^2+0.29^2}=0.29\,(\text{g})$

② 最佳估計值需補二位零，如此才會與不確定度的末位一致，故最佳估計值為 $Z=598.00\,(\text{g})$。

③ 測量結果應寫成 (598.00 ± 0.29) g。

(3) 以方法二（將三顆蘋果一起測量）的品質比較好，因為其質量總和的不確定度較小。

馬解 (A) ×：方法一中，測量一樓與二樓皆為 $u_A=0$、$u_B=\dfrac{0.1}{2\sqrt{3}}=0.028867\cdots\approx 0.029$ cm

$\Rightarrow$ 組合不確定度皆為 $u=\sqrt{{u_A}^2+{u_B}^2}=\sqrt{0^2+0.029^2}=0.029\,(\text{cm})$

$\Rightarrow \begin{cases}\text{一樓的高度測量結果}=(360.600\pm 0.029)\text{ cm}\\ \text{二樓的高度測量結果}=(320.200\pm 0.029)\text{ cm}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 一、二樓的總高度的組合不確定度 $=\sqrt{0.029^2+0.029^2}=0.04101\cdots\approx 0.041$ cm。

(B) ○：承 (A) 可得：一、二樓的總高度 $=(360.600+320.200)\pm 0.041$
$=(680.800\pm 0.041)$ cm。

(C) ○：方法二中，$u_A=0$、$u_B=\dfrac{0.1}{2\sqrt{3}}=0.028867\cdots\approx 0.029$ cm

$\Rightarrow$ 組合不確定度為 $u=\sqrt{{u_A}^2+{u_B}^2}=\sqrt{0^2+0.029^2}=0.029\,(\text{cm})$

(D) ×：承 (C) 可得：一、二樓總高度的測量結果 $=(680.800\pm 0.029)$ cm

(E) ×：以方法二的測量方法較好，因為其總高度的不確定度較小。

馬上練習2

小因使用最小刻度為 0.1 cm 的雷射數位測距儀，測量某兩層樓透天厝的高度，他以下列二種方法測量：

方法一：先測得一樓的高度為 360.6 cm、再測得二樓的高度為 320.2 cm，最後把兩次測量結果相加得到透天厝一、二樓的總高度（經多次測量所得數據皆相同）。

方法二：直接測量一、二樓的總高度為 680.8 cm（經多次測量所得數據皆相同）。

則下列敘述，哪些正確？

(A) 方法一所得之一、二樓總高度的不確定度為 0.029 cm
(B) 方法一所得之一、二樓總高度應表示為 (680.800 ± 0.041) cm
(C) 方法二所得之一、二樓總高度的不確定度為 0.029 cm
(D) 方法二所得之一、二樓總高度應表示為 (680.800 ± 0.041) cm
(E) 兩種測量方法相比較，以方法一的測量方法較好。

答 BC

三 物理量相乘除後的不確定度

1. 相對不確定度

(1) 兩個物理量相乘除後的不確定度，引入「相對不確定度」來處理。當物理量 $z=xy$ 或 $z=\dfrac{x}{y}$ 時，z 的相對不確定度定義為 $\dfrac{u(Z)}{|Z|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$，式中使用絕對值 $|Z|$ 可讓相對不確定度恆為正。

(2) 將上式交叉相乘，可得物理量相乘除後的組合不確定度 $u(Z)=|Z|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$

2. 物理量相乘後的不確定度

(1) 當物理量 $z=xy$ 時，z 的相對不確定度為 $\dfrac{u(Z)}{|XY|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$

$\Rightarrow$ 物理量相乘後的組合不確定度 $u(Z)=|XY|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}$。

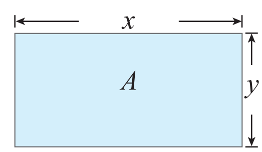
(2) 最佳估計值 $Z=XY$，其有效位數通常以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊。

(3) 測量結果 $=XY\pm u(Z)$。

【註：相乘或相除後的不確定度計算極為繁複，高中生學習的重點在於了解其精神即可，建議計算時可透過電腦或計算機】

實例說明

小騰想要測量物理筆記本的面積 A，其寬度 x、長度 y，如圖所示。小騰所得長度與寬度測量結果如下表所示。



物理量	最佳估計值	組合不確定度	測量結果表示
寬度	$X=20.00$ cm	$u(X)=0.10$ cm	(20.00 ± 0.10) cm
長度	$Y=10.00$ cm	$u(Y)=0.20$ cm	(10.00 ± 0.20) cm

(1) $\begin{cases} XY=20.00\times10.00=200.00 \\ \dfrac{u(X)}{X}=\dfrac{0.10}{20}=0.005 \\ \dfrac{u(Y)}{Y}=\dfrac{0.20}{10}=0.02 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 不確定度 $u(A)=200.00\times\sqrt{(0.005)^2+(0.02)^2}=4.1231\cdots(\text{cm}^2)$

※ 或直接利用 $u(A)=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}=\sqrt{10.00^2\times0.10^2+20.00^2\times0.20^2}$ $=4.1231\cdots(\text{cm}^2)$，以無條件進位法，僅保留 2 位有效數字，故 $u(A)=4.2\ \text{cm}^2$。

(2) 最佳估計值 $A=XY=200.00\ \text{cm}^2$，以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊，故取 $A=200.0\ \text{cm}^2$。

(3) 測量結果應表示為 $(200.0\pm4.2)\ \text{cm}^2$。

3. 物理量相除後的不確定度

(1) 當物理量 $z=\dfrac{x}{y}$ 時，z 的相對不確定度為 $\dfrac{u(Z)}{\left|\dfrac{X}{Y}\right|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$。

$\Rightarrow$ 物理量相除後的組合不確定度 $u(Z)=\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{Y^2}+\dfrac{X^2u(Y)^2}{Y^4}}$

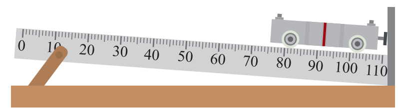
（與乘法不同）。

(2) 最佳估計值 $Z=\dfrac{X}{Y}$，其有效位數通常以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊。

(3) 測量結果 $=\dfrac{X}{Y}\pm u(Z)$。

實例說明

在實驗室中，我們只要將平面傾斜一個特定角度，便可讓滑車在此平面作等速運動，如圖所示。小龍已調整正確角度，讓滑車作等速運動。他想測量此時滑車的速度，分別測量了位移量值 x 及時間 t，測量結果如下表所示。



物理量	最佳估計值	不確定度	測量結果表示
位移量值	$X=100.0$ cm	$u(X)=2.0$ cm	(100.0 ± 2.0) cm
時間	$T=10.00$ s	$u(T)=0.10$ s	(10.00 ± 0.10) s

(1) $\begin{cases}\dfrac{X}{T}=\dfrac{100.0}{10.00}=10.0\\[2mm]\dfrac{u(X)}{X}=\dfrac{2.0}{100.0}=0.020\\[2mm]\dfrac{u(T)}{T}=\dfrac{0.10}{10.00}=0.01\end{cases}$

$\Rightarrow$ 不確定度 $u(V)=10.0\times\sqrt{(0.020)^2+(0.01)^2}=0.2236\cdots(\text{cm/s})$

※ 或直接利用 $u(V)=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{T^2}+\dfrac{X^2u(T)^2}{T^4}}=\sqrt{\dfrac{(2.0)^2}{(10.00)^2}+\dfrac{(100.0)^2(0.10)^2}{(10.00)^4}}=0.2236\cdots(\text{cm/s})$，

以無條件進位法，僅保留 2 位有效數字，故 $u(V)=0.23$ cm/s。

(2) 最佳估計值 $V=\dfrac{X}{T}=10.0$ cm/s，與不確定度的末位對齊，故補上一位零，

取 $V=10.00$ cm/s。

(3) 測量結果應表示為 (10.00 ± 0.23) cm/s。

段考基礎練習題

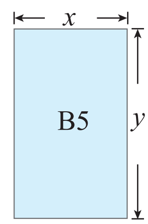
主題練習

概念 物理量加減後的不確定度

1. 小徐買了一臺鍵盤可和主機分離的變形筆電，以最小刻度為 0.1 g 的電子秤測其質量。單獨秤主機時，電子秤顯示的讀數為 790.0 g；單獨秤鍵盤時，電子秤顯示的讀數為 310.0 g；（經多次測量所得數據皆相同）則：
   (1) 此次測量筆電質量總和的不確定度為 ＿0.041＿ g。
   (2) 此次測量筆電質量總和的最佳估計值為 ＿1100.000＿ g。
   (3) 此次測量結果，筆電的總質量應表示為 ＿(1100.000±0.041) g＿。

1. 解析詳見解答本。

概念 物理量相乘除後的不確定度



2. 常用的 B5 紙張，其規格如圖所示。小騰想要測量 B5 紙張的面積，其對長度 y 與寬度 x 的測量結果如下表所示。則：

物理量	最佳估計值	組合不確定度	測量結果表示
寬度	$X=18.25$ cm	$u(X)=0.10$ cm	(18.25 ± 0.10) cm
長度	$Y=25.50$ cm	$u(Y)=0.20$ cm	(25.50 ± 0.20) cm

   (1) 此次面積測量的不確定度為 ＿4.5＿ cm^2。
   (2) 此次面積測量的最佳估計值為 ＿465.4＿ cm^2。
   (3) 測量結果應表示為 ＿(465.4 ± 4.5) cm^2＿。

2. 解析詳見解答本。

基礎大考試題

＿E＿ 3. 珠寶商使用最小刻度為 1 mg 的電子秤測量金飾質量 5 次，求得平均值為 m_{av}，標準差為 SD。若以 u_A、u_B 與 u_C 分別代表標準的 A 類、B 類與組合不確定度，且已知分析過程計算機顯示 m_{av} 為 95.367823 g、u_C 為 0.35686524 mg，則下列選項何者正確？
(A) $u_A=\dfrac{SD}{4}$ (B) $u_B=1$ mg (C) $u_C=\dfrac{(u_A+u_B)}{2}$
(D) 金飾質量的報告應為 $m_{av}=95.4$ g，$u_C=0.4$ mg
(E) 金飾質量的報告應為 $m_{av}=95.36782$ g，$u_C=0.36$ mg。 〈112分科，答對率38%〉

3. (A) ×：$u_A=\dfrac{SD}{\sqrt{n}}=\dfrac{SD}{\sqrt{5}}$。(B) ×：$u_B=\dfrac{最小刻度}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ mg ≈0.29 mg。(C) ×：$u_C=\sqrt{u_A^{\,2}+u_B^{\,2}}$。
(D) ×、(E) ○：金飾質量的報告中，u_C 應以無條件進位法取 2 位有效數字，
故 $u_C=0.36$ mg $=0.00036$ g；m_{av} 應以四捨五入法取至與 u_C 末位一致，故 $m_{av}=95.36782$ g。

分科測驗進攻題

解題影音

進階大考試題

__C__ 1. 在研究浮體時，同學推測圓柱浮體能否穩定維持直立，與密度有關。故決定先測量圓柱體的體積，而以同一根米尺對圓柱體的直徑與高度各測量 4 次，結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、標準差平方與 $\frac{1}{12}$。

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	標準差平方	$\frac{1}{12}$
直徑 (mm)	121.2	121.5	121.0	121.9	121.400	0.1533333	0.083333
高度 (mm)	100.0	100.8	100.4	101.2	100.600	0.2666667	0.083333

若以下各測量值括弧內 ± 號後的數字代表組合不確定度，則下列敘述何者正確？
(A) 直徑的測量值為 (121.4±0.2) mm (B) 直徑的測量值為 (121.4±0.5) mm
(C) 高度的測量值為 (100.60±0.39) mm (D) 高度的測量值為 (100.60±0.26) mm
(E) 圓柱體體積的組合不確定度等於高度與直徑兩者之組合不確定度的和。

〈111分科，答對率24%〉

1. A 類不確定度 $u_A=\frac{s}{\sqrt{N}}$，B 類不確定度 $u_B=\frac{最小刻度}{2\sqrt{3}}$，由表格中的測量值皆到 mm 下一位，可知米尺的最小刻度為 1mm

⇒ 測量的組合不確定度 $u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{(\frac{s}{\sqrt{N}})^2+(\frac{1}{2\sqrt{3}})^2}=\sqrt{\frac{s^2}{N}+\frac{1}{12}}$

(A) (B)×：直徑的組合不確定度

$u=\sqrt{\frac{0.1533333}{4}+0.083333}\approx0.35$（以無條件進位法，保留 2 位有效數字）

⇒ 測量值為 (121.40±0.35)mm。

(C) ○、(D)×：高度的組合不確定度

$u'=\sqrt{\frac{0.2666667}{4}+0.083333}\approx0.39$（以無條件進位法，保留 2 位有效數字）

⇒ 測量值為 (100.60±0.39)mm。

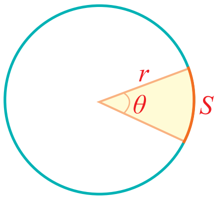
(E) ×：圓柱體體積 = 底面積 × 高，設底面積與高的最佳估計值分別為 X、Y，則圓柱體體積的組合不確定度

$u''=|XY|\sqrt{\frac{u(X)^2}{X^2}+\frac{u(Y)^2}{Y^2}}$ ≠高度與直徑兩者之組合不確定度的和。

1-3 物理量的因次

一 因次

1. 通常描述一個物理量需包含量值和單位兩部分，量值的多寡和所使用的單位有關。例如物理老師身高 172 公分，也可以表達為 1.72 公尺，像這種描述相同物理量但使用不同單位，我們稱它們都具有相同的因次。
2. 不管使用公分、公尺、公里甚至光年當單位，它們所代表的物理量都是長度，因此我們說它們有相同的長度因次。同理，所有的質量單位，例如公斤、公克、毫克等也具有相同的質量因次；而所有的時間單位，例如秒、月、季等，也具有相同的時間因次。
3. 所有的物理量都有因次嗎？當然不是，如圖所示，角度的定義為其所張的弧長除以半徑長 ($\theta=\dfrac{S}{r}$)，而弧長及半徑長均為長度，故兩者相除後無因次。又如物質比重的定義為：物質和水同體積時，該物質和水兩者質量（或重量）的比值，亦為沒有因次的物理量。



角度$\theta=\dfrac{S}{r}$

二 物理量的因次表示法

1. 力學的三個基本量

(1) 物理量可分為基本量和導出量兩種。

(2) 在力學中以長度、時間、質量來作為基本量，其因次分別表示為 L、T、M，稱為基本因次。力學中其他的物理量都可以由這三個基本量導出，其因次皆可表示為 $L^aM^bT^c$ 的冪次組合。

2. 導出量的因次

(1) 物理量的因次以 [ ] 來表記，例如位移的因次為 $[\Delta x]=L$。

(2) 物理學導出量的因次都可以用基本量的因次表示，因次與 SI 單位互相對應，例如：

① 速度 v 的定義為單位時間內之位移 $(\dfrac{\Delta x}{\Delta t})\Rightarrow$ SI 單位為 m/s $\Rightarrow [v]=$ ___LT^{-1}___。

② 加速度 a 的定義為單位時間內之速度變化量 $(\dfrac{\Delta v}{\Delta t})\Rightarrow$ SI 單位為 m/s^2

$\Rightarrow [a]=$ ___LT^{-2}___。

學測超連結 國際單位制（SI 制）

基本量	時間	長度	質量	電流	溫度	發光強度	物質量
單位符號	s	m	kg	A	K	cd	mol
單位（中文）	秒	公尺	公斤	安培	度	燭光	莫耳
單位（英文）	second	meter	kilogram	ampere	kelvin	candela	mole

範例 1 導出量的因次

(1) 功的因次 $[W]=$ $\underline{\ ML^2T^{-2}\ }$ 。
(2) 力矩的因次 $[\tau]=$ $\underline{\ ML^2T^{-2}\ }$ 。
(3) 因次相同時，是否必為相同的物理量？答 $\underline{\ 否\ }$

解 (1) 由 $W=F\times S\Rightarrow$ 功的 SI 單位為 $\mathrm{N\cdot m=kg\cdot\dfrac{m}{s^2}\cdot m=kg\cdot\dfrac{m^2}{s^2}}\Rightarrow[W]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$。

(2) 由 $\tau=$ 力 $\times$ 力臂 $\Rightarrow$ 力矩的 SI 單位為 $\mathrm{N\cdot m=kg\cdot\dfrac{m}{s^2}\cdot m=kg\cdot\dfrac{m^2}{s^2}}\Rightarrow[\tau]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$。

(3) 因次相同時，物理量可能不同。例如第 (1)(2) 小題的因次皆為 $\mathrm{ML^2T^{-2}}$，但分別是功與力矩，是不同的物理量。

馬解 (1) 由 $F=ma\Rightarrow$ 力的 SI 單位為 $\mathrm{kg\cdot m/s^2}\Rightarrow[F]=\mathrm{MLT^{-2}}$。

(2) 由 $K=\dfrac{1}{2}mv^2\Rightarrow$ 動能的 SI 單位為 $\mathrm{kg\cdot(\dfrac{m}{s})^2=kg\cdot\dfrac{m^2}{s^2}}\Rightarrow[K]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$。

(3) 由 $U=mgh\Rightarrow$ 位能的 SI 單位為 $\mathrm{kg\cdot\dfrac{m}{s^2}\cdot m=kg\cdot\dfrac{m^2}{s^2}}\Rightarrow[U]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$。

馬上練習 1

(1) 力的因次 $[F]=$ $\underline{\ MLT^{-2}\ }$ 。
(2) 動能的因次 $[K]=$ $\underline{\ ML^2T^{-2}\ }$ 。
(3) 重力位能的因次 $[U]=$ $\underline{\ ML^2T^{-2}\ }$ 。

三 因次分析法

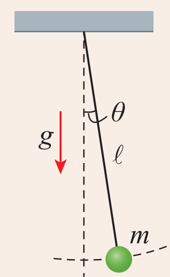
1. 因次可用來檢驗物理方程式是否合理，正確的方程式中之每一項必定具有相同的因次。例如下表所示的等加速度運動末速公式。

公式	v	$=$	v_0	$+$	at
單位	m/s		m/s		$(\mathrm{m/s^2})\cdot\mathrm{s}=\mathrm{m/s}$
因次	$\mathrm{LT^{-1}}$		$\mathrm{LT^{-1}}$		$\mathrm{LT^{-1}}$

2. 因此，我們常常可以利用因次分析來判斷計算的結果是否正確？也可以利用因次分析來推求數個物理量之間的關係。

範例 2 因次分析法

如圖所示的單擺，已知作小角度擺動時，其週期與擺角 θ 無關，故可合理推論單擺週期 T 可能與擺長 ℓ、擺錘質量 m 及重力加速度 g 有關，設 $T=k\ell^a m^b g^c$（k 為一無因次的比例常數）的關係式，試應用物理量的因次分析，找出 a、b、c 的值，進而得到正確的關係式。



解 g 為重力加速度，SI 單位為 $\mathrm{m/s^2}\Rightarrow[g]=\mathrm{LT^{-2}}$。

由 $T=k\ell^a m^b g^c$，其中 k 為無因次的常數，左右兩邊的因次需相同

$\Rightarrow[T]=\mathrm{L}^a\mathrm{M}^b\cdot(\mathrm{LT^{-2}})^c=\mathrm{M}^b\mathrm{L}^{a+c}\mathrm{T}^{-2c}$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ a+c=0\\ -2c=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}、b=0、c=-\frac{1}{2}$$

即 $T=k\ell^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}=k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$。

馬解 ※ 法 1

聲速 v 的因次 $[v]=LT^{-1}$ ⇒ 因次為 LT^{-1} 的選項即為可能的答案。

(A) ○：$d\sqrt{\frac{k}{m}}$ 的 SI 單位為 $m\sqrt{\frac{\frac{kg}{s^2}}{kg}}=\frac{m}{s}$ ⇒ 因次為 LT^{-1}。

(B) ×：$d\sqrt{mk}$ 的 SI 單位為 $m\sqrt{kg\cdot\frac{kg}{s^2}}=\frac{m\cdot kg}{s}$ ⇒ 因次為 MLT^{-1}。

(C) ×：$\sqrt{\frac{dm}{k}}$ 的 SI 單位為 $\sqrt{\frac{m\cdot kg}{\frac{kg}{s^2}}}=s\sqrt{m}$ ⇒ 因次為 $TL^{\frac{1}{2}}$。

(D) ×：$\frac{dk}{m}$ 的 SI 單位為 $\frac{m\cdot\frac{kg}{s^2}}{kg}=\frac{m}{s^2}$ ⇒ 因次為 LT^{-2}。

(E) ×：$\frac{mk}{d}$ 的 SI 單位為 $\frac{kg\cdot\frac{kg}{s^2}}{m}=\frac{kg^2}{m\cdot s^2}$ ⇒ 因次為 $M^2L^{-1}T^{-2}$。

※ 法 2

聲速 v 的因次 $[v]=LT^{-1}$，設 v 為 $m^a d^b k^c$，k 為彈性常數，SI 單位為 kg/s^2 ⇒ $[k]=MT^{-2}$，左右兩邊的因次需相同

$$\Rightarrow [v]=LT^{-1}=M^aL^b\cdot(MT^{-2})^c=M^{a+c}L^bT^{-2c}\Rightarrow\begin{cases}a+c=0\\b=1\\-2c=-1\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}、b=1、c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v=m^{-\frac{1}{2}}\times d^1\times k^{\frac{1}{2}}=d\sqrt{\frac{k}{m}}。$$

馬上練習 2

欲了解聲波如何在金屬中傳播，可利用簡化的一維模型：將金屬原子視為質量 m 的小球，以間距 d 排列成一直線，且相鄰兩個小球間以彈性常數 k 的彈簧連結，藉以模擬原子間的作用力。在此簡化模型的假設下，應用因次分析來判定，下列何者可能為金屬中的聲速？

(A) $d\sqrt{\frac{k}{m}}$ (B) $d\sqrt{mk}$ (C) $\sqrt{\frac{dm}{k}}$ (D) $\frac{dk}{m}$ (E) $\frac{mk}{d}$。 〈105指考，答對率58%〉

答 A

段考基礎練習題

主題練習

概念　因次表示法

1. 試完成下表：

物理量	SI 單位	因次
密度 D	kg/m^3	ML^{-3}
速率 V	m/s	LT^{-1}
壓力 P	N/m^2	$ML^{-1}T^{-2}$

1. 解析詳見下方。

2. 重力常數 G 的因次 $[G]=$ ＿$M^{-1}L^3T^{-2}$＿。

2. 由 $F=ma\Rightarrow$ 力的 SI 單位為 $kg\cdot m/s^2\Rightarrow[F]=MLT^{-2}$。

再由 $F=\dfrac{GmM}{r^2}\Rightarrow G=\dfrac{Fr^2}{mM}\Rightarrow[G]=\dfrac{MLT^{-2}\cdot L^2}{M^2}=M^{-1}L^3T^{-2}$。

＿C＿ 3. 下列關於因次的敘述，何者是正確的？

(A) 兩個相同因次的物理量，必定有相同的物理意義

(B) 不同因次的物理量間可以進行加或減的運算

(C) 不同因次的物理量間可以進行乘或除的運算

(D) 等式兩邊的物理量，可能具有不同的因次

(E) 公斤和公斤重具有相同的因次。

3. (A) ×：不一定相同，例如長度和位移的因次都是 L，但其物理意義不同。
(B) ×、(C) ○：不同因次間不可以相加減，但可進行乘或除的運算。
(D) ×：等式兩邊的物理量，一定要有相同的因次。
(E) ×：公斤是質量的單位，公斤重是力的單位，故其因次不同。

基礎大考試題

＿C＿ 4. 假設在水波槽中，與水波波速可能有關的物理量為重力加速度 g、水的密度 ρ 與水深 D。若僅以上述三個物理量的因次來判斷波速 v，則下列何者正確？

(A) v 正比於 gD　(B) v 正比於 ρgD　(C) v 正比於 $\sqrt{gD}$　(D) v 正比於 $g\sqrt{\rho D}$

(E) v 正比於 $\dfrac{1}{\sqrt{gD}}$。

〈110指考，答對率56%〉

4. 解析詳見解答本。

1. (1) 由 $D=\dfrac{M}{V}\Rightarrow$ 密度的 SI 單位為 $kg/m^3\Rightarrow[D]=ML^{-3}$。

(2) 由 $V=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}\Rightarrow$ 速率的 SI 單位為 $m/s\Rightarrow[V]=LT^{-1}$。

(3) 由 $P=\dfrac{F}{A}\Rightarrow$ 壓力的 SI 單位為 $N/m^2=\dfrac{kg\cdot m/s^2}{m^2}=\dfrac{kg}{m\cdot s^2}\Rightarrow[P]=ML^{-1}T^{-2}$。

分科測驗進攻題

＊為多選題

解題影音

進階試題

D 1. 設甲、乙兩個行星同繞太陽在同一平面上作等速圓周運動，且繞行方向相同，週期分別為 T_1 及 T_2，其中 $T_2 > T_1$。則每隔多久時間，兩行星將交會一次（與太陽連成一直線）？

(A) $\dfrac{T_2+T_1}{T_2-T_1}$ (B) $\dfrac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$ (C) $\dfrac{T_2-T_1}{T_2T_1}$ (D) $\dfrac{T_2T_1}{T_2-T_1}$ (E) $\dfrac{T_2}{T_2-T_1}$。

⑴ 試用因次分析法判斷出答案。

⑵ 以數學方法算出答案。

1. ⑴ (A) ×：$\dfrac{T_2+T_1}{T_2-T_1}$ ⇒ 因次為 $[\dfrac{T}{T}]$ ⇒ 無因次。(B) ×：$\dfrac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$ ⇒ 因次為 $[\dfrac{T}{T}]$ ⇒ 無因次。

(C) ×：$\dfrac{T_2-T_1}{T_2T_1}$ ⇒ 因次為 $[\dfrac{T}{T^2}]=[T]^{-1}$。(D) ○：$\dfrac{T_2T_1}{T_2-T_1}$ ⇒ 因次為 $[\dfrac{T^2}{T}]=[T]$。

(E) ×：$\dfrac{T_2}{T_2-T_1}$ ⇒ 因次為 $[\dfrac{T}{T}]$ ⇒ 無因次。

⑵ 甲、乙從某次交會結束到下一次交會，甲會比乙多繞一圈。設需時 t，則甲共繞了 $\dfrac{t}{T_1}$ 圈，乙共繞了 $\dfrac{t}{T_2}$ 圈，故其關係式為 $\dfrac{t}{T_1}-\dfrac{t}{T_2}=1 \Rightarrow t=\dfrac{T_2T_1}{T_2-T_1}$。

素養題　測量方法與不確定度

由於紙張很薄，通常厚度都小於 1 mm，因此臺灣的印刷業採用一種特殊的長度單位－「條」來表示紙張厚度，以避免太多小數點造成的不方便，而 1 條 = 0.01 mm。

至於怎麼測量紙張的厚度呢？我們可以使用如圖所示的厚薄規（俗稱量紙器）。運用量紙器的指針即可量出條數，例如若指針指在刻度 11 處，代表該紙張的厚度為 11 條 = 11×0.01 mm = 0.11 mm。

一般的影印紙厚度約 0.07 mm，小玉到文具店買了較一般影印紙厚的噴墨印表機專用紙，廠商在包裝上號稱該紙張的厚度為 0.15 mm。為了驗證廠商的標示是否屬實，小玉決定用量紙器來測量紙張的厚度。

首先，小玉一次測量 1 張紙的厚度，數據如下表：

次數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次
紙張厚度 (mm)	0.154	0.144	0.148	0.151	0.149	0.153	0.148	0.149	0.152

上述數據處理後可得：平均值為 0.14978 mm，而標準差約為 0.00307 mm。

小玉又想到一個方法，一次測量 10 張紙的厚度，再算出 1 張紙張的厚度，數據如下表：

次數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次
10 張紙的厚度 (mm)	1.520	1.490	1.520	1.540	1.480	1.500	1.520	1.480	1.540
1 張紙的厚度 (mm)	0.152	0.149	0.152	0.154	0.148	0.150	0.152	0.148	0.154

上述數據處理後可得：1 張紙厚度的平均值為 0.151 mm，而標準差約為 0.00235 mm。

原來運用相同的測量工具，使用不同的測量設計，也可以有效降低測量的不確定度呢！

根據上述資料，僅考慮不確定度的 A 類評估，試回答下列問題：　【混合題】

*＿ACE＿ 1. 小玉以量紙器測量面紙厚度，刻度如右圖所示，則面紙的厚度約為多少？

(A) 11 條　(B) 1.1 mm　(C) 0.11 mm　(D) 11 μm　(E) 110 μm。

1. 指針指向第 11 刻度，故面紙厚度約 11 條 $=11\times0.01$ mm $=0.11$ mm $=0.11\times10^3$ μm $=110$ μm。

E 2. 小玉每次測量 1 張紙厚度的實驗方法，下列何者為其測量結果的正確且最佳表示法？
(A) (0.15±0.001023) mm (B) (0.150±0.001) mm (C) (0.1500±0.0010) mm
(D) (0.14978±0.0011) mm (E) (0.1498±0.0011) mm。

2. $u_A=\dfrac{0.00307}{\sqrt{9}}\approx 0.00102\,(\mathrm{mm})$，無條件進位取 2 位有效數字得 0.0011 mm，再以四捨五入法將 $\bar{x}$ 保留到與 u_A 的末位一致，即 $\bar{x}$ 取 0.1498 mm，故紙張厚度的測量值為 (0.1498±0.0011) mm。

3. 你認為利用哪一種方法的測量結果比較好？廠商有沒有誇大之嫌呢？試簡述之。

3. ① 每次測量 10 張紙的方法，其 $u_A'=\dfrac{0.00235}{\sqrt{9}}\approx 0.000783\,(\mathrm{mm})$，無條件進位取 2 位有效數字得 0.00079 mm ＜ 0.0011 mm，可知同時測量 10 張紙的厚度，再求出每張紙厚度的不確定度較小，故其測量結果較好。
② 兩種方法所得的測量結果分別為 (0.1498±0.0011) mm 與 (0.15100±0.00079) mm，皆與廠商宣稱的厚度 0.15 mm 吻合，故廠商並沒有誇大紙張的厚度。

本章圖片來源

P11 電子秤、P12 捲尺與雷射測距儀、P13 耳溫計、P19 筆電、P24 量紙器 ／ Shutterstock 圖庫