Хаусхолдеров метод

Алгоритам за наоѓање корени на функции

Дарио Ѓорѓевски[1]
gjorgjevski.dario@students.finki.ukim.mk

[1]Факултет за компјутерски науки и инженерство
Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје

4 ноември 2017 год.

Содржина

Мотивација

Апроксимација на $(1/f)(x)$ со геометриски ред

Нека $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекинато диференцијабилна функција со корен со кратност 1 во $x = a$.
Со други зборови, $f(a) = 0$ и $f'(a) \neq 0$.
Ова значи дека $(1/f)(x)$ има пол со кратност 1 во $x = a$, и во околината на a се однесува како $1/(x-a)$.
Приближно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x) - f(a)} &= \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \frac{-1}{a(1-x/a)} \\ &\approx \frac{-1}{af'(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Мотивација

Наоѓање на a

Коефициентот пред x^d во (1) е Ca^{-d} $\Rightarrow$ вредноста на a можеме да ја добиеме така што коефициентот пред x^{d-1} ќе го поделиме со коефициентот пред x^d.

Клучна идеја

Геометрискиот ред од (1) дава апроксимација на Тајлоровата експанзија на $(1/f)(x)$ во околината на a. Ова ни овозможува да го апроксимираме a со делење на соодветните коефициенти во Тајлоровата експанзија на $(1/f)(b+x)$:

$$a \approx b + \frac{(1/f)^{(d-1)}(b)}{(d-1)!}\frac{d!}{(1/f)^{(d)}(b)} = b + d\frac{(1/f)^{(d-1)}(b)}{(1/f)^{(d)}(b)}.$$

Опис на Хаусхолдеровиот метод

Дефиниција (Хаусхолдеров метод од ред d)

Нека е дадена непрекинато диференцијабилна функција $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. За наоѓање на корен на f, вршиме низа итерации

$$x_{n+1} = x_n + d\frac{(1/f)^{(d-1)}(x_n)}{(1/f)^{(d)}(x_n)}, \tag{1}$$

почнувајќи од претпоставка x_0.

Доколку f е $(d+1)$ пат непрекинато диференцијабилна и a е корен со кратност 1, тогаш

$$|x_{n+1} - a| \leq K|x_n - a|^{d+1}, \text{ за некое } K > 0.$$

Врска со други методи

Хаусхолдеровиот метод е генерален; други методи се негови специјални случаи.

- Кога $d = 1$ го добиваме Њутн–Рафсоновиот метод:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(1/f)(x_n)}{(1/f)'(x_n)}$$
$$= x_n + \frac{1}{f(x_n)}\left(\frac{-f'(x_n)}{f(x_n)^2}\right)^{-1}$$
$$= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- Кога $d = 2$ го добиваме Халеевиот метод.

Содржина

Решавање на $y^3 - 2y - 5 = 0$

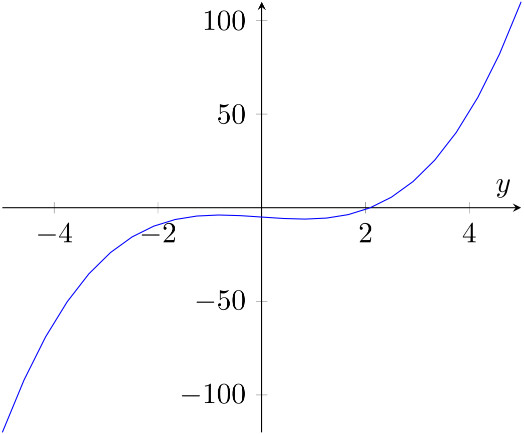
Употреба на Хаусхолдеровиот метод

Да претпоставиме дека сакаме да најдеме нула на равенката $y^3 - 2y - 5 = 0$. Графички можеме да забележиме дека една нула се наоѓа во околината на $y = 2$. Оттука, земајќи $y := x + 2$, равенката станува

$$0 = f(x) = -1 + 10x + 6x^2 + x^3. \tag{2}$$

Следен чекор е наоѓање на Тајлорова експанзија на $(1/f)(x)$ околу 0, каде што $f(x)$ е дадена со (2).

График на $y^3 - 2y - 5$



Тајлорова експанзија на $(1/f)(x)$

Лесно е да се пресмета дека ако $f(x) = -1 + 10x + 6x^2 + x^3$, тогаш Тајлоровата експанзија на $(1/f)(x)$ околу 0 е

$$\begin{aligned}(1/f)(x) = {} & -1 - 10x - 106x^2 - 1121x^3 - 11\,856x^4 \\ & -125\,392x^5 - 1\,326\,177x^6 - 14\,025\,978x^7 - 148\,342\,234x^8 \\ & -1\,568\,904\,385x^9 - 16\,593\,123\,232x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}).\end{aligned}$$

Примената на Хаусхолдеровиот метод од различен ред во $x = 0$ се сведува на делење соседни коефициенти во Тајлоровата експанзија.

Вредности на x_1 за различни редови на методот

d	x_1
1	0,100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
2	0,094 339 622 641 509 433 962 264 150 943 396
3	0,094 558 429 973 238 180 196 253 345 227 476
4	0,094 551 282 051 282 051 282 051 282 051 282
5	0,094 551 486 538 216 154 140 615 031 261 963
6	0,094 551 481 438 752 142 436 492 263 099 119
7	0,094 551 481 543 746 895 938 379 484 125 813
8	0,094 551 481 542 336 756 233 561 913 325 371
9	0,094 551 481 542 324 837 086 869 382 419 375
10	0,094 551 481 542 326 678 478 801 765 822 985

Експлицитни формули за x_{n+1} за пониски редови

Доколку наоѓаме изводи на $f(x)$, можеме да видиме дека

$$f'(x) = 10 + 12x + 3x^2$$
$$f''(x) = 12 + 6x$$
$$f'''(x) = 6.$$

Од друга страна, може да се изведат експлицитни формули за x_{n+1} за пониски редови:

- Кога $d = 1$, $x_{n+1} = x_n - f/f'$.
- Кога $d = 2$, $x_{n+1} = x_n + (-2ff')/(2f'^2 - ff'')$.
- Кога $d = 3$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{6ff'^2 - 3f^2f''}{6f'^3 - 6ff'f'' + f^2f'''}$.

Вредности на x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 за $d = 1$

x_n	Вредност
x_1	0,1
x_2	0,094 568 121 104 19
x_3	0,094 551 481 698 199 302 97
x_4	0,094 551 481 542 326 591 496 064 85
x_5	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31
x_6	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31

Вредности на x_2, x_3, x_4, x_5 за $d = 2$

x_n	Вредност
x_1	0,094 339 622 641 51
x_2	0,094 551 481 540 164 214 72
x_3	0,094 551 481 542 326 591 482 386 54
x_4	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 3
x_5	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 3

Вредности на x_2, x_3, x_4 за $d = 3$

x_n	Вредност
x_1	0,094 558 429 973 24
x_2	0,094 551 481 542 326 591 482 567
x_3	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31
x_4	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31

Содржина

Падеева апроксимација

Дефиниција (Падеева апроксимација)

За дадена функција f и два цели броја $m \geq 0$ и $n \geq 1$, *Падеева апроксимација* од ред $[m/n]$ е рационалната функција

$$R(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^{n} b_j x^j},$$

која со f „се согласува“ до највисок можен ред, односно $f^{(k)}(0) = R^{(k)}(0)$ за сите $0 \leq k \leq m + n$.

Bottom line: апроксимацијата може да се најде преку решавање систем равенки добиен од Тајлоровата експанзија на f околу 0.

Дефинирање на итерацијата

За да го изведеме Хаусхолдеровиот метод од ред d, ќе започнеме со Падеева апроксимација на $f(x+h)$ од ред $[1/(d-1)]$. Таа има облик

$$f(x+h) = \frac{a_0 + h}{b_0 + b_1 h + \cdots + b_{d-1} h^{d-1}} + \mathcal{O}(h^{d+1}). \tag{3}$$

Имено, знаеме дека $b_d = 0$. Итерацијата на Хаусхолдеровиот метод се добива преку наоѓање на нулата во $h = -a_0$.

Наоѓање на Падеевата апроксимација

Најлесен начин за наоѓање на потребната Падеева апроксимација е преку Тајлорова експанзија на $(1/f)(x+h)$ околу 0:

$$\begin{aligned}(1/f)(x+h) &= (1/f)(x) + (1/f)'(x)h + \dots \\ &\quad + (1/f)^{(d-1)}(x)\frac{h^{d-1}}{(d-1)!} + (1/f)^{(d)}(x)\frac{h^d}{d!}.\end{aligned} \tag{4}$$

Можеме да воочиме дека (4) треба да биде еднакво на реципрочната вредност на (3).

Наоѓање на нулата во $h = -a_0$

Користејќи ги својствата на Падеевата апроксимација, добиваме

$$0 = b_d = a_0 (1/f)^{(d)}(x) \frac{1}{d!} + (1/f)^{(d-1)}(x) \frac{1}{(d-1)!}.$$

Оттука веднаш се добива

$$h = -a_0 = d \frac{(1/f)^{(d-1)}(x)}{(1/f)^{(d)}(x)},$$

што ја дава итерацијата во Хаусхолдеровиот метод.

KPAJ

Прашања?