Вовед во R

Тестирање на статистички хипотези и линеарна регресија

Дарио Ѓорѓевски[1]
gjorgjevski.dario@students.finki.ukim.mk

[1]Факултет за компјутерски науки и инженерство
Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје

31 јануари 2017 год.

Содржина

χ^2-распределба

Дефиниција

Дефиниција (χ^2-распределба)

Нека $Z_1, \ldots, Z_\nu$ бидат независни и идентично распределени $\mathcal{N}(0, 1)$ случајни променливи. Тогаш,

$$Q := \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$$

има χ^2-распределба со ν степени на слобода,

$$Q \sim \chi^2_\nu.$$

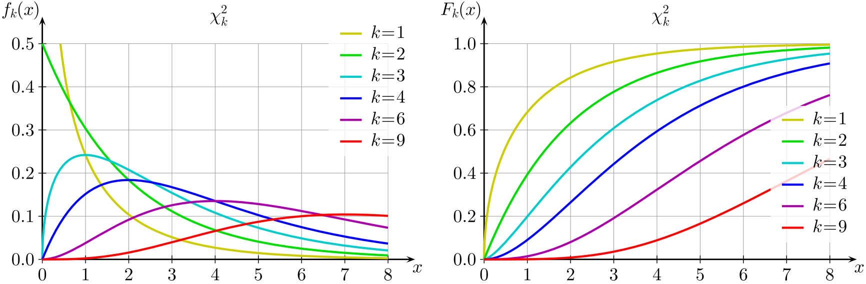
χ^2-распределбата е специјален случај на гама распределбата. Сепак, иако тој резултат е од теориска значајност, во статистиката не е многу корисен.

χ^2-распределба

pdf и CDF

Густината на χ^2_ν-распределбата е дадена со

$$p(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{x^{\nu/2-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} & x > 0 \\ 0 & \text{инаку.} \end{cases}$$



Слика: Густина и функција на распределба за χ^2_k.

χ^2-распределба

Значајност во статистиката

Де Муавр и Лаплас имаат покажано дека биномната распределба може да биде апроксимирана со нормална, т.е.

$$\chi := \frac{m - Np}{\sqrt{Npq}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

каде m е бројот на успеси во N обиди, p е веројатноста за успех и $q := 1 - p$. Ако ги кренеме двете страни на квадрат, добиваме

$$\chi^2 = \frac{(m - Np)^2}{Npq} = \frac{(m - Np)^2}{Np} + \frac{(N - m - Nq)^2}{Nq}. \tag{1}$$

Изразот даден со (1) ќе биде генрализиран од страна на Пирсон.

Теорема (Пирсонов χ^2-тест)

Нека n биде број на категории, O_i број на набљудувања од категорија i, а $E_i = Np_i$ очекуван број набљудувања од категорија i даден од нултата хипотеза за p_i. Тогаш статистиката

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

има χ^2-распределба со број на степени на слобода еднаков на бројот на оценети параметри.

Друг значаен резултат ја поврзува χ^2 распределбата со распределбата на дисперзијата на примерок од нормлана распределба.

Теорема (Својства на S^2 за примерок од $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ распределба)

Нека $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ биде случаен примерок од обележје $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Тогаш, $\bar{X}$ и S^2 се независни, и

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Преку оваа теорема и F-распределбата, χ^2-распределбата влегува во статистичките методи за анализа на дисперзија.

Дефиниција (t-распределба)

Нека $X_1, \ldots, X_n$ бидат независни и идентично распределени $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ случајни променливи. Тогаш, случајната променлива

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

има t-распределба со $\nu = n - 1$ степени на слобода.

Неформално, t-распределбата ја дава распределбата на μ во однос на $\bar{X}$, а поделено со стандардната девијација на примерокот и помножено со нормализирачка константа $\sqrt{n}$.

t-распределба

Проширување на дефиницијата

Знаеме дека за примерок од нормална распределба,

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} =: V \sim \chi^2_{n-1}, \text{ и}$$

$$(\bar{X}-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} =: Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Така, запишеме ако $\nu := n-1$,

$$T := \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} \sim t_\nu = \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}}.$$

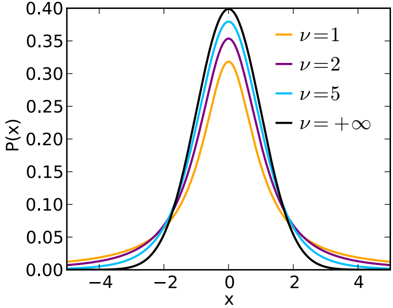
Во оваа форма t-распределбата се користи во тестови за просеци (t-тестови) како и во линеарната регресиона анализа.

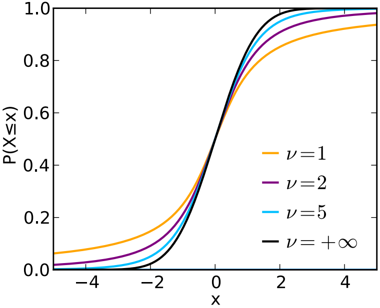
t-распределба
pdf и CDF

Густината на t-распределбата со ν степени на слобода е дадена со

$$p(x;\nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2},$$

каде $\Gamma(\cdot)$ е гама функцијата.





Слика: Густина и функција на распределба за t_ν.

Дефиниција (F-распределба)

F-распределбата се јавува како однос на две χ^2-распределби склаирани со соодветните степени на слобода. Имено, ако $U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$, $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$, и $U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$, тогаш

$$X := \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$$

има F-распределба со параметри (степени на слобода) ν_1 и ν_2.

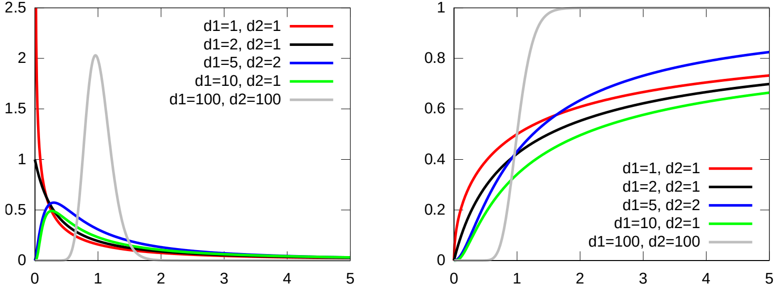
F-распределба

pdf и CDF

Густината на F-распределбата со параметри $\nu_1, \nu_2 > 0$ е дадена со

$$f(x; \nu_1, \nu_2) = \frac{\sqrt{\frac{(\nu_1 x)^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2}}{(\nu_1 x + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}}}{x \, \mathrm{B}(\nu_1/2, \nu_2/2)},$$

каде $\mathrm{B}(\cdot)$ е бета функцијата.



Слика: Густина и функција на распределба за F_{d_1,d_2}.

Видовме дека за примерок од нормална распределба, $S^2 \sim \frac{\sigma^2\chi^2_{n-1}}{n-1}$. Така, ако имаме примероци со големини m и n од независни обележја $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,

$$F \coloneqq \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{m-1,n-1}. \tag{2}$$

Оваа статистика ни дава основа за анализа на еднаквост на дисперзија на примероци од нормално распределени обежеја. Имено, ако нултата хипотеза е дека дисперзиите на двете обележја за еднакви, тогаш тие се кратат во (2).

Содржина

- t-тестови се тестови во кои тест статистиката има t-распределба под нултата хипотеза.
- Како што видовме, t-распределбата се јавува кога тест статистиката би имала нормална распределба доколку се знае вредноста на скалирачкиот параметар, обично σ^2.
- Кога скалирачкиот параметар се замени со неговата вредност од примерокот, се добива t-распределена статистика.
- Благодарение на CLT, t-статистиките се особено поволни за тестови поврзани со просекот на едно обележје, односно разлика на просеци на две обележја.

t-тест за просек на обележје

Дефиниција

- Примерок $(X_1, \ldots, X_n)$ од обележје со просек μ.
- Нултата хипотеза е од облик $\mu = \mu_0$, додека алтернативната е $\mu \neq \mu_0$, $\mu < \mu_0$, или $\mu > \mu_0$.
- t-статистиката е од облик

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

  Оваа статистика има t_{n-1} распределба кога
  - примерокот доаѓа од нормално обележје; или
  - примерокот е голем ($\bar{X}$ има асимптотски нормална распределба).
- Доколку p-вредноста на тестот е помала од нивото на значајност α, нултата хипотеза се отфрла.

t-тест за просек на обележје

Пример во R

Во R, сите t-тестови за просеци се вршат со функцијата `t.test`. Видовме дека `iris$Sepal.Length` има приближно нормална распределба. Па, ајде да провериме дали просекот е 5,85.

```
> # H_0: μ = 5,85,  H_a: μ ≠ 5,85.
> t.test(iris$Sepal.Length, mu=5.85,
+        alternative="two.sided", conf.level=0.95)   # α = 0,05.

data:  iris$Sepal.Length
t = -0.098603, df = 149, p-value = 0.9216  # Прифаќаме H_0.
alternative hypothesis: true mean is not equal to 5.85
95 percent confidence interval:
 5.709732 5.976934
sample estimates:
mean of x
 5.843333
```

t-тестови за разлика на просеци на две обележја

Дефиниција

t-тестовите може да се прошират и да тестираат за разлика на просеци на две обележја. Доколку обележјата се независни, важно е

- дали примероците се со иста големина; и
- дали може да се претпостави дека дисперзиите на обележјата се еднакви.

Доколку пак обележјата се зависни (*paired samples*), t-тестот станува поедноставен.
Во дефинициите кои следат, $(X_1, \ldots, X_m)$ и $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ќе бидат случајни примероци од обележја со просеци μ_X и μ_Y. Дополнително, $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ се (асимптотски) нормално распределени.

Доколку ја разгледуваме нултата хипотеза $\mu_X - \mu_Y = \Delta_0$, тогаш t-статистиката има облик

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{S_p\sqrt{2/n}},$$

каде S_p е т.н. pooled стандардна девијација,

$$S_p := \sqrt{\frac{S_X^2 + S_Y^2}{2}}.$$

Во овој случај, $T \sim t_{2(n-1)}$.

Единственото нешто што се менува од претходниот случај е оценувањето на дисперзијата на обележјето. Имено, ако примероците се со големини m и n ($m \neq n$), тогаш

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

$$S_p := \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}.$$

Тест статистиката има t_{m+n-2} распределба. Да забележиме дека кога $m = n$ овој случај се сведува на претходниот.

Во овој случај дисперзиите мора да се оценат посебно, како и да се усогласат степените на слобода на t-распределбата.

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{S_{\bar{\Delta}}}$$

$$S_{\bar{\Delta}} := \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}.$$

T има t-распределба со

$$\nu = \frac{(S_X^2/m + S_Y^2/n)^2}{(S_X^2/m)^2/(m-1) + (S_Y^2/n)^2/(n-1)}$$

степени на слобода (равенка на Welch–Satterthwaite).

Да ги разгледаме следните реализации на два случајни примероци:

```
[1] 60
> x
 [1] 10  4  1 10 12  7  6  9  2  9  7  3  5 11  4  4  4  6
[19]  5  6  4  3  2  6  5  4  3  3  8  0  5  5  6  4  3  5
[37]  4  4  6  7  5  3  8  2  7  4  5  5  2  4  5  5  7  6
[55]  5  1  6  4  4  2  4  5  4  3  3  3  2  4  4 10
> y
 [1]  5  6  6  9  7  9  6  6  6  4  7  8 11  5  9  9  3  5
[19]  7  6  7  7 12  7  2  3  6  8  7  3  7  9  8  4  6  5
[37]  6 10  6  2  6  8  5  8  6  6  6  4  7  3
```

Гледаме дека примероците се со нееднакви големини. t-тестот ќе го извршиме на два начини: еднаш со претпоставка дека обележјата се со еднакви дисперзии, втор пат без оваа претпоставка.

t-тестови за разлика на просеци на две обележја
Пример во R

Хипотезата која сакаме да ја тестираме е $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$, односно дали просеците на обележјата се еднакви. Алтернативната хипотеза ќе биде $H_a\colon \mu_X \neq \mu_Y$. Ќе земеме $\alpha = 0{,}05$, односно $1 - \alpha = 0{,}95$ ниво на значајност.

```
> # Претпоставка σ_X^2 ≠ σ_Y^2.
> t.test(x, y, alternative="two.sided",
+        conf.level=0.95, var.equal=FALSE)$p.value
[1] 0.0008231307  # ⟹ Не ја прифаќаме H_0.

> # Претпоставка σ_X^2 = σ_Y^2.
> t.test(x, y, alternative="two.sided",
+        conf.level=0.95, var.equal=TRUE)$p.value
[1] 0.0009951118  # ⟹ Не ја прифаќаме H_0.
```

Доколку имаме само еден примерок на кој едно обележје е мерено двапати, или два примероци кои се „спарени“ еден со друг, користиме специјален тип на t-тест кој го зема тоа предвид. Овде тест статистиката зема облик

$$T = \frac{\bar{X}_{\mathrm{D}} - \mu_0}{S_{\mathrm{D}}/\sqrt{n}},$$

каде $\bar{X}_{\mathrm{D}}$ и S_{D} се просекот, односно стандардната девијација на *разликите* на спарените мерења, а n е бројот на парови. Рапсределбата има $n-1$ степен на слобода.

Да претпоставиме дека, со цел фер оценување, десет тестови се оценети од двајца оценувачи, кои ги дале следните оценки:

```
> G1
 [1] 3 0 5 2 5 5 5 4 4 5
> G2
 [1] 2 1 4 1 4 3 3 2 3 5
```

Очигледно е дека има разлика во оценките, но би сакале да провериме дали таа е статистички значајна. Да забележиме дека овде станува збор за спарени примероци. На R ова ќе му го кажеме користјќи `paired=TRUE` во повикот на `t.test`.

t-тест за зависни (paired) примероци
Пример во R

```
> t.test(G1, G2, paired=TRUE)

        Paired t-test

data:  G1 and G2
t = 3.3541, df = 9, p-value = 0.008468
alternative hypothesis: true difference in means
                        is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.325555 1.674445
sample estimates:
mean of the differences
                      1
```

Ова не наведува да ја одбиеме H_0, односно дека разликата на просеците е 0.

t-тест за зависни (paired) примероци

Пример во R

Доколку не користевме `paired=TRUE`, би добиле подруг резултат:

```
> t.test(G1, G2)

        Welch Two Sample t-test

data:  G1 and G2
t = 1.478, df = 16.999, p-value = 0.1577
alternative hypothesis: true difference in means
                        is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.4274951  2.4274951
sample estimates:
mean of x mean of y
      3.8       2.8
```

F-тест за количник на дисперзии

Дефиниција

Видовме дека ако имаме примероци со големини m и n од независни обележја $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,

$$F := \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

Дополнително, ако ја имаме нултата хипотеза $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}.$$

Ова ја дава основата на F-тестот за дисперзии на нормални обележја. Да забележиме дека овој тест може да биде генерализиран во случај кога $H_0\colon \sigma_X^2/\sigma_Y^2 = r_0$.

F-тест за количник на дисперзии
Пример во R

Да претпоставиме дека имаме два методи за мерење на концентрација на арсен во вода. Методите се испробани десет пати, со што се добиени следните резултати:

```
> M1
 [1] 6.913938 9.359049 7.862903 6.578330 6.617795 9.788376
 [7] 8.670829 6.031182 7.109113 9.007603
> M2
 [1] 7.067900 8.991766 8.619952 7.914733 6.313696 7.257830
 [7] 5.345199 6.455645 6.261455 5.173409
```

Ако се претпоставува дека мерењата следат нормална распределба, да се провери дали првиот метод е значајно попрецизен од вториот.

Во R, ја користиме функцијата `var.test`. Сакаме да ја тестираме хипотезата $H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ наспрема $H_a\colon \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, па специфицираме `alternative="less"` во повикот на `var.test`.

```
> var.test(M1, M2, alternative="less")


        F test to compare two variances


data:  x and y
F = 1.0697, num df = 9, denom df = 9, p-value =
0.5391
alternative hypothesis: true ratio of variances is less than 1
95 percent confidence interval:
 0.000000 3.400388
sample estimates:
ratio of variances
          1.069677
```

Да забележиме дека претпоставивме дека $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$. F-тестот е многу осетлив на оваа претпоставка. Доколку истата не е задоволена, се добиваат неточни резултати. Слична претпоставка имаме и кај t-тестовите: претпоставуваме дека $\bar{X}$ има нормална распределба, а S^2 скалирана χ^2-распределба. Сепак, t-тестовите се значително робустни во овој поглед: CLT ни гарантира асимптотска нормалност на $\bar{X}$, додека теоремата на Слутски кажува дека за голем примерок, распределбата на S^2 не влијае многу на тест статистиката.

Ако имаме примерок од обележје $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и сакаме ја проверимe хипотезата $H_o\colon \sigma = \sigma_0$, ја користиме статистикта

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

за која видовме дека кога H_0 е точна, има χ^2_{n-1} распределба. Бројот на степени на слобода е одреден од големината на примерокот.

Да претпоставиме дека стандардната девијација тежината на пакети од 40 g е 0,25 g. Од случаен примерок од $n = 20$ пакети добиена е стандардна девијација 0,32 g. Доколку тежините се нормално распределени, дали со ниво на значајност $\alpha = 0{,}01$ може да се тврди дека дошло до зголемување на непрецизноста?

χ^2-тест за вредност на дисперзија

Пример во R

Ќе ја тестираме хипотезата $H_0\colon \sigma = 0.25$ наспроти $H_a\colon \sigma > 0.25$.

```
> n <- 20; sigma <- 0.25; S <- 0.32    # Податоци.
> chisq <- ((n - 1) * S^2) / sigma^2  # Статистика.
> chisq
[1] 31.1296
> p.val <- pchisq(chisq, df=n - 1, lower.tail=FALSE)
> p.val
[1] 0.03907006
> alpha <- 0.01
> p.val > alpha
[1] TRUE
```

Ова значи дека ја прифаќаме H_0. Да забележиме дека со $\alpha = 0{,}05$, H_0 би ја отфрлиле.

Во пакетот **EnvStats** постои функција **varTest** која го врши χ^2-тестот за дадени податоци. Да забележиме едно сценарио кога овој тест не е точен (мал примерок).

```
> x <- rnorm(20, mean=2, sd=1)
> library(EnvStats); varTest(x, sigma.squared=0.5)
Null Hypothesis:                  variance = 0.5
Alternative Hypothesis:           True variance is not equal to
Test Name:                        Chi-Squared Test on Variance
Estimated Parameter(s):           variance = 0.6205222
Data:                             x
Test Statistic:                   Chi-Squared = 23.57984
Test Statistic Parameter:         df = 19
P-value:                          0.4255313
95% Confidence Interval:          LCL = 0.3588763
                                  UCL = 1.3237411
```

Пирсонов χ^2-тест за независност

Дефиниција

- Дадена е популација од N индивидуи;
- На секоја индивидуа мериме две обележја, X и Y;
- X има категории $A_1, \ldots, A_m$, а Y категории $B_1, \ldots, B_n$;
- Сакаме да тестираме $H_0 \colon X \perp\!\!\!\perp Y$ наспроти $H_a \colon X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

За таа цел, ќе формираме табела на контингенција: табела со димензии $m \times n$ која за дадена реализација на примерокот во полето (i, j) брои колку индивидуи спаѓаат во категорија A_i за X и B_j за Y.

Пирсонов χ^2-тест за независност

Дефиниција

Веќе ја видовме статистиката

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{(O_{i,j} - E_{i,j})^2}{E_{i,j}}.$$

$O_{i,j}$ ги знаеме од табелата на контингенција, па останува да ги одредиме $E_{i,j}$. Доколку нултата хипотеза е точна

$$E_{i,j} = N \Pr(X = i) \Pr(Y = j) =: N p_{i,\cdot} p_{\cdot,j}.$$

Но, ние не ги знаеме $\Pr(X = i)$ и $\Pr(Y = j)$, па истите можеме да ги оцениме од податоците:

$$\hat{p}_{i,\cdot} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} O_{i,j}$$

$$\hat{p}_{\cdot,j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} O_{i,j}.$$

Со ова,

$$\chi^2 = N \sum_{i,j} \hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j} \left(\frac{(O_{i,j}/N) - \hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}}{\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}} \right)^2 \sim \chi^2_{(m-1)(n-1)}.$$

Да забележиме дека χ^2 распределбата има $(m-1)(n-1) = mn - (m-1) - (n-1)$ степени на слобода бидејќи имаме оценето $(m-1) + (n-1)$ параметри (веројатности).

Data frame-от `survey` од библиотеката `MASS` содржи информации за тоа дали луѓе се пушачи и дали се физички активни. Ние сакаме да испитаме дали овие две обележја се независни со $\alpha = 0{,}05$.

```
> library(MASS)
> table(survey$Smoke, survey$Exer)

        Freq None Some
  Heavy    7    1    3
  Never   87   18   84
  Occas   12    3    4
  Regul    9    1    7
```

Бидејќи некои полиња содржат мали броеви, ќе ги споиме нивоата `"None"` и `"Some"` на факторот `survey$Exer`. За тестирањето ќе ја користиме функцијата `chisq.test`.

Пирсонов χ^2-тест за независност

Пример во R

```
> levels(survey$Exer)
[1] "Freq" "None" "Some"
> levels(survey$Exer) <- c("Freq", "Little", "Little")
> cont.table <- table(survey$Smoke, survey$Exer)
       Freq Little
  Heavy    7      4
  Never   87    102
  Occas   12      7
  Regul    9      8
> chisq.test(cont.table)

        Pearson's Chi-squared test

data:  cont.table
X-squared = 3.2328, df = 3, p-value = 0.3571
```

Истата статистика може да биде искористена за тестирање дали обележје следи дадена распределба. Единствената разлика е што E_i во

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

би го пресметале врз основа на претпоставената распределба. Во овој случај, $\chi^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Еден степен на слобода се губи од ограничувањето $\sum_i O_i = N$, каде N е големината на примерокот. Ако $H_o \colon X \sim F_0$ и категориите (обично разбивања на реалната оска) ги означиме со $C_1, \ldots, C_n$, тогаш

$$\begin{aligned} E_i &= N p_i \\ p_i &= \Pr_{F_0}(X \in C_i). \end{aligned}$$

Во R пак ја користиме функцијата `chisq.test`, само што наместо табела на контигенција користиме нумерички вектор и дополнителен аргумент `p` со веројатностите p_i. Овие два вектори мора да бидат со иста должина.

Табела: Податоци за 150 фрлања на коцка.

Вредност	1	2	3	4	5	6
Број на фрлања	22	21	22	27	22	36

На овој начин можеме да тестираме дали коцката за чии фрлања ни се дадени информации во табелата погоре е исправна.

```
> O <- c(22, 21, 22, 27, 22, 36)
> p <- rep(1 / length(O), length(O))
> p
[1] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
[6] 0.1666667
> chisq.test(O, p=p)

        Chi-squared test for given probabilities

data:  O
X-squared = 6.72, df = 5, p-value = 0.2423
```

Забележуваме дека немаме причина да ја отфрлиме нултата хипотеза дека $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, 6\})$.

КС тестот тестира дали примерок има претпоставена распределба, или пак дали два примероци имаат исти распределби. Распределбите мора да бидат *айсолуйно нейрекинайи.*

- Емпириската функција на распределба на примерок $(X_1, \ldots, X_n)$ е дефинирана како

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x).$$

- За претпоставена распределба $F(x)$, ја користиме статистикта

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

- Од теоремата на Гливенко–Кантели, знаеме дека D_n конвергира кон 0 скоро сигурно.

Во R ја користиме функцијата `ks.test`. Да претпоставиме дека имаме податоци за тоа колку време пчела поминува на дадено дрво, и сакаме да провериме дали овие податоци доаѓаат од исти распределби.

```
> head(redwell)
[1] 23.4 30.9 18.8 23.0 21.4  1.0
> head(whitney)
[1] 16.5  1.0 22.6 25.3 23.7  1.0
```

Овие податоци се интересни поради тоа што се базираат на Кошиева распределба.

```
> ks.test(redwell, whitney)$p.value
[1] 0.04204927
```

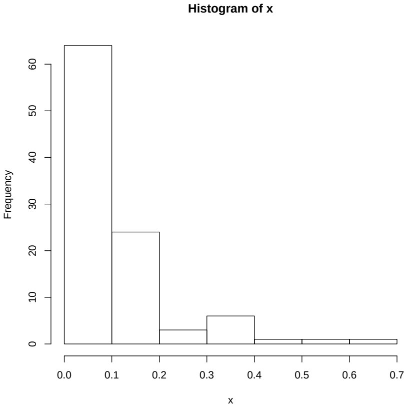
Забележуваме дека со ниво на значајност $\alpha = 0{,}05$, ја отфрламе нултата хипотеза, односно заклучуваме дека податоците не доаѓаат од исти распределби.
Интересно, можеме да забележиме дека t-тестот е лош во овој случај и кажува дека просеците се еднакви:

```
> t.test(whitney, redwell)

        Welch Two Sample t-test

data:  whitney and redwell
t = -0.20565, df = 153.28, p-value = 0.8373
```

Колмогоров–Смирнов тест
Пример во R

Од друга страна, можеме да испитаме дали даден примерок доаѓа од претпоставена распределба.

```
> head(x)
[1] 0.12579308 0.11268378
[3] 0.05599129 0.02673101
[5] 0.32418195 0.12656078
> hist(x)
```



Од обликот на хистограмот, претпоставуваме дека податоците имаат експоненцијална распределба. Параметарот λ ќе го оцениме преку $\bar{X}$.

```
> 1 / mean(x)
[1] 9.54112
> ks.test(x, "pexp", rate=9.5)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.063706, p-value = 0.8118
alternative hypothesis: two-sided
```

Ова е силен показател дека нултата хипотеза е точна, т.е. дека $X \sim \mathcal{E}(9{,}50)$.

Содржина

- Претпоставуваме модел

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon,$$

  каде β_0 и β_1 се коефициенти, а $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ е случајна компонента.
- Дадени оценки $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$, вршиме предвидувања

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x,$$

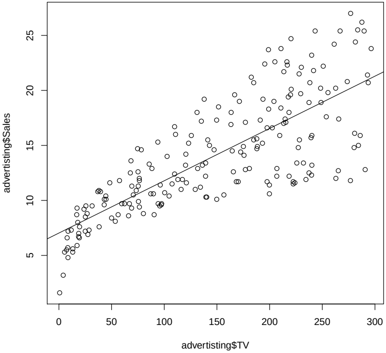
  каде $\hat{y}$ означува предвидување на Y за дадено $X = x$.

R ја содржи функцијата `lm` која служи за креирање линеарни модели. Таа како аргумент прима објект од тип формула кој кажува кои се зависни а кои независни променливи.

```
> advertising <- read.csv("data/advertising.csv",
+                          row.names=1)
```

Овие податоци даваат информација за успешност (sales) на различни методи за рекламирање (TV, Radio, и Newspaper).
Сега, сакаме да провериме дали постои (линеарна) врска помеѓу продажбата и рекламирањето на ТВ.

```
> model <- lm(Sales ~ TV, data=advertisting)
> model.coefficients   # ŷ = 7,03 + 0,05x.
(Intercept)          TV
 7.03259355  0.04753664
```



Проста линеарна регресија

Тестирање за значајност на β_1

Доколку сакаме да знаеме дали линеарната врска е значајна, т.е. дали $\beta_1 \neq 0$, ја користиме статистикта

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{\sigma / \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \sim t_{n-2}.$$

Во R оваа, како и други статистики поврзани со моделот, можеме да ги разгледаме со функцијата `summary`.

```
> summary(model)$coefficients
              Estimate  Std. Error t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 7.03259355 0.457842940 15.36028 1.40630e-35
TV          0.04753664 0.002690607 17.66763 1.46739e-42
```

Од овде заклучуваме дека и двата коефициенти се значајни.

Линеарна регресија

- Обопштување на претходниот случај.
- Претпоставуваме модел

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \epsilon,$$

  каде β_i се коефициенти, а $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ е случајна компонента.
- Процеудрата во R е иста, со тоа што на десната страна на формулата додаваме повеќе независни променливи.

```
> model <- lm(formula = Sales ~ TV + Radio + Newspaper,
+              data = advertising)
> summary(model)$coefficients['Newspaper', 'Pr(>|t|)']
[1] 0.8599151
```

  Гледаме дека продажбата не зависи од рекламирањето во весник (коефициентот пред Newspaper е 0).