

# Хаусхолдеров метод

## Алгоритам за наоѓање корени на функции

Дарио Ѓорѓевски<sup>1</sup>  
`gjorgjevski.dario@students.finki.ukim.mk`

<sup>1</sup>Факултет за компјутерски науки и инженерство  
Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје

31 јануари 2017 год.



# Содржина

- 1 Вовед и опис на методот
- 2 Пример на употреба
- 3 Формално изведување

# Мотивација

Апроксимација на  $(1/f)(x)$  со геометриски ред

Нека  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекинато диференцијабилна функција со корен со кратност 1 во  $x = a$ .

Со други зборови,  $f(a) = 0$  и  $f'(a) \neq 0$ .

Ова значи дека  $(1/f)(x)$  има пол со кратност 1 во  $x = a$ , и во околината на  $a$  се однесува како  $1/(x - a)$ .

Приближно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \frac{-1}{a(1 - x/a)} \\ &\approx \frac{-1}{af'(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^k. \end{aligned} \tag{1}$$



# Мотивација

## Наоѓање на $a$

Коефициентот пред  $x^d$  во (1) е  $Ca^{-d} \Rightarrow$  вредноста на  $a$  можеме да ја добиеме така што коефициентот пред  $x^{d-1}$  ќе го поделиме со коефициентот пред  $x^d$ .

## Клучна идеја

Геометрискиот ред од (1) дава апроксимација на Тајлоровата експанзија на  $(1/f)(x)$  во околината на  $a$ . Ова ни овозможува да го апроксимираме  $a$  со делење на соодветните коефициенти во Тајлоровата експанзија на  $(1/f)(b+x)$ :

$$a \approx b + \frac{(1/f)^{(d-1)}(b)}{(d-1)!} \frac{d!}{(1/f)^{(d)}(b)} = b + d \frac{(1/f)^{(d-1)}(b)}{(1/f)^{(d)}(b)}.$$



# Опис на Хаусхолдеровиот метод

## Дефиниција (Хаусхолдеров метод од ред $d$ )

Нека е дадена непрекинато диференцијабилна функција  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . За наоѓање на корен на  $f$ , вршме низа итерации

$$x_{n+1} = x_n + d \frac{(1/f)^{(d-1)}(x_n)}{(1/f)^{(d)}(x_n)}, \quad (1)$$

почнувајќи од претпоставка  $x_0$ .

Доколку  $f$  е  $(d+1)$  пат непрекинато диференцијабилна и  $a$  е корен со кратност 1, тогаш

$$|x_{n+1} - a| \leq K |x_n - a|^{d+1}, \text{ за некое } K > 0.$$



# Врска со други методи

Хаусхолдеровиот метод е генерален; други методи се негови специјални случаи.

- Кога  $d = 1$  го добиваме Њутн–Рафсоновиот метод:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{(1/f)(x_n)}{(1/f)'(x_n)} \\ &= x_n + \frac{1}{f(x_n)} \left( \frac{-f'(x_n)}{f(x_n)^2} \right)^{-1} \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

- Кога  $d = 2$  го добиваме Халеевиот метод.



# Содржина

- 1 Вовед и опис на методот
- 2 Пример на употреба
- 3 Формално изведување



Решавање на  $y^3 - 2y - 5 = 0$ 

## Употреба на Хаусхолдеровиот метод

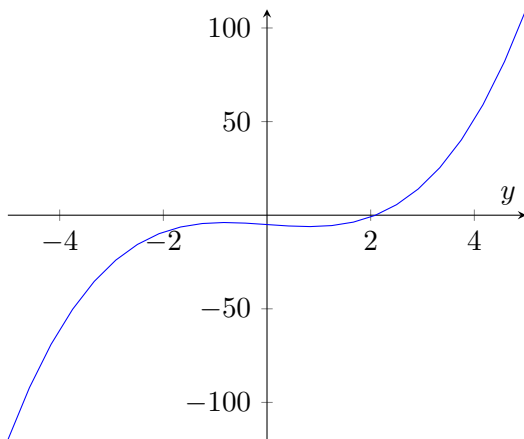
Да претпоставиме дека сакаме да најдеме нула на равенката  $y^3 - 2y - 5 = 0$ . Графички можеме да забележиме дека една нула се наоѓа во околината на  $y = 2$ . Оттука, земајќи  $y := x + 2$ , равенката станува

$$0 = f(x) = -1 + 10x + 6x^2 + x^3. \quad (2)$$

Следен чекор е наоѓање на Тајлорова експанзија на  $(1/f)(x)$  околу 0, каде што  $f(x)$  е дадена со (2).





График на  $y^3 - 2y - 5$ 

# Тајлорова експанзија на $(1/f)(x)$

Лесно е да се пресмета дека ако  $f(x) = -1 + 10x + 6x^2 + x^3$ , тогаш Тајлоровата експанзија на  $(1/f)(x)$  околу 0 е

$$\begin{aligned}(1/f)(x) = & -1 - 10x - 106x^2 - 1121x^3 - 11\,856x^4 \\ & -125\,392x^5 - 1\,326\,177x^6 - 14\,025\,978x^7 - 148\,342\,234x^8 \\ & -1\,568\,904\,385x^9 - 16\,593\,123\,232x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}).\end{aligned}$$

Примената на Хаусхолдеровиот метод од различен ред во  $x = 0$  се сведува на делење соседни коефициенти во Тајлоровата експанзија.



Вредности на  $x_1$  за различни редови на методот

$d$	$x_1$
1	0,100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
2	0,094 339 622 641 509 433 962 264 150 943 396
3	0,094 558 429 973 238 180 196 253 345 227 476
4	0,094 551 282 051 282 051 282 051 282 051 282
5	0,094 551 486 538 216 154 140 615 031 261 963
6	0,094 551 481 438 752 142 436 492 263 099 119
7	0,094 551 481 543 746 895 938 379 484 125 813
8	0,094 551 481 542 336 756 233 561 913 325 371
9	0,094 551 481 542 324 837 086 869 382 419 375
10	0,094 551 481 542 326 678 478 801 765 822 985



# Експлицитни формули за $x_{n+1}$ за пониски редови

Доколку наоѓаме изводи на  $f(x)$ , можеме да видиме дека

$$f'(x) = 10 + 12x + 3x^2$$

$$f''(x) = 12 + 6x$$

$$f'''(x) = 6.$$

Од друга страна, може да се изведат експлицитни формули за  $x_{n+1}$  за пониски редови:

- Кога  $d = 1$ ,  $x_{n+1} = x_n - f/f'$ .
- Кога  $d = 2$ ,  $x_{n+1} = x_n + (-2ff')/(2f'^2 - ff'')$ .
- Кога  $d = 3$ ,  $x_{n+1} = x_n - \frac{6ff'^2 - 3f^2f''}{6f'^3 - 6ff'f'' + f^2f'''}$ .



Вредности на  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  за  $d = 1$ 

$x_n$	Вредност
$x_1$	0,1
$x_2$	0,094 568 121 104 19
$x_3$	0,094 551 481 698 199 302 97
$x_4$	0,094 551 481 542 326 591 496 064 85
$x_5$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31
$x_6$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31

Вредности на  $x_2, x_3, x_4, x_5$  за  $d = 2$ 

$x_n$	Вредност
$x_1$	0,094 339 622 641 51
$x_2$	0,094 551 481 540 164 214 72
$x_3$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 54
$x_4$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 3
$x_5$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 3

Вредности на  $x_2, x_3, x_4$  за  $d = 3$ 

$x_n$	Вредност
$x_1$	0,094 558 429 973 24
$x_2$	0,094 551 481 542 326 591 482 567
$x_3$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31
$x_4$	0,094 551 481 542 326 591 482 386 540 579 31

# Содржина

- 1 Вовед и опис на методот
- 2 Пример на употреба
- 3 Формално изведување



# Падеева апроксимација

## Дефиниција (Падеева апроксимација)

За дадена функција  $f$  и два цели броја  $m \geq 0$  и  $n \geq 1$ , *Падеева апроксимација* од ред  $[m/n]$  е рационалната функција

$$R(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^n b_j x^j},$$

која со  $f$  „се согласува“ до највисок можен ред, односно  $f^{(k)}(0) = R^{(k)}(0)$  за сите  $0 \leq k \leq m + n$ .

Bottom line: апроксимацијата може да се најде преку решавање систем равенки добиен од Тајлоровата експанзија на  $f$  околу 0.



# Дефинирање на итерацијата

За да го изведеме Хаусхолдеровиот метод од ред  $d$ , ќе започнеме со Падеева апроксимација на  $f(x + h)$  од ред  $[1/(d - 1)]$ . Таа има облик

$$f(x + h) = \frac{a_0 + h}{b_0 + b_1 h + \dots + b_{d-1} h^{d-1}} + \mathcal{O}(h^{d+1}). \quad (3)$$

Имено, знаеме дека  $b_d = 0$ . Итерацијата на Хаусхолдеровиот метод се добива преку наоѓање на нулата во  $h = -a_0$ .



# Наоѓање на Падеевата апроксимација

Најлесен начин за наоѓање на потребната Падеева апроксимација е преку Тајлорова експанзија на  $(1/f)(x+h)$  околу 0:

$$\begin{aligned}(1/f)(x+h) &= (1/f)(x) + (1/f)'(x)h + \dots \\ &\quad + (1/f)^{(d-1)}(x) \frac{h^{d-1}}{(d-1)!} + (1/f)^{(d)}(x) \frac{h^d}{d!}.\end{aligned}\tag{4}$$

Можеме да воочиме дека (4) треба да биде еднакво на реципрочната вредност на (3).

# Наоѓање на нулата во $h = -a_0$

Користејќи ги својствата на Падеевата апроксимација, добиваме

$$0 = b_d = a_0(1/f)^{(d)}(x) \frac{1}{d!} + (1/f)^{(d-1)}(x) \frac{1}{(d-1)!}.$$

Оттука веднаш се добива

$$h = -a_0 = d \frac{(1/f)^{(d-1)}(x)}{(1/f)^{(d)}(x)},$$

што ја дава итерацијата во Хаусхолдеровиот метод.



КРАЈ  
Прашања?