МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И.ВЕРНАДСКОГО»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Лабораторный практикум

по дисциплине «ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И КОДИРОВАНИЕ»

для обучающихся направления подготовки:
09.03.01 – Информатика и вычислительная техника; 09.03.04 – Программная инженерия,
очной/заочной формы обучения

Квалификационный уровень - бакалавриат

Симферополь, 2020

Лабораторный практикум по дисциплине «Теория информации и кодирование». – Симферополь, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», 2020. – 25 стр.

Разработчики: Таран Евгений Павлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной инженерии и моделирования;
Полетаев Дмитрий Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики и электроники.

Утверждено на заседании кафедры компьютерной инженерии и моделирования, протокол от 15.01.2020г. № 5.

Издается по решению Методического совета
Физико-технического института
ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
(протокол № 6 от 28.02.2020 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий лабораторный практикум включает в себя описания лабораторных работ по дисциплине «Теория информации и кодирование» для студентов направлений подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия». При выполнении лабораторных работ с использованием средств автоматизированного проектирования студенты данных направлений подготовки исследуют основные характеристики информационных сигналов и каналов, принципы построения помехоустойчивых кодов.

Цель данного лабораторного практикума - разработка требований и рекомендаций по выполнению лабораторных работ и представлению отчетов.

Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам:

1. Студент приходит на лабораторное занятие, ознакомившись с теоретическим материалом по данной теме, подтвержденным конспектом в тетради, для выполнения лабораторных работ.

2. В начале занятия преподаватель проверяет подготовку к лабораторной работе и оценивает ее. Студенты, не знающие теорию вопроса, к выполнению работы не допускаются.

3. Отчет по лабораторной работе должен содержать:
   - титульную страницу (приложение 1);
   - цель лабораторной работы;
   - техническое задание;
   - математический аппарат и основные формулы по дисциплине «Теория информации и кодирование», необходимые для выполнения технического задания и достижения цели по данной лабораторной работе;
   - руководство пользователя по разработанному программному обеспечению, необходимому для выполнения лабораторной работы;
   - комплекс численных экспериментов на основании технического задания;
   - результаты выполнения работы и их обоснования;
   - выводы по работе;
   - программный код разработанного программного обеспечения (в приложении).

4. Порядок сдачи лабораторной работы. В ходе лабораторной работы студент разрабатывает программное обеспечение, необходимое для выполнения технического задания и достижения цели работы. Сдача лабораторной работы состоит из двух частей: 1. демонстрации работы разработанного программного обеспечения с анализом полученных значений; 2. сдача отчета по лабораторной работе. Отчет должен включать все необходимые разделы (пункт 3 данных требований), должен быть сформирован в формате .pdf и выслан преподавателю не позже установленного дня в Электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березкин Е.Ф. Основы теории информации и кодирования: учебное пособие / Е.Ф. Березкин. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2019. - 320 с. - ISBN 978-5-8114-4119-8. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/115524. - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Павлов Ю.Н. Теория информации для бакалавров: учебное пособие / Ю.Н. Павлов, Е.В. Смирнова, Е.А. Тихомирова. - Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. - 173 с. - ISBN 978-5-7038-4190-7. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/103541. - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Голиков А.М. Модуляция, кодирование и моделирование в телекоммуникационных системах. Теория и практика: учебное пособие / А.М. Голиков. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 452 с. - ISBN 978-5-8114-2748-2. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/101847. - Режим доступа: для авториз. пользователей.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

«КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ СООБЩЕНИЯ»

Цель работы: рассчитать информационные характеристики дискретных сообщений.

Техническое задание: на вход информационного устройства поступает совокупность дискретных сообщений $\{x_i\}$, где $i=1\div N$. Вероятности появления дискретных сообщений на входе задаются в виде счетчика случайных чисел. Необходимо разработать программное обеспечение и провести комплекс численных экспериментов по расчету количества информации и максимальной энтропии дискретных сообщений, поступающих на вход информационного устройства.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
N	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
N	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61

Вопросы для подготовки:
1. Расчет энтропии совокупности дискретных сообщений.
2. Количество информации для дискретных сообщений.
3. Свойства энтропии дискретных сообщений.
4. Свойства вероятности дискретного сообщения.
5. Максимальная энтропия дискретных сообщений.

Теория:

Любое информационное устройство работает по единой схеме (рисунок 1). На вход устройства подается совокупность сообщений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Задача устройства состоит в том, чтобы передать совокупность этих сообщений с достаточно высокой достоверностью, или, иными словами, чтобы перевести вектор сообщений на входе $X\ (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в соответствующий ему вектор сообщений на выходе $Y\ (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ без ошибок или с допустимыми ошибками.

Рисунок 1.1. Схема работы информационного устройства.

В процессе передачи сообщение может подвергаться многочисленным преобразованиям, существенно меняющим его физические характеристики. Однако передаваемая информация должна оставаться инвариантной при всех преобразованиях. Естественно, что количество передаваемой получателю информации связано с неопределенностью, которая имела место относительно передаваемого сообщения. В связи с этим необходимо ввести количественную меру оценки информации и неопределенности передаваемых сообщений.

Фундаментальным вопросом для теории информации является вопрос о количественной мере информации. Необходимо отметить, что всякая информация получается потребителем после принятия сообщения, т. е. в результате опыта. Сообщение, получаемое на приемной стороне, несет полезную информацию лишь в том случае, если имеется неопределенность относительно состояния источника сообщений.

Количественной мерой неопределенности отдельного дискретного сообщения x_i является энтропия, которая определяется следующим выражением (частная энтропия):

$$H(x_i) = \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \tag{1.1}$$

где $p(x_i)$ – вероятность появление i-го сообщения на входе информационного устройства.

Частная энтропия является логарифмической мерой оценки информации, содержащейся в дискретном сообщении x_i, и в двоичной системе счисления (основание логарифма – 2) измеряется в битах (бит) или в двоичных единицах (дв.ед.).

Энтропию, как меру неопределенности для всей совокупности дискретных случайных сообщений, можно получить усреднением по всем событиям (по всем дискретным сообщениям):

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i) \log_2 p(x_i) \tag{1.2}$$

Вероятности появления дискретных сообщений на входе информационного устройства должны удовлетворять следующему условию:

$$\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1 \tag{1.3}$$

Количество информации для всей совокупности дискретных случайных сообщений определяется следующим выражением:

$$I(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i) \log_2 p(x_i) \tag{1.4}$$

Энтропия максимальна, если сообщения равновероятны:

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_N) = \frac{1}{N};\; H(X)_{\max} = \log_2 N \tag{1.5}$$

<u>Ход работы</u>:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения необходимо провести комплекс численных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать массив вероятностей появления совокупности дискретных сообщений на входе информационного устройства;

б) рассчитать среднее количество информации в совокупности сообщений;

в) определить максимальную энтропию сгенерированной совокупности.

Задание II. Рассчитать среднее количество информации и максимальную энтропию в ходе проведенных численных экспериментов.

Задание III. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

«КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ДОСТОВЕРНОСТИ СООБЩЕНИЙ»

Цель работы: рассчитать количество информации, приходящее к получателю, при наличии помех.

Техническое задание: на вход информационного устройства поступает совокупность дискретных сообщений $\{x_i\}$, где $i=1\div N$. Вероятности появления дискретных сообщений на входе задаются в виде счетчика случайных чисел. Вероятности безошибочной передачи сообщения составляют не менее 70%. Вероятности безошибочной передачи задаются случайным образом. Вероятности ошибок генерируются счетчиком случайных чисел. Необходимо разработать программное обеспечение и провести комплекс численных экспериментов по расчету количества информации, получаемое при неполной достоверности сообщений.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
N	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
N	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8

Вопросы для подготовки:

1. Что такое условная вероятность?
2. Как определяется условная энтропия принятого сообщения y_j относительно переданного сообщения x_i?
3. Что такое совместная вероятность двух дискретных событий?
4. Как определяется количество информации, содержащееся во всей совокупности принятых сообщений $\{y_j\}$ относительно всей совокупности переданных сообщений $\{x_i\}$?
5. Что такое совместная энтропия совокупности двух сообщений - $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$?

Теория:

В реальных условиях передача сообщений происходит при воздействии помех. Помехи искажают сообщения, вследствие чего сообщения на приемной стороне будут в той или иной степени отличаться от переданных, т. е. будет иметь место неполная достоверность передачи.

Вследствие отличия принимаемых сообщений от передаваемых, при оценке количества передаваемой информации целесообразнее рассматривать две системы: систему передаваемых дискретных сообщений $\{x_i\}$ и систему принимаемых дискретных сообщений $\{y_j\}$.

Пусть передаваемые дискретные сообщения могут принимать значения x_1, x_2, , x_N с априорными вероятностями соответственно $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_N)$. Принимаемые дискретные сообщения характеризуются совокупностью значений y_1, y_2, ... , y_N. Наличие помех нарушает однозначное соответствие между передаваемыми и принимаемыми сообщениями. Так как помехи имеют случайный характер, то при приеме какого-либо сообщения y_j невозможно точно установить, какое сообщение было передано. Можно говорить лишь об условной вероятности $p(x_i/y_j)$, определяющей вероятность передачи сообщения x_i при условии, что будет принято сообщение y_j.

Энтропия на входе информационного устройства, на которое поступает совокупность дискретных сообщений $\{x_i\}$ с вероятностями $\{p(x_i)\}$, определяется следующим выражением:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log_2 p(x_i) \qquad (2.1).$$

В результате формируется одномерный массив вероятностей появления совокупности дискретных сообщений на входе информационного устройства:

$$P(X) = (p(x_1), p(x_2), p(x_3), ..., p(x_i), ..., p(x_N)) \qquad (2.2).$$

Совокупность сообщений $\{x_i\}$ передаются со входа на выход информационного устройства и преобразуются в дискретные сообщения $\{y_j\}$. Вероятность безошибочной передачи определяется условной вероятностью перехода сообщения x_i в сообщение y_i - $p(x_i/y_i)$. Вероятность ошибочной передачи определяется условной вероятностью перехода сообщения x_i в сообщение y_j - $p(x_i/y_j)$, $i \div j$. В результате формируется двумерный массив вероятностей перехода совокупности входных дискретных сообщений $\{x_i\}$ в совокупность выходных дискретных сообщений $\{y_j\}$:

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} p(x_1/y_1) & p(x_1/y_2) & \dots & p(x_1/y_i) & p(x_1/y_j) & \dots & p(x_1/y_{N-1}) & p(x_1/y_N) \\ p(x_2/y_1) & p(x_2/y_2) & \dots & p(x_2/y_i) & p(x_2/y_j) & \dots & p(x_2/y_{N-1}) & p(x_2/y_N) \\ p(x_i/y_1) & p(x_i/y_2) & \vdots & p(x_i/y_i) & p(x_i/y_j) & \vdots & p(x_i/y_{N-1}) & p(x_i/y_N) \\ p(x_j/y_1) & p(x_j/y_2) & \dots & p(x_j/y_i) & p(x_j/y_j) & \dots & p(x_j/y_{N-1}) & p(x_j/y_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_{N-1}/y_1) & p(x_{N-1}/y_2) & \dots & p(x_{N-1}/y_i) & p(x_{N-1}/y_j) & \dots & p(x_{N-1}/y_{N-1}) & p(x_{N-1}/y_N) \\ p(x_N/y_1) & p(x_N/y_2) & \dots & p(x_N/y_i) & p(x_N/y_j) & \dots & p(x_N/y_{N-1}) & p(x_N/y_N) \end{pmatrix} \qquad (2.3).$$

Совокупность появления дискретных сообщений на выходе $\{y_j\}$ определяется вероятностями $p(y_j)$ в соответствии со следующим выражением:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \cdot p(x_i/y_j) \qquad (2.4).$$

В результате формируется одномерный массив вероятностей появления совокупности дискретных сообщений на выходе информационного устройства:

$$P(Y) = (p(y_1), p(y_2), p(y_3), ..., p(y_i), ..., p(y_N)) \qquad (2.5).$$

Совместная вероятность появления сообщения на входе x_i и на выходе y_j $(p(x_i,y_j))$ определяется следующим выражением:

$$p(x_i, y_j) = p(y_j) \cdot p(x_i/y_j) \qquad (2.6).$$

Формируется матрица совместных вероятностей $P(X,Y)$:

$$P(X,Y)=\begin{pmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & \dots & p(x_1,y_i) & p(x_1,y_j) & \dots & p(x_1,y_{N-1}) & p(x_1,y_N) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & \dots & p(x_2,y_i) & p(x_2,y_j) & \dots & p(x_2,y_{N-1}) & p(x_2,y_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_i,y_1) & p(x_i,y_2) & \dots & p(x_i,y_i) & p(x_i,y_j) & \dots & p(x_i,y_{N-1}) & p(x_i,y_N) \\ p(x_j,y_1) & p(x_j,y_2) & \dots & p(x_j,y_i) & p(x_j,y_j) & \dots & p(x_j,y_{N-1}) & p(x_j,y_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_{N-1},y_1) & p(x_{N-1},y_2) & \dots & p(x_{N-1},y_i) & p(x_{N-1},y_j) & \dots & p(x_{N-1},y_{N-1}) & p(x_{N-1},y_N) \\ p(x_N,y_1) & p(x_N,y_2) & \dots & p(x_N,y_i) & p(x_N,y_j) & \dots & p(x_N,y_{N-1}) & p(x_N,y_N) \end{pmatrix} \quad (2.7).$$

Условная энтропия (*H(X/Y)*), характеризующая остаточную неопределенность принятого сообщения относительной переданного, определяется соотношением:

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i/y_j) \quad (2.8).$$

Среднее количество информации, получаемое при неполной достоверности сообщений, определяется следующим выражением:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) \quad (2.9).$$

Ход работы:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения необходимо провести комплекс численных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать массив вероятностей появления совокупности дискретных сообщений на входе информационного устройства ($P(X)$);

б) сгенерировать матрицу вероятностей перехода со входа на выход ($P(X/Y)$);

в) рассчитать вероятности появления совокупности дискретных сообщений на выходе информационного устройства ($P(Y)$);

г) рассчитать матрицу вероятностей совместных событий ($P(X,Y)$);

д) определить энтропию на входе информационного устройства ($H(X)$);

е) определить остаточную или условную энтропию выходного сообщения относительно входного (*H(X/Y)*);

ж) определить количество информации при неполной достоверности сообщений ($I(X,Y)$).

Задание II. Рассчитать среднее количество информации, получаемое при неполной достоверности сообщений в ходе проведенных экспериментов.

Задание III. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

«ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ И КАНАЛОВ»

Цель работы: рассчитать информационные характеристики дискретных сигналов и каналов при использовании канала без помех и с помехами.

Техническое задание: источник информации вырабатывает информационный сигнал с N различными символами. Вероятности появления символов на входе задаются в виде счетчика случайных чисел. Длительность каждого символа генерируется случайным образом во временном интервале (0÷N] мкс. Источник информации подключен к каналу передачи сигналов. Канал передачи сигналов может работать как с помехами, так и без помех. При работе канала с помехами вероятность ошибки в канале задается случайным образом в интервале [0÷q], где q=1/(2·N). Необходимо разработать программное обеспечение и провести комплекс численных экспериментов по расчету пропускной способности и скорости передачи информации при использовании канала без помех и канала с помехами.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
N	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
N	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61

Вопросы для подготовки:

1. Как определяется скорость передачи информации для канала без помех?
2. Пропускная способность канала без помех.
3. Сформулировать теорему Шеннона для дискретного канала без помех.
4. Как определяется скорость передачи для дискретного канала с помехами?
5. Пропускная способность дискретного канала с помехами.
6. Сформулировать теорему Шеннона для дискретного канала с помех.

Теория:

Любую информационную систему можно подразделить на источник, канал передачи и получатель информации, а информационные процессы, происходящие в этих устройствах, представить в общем случае в виде процесса передачи информации по некоторому каналу.

Обобщенная схема канала передачи информации представлена на рисунке 3.1. Сообщения X источника информации (*ИИ*) после кодирования и модуляции в преобразователе ($П_1$) превращаются в сигнал Y, поступающий в линию связи (*ЛС*). В результате действия помех ξ сигнал Z на приемной стороне отличается от Y. Приемная часть содержит преобразователь ($П_2$), демодулирующий и декодирующий сигналы и преобразующий их в сообщения W, поступающие в приемник информации (*ПИ*).

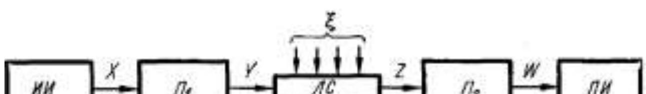

Рисунок 3.1 Обобщенная схема канала передачи информации.

В канале без помех каждому определенному входному сигналу всегда будет соответствовать один и тот же сигнал на выходе канала» иными словами, входные и выходные сигналы связаны функциональной однозначной зависимостью (рисунок 3.2, а).

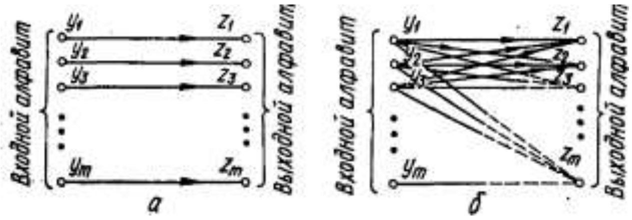

Рисунок 3.2 Взаимодействие между входным и выходным сигналами для канала без помех (а) и канала с помехами (б).

Скорость передачи для дискретного канала без помех определяется следующим выражением:

$$I(Y) = \frac{H(Y)}{\bar{\tau}} \qquad (3.1),$$

где $H(Y) = -\sum_{i=1}^{N} p(y_i)\log_2 p(y_i)$ - энтропия информационного сигнала на входе в канал передачи;

$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{N} p(y_i)\cdot\tau_i$ - средняя длительность символа.

Пропускная способность дискретного канала без помех характеризуется максимальной энтропией информационного сигнала:

$$C = \frac{\log_2 N}{\bar{\tau}} \qquad (3.2),$$

где N – количество символов информационного сигнала.

При наличии помех в канале передачи информации нарушается однозначное соответствие между входным и выходным алфавитами канала. Одному входному сигналу могут соответствовать различные выходные сигналы (рисунок 3.2, б).

Скорость передачи информации по дискретному каналу с помехами определяется следующим соотношением

$$\bar{I}(Z,Y) = \frac{(H(Y) - H(Y/Z))}{\bar{\tau}} \qquad (3.3),$$

где *H(Y/Z)* - остаточная энтропия сигнала, обусловленная действием помех.

Остаточная энтропия сигнала (*H(Y/Z)*) определяется соотношением:

$$H(Y/Z) = -\sum_{i=1}\sum_{j=1} p(y_i, z_j)\log_2 p(y_i/z_j) \qquad (3.4),$$

где $p(y_i/z_j)$ – вероятность передачи сообщений y_i при условии того, что принято сообщение z_j; $p(y_i,z_j)$ – совместная вероятность двух сообщений - y_i, z_j.

Совместная вероятность появления сообщения на входе y_i и на выходе z_j ($p(y_i,z_j)$) определяется следующим выражением:

$$p(y_i, z_j) = p(z_j)\cdot p(y_i/z_j) \qquad (3.5),$$

где $p(z_j)$ – вероятность появления дискретного сообщения z_j на выходе:

$$p(z_j) = \sum_{i=1}^{N} p(y_i) \cdot p(y_i / z_j) \qquad (3.6).$$

Пропуская способность дискретного канала с помехами

$$C = \frac{(\log_2 N - H(Y/Z))}{\bar{\tau}} \qquad (3.7).$$

Единицей измерения пропускной способности (С) и скорости передачи ($\bar{I}(Y)$, $\bar{I}(Z,Y)$) является бит/с (кбит/с, Мбит/с).

<u>Ход работы</u>:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения необходимо провести комплекс численных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать массив вероятностей появления совокупности сообщений на входе дискретного канала;

б) сгенерировать длительности каждого символа сообщения;

в) сгенерировать матрицу переходов со входа на выход в канале передачи информации с помехами с учетом технического задания, используя счетчик случайных чисел;

г) рассчитать пропускную способность и скорость передачи при использовании канала без помех;

д) рассчитать пропускную способность и скорость передачи при использовании канала с помехами.

Задание II. Вычислить среднюю пропускную способность и среднюю скорость передачи для канала без помех и для канала с помехами.

Задание III. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

«СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КОД»

Цель работы: построить помехоустойчивый систематический код, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки.

Техническое задание: источник информации вырабатывает сообщения, содержащие *k* информационных разрядов. Значения разрядов генерируются в двоичной системе счисления счетчиком случайных чисел. Необходимо: 1. разработать программное обеспечение для передатчика, которое будет строить систематический код с заданной исправляющей способностью; 2. разработать программное обеспечение на приемной стороне, позволяющее корректировать принятую ошибочную кодовую комбинацию; 3. провести комплекс численных экспериментов, в ходе которых на передающей стороне построить систематический код с заданной исправляющей способностью, сгенерировать ошибочный систематический код, на приемной стороне вычислить позицию ошибки и скорректировать принятую кодовую комбинацию.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
k	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
k	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
k	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8

Вопросы для подготовки:

1. Что такое значность помехоустойчивого кода?
2. Как определить минимальное кодовое расстояние для помехоустойчивого кода с заданной кратностью обнаруживаемой и исправляемой ошибок?
3. Что такое производящая матрица систематического кода?
4. Что такое синдром ошибки?

Теория:

В настоящее время наиболее широкий класс корректирующих кодов составляют систематические коды. Эти коды относятся к группе разделимых блочных кодов. Для систематического кода сумма по модулю два двух разрешенных комбинаций также дает разрешенную комбинацию.

По заданному количеству информационных разрядов (k) значность (длина) кодовой комбинации (n), которая позволят обнаруживать и исправлять все однократные ошибки, определяется следующим выражением:

$$2^k \le \frac{2^n}{1+n} \qquad (4.1).$$

Количество проверочных разрядов $p=n-k$.

Для исправления всех ошибок кратности не более σ и одновременно обнаружения всех ошибок кратности не более t минимальное кодовое расстояние должно удовлетворять условию

$$d_{\min} \ge t + \sigma + 1 \qquad (4.2).$$

Для обнаружения и исправления всех однократных ошибок $d_{min}\geq 3$.

Принцип построения систематического кода основан на производящей матрице $P_{n,k}$. Данная матрица представляет собой k разрешенных исходных кодовых исходных кодовых комбинаций, состоящих из n разрядов, которые должны удовлетворять следующим требованиям:

- в число исходных комбинаций не должна входить нулевая;
- кодовое расстояние между любыми парами исходных комбинаций не должно быть меньше d_{min};
- каждая исходная комбинация, как и любая ненулевая разрешенная комбинация, должна содержать количество единиц не менее d_{min};
- все исходные комбинации должны быть линейно независимы, т. е. ни одна из них не может быть получена путем суммирования других.

Производящая матрица $P_{n,k}$ в общем случае имеет следующий вид:

$$P_{n,k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Производящая матрица $P_{n,k}$ может быть представлена двумя подматрицами - информационной U_k и проверочной H_p:

$$P_{n,k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где

$$U_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad H_p=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Для построения производящей матрицы удобно информационную матрицу брать в виде квадратной единичной матрицы

$$U_k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

В этом случае проверочная подматрица H_p строится с соблюдением следующих условий:

1. Количество единиц в строке должно быть не менее d_{min}-1.
2. Сумма по модулю два двух любых строк должна содержать не менее d_{min}-2 единиц.

Проверочные символы образуются за счет линейных операций над информационными символами. Для каждой кодовой комбинации составляется p независимых сумм по модулю два. Проверочные суммы составляются с помощью проверочной матрицы *H,* строящейся следующим образом. Вначале строится подматрица H^1, являющаяся транспонированной по отношению к подматрице H_p:

$$H^1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix} \quad (4.7).$$

Для получения проверочной матрицы *H* к матрице H^1 справа приписывается единичная матрица

$$H = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{kp} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8).$$

Алгоритм определения проверочных символов по информационным с помощью матрицы (4.7) следующий. Позиции, занимаемые единицами в первой строке подматрицы H^1, определяют информационные разряды, которые должны участвовать в формировании первого проверочного разряда кодовой комбинации. Позиции единиц во второй строке подматрицы H^1 определяют информационные разряды, участвующие в формировании второго проверочного разряда и т.д.

Пусть количество информационных разрядов $k=4$. Значность кода (длина кодовой комбинации), позволяющей обнаруживать и исправлять все однократные ошибки, $n=7$. Количество проверочных разрядов $p=n-k=7-4=3$. Производящая матрица кода $P_{n,k}$ с учетом перечисленных выше требований, может иметь следующий вид:

$$P_{n,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9).$$

Проверочная подматрица

$$H_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10).$$

Транспонированная подматрица H^1 по отношению к проверочной подматрице H_p имеет вид

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11).$$

Проверочная матрица имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12).$$

Кодовые комбинации должны содержать p=3 проверочных символа. Подматрица H^1 указывает на то, что проверочные символы должны определяться равенствами

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 + a_3 + a_4 \\ b_2 &= a_1 + a_3 + a_4 \\ b_3 &= a_1 + a_2 + a_4 \end{aligned} \qquad (4.13).$$

Например, для сообщения, представляемого кодовой комбинацией 0011, проверочные символы будут

$$\begin{aligned} b_1 &= 0+1+1 = 0 \\ b_2 &= 0+1+1 = 0 \\ b_3 &= 0+0+1 = 1 \end{aligned}$$

Следовательно, полученный систематический код для заданного сообщения будет иметь вид 0011001.

Проверочная матрица H используется для определения места ошибки в кодовой комбинации и исправления ошибок. Проверка кодовых комбинаций при этом выполняется путем суммирования по модулю два проверочных символов кодовых комбинаций и проверочных символов, вычисленных по принятым информационным. В результате будет получена совокупность контрольных равенств, каждое из которых представляет сумму по модулю два одного из контрольных символов и определенного количества информационных.

Состав контрольных равенств легко определяется из проверочной матрицы H. В состав первого контрольного равенства должны входить символы, позиции которых заняты единицами в первой строке матрицы H. В состав второго контрольного равенства должны входить символы, позиции которых заняты единицами во второй строке матрицы H, и т. д.

Для рассмотренного примера с кодом (7,4) эти равенства будут иметь вид

$$\begin{aligned} S_1 &= b_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ S_2 &= b_2 + a_1 + a_3 + a_4 \\ S_3 &= b_3 + a_1 + a_2 + a_4 \end{aligned}$$

В результате p таких проверок будет получено p-разрядное двоичное число (синдром, $S_1S_2S_3$), которое будет равно нулю при отсутствии ошибок и отлично от нуля в случае наличия ошибок.

Если код предназначен для исправления ошибок, то используется проверочная матрица H (4.12), в которой каждый столбец матрицы H соответствует виду синдрома ошибки.

Пусть в рассматриваемом примере произошла ошибка в первом разряде кодовой комбинации (искажен символ a_1). Тогда синдром ошибки *(011)*. Этот синдром ошибки соответствует первому столбцу проверочной матрицы H.

Ход работы:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения для передатчика необходимо сгенерировать производящую матрицу систематического кода $P_{n,k}$ и построить проверочную матрицу H, при помощи которой можно обнаруживать и исправлять все однократные ошибки.

Задание II. Провести цикл комплексных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать случайным образом информационную кодовую комбинацию, состоящую из k разрядов, на передающей стороне;
б) построить для информационной кодовой комбинации на передающей стороне систематический код, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки;
в) передать проверочную матрицу с выходы программного обеспечения на передающей стороне на вход программного обеспечения приемной стороны;
г) передать систематический код от передатчика к приемнику, сгенерировав случайным образом однократную ошибку в любом разряде систематического кода;
д) при помощи программного обеспечения на приемной стороне определить синдром ошибки принятого систематического кода;
е) с использованием проверочной матрицы на приемной стороне по синдрому ошибки определить позицию ошибки и откорректировать систематический код

Задание III. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

«КОД ХЕММИНГА»

Цель работы: построить помехоустойчивый код (код Хэмминга), который позволяет обнаруживать и обнаруживать и исправлять ошибки в кодовых комбинациях заданной кратности.

Техническое задание: источник информации вырабатывает сообщения, содержащие *k* информационных разрядов. Значения разрядов генерируются в двоичной системе счисления счетчиком случайных чисел. Необходимо: 1. разработать программное обеспечение для передатчика, которое будет строить код Хэмминга с заданной исправляющей способностью; 2. разработать программное обеспечение на приемной стороне, позволяющее обрабатывать принятый код Хэмминга; 3. провести комплекс численных экспериментов, в ходе которых на передающей стороне построить код Хэмминга с заданной исправляющей способностью, сгенерировать случайным образом кратность ошибки и ошибочную кодовую комбинацию, на приемной стороне по принятому коду Хэмминга определить кратность ошибки и скорректировать принятую кодовую комбинацию.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
k	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
k	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61

Вопросы для подготовки:

1. Какой код называется помехоустойчивым?
2. На каких позициях в коде Хэмминга располагаются проверочные разряды?
3. Как определяется синдром ошибки в коде Хэмминга?
4. Как по виду синдрома ошибки определить позицию ошибки?
5. Каким образом можно модифицировать код Хэмминга, чтобы он мог обнаруживать двукратные ошибки?

Теория:

Код Хэмминга относится к помехоустойчивым кодам, характеризуемых различной корректирующей способностью. К этим кодам обычно относят коды с исправлением однократных ошибок и коды с исправлением однократных и обнаружением двукратных ошибок.

Код Хэмминга строится таким образом, чтобы в результате $p=n-k$ проверок получить p-разрядное двоичное число, указывающее номер искаженной позиции кодовой комбинации. Для этого проверочные символы должны находиться на номерах позиций, которые в двоичной системе счисления выражаются степенью двойки (b_0 - 1 позиция (2^0), b_1 - 2 позиция (2^1), b_2 - 4 позиция (2^2), … , b_{p-1} - 2^{p-1}), так как каждый из них входит только в одно из проверочных уравнений.

Первой проверкой должны быть охвачены символы с номерами, содержащими в двоичной записи единицы в первом разряде (2^0) – 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Проверочный разряд (b_0) выбирается таким образом, чтобы при сложении по модулю 2 первая контрольная сумма равнялась нулю. Второй проверкой должны быть охвачены символы с номерами, содержащими в двоичной записи единицы во втором разряде (2^1) - 2, 3, 6, 7, 10 и т. д. Проверочный разряд (b_1) выбирается таким образом, чтобы при сложении по модулю 2 вторая контрольная сумма равнялась нулю. Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будут определены все проверочные разряды кода Хэмминга (b_{p-1}).

Распределение разрядов в коде Хэмминга имеет следующий вид:

$$\overset{1}{b_0}\,\overset{2}{b_1}\,\overset{3}{a_1}\,\overset{4}{b_2}\,\overset{5}{a_2}\,\overset{6}{a_3}\,\overset{7}{a_4}\,\overset{8}{b_3}\,\overset{9}{a_5}\,\overset{10}{a_6}\,\overset{11}{a_7}\,\overset{12}{a_8}\ldots \qquad (5.1).$$

Контрольные суммы будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
S_1 &= b_0 + a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + \ldots \\
S_2 &= b_1 + a_1 + a_3 + a_4 + a_6 + a_7 + \ldots \\
S_3 &= b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_8 + \ldots \\
S_4 &= b_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (5.2).$$

Например, если источник вырабатывает информационную кодовую комбинацию 10011, то информационные разряды имеют следующие значения: a_1=1; a_2=0; a_3=0; a_4=1; a_5=1. Из условия обеспечения четности контрольных сумм (5.2) получим следующие значения проверочных разрядов: b_0=1; b_1=0; b_2=1; b_3=1. Следовательно, информационной кодовой комбинации 11011 соответствует код Хэмминга 101100111, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки.

Если при передаче сообщения произошло искажение пятого символа, т. е. был принят код 101110111, тогда определяются контрольные суммы (5.2). В результате первая контрольная сумма S_1=1**,** вторая – S_2=0, третья – S_3=1, четвертая – S_4=0. Таким образом, в результате проверок получен синдром 1010. Для определения позиции ошибки данный синдром должен быть записан справа налево (0101) и переведен из двоичной системы в десятичную: $0101_2 = 2^0+2^2=5$. Полученное значение указывает позицию ошибки – пятый символ. Исправление ошибки сводится к инвертированию символа на пятой позиции.

Для обнаружения двукратных ошибок минимальное кодовое расстояние d_{min}=4. Код Хэмминга, позволяющий обнаруживать двукратные ошибки, получается путем добавления еще одного проверочного разряда, представляющего собой результат суммирования по модулю два всех символов кодовой комбинации построенного кода Хэмминга, обнаруживающего и исправляющего все однократные ошибки.

Дополнительная контрольная сумма, вводимая для увеличения минимального расстояния кода Хэмминга до d_{min}=4, имеет вид

$$S_{p+1} = b_0 + b_1 + a_1 + b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + b_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + b_p \qquad (5.3).$$

После приема кода Хэмминга рассчитываются контрольные суммы и строится синдром ошибки ($S_1S_2S_3\ldots S_{p+1}$). Если все элементы синдрома равны 0, то код передан без ошибок. Если хотя-бы один элемент синдрома отличен от нуля, то код передан с ошибками. Кратность ошибки определяется по значению последнего разряда синдрома ошибки (S_{p+1}): если S_{p+1}=0, то кратность ошибки равна двум, если S_{p+1}=1, то кратность ошибки равна единицы. В этом случае определяется позиция ошибки путем записи всех предыдущих разрядов синдрома справа налево ($S_pS_{p-1}S_{p-2}\ldots S_2S_1$) и перевода полученного p-разрядного двоичного числа в десятичную систему координат.

Ход работы:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения для передатчика и для приемника провести комплекс численных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать случайным образом информационную кодовую комбинацию, состоящую из *k* разрядов, на передающей стороне;

б) построить код Хэмминга, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки;

в) модифицировать код Хэмминга и построить код, позволяющий обнаруживать двукратные ошибки;

г) передать сформированный код Хэмминга со входа на выход, сгенерировав при этом случайным образом кратность ошибки (от 0 до 2), и сгенерировав случайным образом позицию ошибки в принятом коде Хэмминга с учетом кратности;

д) с использованием программного обеспечения на приемной стороне обработать принятый код Хэмминга, определить синдром ошибки, рассчитать кратность ошибки и определить позицию ошибки для однократных ошибок.

Задание II. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

«ЦИКЛИЧЕСКИЙ КОД»

Цель работы: построить помехоустойчивый циклический код, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки.

Техническое задание: источник информации вырабатывает сообщения, содержащие k информационных разрядов. Значения разрядов генерируются в двоичной системе счисления счетчиком случайных чисел. Необходимо: 1. разработать программное обеспечение для передатчика, которое будет строить циклический код, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки; 2. разработать программное обеспечение на приемной стороне, позволяющее обрабатывать принятый циклический код и определять позицию ошибки; 3. провести комплекс численных экспериментов, в ходе которых продемонстрировать работу системы «передатчик-приемник» с использованием циклического кода.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
k	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44

№ варианта	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
k	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26

№ варианта	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
k	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8

Вопросы для подготовки:

1. Что такое циклический код?
2. Как определить полином по кодовой последовательности?
3. Что такое образующий полином циклического кода?
4. Как выполняются арифметические действия над полиномами (многочленами) циклического кода?
5. Как определить позицию ошибки в циклическом коде?

Теория:

Циклические коды получили довольно широкое применение благодаря их эффективности при обнаружении и исправлении ошибок. Название кодов произошло от их свойства, заключающегося в том, что каждая кодовая комбинация может быть получена путем циклической перестановки символов комбинации, принадлежащей к этому же коду. Если комбинация $a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}$ является разрешенной комбинацией циклического кода, то комбинация $a_{n-1}a_0a_1a_2\ldots a_{n-2}$ также принадлежит этому коду.

Циклические коды удобно рассматривать, представляя комбинацию двоичного кода не в виде последовательностей нулей и единиц, а в виде полинома от фиктивной переменной x:

$$G(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 \qquad (6.1),$$

где a_i - цифры данной системы счисления (в двоичной системе 0 и 1).

При построении циклического кода вначале определяется число информационных разрядов k по заданному объему кода. Затем находится наименьшая длина кодовых комбинаций n, обеспечивающая обнаружение или исправление ошибок заданной кратности. Значность (длина) кодовой комбинации (n), которая позволят обнаруживать и исправлять все однократные ошибки, определяется следующим выражением:

$$2^k \le \frac{2^n}{1+n} \qquad (6.2).$$

Количество проверочных разрядов $p=n-k$.

Для построения циклического кода используется образующий полином *P(x)*. Образующий полином *P(x)* должен входить в качестве сомножителя в разложение двучлена (x^n+1), являться неприводимым полиномом степени *p*. В таблице 6.1 приведены основные виды неприводимых полиномов степени *p*.

Таблица 6.1. Неприводимые полиномы степени *p*

Степень полинома (*p*)	Вид неприводимых полиномов
1	$x+1$
2	x^2+x+1
3	x^3+x+1; x^3+x^2+1
4	x^4+x+1; x^4+x^2+1
5	x^5+x^2+1; x^5+x^3+1 ; $x^5+x^3+x^2+x+1$; $x^5+x^4+x^2+x+1$ …
6	x^6+x+1 ; x^6+x^3+1 ; x^6+x^5+1; $x^6+x^4+x^2+x+1$ …
7	x^7+x+1; x^7+x^3+1; x^7+x^4+1; $x^7+x^3+x^2+x+1$…
8	$x^8+x^4+x^3+x+1$; $x^8+x^4+x^3+x^2+1$; $x^8+x^5+x^3+x+1$; $x^8+x^5+x^3+x^2+1$ …
…	

Для получения циклического кода используется следующий алгоритм. Исходная кодовая комбинация *k*-значного кода, которой соответствует полином *G(x)*, умножается на одночлен x^p. Полученный многочлен делится на образующий полином *P(x)* степени *p*. В результате умножения *G(x)* на x^p степень каждого одночлена, входящего в *G(x),* повысится на *p*. При делении произведения $x^pG(x)$ на образующий полином *P(x)* получится частное *Q(x)* такой же степени, как и *G(x)*.

Таким образом, алгоритм построения циклического кода сводится к действию над полиномами (многочленами). При этом сложение двоичных многочленов сводится к сложению по модулю два коэффициентов при равных степенях переменной *x;* умножение производится по обычному правилу перемножения степенных функций, однако полученные при этом коэффициенты при равных степенях переменной *x* складываются по модулю два; деление осуществляется по правилам деления степенных функций, при этом операции вычитания заменяются операциями суммирования по модулю два.

Результат умножения и деления можно представить в следующем виде:

$$\frac{x^pG(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)} \qquad (6.3).$$

где *R(x)* - остаток от деления $x^pG(x)$ на *P(x)*.

Умножая обе части равенства (6.3) на *P(x)* и произведя некоторые перестановки, получим полином, соответствующий циклическому коду:

$$F(x)=Q(x)P(x)=x^pG(x)+R(x) \qquad (6.4).$$

В правой части (6.4) знак минус перед *R(x)* заменен знаком плюс, так как вычитание по модулю два сводится к сложению.

В качестве примера рассмотрим информационную кодовую комбинацию с k=4 информационными разрядами. Значность кодовой комбинации, позволяющей обнаруживать и исправлять все однократные ошибки, n=7. Количество проверочных разрядов $p=n-k=3$. В качестве образующего полинома выберем полином $P(x)$ 3-ей степени:

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

Пусть исходная информационная кодовая комбинация имеет вид – 1101. Данной комбинации соответствует полином $G(x) = x^3 + x^2 + 1$. Произведение $x^p G(x) = x^3 \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^6 + x^5 + x^3$. Определяем остаток от деления $x^p G(x)$ на $P(x)$: $R(x) = 1$. Тогда полином, соответствующий циклическому коду, получим полином, соответствующий циклическому коду $F(x) = x^3 G(x) + R(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$. Полученному полиному соответствует циклический код – 1101001.

Для определения позиции ошибки в циклическом коде составляется таблица соответствия позиции ошибки и вида остатка от деления полинома, соответствующего циклическому коду, на образующий полином ($R(x)$). Каждой позиции ошибки должен соответствовать определенный остаток от деления. При этом остатки не должны совпадать.

Ход работы:

Задание I. С использованием разработанного программного обеспечения для передатчика необходимо по количеству информационных разрядов (k) определить значность кода (n), рассчитать количество проверочных разрядов (p), выбрать образующий полином $P(x)$.

Задание II. Провести цикл комплексных экспериментов (не менее 6), в ходе которого необходимо:

а) сгенерировать случайным образом информационную кодовую комбинацию, состоящую из k разрядов, на передающей стороне;

б) построить для информационной кодовой комбинации на передающей стороне циклический код, позволяющий обнаруживать и исправлять все однократные ошибки;

в) передать образующий полином с выходы программного обеспечения на передающей стороне на вход программного обеспечения приемной стороны;

г) передать циклический код от передатчика к приемнику, сгенерировав случайным образом однократную ошибку в любом разряде циклического кода;

д) при помощи программного обеспечения на приемной стороне построить таблицу соответствия позиции ошибки и вида остатка;

е) по принятому циклическому коду на приемной стороне определить полином, рассчитать остаток от деления полинома на образующий полином, по таблице соответствия определить позицию ошибки и откорректировать циклический код.

Задание III. Сделать выводы по работе.

Отчет: подготовить отчет по данной лабораторной работе согласно необходимым требованиям (пункт 3 *«Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по лабораторным работам»* данных методических указаний).

Приложение 1.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

Физико-технический институт
Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Лабораторная работа №

«Название работы»
по дисциплине
«Теория информации и кодирование»

Выполнил:
Студент 3 курса
Направление подготовки

Группа
ФИО
Проверил:
Таран Е.П.
«____» __________20____г.

Оценка: __________________

Подпись: _________________

Симферополь, 2019