Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 1

Объявление

Набирается группа на факультативный курс «Тестирование программного обеспечения».

Курс начинается с этого семестра.

Преподаватели курса: Бочкарев Борис Вячеславович, ведущий инженер тестирования программного обеспечения ООО «ПК Аквариус»; Новосад Дарья Сергеевна.

Желающие могут записаться на курс, заполнив форму https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfuFVEqQaY2DDWjy53EU6Ifz8Tyw5QlLVOMNFbDxMj85O4iLw/viewform.

О дне и времени проведения занятий будет сообщено дополнительно.

Лектор: Галкина Марина Юрьевна

Практические занятия ведут преподаватели:
группы ИП211-212 Галкина Марина Юрьевна
группы ИП213-217 Новожилов Дмитрий Иванович

Ссылка на курс в ЭИОС: https://eios.sibsutis.ru/course/view.php?id=1243

Кодовое слово: ИП<номер группы>_очное.
Например, для ИП211 кодовым словом является ИП211_очное.

АиВМО

лекции	практические занятия	контрольные работы	лабораторные занятия	курсовая работа	экзамен
1 балл	6-9 баллов	20 баллов	6-8 баллов		

На каждой лекции студенты должны самостоятельно отметить посещаемость через ЭИОС в течение 20 минут после начала лекции.

Если студент забыл или не смог отметиться самостоятельно, то на перерыве необходимо подойти к лектору и попросить отметить.

Если обнаруживается, что студент отметился в ЭИОС, но при этом отсутствовал на лекции, все начисленные за посещение лекций баллы обнуляются.

АиВМО

- лекции — 1 балл
- практические занятия — 6-9 баллов
- контрольные работы — 20 баллов
- лабораторные занятия — 6-8 баллов
- курсовая работа
- экзамен

Экзамен можно получить автоматом (только при всех защищенных лабораторных и курсовой работ):

Проценты считаются от максимально возможного кол-ва баллов

45-59% – удовлетворительно

60-84% - хорошо

85-100% - отлично

Все заработанные баллы можно смотреть в ЭИОС по ссылке Рейтинги.

1. Линейное программирование

1.1 Пример задачи линейного программирования (задача использования сырья)

На мебельной фабрике могут выпускать стулья и кресла. Сведения о ресурсах, расходе материалов и прибыли от реализации каждого изделия приведены в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход на единицу продукции	
		стул	кресло
Пиломатериалы (м^3)	10	0.01	0.03
Ткань (м^2)	2000	0.5	2
Рабочее время (ч)	1000	2	5
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	35

Найти план производства продукции максимизирующий прибыль предприятия.

Для решения задачи построим математическую модель.

x_1 – кол-во выпущенных стульев

x_2 – кол-во выпущенных кресел

Математическая модель:

$$\begin{cases} 0{,}01x_1 + 0{,}03x_2 \le 10 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 \le 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1000 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Система ограничений

$$z = 10x_1 + 35x_2 \to max$$

целевая функция

Если система ограничений и целевая функция линейны, то модель – задача линейного программирования.

1.2 Векторы и матрицы (сведения из линейной алгебры)

Упорядоченный набор n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *n-мерным вектором* и обозначать $\bar{x}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора.

Вектор, все компоненты которого равны 0, называется *нулевым вектором*: $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Два n-мерных вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *равны*, если их соответствующие координаты равны, т.е. если $x_i = y_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим над векторами две операции:

1. Умножение вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число α

$$\alpha \bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

2. Сложение векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Множество всех n-мерных векторов с определенными над ними операциями сложения и умножения на скаляр, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается R^n.

Пример 1

$R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R, x_2 \in R\}$ – двумерное векторное пространство (множество точек на плоскости)

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется вектор

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s \overline{a}_s$$

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, одновременно не равные 0, такие, что

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s \overline{a}_s = \overline{0}$$

В противном случае, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ называется *линейно независимой*.

Для линейно независимой системы равенство $\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s \overline{a}_s = \overline{0}$ выполняется лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Векторы, составляющие линейно независимую систему, называются *линейно независимыми*.

Пример 2:

Проверить линейную независимость векторов

$\overline{a}_1=(5; 3; 2)$, $\overline{a}_2=(1; 7; 3)$, $\overline{a}_3=(2; 3; 2)$, $a_4=(10; -6; 1)$

Решение:

$1\cdot\overline{a}_1-3\overline{a}_2+4\overline{a}_3-\overline{a}_4=(5-3\cdot1+4\cdot2-10,\ 3-3\cdot7+4\cdot3+6,\ 2-3\cdot3+4\cdot2-1)=$

$=(0,0,0)=\overline{0} \Rightarrow \overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4$ – л. зависимы

Базисом системы векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_s$ называется любая подсистема $\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2},\ldots,\overline{a}_{i_r}$ линейно независимых векторов этой системы, если любой вектор $\overline{a}_i$ (i = 1, 2, …, s) из исходной системы представим в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2},\ldots,\overline{a}_{i_r}$.

Теорема 1 В пространстве R^n векторы $\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$, …, $\bar{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ образуют базис.

Доказательство:

Необходимо доказать выполнение двух требований к этой системе векторов

1. Эти вектора линейно независимы

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \bar{0}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}_n$ – л. незав.

2. Любой вектор представляется в виде линейной комбинации указанных векторов.

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \bar{e}_n$$

Теорема 2 Количество векторов в любом базисе одинаково.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе этой системы.

Прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ - единичные матрицы размера $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы будем называть ранг системы векторов, составленных из столбцов этой матрицы, т. е. системы

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots \quad \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями над строками матрицы будем называть следующие действия:

1. Перестановку строк.
2. Умножение всех элементов выбранной строки на число, отличное от 0.
3. Сложение соответствующих элементов двух строк.
4. Вычеркивание строк, состоящих из нулей.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A размера $m{\times}n$ $(m \le n)$ можно привести к виду:

$$A \sim \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{r}\!\!\!\begin{matrix} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \cdots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \cdots & a'_{r,n} \end{matrix}\right\} r$$

где $r \le m$ и первые r столбцов могут занимать произвольные места в произвольном порядке. Очевидно, для такой матрицы ранг равен r.

Теорема 3 Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim\ldots\sim \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \cdots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \undersetbrace{r}{0 \quad 0 \quad \dots \quad 1} & & & & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \cdots & a'_{r,n} \end{pmatrix}\right\} r,$$

На основании вышесказанного для определения r ранга матрицы A размера $m\times n$ ($m \le n$) с помощью элементарных преобразований будем получать столбцы единичной матрицы, применяя следующий алгоритм (т.к. $m \le n$, то ранг матрицы не может быть больше m).

1. Самый большой размер единичной матрицы, который может получиться $m\times m$. Поэтому считаем, что $r = m$.
2. $s = 1$ (номер столбца текущей матрицы $m\times n$), $k = 1$ (номер столбца единичной матрицы $r\times r$, который будем получать).

3. В s-ом столбце выберем элемент отличный от 0 среди элементов $a_{ks}, a_{k+1,s}, \ldots, a_{m,s}$. Если такого элемента нет, то увеличиваем s на 1 и переходим к п.3. Не теряя общности, можно считать, что $a_{ks} \neq 0$ (этого можно добиться перестановкой строк). Элемент a_{ks} называется разрешающим.

Получаем новую матрицу, выполнив следующие преобразования:

– разделим k-ю строку на разрешающий элемент a_{ks};

– все элементы s-го столбца новой матрицы, кроме a_{ks}, равны 0;

– для расчета a'_{ij} – остальных элементов новой матрицы построим прямоугольники с вершинами в элементах a_{ij} и элементе a_{ks}:

$$\begin{array}{cc} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{array} \qquad a'_{ij} \to a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{kj}}{a_{ks}}$$

4. Вычеркнем строки, состоящие из нулей, если такие образовалась. При вычеркивании каждой строки, r уменьшается на 1.
5. Если k меньше r, то увеличиваем k и s на 1 и переходим к п.3, иначе переходим к п.6.
6. Ранг исходной матрицы будет равен r – размеру выделенной единичной матрицы.

Пример 3

Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \qquad rang(A) = 2$$

$$-3 \to -3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -7 \qquad 3 \to 3 - \frac{-4 \cdot 2}{1} = 11 \qquad 3 \to 3 - \frac{2 \cdot (-8)}{-7} = 3 - \frac{16}{7} = \frac{5}{7}$$

$$1 \to 1 - \frac{2 \cdot 4}{1} = -7 \qquad -5 \to -5 - \frac{-4 \cdot 4}{1} = 11 \qquad -8 \to -8 - \frac{\cancel{-7}(-8)}{\cancel{-7}} = 0$$

$$-2 \to -2 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -8 \qquad -4 \to -4 - \frac{2 \cdot 11}{-7} = -4 + \frac{22}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$4 \to 4 - \frac{3 \cdot 4}{1} = -8 \qquad 11 \to 11 - \frac{11 \cdot \cancel{(-7)}}{\cancel{-7}} = 0$$

1.3 Метод Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим через A матрицу системы ограничений, а через $\overline{A}$ - расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Для решения системы будем использовать метод полного исключения неизвестных или метод Жордана-Гаусса. Суть этого метода состоит в том, чтобы, выполнив элементарные преобразования над строками матрицы $\overline{A}$, аналогично алгоритму нахождения ранга матрицы A, получить матрицу вида:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \ldots \\ \underbrace{0}_{} & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \cdots & a'_{r,n} & b'_n \end{array} \right) \Big\} r$$

r

Преобразования матрицы называются *жордановыми исключениями*. В процессе жордановых исключений возможны следующие случаи:

1. Получена строка, состоящая из нулей, кроме последнего коэффициента (правой части уравнения). В этом случае система не имеет решения.

2. Ранг матрицы A равен количеству уравнений m и числу неизвестных n ($r = m = n$). Тогда система имеет единственное решение.

3. Ранг матрицы A не превосходит количества уравнений m ($r \le m$) и $m < n$. Тогда система имеет бесконечно много решений.

Пусть имеет место третий случай, и расширенная матрица системы приведена к виду:

$$\overline{A} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} & b'_r \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{r}$$

По преобразованной матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{1,n} x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{2,n} x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_r + a'_{r,r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{r,n} x_n = b'_r \end{cases}$$

Система называется *приведенной к единичному базису*.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$, соответствующие столбцам единичной матрицы, называются *базисными*, все остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – *свободными*.

$$
\begin{cases}
\underline{x_1} + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\
\underline{x_2} + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\
\dots\dots\dots \\
\underline{x_r} + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{r,n}x_n = b'_r
\end{cases}
$$

Если выразить в системе, приведенной к единичному базису, базисные переменные через свободные, то получим *общее решение системы*:

$$
\begin{cases}
x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1,n}x_n \\
x_2 = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2n}x_n \\
\dots\dots\dots \\
x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{r,n}x_n
\end{cases}
$$

$x_{r+1}, \dots x_n$ – принимают любые значения

Замечание:

При программном решении систем может возникнуть деление на очень маленькое число (если диагональный элемент близок к нулю), поэтому используют методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце. Для этого в п. 3 алгоритма преобразований матрицы в качестве разрешающего выбирают максимальный по модулю элемент k-го столбца среди элементов a_{ks}, $a_{k+1,\mathrm{s}}$, …, a_{ms} и переставляют строки матрицы таким образом, чтобы он оказался на k-ой строке.

Метод Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце необходимо реализовать в первой лабораторной работе.

Пример 4

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: без выбора главного элемента в столбце

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \end{array}$$

$$1 \to 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0 \qquad -4 \to -4 - \frac{-6 \cdot 1}{1} = 2 \qquad -6 \to -6 - \frac{2 \cdot 2}{-1} = -2$$

$$1 \to 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0 \qquad -2 \to -2 - \frac{-6 \cdot 1}{1} = 4 \qquad 4 \to 4 - \frac{-2 \cdot 2}{-1} = 0$$

$$1 \to 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -1 \qquad 0 \to 0 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 3 \qquad -3 \to -3 - \frac{2 \cdot 3}{-1} = 3$$

$$0 \to 0 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -2 \qquad 3 \to 3 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 6 \qquad 6 \to 6 - \frac{3 \cdot (-2)}{-1} = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 < 3 \ (\text{кол-во } x_i)$$

Система имеет бесконечно много решений

$$\begin{cases} \underline{x_1} + x_2 - 2x_4 = 3 \\ \underline{x_3} - 2x_4 = -3 \end{cases}$$ – система, приведенная к ед. базису

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -3 + 2x_4 \end{cases}$$ общее решение

Решение, если использовать метод с выбором главного элемента.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \underset{\max}{-2} & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$-6 \to -6 - \frac{\cancel{2} \cdot 4}{-\cancel{2}} = -2$$

$$2 \to 2 - \frac{4(-1)}{-2} = 0$$

$$-3 \to -3 - \frac{\cancel{2} \cdot 6}{-\cancel{2}} = 3$$

$$3 \to 3 - \frac{6 \cdot (-1)}{-2} = 0$$