5. Matrius, sistemes, determinants

6. Espais vectorials

   Espai vectorial. Subespais.

   Combinacions lineals. Subespai generat

   Independència lineal.

   Bases. Dimensió. Coordenades.

   Canvis de base.

7. Aplicacions lineals

8. Diagonalització

Subespai generat

Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt

$$\boxed{\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},}$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \ldots, u_k$

Proposició

El subespai generat $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \ldots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \quad \text{tq.} \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k v_k \end{array}}$$

discutir un sistema d'equacions lineals

p.e.: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = W$

Plantegem l'equació:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \right.\right)}_{A'}$$

té solució $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$

Comprovem si té solució:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3 \Rightarrow$ té solució

$\Rightarrow \boxed{v \in W}$

6.4 Independència lineal

Siguin $u_1, \ldots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \ldots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)

Exemples:

- El vector $\mathbf{0}_E$ és linealment dependent
- Donat un vector $u \neq \mathbf{0}_E$, el vector u és linealment independent
- Si u és un vector qualsevol i λ és un escalar, $\{u, \lambda u\}$ és LD

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i,j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$
  (també a $\{x^d, x^{d-1}, \ldots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

$P_d(\mathbb{K})$

RECORDEM:

$\{b_1, \dots, b_n\}$ és base d'E $\Longleftrightarrow$

1) $\{b_1, \dots, b_n\}$ L.I. :

$b_1, \dots, b_n$ L.I $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0\right)$

2) $\{b_1, \dots, b_n\}$ genera E :

$b_1, \dots, b_n$ generen E $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow E = \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \{\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'E

1 **Proposició**

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

2 **Proposició**

Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

3 **Corol·lari**

Tota base d'E té n elements

Demostració de 1

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E

$$v \in E \underset{\langle b_1, \dots, b_n \rangle = E}{\Rightarrow} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

Els coeficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ únics:

Si $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ tq. $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

$$\begin{array}{l} v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \\ v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \end{array} \Big\rangle \text{ restem}$$

$$0_E = (\beta_1 - \alpha_1) b_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) b_n \Rightarrow$$

$$\underset{\{b_1, \dots, b_n\} = B \text{ L.I.}}{\Rightarrow} \beta_1 - \alpha_1 = 0, \dots, \beta_n - \alpha_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

<u>OBSERVACIÓ</u>: $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ base d'E

$$\left.\begin{array}{l} u,v\in E \\ \lambda\in \mathbb{K}\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}(u+v)_B=(u)_B+(v)_B \\ (\lambda u)_B=\lambda (u)_B\end{array}$$

$(u)_B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \Leftrightarrow u=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n$

$(v)_B=(\beta_1,\dots,\beta_n) \Leftrightarrow v=\beta_1 b_1+\dots+\beta_n b_n$

$$u+v=(\alpha_1+\beta_1)b_1+\dots+(\alpha_n+\beta_n)b_n$$

$$\Rightarrow \boxed{(u+v)_B}=(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)=$$
$$=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n)=$$
$$=\boxed{(u)_B+(v)_B}$$

$$\lambda u=\lambda(\alpha_1 b_1)+\dots+\lambda(\alpha_n b_n)$$
$$=(\lambda\alpha_1)b_1+\dots+(\lambda\alpha_n)b_n$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda u)_B}=(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n)=$$
$$=\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=$$
$$=\boxed{\lambda(u)_B}$$

Per tant, si a un espai vectorial tenim una base $B=\{b_1,\dots,b_n\}$, podem operar els vectors utilitzant coordenades en la base B com si fossin vectors de $\mathbb{K}^n$

2

Proposició Sigui $\{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E.

Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

Demostració:

$\{u_1, \dots, u_k\}$ L.I.

$\Updownarrow$

l'equació $x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = 0_E$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$(x_1 u_1 + \dots + x_k u_k)_B = (0_E)_B$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$x_1 (u_1)_B + \dots + x_k (u_k)_B = (0_E)_B$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{x_1 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ (u_1)_B \\ \downarrow \end{pmatrix} + \dots + x_k \begin{pmatrix} \uparrow \\ (u_k)_B \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sist. equacions lineals homogeni amb } k \text{ variables}}$$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$$\mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{K}) \ni A = \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (u_1)_B & \dots & (u_k)_B \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}$$ = matriu de coef. del sistema té rang k

$\Longrightarrow k \leq n$ (= # files d'A)

③

Corol·lari Sigui $\{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E.

Tota base d'E té n elements

Demostració

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d' E

$B' = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ una altra base d'E

$$\left.\begin{array}{l} B' \text{ L.I., } B \text{ base d'}E : \overset{②}{\Longrightarrow} k \le n \\ \\ B \text{ L.I., } B' \text{ base d'}E : \overset{②}{\Longrightarrow} n \le k \end{array}\right\} \Longrightarrow k = n$$

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d'E és n i sigui $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ un subconjunt d'E

- si W és un conjunt LI, aleshores W és una base d'E
- si W genera E, aleshores W és una base d'E

Si S és un subespai d'E aleshores

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

ATENCIÓ!

E e.v., S_1, S_2 subespais d'E

- $\dim S_1 = \dim S_2 \not\Rightarrow S_1 = S_2$
- $S_1 \subseteq S_2$ i $\dim S_1 = \dim S_2 \Longrightarrow S_1 = S_2$

E espai vectorial de dimensió n :

- n és el màxim nombre de vtors L.I. que podem trobar a E
- n és el mínim nombre de vectors que calen per generar E

és a dir, $S \subseteq E$:

$$\begin{cases} S \text{ L.I.} \Rightarrow |S| \leq n \\ \langle S \rangle = E \Rightarrow |S| \geq n \end{cases}$$

Si $\dim E = n$:

$$B \subseteq E \begin{cases} \text{L.I.} \\ \langle B \rangle = E \\ |B| = n \end{cases}$$

dues d'aquestes condicions impliquen la tercera

L.I., $\langle B \rangle = E$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

L.I., $|B| = n$ $\iff$ $\langle B \rangle = E$, $|B| = n$