

Teoria de la Computació

Tema 2: Autòmats Finites

Teoria:

- R. Cases i L. Márquez "Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals": Capítols 4 i 5
(Llibre TC (llenguatges regulars i incontextuals)).
- M. Sipser, "Introduction to the Theory of Computation": Section 1.1 Finite Automata, Section 1.2 Nondeterminism. No conté una secció explícita per a la Minimització d'Autòmats, només Problems 1.51 i 1.52.
- Vídeos del 4 al 13

Exercicis per a l'avaluació contínua:

ACLARIMENT: Quan diem “**calcula explícitament**”, volem dir calculeu l'autòmat aplicant l'algorisme pertinent (intersecció d'autòmats, reunió d'autòmats, ...) explicant la construcció de l'autòmat (intersecció, reunió, ...) i si cal l'algorisme de determinització i l'algorisme de minimització.

1. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA intersección $A_1 \cap A_2$, determinízalo y minimízalo.
2. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$, determinízalo y minimízalo.
3. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xay \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$, determinízalo y minimízalo.
4. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{aaw \mid w \in \{a, b\}^*\}$, y calcula explícitamente \overline{A} .
5. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{valor}_2(w) \in \dot{3}\}$, y calcula explícitamente \overline{A} .
6. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \in \dot{3} + 1\}$, y calcula explícitamente \overline{A} .
7. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxbby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el λ -NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.
8. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.

9. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a, b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.
10. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xay \in \{a, b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^* , determinízalo y minimízalo.
11. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xaby \in \{a, b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^* , determinízalo y minimízalo.
12. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xabby \in \{a, b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^* , determinízalo y minimízalo.
13. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall w_1, w_2 (w = w_1aw_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R , determinízalo y minimízalo.
14. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall w_1, w_2 (w = w_1aw_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2} + 1)\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R , determinízalo y minimízalo.
15. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall w_1, w_2 (w = w_1aw_2 \Rightarrow |w_1| \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R , determinízalo y minimízalo.
16. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbya \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = aa$, $\sigma(b) = ba$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.
17. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbyc \mid x, y \in \{a, b, c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.
18. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xbcy a \mid x, y \in \{a, b, c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = bbb$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.
19. Sea A el DFA mínimo que reconoce a los números binarios múltiples de 3. Calcula $\sigma^{-1}(A)$ tomando como σ los morfismos:
 - (a) $\sigma(a) = 01$, $\sigma(b) = 0$, $\sigma(c) = \lambda$.
 - (b) $\sigma(a) = 10$, $\sigma(b) = 0$, $\sigma(c) = \lambda$.
 - (c) $\sigma(a) = 00$, $\sigma(b) = 11$, $\sigma(c) = \lambda$.
 - (d) $\sigma(a) = 001$, $\sigma(b) = 101$, $\sigma(c) = 0$.
20. Diseña un algoritmo de coste razonable para encontrar los estados no accesibles de un DFA de entrada.
21. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta alguna palabra.
22. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta infinitas palabras.

23. Cuál es el coste del algoritmo de determinización de NFA's en DFA's.
24. Cuál es el coste temporal de las siguientes operaciones de DFA's:
- (a) intersección.
 - (b) unión.
 - (c) complementario.
 - (d) concatenación (incluyendo determinización).
 - (e) estrella (incluyendo determinización).
 - (f) reverso (incluyendo determinización).
 - (g) aplicación de morfismo (incluyendo determinización).
 - (h) aplicación de morfismo inverso.
25. Cuál es el coste del algoritmo de minimización con una implementación razonable.
26. Propón un algoritmo de coste razonable para saber si dos DFA's de entrada reconocen el mismo lenguaje.
27. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, si dados dos DFA's de entrada, el lenguaje generado por el primero está incluido en el lenguaje generado por el segundo.
28. Justifiqueu la veracitat o falsetat de les següents afirmacions per a DFAs mínims A, A_1, A_2 , NFAs B, B_1, B_2, B_3 i morfisme σ . En cas que les operacions que apareixen hagin estat definides només per a DFAs, assumiu la seva extensió natural a NFAs.
- (a) $A_1 \cap A_2$ és DFA mínim.
 - (b) $A_1 \cup A_2$ és DFA mínim.
 - (c) \bar{A} és DFA mínim.
 - (d) $\sigma(A)$ és DFA.
 - (e) $\sigma^{-1}(A)$ és DFA mínim.
 - (f) $\bar{\bar{A}} = A$.
 - (g) $(B^R)^R = B$.
 - (h) $(B^*)^* = B^*$.
 - (i) $(B_1 B_2) B_3 = B_1 (B_2 B_3)$.
 - (j) $(B_1 B_2)^R = B_2^R B_1^R$.
 - (k) $(B^R)^* = (B^*)^R$.
 - (l) En el cas en que A^R també sigui DFA, llavors podem concloure que és mínim.
29. Decimos que un NFA es de aceptación única si para cada palabra aceptada existe una única ejecución aceptadora. Demuestra que, para un NFA de aceptación única A , A^R es un NFA de aceptación única.

30. Dado un lenguaje L , definimos $\text{Prefijos}(L)$ como el lenguaje $\{w|\exists x : (wx \in L)\}$. Dado un DFA A , cómo se puede construir un DFA $\text{Prefijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\text{Prefijos}(A)) = \text{Prefijos}(\mathcal{L}(A))$.
31. Dado un lenguaje L , definimos $\text{Sufijos}(L)$ como el lenguaje $\{w|\exists x : (xw \in L)\}$. Dado un DFA A , cómo se puede construir un DFA $\text{Sufijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\text{Sufijos}(A)) = \text{Sufijos}(\mathcal{L}(A))$.
32. Donats dos llenguatges $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, definim

$$\text{intercalAND}(L_1, L_2) = \{x_1y_1...x_ny_n | (n \geq 1) \wedge (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \Sigma) \wedge (x_1...x_n \in L_1) \wedge (y_1...y_n \in L_2)\}$$
Demostreu que si L_1 i L_2 són regulars, aleshores $\text{intercalAND}(L_1, L_2)$ també és regular.
33. Donat un llenguatge L , definim $\text{FirstHalf}(L) = \{x|\exists y : (|x| = |y| \wedge xy \in L)\}$. Demostreu que si L és regular, aleshores $\text{FirstHalf}(L)$ és regular.
34. Dado un natural n definimos $L_n = \{w \in \{0,1\}^* | \exists k : (\text{valor}_2(w) = k \cdot 2^n)\}$. Justifica que cualquier L_n es regular. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce L_n ?
35. Sigui $B_n = \{a^k | k \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge B_n és regular.
36. Sigui $C_n = \{x \in \{0,1\}^* | \text{valor}_2(x) \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge C_n és regular.
37. Demostreu que el llenguatge $L_n = \{xay | x, y \in \{a,b\}^* \wedge |y| = n\}$, per a $n \geq 0$, té un DFA de 2^{n+1} estats.
38. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce las palabras sobre $\{a,b,c\}$ que contienen al menos 100 ocurrencias de cada uno de estos tres símbolos.