Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

$\left\{\begin{array}{l}\text{nucli i imatge} \\ \text{apl. lineals injectives, exhaustives, biject.}\end{array}\right.$

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

7.2 Nucli i imatge

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal

El **nucli** d'f és

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

La **imatge** d'f és

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \underbrace{\{f(u) : u \in E\}}_{= f(E)}$$

Proposició

$\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ són subespais vectorials d'E i F, respectivament

- $0_E \in \operatorname{Ker} f$ ja que $f(0_E) = 0_F$
  Per tant $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$

- $$\operatorname{Ker} f = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{\{0_F\}}_{\text{subespai d'}F})}_{\Rightarrow\ \text{subespai d'}E} \subseteq E$$

- $$\operatorname{Im} f = \underbrace{f(\underbrace{E}_{\text{subespai d'}E})}_{\Rightarrow\ \text{subespai d'}F} \subseteq F$$

Càlcul efectiu del nucli i de la imatge

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases d'E i F, resp., i sigui $M = M_W^B(f)$ la matriu associada a f en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de m equacions i n incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La dimensió del nucli és $n - \mathrm{rang}(M)$

- Imatge: $\mathrm{Im}(f) = \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle$
  La dimensió de la imatge és el rang de M
  Considerant una matriu escalonada equivalent a M, les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de M que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

$\mathrm{Im} f = f(E) = f(\langle b_1, \ldots, b_n \rangle) = \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle$

Nucli:

Resoldre el sistema homogeni que té per matriu de coeficients, la matriu associada a f:

$u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = 0_F$: $\boxed{M_W^B(f) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vector genèric} \\ \text{d'E en base } B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(0_F)_W}}$

OBS:

$\dim \operatorname{Ker} f$ = # graus de llibertat del sistema

= # incògnites − rang $M(f)$

= $\dim E - \operatorname{rang} M(f)$

base $\operatorname{Ker} f$: a partir de la solució del sistema en forma paramètrica.

base i dim $\operatorname{Im} f$:

$\operatorname{Im} f = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}(f(b_1), \dots, f(b_n)) =$

$= \operatorname{rang} M(f) = r$

i una base està formada per r columnes de $M(f)$ L.I.

Per tant: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E}$

EXEMPLES

Calculeu bases i dimensió de Ker f i Im f:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$, $M^{C_3}_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $rg\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ 2 & \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ dim Im $f = 2$
dim Ker $f = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 2 = 1$

- base Im f:

Im $f \subseteq \mathbb{R}^2$, dim Im f = dim $\mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow$ Im $f = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ qualsevol base de $\mathbb{R}^2$ és base d'Im f

p.e. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- base Ker f:

resolem el sistema homogeni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1/2 \\ 3/4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Solució: $\begin{cases} x = 1/2\, z \\ y = -3/4\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2\, z \\ -3/4\, z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solucions: $\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\boxed{2)\ f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix},\ M_{C_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

- $\text{rang } M_{C_3}^{C_3} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ldots = 3$

$$\left\langle \begin{array}{l} \dim \operatorname{Im} f = \text{rg } M_{C_3}^{C_3} = 3 \\ \dim \operatorname{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{array} \right.$$

- base $\operatorname{Im} f$: $\left. \begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

Per tant, qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és base d'$\operatorname{Im} f$

p.e: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- base $\operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ no admet base

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

$C_P = \{1, x, x^2\}$, $C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $M^{C_P}_{C_M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{rg } M^{C_P}_{C_M} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ldots = 3$$

$$\dim \operatorname{Im} f = \text{rg } M^{C_P}_{C_M} = 3$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim P_2(\mathbb{R})} - \text{rg } M^{C_P}_{C_M} = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

Base Im f : 3 columnes L.I. de $M^{C_P}_{C_M}$, en aquest cas, les úniques 3 columnes de $M^{C_P}_{C_M}$ ja que són L.I per ser $\text{rg } M^{C_P}_{C_M} = 3$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ és base d'Im } f$$

matrius expresades en base C_M

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ és base d'Im } f$$

Base Ker f : no admet base per ser $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Sigui $f : E \rightarrow f$ una aplicació lineal i M una matriu associada a f

Teorema

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen **isomorfismes**

Caracterització del tipus d'aplicació

- f és injectiva 1 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0_E}\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E)$
- f és exhaustiva
  $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(F)$
  2
- f és un isomorfisme $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors
  f és un isomorfisme $\Leftrightarrow f$ és injectiva $\Leftrightarrow f$ és exhaustiva

Recordem:

f injectiva si: $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

$$\equiv$$

$\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

f exhaustiva si: $\forall w \in F,\ \exists u \in E\ \ f(u) = w$

$$\equiv$$

$f(E) = F$

f bijectiva si f és injectiva i exhaustiva

Demostracions:

① f injectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$:

dem: $\Rightarrow$) Sabem que $0_E \in \operatorname{Ker} f$

Si $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, aleshores $\exists u \in \operatorname{Ker} f$, $u \neq 0_E$

$f(0_E) = f(u) = 0_F \Rightarrow f$ NO injectiva

$\Leftarrow$) $f(u) = f(v) \overset{?}{\Rightarrow} u = v$

$f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_F \overset{f \text{ lineal}}{\Rightarrow} f(u-v) = 0_F \Rightarrow$

$\underset{\text{def. Ker} f}{\Rightarrow} u - v \in \operatorname{Ker} f \underset{\operatorname{Ker} f = \{0_E\}}{\Rightarrow} u - v = 0_E \Rightarrow u = v$

i abans ja hem vist que:

$\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim E$

② f exhaustiva $\underset{\text{def. d'aplicació exhaustiva}}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im} f = f(E) = F$

Per ser $\operatorname{Im} f$ un subespai d'F:

$\operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F$

i abans ja hem vist que $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} M$, per tant:

f exhaustiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim F$

③ Si $\dim E = \dim F$:

$\operatorname{rang} M = \dim E \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim F$

f injectiva $\Leftrightarrow f$ exhaustiva

$f: E \longrightarrow F$ aplicació lineal, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matriu associada

$\dim E = n$, $\dim F = m$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ injectiva} & \Longleftrightarrow & \operatorname{rang} M = \dim E \\ f \text{ exhaustiva} & \Longleftrightarrow & \operatorname{rang} M = \dim F \\ f \text{ bijectiva} & \Longleftrightarrow & \operatorname{rang} M = \dim E = \dim F \end{array}}$$

OBSERVACIONS:

1 $\begin{cases} f \text{ injectiva} \Longrightarrow \dim E \leq \dim F \\ \dim E > \dim F \Longrightarrow f \text{ NO injectiva} \end{cases}$ $\not\Longleftarrow$

p.e: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO inj.

2 $\begin{cases} f \text{ exhaustiva} \Longrightarrow \dim F \leq \dim E \\ \dim E < \dim F \Longrightarrow f \text{ NO exhaustiva} \end{cases}$ $\not\Longleftarrow$

p.e: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO exh.

3 $\begin{cases} f \text{ bijectiva} \Longrightarrow \dim E = \dim F \\ \dim E \neq \dim F \Longrightarrow f \text{ NO bijectiva} \end{cases}$ $\not\Longleftarrow$

p.e: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO bij.

ATENCIÓ !

$$\dim E = \dim F \not\Longrightarrow f \text{ bijectiva}$$

EXEMPLES : són injectives, exhaustives, bijectives ... ?

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z\end{pmatrix}$, $M^{C_3}_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}\, M^{C_3}_{C_2} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} = 2 \begin{cases} \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{NO inj.} \\ = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{exh.}\end{cases}$ NO bij.

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z\end{pmatrix}$, $M^{C_3}_{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}\, M^{C_3}_{C_3} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix} = \ldots = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ bijectiva

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c\end{pmatrix}$

$C_P = \{1, x, x^2\}$, $C_M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $M^{C_P}_{C_M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}\, M^{C_P}_{C_M} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} = \ldots = 3 \begin{cases} = \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{injectiva} \\ \neq 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{NO exh.}\end{cases}$ NO bij.

4) Determineu si les aplicacions lineals següents poden ser injectives, exhaustives, bijectives :

(a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $2 < 4$ $\Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(b) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

dim: $4 > 2$ $\Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(c) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $3 < 4$ $\Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(d) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dim: $4 > 3$ $\Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(e) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $4 = 4$ no podem descartar res!

Antimatges: $f: E \longrightarrow F$

$v \in F, \quad f^{-1}(v) = \{u \in E : f(u) = v\}$

pot passar:
$$\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \\ |f^{-1}(v)| = 1 \\ |f^{-1}(v)| > 1 \end{cases}$$

Calcul de $f^{-1}(v)$

Resoldre el sistema d'equacions lineals:

$$M^{B_E}_{B_F} \cdot X = (v)_{B_F}$$

$M^{B_E}_{B_F} = M$:
$$\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \iff S.I. \iff rg M < rg(M|v) \\ |f^{-1}(v)| = 1 \iff S.C.D \iff rg M = rg(M|v) = \dim E \\ |f^{-1}(v)| > 1 \iff S.C.I. \iff rg M = rg(M|v) < \dim E \end{cases}$$

Si
$$\begin{cases} f^{-1}(v) \neq \emptyset, \ \forall v \in F : f \text{ exhaustiva.} \\ |f^{-1}(v)| \leq 1, \ \forall v \in F : f \text{ injectiva} \\ |f^{-1}(v)| = 1, \ \forall v \in F : f \text{ bijectiva} \end{cases}$$