Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtica Aplicada II

Febrer 2012

5. Matrius, sistemes i determinants

5.1 Matrius: operacions bàsiques i matrius escalonades

Repàs de l'àlgebra de matrius

Els escalars

Per un **cos d'escalars** $\mathbb{K}$ entendrem un conjunt de nombres amb dues operacions (*suma* i *producte*) tals que

- es satisfan les propietats habituals (*commutativa*, *associativa*, *distributiva*, *elements neutres*)
- són invertibles (podem *restar* i *dividir*)

Exemples: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$

Matrius

Siguin $m, n \geq 1$ enters. Una **matriu de tipus $m \times n$ amb elements al cos $\mathbb{K}$** consisteix en mn elements de $\mathbb{K}$ arranjats en una taula de m files i n columnes

Denotarem per a_{ij} l'element que es troba a la fila i, columna j

Una matriu genèrica la representem així:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Farem servir també la notació $A = (a_{ij})_{m \times n}$

El conjunt de totes les matrius $m \times n$ el denotarem per $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Tipus de matrius

- Una matriu de tipus $1 \times n$ s'anomena matriu fila
- Una matriu de tipus $m \times 1$ s'anomena matriu columna
- La matriu nul·la $O_{m,n}$ (o simplement O) és la matriu tipus $m \times n$ on tots els elements són iguals a 0
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena quadrada. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{n\times n}$ és
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$
  - diagonal si és triangular superior i inferior simultàniament
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot i
- La matriu identitat I_n és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)$

Suma de matrius

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propietats

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu B tal que
$$A + B = B + A = O$$
(a aquesta B l'anomenem $-A$)

Producte per escalars

Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar

El **producte d'A per l'escalar λ** és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Propietats

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Fixem-nos que $(-1)A = -A$

Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times m}$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada A és

simètrica si $A^t = A$
antisimètrica si $A^t = -A$

Producte de matrius

Siguin $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Observacions

- El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general $AB \neq BA$
- El producte és una operació interna dins de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propietats del producte de matrius

Si A, B, C són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$
- *(Distributives)* $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^t A^t$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per A^k el producte $AA \cdots A$ (és a dir, $A^2 = AA, A^3 = AAA$, etc.)

Prop. • $\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

• El producte de matrius no és commutatiu en general.

Matriu inversa

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que B és la **matriu inversa** d'A si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que A és **invertible** i denotem per A^{-1} la matriu inversa

Observacions

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

Propietats de la matriu inversa

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

- Si $A_1, \dots, A_k$ són invertibles, aleshores el producte $A_1 \cdots A_k$ és invertible i $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Transformacions elementals i matrius escalonades

Transformacions elementals

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

(I) intercanviar dues files d'A

(II) multiplicar una fila d'A per un escalar no nul

(III) sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

EXEMPLES:

Transformacions elementals:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus I: permutem les files 3,6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus II: multipliquem la fila 3 per 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus III: Sumem a la fila 3ª la 6ª multiplicada per 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius elementals:

Si denotem:

matriu elemental tipus
- I: P_{ij}, si intercanviem les files i, j
- II: $M_i(\lambda)$, si multipliquem la fila i per λ
- III: $S_{ij}(\lambda)$, si sumem a la fila i, la fila j multiplicada per λ

$$I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $P_{2,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $M_4(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $S_{3,6}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrius equivalents

Teorema
Sigui T una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació T a la matriu M és EM, on E és la matriu elemental resultant d'aplicar T a la identitat I_m

Una matriu B és **equivalent (per files)** a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si B és equivalent a A podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les E_i són matrius elementals

Matrius escalonades

OBS: de vegades només s'exigeix que els pivots siguin $\neq 0$, no necessàriament 1's

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior.

Matriu escalonada reduïda: matriu escalonada amb pivots $=1$ i tots els altres elements de les columnes dels pivots han de ser 0's

Teorema

Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files i a una matriu escalonada reduïda per files

El **rang** d'una matriu A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A

- Prop. Si A és una matriu $m \times n$, aleshores $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$

Exemple de matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ té rang 4 perque hi ha 4 files no nul·les.

Exemple de matriu escalonada equivalent i càlcul del rang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{permutem files 1 i 2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$\begin{cases} 2^{a} := 2^{a} - 3\cdot 1^{a} \\ 3^{a} := 3^{a} + 2\cdot 1^{a} \\ 4^{a} := 4^{a} - 5\cdot 1^{a} \end{cases}$

permutem files
$2^{a} := 4^{a}$
$3^{a} := 2^{a}$
$4^{a} := 3^{a}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 43 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 52 & -3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 1 & -3/52 & 14/52 \end{pmatrix}$$

$3^{a} := 3^{a} - 4\cdot 2^{a}$
$4^{a} := 4^{a} - 4\cdot 2^{a}$

$3^{a} := \frac{1}{43}\cdot 3^{a}$
$4^{a} := \frac{1}{52}\, 4^{a}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & -233/2236 & -230/2236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 230/233 \end{pmatrix} = B$$

$4^{a} := 4^{a} - 3^{a}$

$4^{a} := -2236/233 \times 4^{a}$

- B és una matriu escalonada per files equivalent a A.
- rang A = rang B = 4, ja que B té 4 files no nul·les

Aplicació al càlcul de la inversa (I)

Lema
Si E és una matriu elemental, aleshores E és invertible i la seva inversa E^{-1} també és una matriu elemental

Comprovació:

(I) Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files i i j), tenim $BB = I$

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

(II) Si C_λ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$

$(M_i(\lambda))^{-1} = M_i(1/\lambda)$

(II) Si D_k és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila i la fila j multiplicada per k), tenim $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$

$(S_{ij}(\lambda))^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

EXEMPLES:

A	A^{-1}

I)

$$P_{3,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{3,6}$$

II)

$$M_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_3(1/4)$$

III)

$$S_{6,3}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{6,3}(-5)$$

Aplicació al càlcul de la inversa (II)

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Corol·lari

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si el rang d'A és n

Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

$$\text{si } I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A, \text{ aleshores } A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$$

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar A^{-1}, si existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{-1} = B$
- Altrament, A no és invertible

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$2^a := 2^a - 1^a$
$3^a := 3^a - 2\cdot 1^a$
$4^a := 4^a - 1^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim$$

$2^a := (-1)\times 2^a$

$3^a := 3^a - 2^a$
$4^a := 4^a - 2^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & +4 & +1 & +3 & -1 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4\end{array}\right)$$

permutem les files 3 i 4 i les multipliquem per −1

$4^a := 4^a + (-4)\cdot 3^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 26 & -16 & 5 & -20\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 & -13 & 5 & -17\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4\end{array}\right)$$

$1^a := 1^a + 4^a$
$2^a := 2^a - 5\cdot 4^a$

$1^a := 1^a - 3^a$
$2^a := 2^a - 3\cdot 3^a$

$$\underset{1^{a} := 1^{a} - 2^{a}}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -26 & 17 & -6 & 22 \\ 20 & -13 & 5 & -17 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Per tant, A és invertible i:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -26 & 17 & -6 & 22 \\ 20 & -13 & 5 & -17 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$