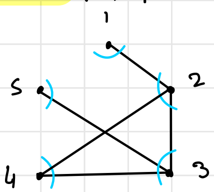
Mercè Mora
Omega - Despatx 431
merce.mora@upc.edu

Temari
1- Grafs
2- Àlgebra lineal

Teoria de grafs

Un graf és un parell de conjunts ordenats G = (V, A), on el primer conjunt és finit i no buit i el segon un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents

Vertex (V, quants punts hi ha) també és pot anomenar el ordre del graf. I les **Arestes** (A, quantes connexions hi ha) s'anomenen nombre.



$\begin{cases} 3 \sim 5 \\ 3 \nsim 1 \end{cases}$

$35 \in A$

Ordre de G: 5 V={1, 2, 3, 4, 5}
Nombre de G: 5 A={{1,2},{2,3},{2,4}{3,4},{3,5}}

Grau: Quantes arestes van a parar al vèrtex:

Ex: $g(1) = 1$ $g(4) = 2$
$g(2) = 2$ $g(5) = 1$
$g(3) = 3$

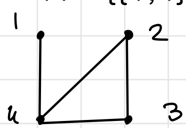
Si tenim un graf amb: G (V,A), |V| = n (ordre G = n)
|A| = m $0 <= m <= n(n-1)/2$

Maneres de representar grafs:

- G (V, A) on V = {1,2,3,4}
  A = {{1,4},{2,3},{2,4},{3,4}}
- **Llista/Taula**
  {14,23,24,34}

1	2	3	4
4	3	2	1
	4	4	2
			3

- **Grafica**



- **Matriu d'adjacència**

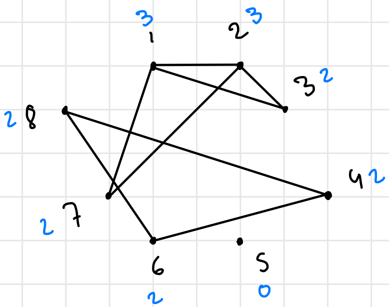
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensions = ordre del graf
Les files/columnes sumen el grau de cada vèrtex

Variables de la definició de grafs

- Multigrafs: Graf que admet varies connexions entre vèrtex
- Pseudograf: Graf que admet llaços
- Graf dirigit: Graf on les arestes estan orientades

G (V,A) ; V=[8] = {1,2,3,4,5,6,7,8}



$\delta(G) = 0$ Grau mínim
$\Delta(G) = 3$ Grau maxim

Sequencia de graus:
(3,3,2,2,2,2,2,0)

- Un graf regular vol dir que tots els numeros de la sequencia son iguals

Grau mínim o màxim d'un vèrtex a un graf d'ordre n

$$0 \le g(u) \le n-1$$

No existeix una seqüència de graus amb tots els nombres diferents

Graf d'ordre n, n > 3 —> almenys 2 vèrtex tenen el mateix grau

Si fos fals n graus $\neq$ $\underbrace{d_1 > d_2 > \dots d_n}_{\neq}$, $\rightarrow$ n-1, n-2, ..., 1, 0

$\underbrace{0 \le d_1, \dots, d_n \le n-1}$
valors posibles
0, 1, 2, ..., n-1

incompatible perque n-1 es adjacent a tots els vertext i 0 no es a cap. Contradicció △

Lema de les encaixades:
Si sumo els graus de tots els vèrtexs del graf dona dos vegades la mida del graf

$G(V,A)$ graf $\rightarrow$ $\sum_{u \in V} g(u) = 2|A|$

Corol·lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtex de grau senar

demo:

$$\underbrace{\sum_{v \in V} g(v)}_{} = \underbrace{2|A|}_{\text{parell}}$$

$$\underbrace{\sum g(v)}_{\text{parell}} + \underbrace{\sum g(v)}_{\text{senar}}$$ ha de ser parell perque la suma es un numero parell

parell + parell

Per demostrar la existencia d'un graf:

$(4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0)$

agafem el primer numero i restem 1 al nombre de posisions del numero

$-1 \; -1 \; -1 \; -1$

3 3 2 2 2 1 1 1 1 0

$-1 \; -1 \; -1$

2 1 1 2 1 1 1 1 0

2 2 1 1 1 1 1 1 0 → ordenar

$-1 \; -1$

1 0 1 1 1 1 0 1

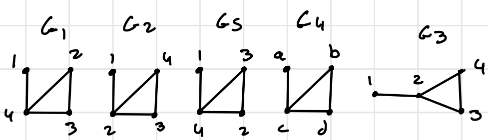
ordenar → 1 1 1 1 1 1 0 0

si hi ha un nombre parell de 1 existeix un graf

$G = (V, A)$

$G' = (V', A')$

$G = G' \Leftrightarrow V = V' \wedge A = A'$



$G_1 = G_5$

$G_2 = G_3$

G_4

Dos grafs isomorfs, tenen el mateix nombre de vertex. I existeix una aplicació bijectiva tal que: V —> V'

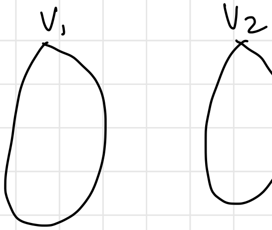
tenir en compte que $G \cong G' \rightarrow$ mateix grau

u ~ v <—> f(u) ~ f(v)

mateix grau $\not\rightarrow G \cong G'$

Per calcular la mida d'un graf bipartit:

$$\sum_{u \in V_1} g(u) = \sum_{v \in V_2} g(v) = |A|$$



No pot haber arestes entre dos vertex del mateix conjunt.

Grafs complementaris

$$\text{mida}(G) + \text{mida}(G^c) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\downarrow$

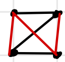
si $n = \text{ordre}(G)$

$(G^c)^c = G$ — $g_G(u) + g_{G^c}(u) = n-1$

$G \cong H \rightarrow G^c \cong H^c$

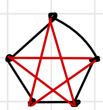
Graf autocomplementari $\Leftrightarrow$ $G \cong G^c$

$T_4 \cong T_4^c \rightarrow$



$C_5 \cong C_5^c$

$\hookrightarrow$



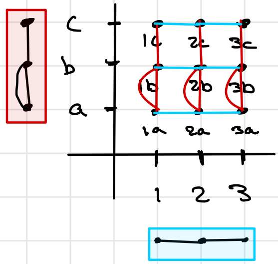
Operecions amb grafs

- Graf reunio de G i G': $G \cup G' \; (V \cup V', A \cup A')$

  si $V \cap V' = \emptyset$, l'ordre $G \cup G$ es $|V| + |V'|$ i mida $|A| + |A'|$

Graf producte cartesia $G \times G'$

$\boxed{\text{Fer fins al 12}}$



$V = \{1,2,3\}$

$V' = \{a, b, c\}$

l'ordre de $G \times G'$ es $|V| \cdot |V'|$

mida de " es $|V||A'| + |V'| \cdot |A|$

$g_{G \times G'}(u,v) = g_G(u) + g_{G'}(v)$

S'ha de copiar

$(u,u') \sim (v,v') \Leftrightarrow (uv \in A \wedge u'=v')$ o $(u=v \wedge u'v' \in A)$

Tema 2 : Recorreguts, connexio i distancia

Recorregut: Succesio alternada de vertexs i arestes

$R: v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 a_3 \ldots$

longitud = numero de arestes pel que passen

Moltes vegades unicament es donen els vertex al recorregut.
Si es comença i acaba al mateix lloc = Recoregut tancat
Si comença i acaba amb vertex diferents = " obert
Si no es repeteixen vertexs es un recorregut cami
recorregut tancat de longitut ≥ 3, que no repeteix cap vertex exepte el primer i el ultim

Un cicle passa per 2 vertex u, v $\Leftrightarrow$ hi ha dos camins u - v que no tenen cap vertex en comu.

Propietat 1:

Siguin G = (V,A) un graf u, v vertex diferents. Si la G hi ha un u-v recorregut de longitud k, aleshores hi ha un u-v camí de longitud <= k que passa per vertex i arestes del recorregut

Demo: $K \geq 1$

$K = 1$ recorregut de long. 1: u, v es un camí

- Cert per a $u-v$ recorregut $< k$ $\to$ cert per a recorregut long k.

$\forall \, k \geq 2$

- si $R = \ldots$ recorregut de long $< k$, $k \geq 2$ $\begin{cases} \text{si } R \text{ no repeteix vertex} & R = \text{camí long. } k \\ \text{si repeteix vertex} & \end{cases}$

$R: v, \cancel{a_0, v_0}, \ldots \to R' \; v, a_1, v_1 \ldots$

eliminem repetició

Propietat 2:

Siguin G = (V,A) un graf i u, v vertex diferents. Si G té dos u-v camins diferents llavors conte un cicle

Graf connex: entre qualsevol parell de vertex $\exists$ un camí

Si un graf conned d'ordre més gran que 1, llavors g(v) >= 1 per a tot $v \in V$

Definim la relació R a V: $\forall \, x, y \in V$

$x R y \iff$ existeix un $x-y$ camí a G

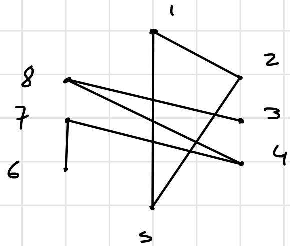
Reflexiva: $x R x$ $\exists$ $x - x$ long 0

Simetrica: $x R y \to y R x$ $x - y \to y - x$ si existeix un camí de $x - y$ el sentit a la inversa es $y - x$ que també existeix

Transitiva: $\begin{matrix} x R y \\ y R z \end{matrix} \to x R z$ Si existeix $x - y \wedge y - z$ tindrem un recorregut de $x - z$ que passa per y

Classes d'equivalencia: V

Grup de vertexs que tenen camins entre ells.



$V_1 = \{1, 2, 5\}$

$V_2 = \{3, 4, 6, 7, 8\}$

$V_1 \cup V_2 = V$

Components connexos de G:

$\underbrace{G[V_1]}_{G_1}, \ldots, \underbrace{G[V_k]}_{G_k} \rightarrow G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$

Propietat inmediata:

$G_1, \ldots, G_k$ components connexos (c.c.) de G:

$$\text{ordre}(G) = \sum_{i=1}^{k} \text{ordre}(G_i)$$

$$\text{mida}(G) = \sum_{i=1}^{k} \text{mida}(G_i)$$

Propietat 3:

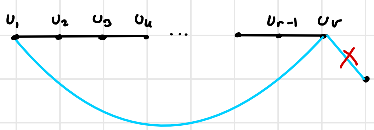
Graf 2-regular connex $\rightarrow$ G es un cicle

demo:

no hi ha camí més llarg

R: camí de longitud màxima de G: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r$

$G =$



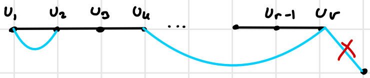
no es possible long. max

Graf cíclic n

Propietat 4 G graf 2-regular $\rightarrow$ unió de cicles
(components connexos és un cicle)

Propietat 5: G graf té com a molt $\forall v$, $g(v) \geq 2$ $\rightarrow$ G té algun cicle

demo

$G =$ 

no es possible
long. max

Com a minim la els vertex tenen grau ≥ 2, doncs obtenim un ciclic.

Propietat 6 G connex $\rightarrow$ G − a té com a molt 2 components connexos (c.c)

G connex $\rightarrow$ G − v té com a molt $g(v)$ c.c

Propietat 7 G graf connex $\rightarrow$ mida $\geq$ ordre(G) − 1

demo: inducció sobre ordre(G) ≥ 1

i) pas base: $n=1$ si un graf d'un vertex no té cap aresta

ii) pas inductiu:

$\forall n > 1$, $P(n-1) \rightarrow P(n)$

- Si $\forall v \in V(G)$, $g(v) \geq 2$ $\rightarrow$ cert $m(G) = \frac{1}{2} \sum g(v) \geq \frac{1}{2} 2n = n \geq n-1$

- No hi ha vertex de $g(v)=0$, si no G no seria connex

- Si hi ha algun vertex de grau 1. Sigui u un vertex de $g(u)=1$

aleshores $G-u$ és connex d'ordre $n-1$

H.I: $\underset{\shortparallel}{\text{mida}(G-u)} \geq \text{ord}(G-u) - 1$

$\text{mida}(G) - \cancel{1} \geq \text{ord}(G) - \cancel{1} - 1 \Leftrightarrow \text{mida}(G) \geq \text{ord}(G) - 1$

Algorismes DFS/BFS

$G(V,A)$ graf, $v \in V$

$L := \{v\}$ (llista)
$W := \{v\}$ (digit de control)

x	y: tq		L	W
1r element L	$y \sim x$, $y \notin W$	$\exists y$	$L := L \cup \{y\}$	$W := W \cup \{y\}$
		$\nexists y$	treiem x de L	

exemple 21, 22

$L: \begin{cases} \text{pila si DFS} \\ \text{cua, si BFS} \end{cases}$

$L := \{\} \to W$ conte tots els vertes del component conex de v

3. Vertex de tall i arestes pont

v és un vertex de tall si G - v té més components connexos que G
a és una aresta pont si G - a té més components connexos que G

u és v. de tall de G <—> u és un v. de tall en el c.c de G que conte u
a és aresta pont de G <—> a és aresta pont en el c.c de G que conte a

Els vertex de grau 1 no són vertex de tall
Si G és connex i a és pont, llavors G - a és un graf no connex amb exactament 2 components connexos

Caracterització dels vertex de tall i les arestes pont

- u és v. de tall de G <—> $\exists x, y \in V$, $x, y \neq u$ tq. tot x-y camí passa per u

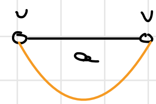
demo:
$\nexists$ x-y camí en $G - u$ $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V$, $x, y \neq u$ $\exists$ x-y camí en G que no pasa per u

- a es aresta pont de G $\Leftrightarrow$ $\exists\, x, y \in V$ tq tot $x-y$ camí pasa per a.

- a es pont de G $\Leftrightarrow$ a no es de cap cicle

demo: a no es pont $\Leftrightarrow$ es d'algun cicle

$\Rightarrow$) a no es pont $\Rightarrow$ G - a connex, $a = uv$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $\exists$ u-v camí en G - a $\Rightarrow$ l'u-v camí + aresta a es un cicle a G

$\Leftarrow$) a es d'un cicle, veurem que G - a es connex

$\forall x, y \in V(G-a) = V(G)$

$\Downarrow$

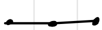
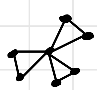
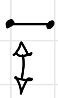
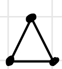
$\exists$ x-y camí en G (perque G es connex)

Si no passa per a es un x-y camí en G - a

si passa per a: cambiem a per l'altra banda del cicle que conte a $\Rightarrow$ $\exists$ x-y recorregut a G - a

$\exists$ x-y camí a G - a

Grafs connexos

$\exists v$ tall \ $\exists a$ tall	Sí	No
Sí		
No	 Unic connex	 (Complets, cicles...)

G graf amb aresta pont, sense v de tall: connex:

$a = uv$ pont:
- $g(u) = 1$: u no es de tall
- $g(u) \geq 2$: u es de tall

(si no fos de tall G - u, seria connex)

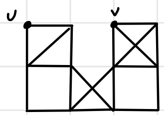
$\Downarrow$

$\exists$ w-v camí en G - u on $w \sim a$, $w \neq v$

$\exists$ un cicle w-v camí en G - u que conte a Contradicció

4. Distancia

- $d(u,v) = s$ (minim de distancia entre 2 punts)



si no estan al mateix c.c la distancia es ∞

- exentricitat d'un vertex : $e(u) = \max_{x \in V} \{ d(u,x) \}$

A partir d'ara suposarem que es connex

- diametre de G : $D(G) = \max_{u \in V} e(u) = \max \{ \max_{x,y \in V} d(x,y) \}$

$\max_{u,v \in V} d(u,v)$

- radi de G : $r(G) = \min_{u \in V} e(u)$

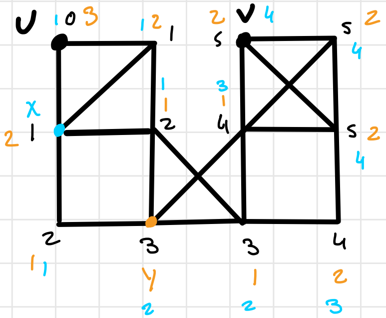
- vertex central : $u \in V \; / \; e(u) = r(G)$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) = 1 \iff x \sim y \iff x,y \in A(G)$

Propietats:

- $r(G) \leq D(G)$



- $r(G), D(G) : \forall x,y \in V$

$\downarrow$

v. central

$e(u) = r(G)$

$\left\langle \begin{array}{l} \exists\, x - u \text{ cami de long} \leq r(G) \\ \exists\, y - u \quad \text{"} \qquad \leq r(G) \end{array} \right.$

$e(U) = 5$

$e(x) = 4$

$e(y) = 3$

$\rightarrow \exists\, x - y$ recorregut de long $\leq 2r(G)$

$\exists\, x - y$ cami " " $\leq 2r(G)$

$\downarrow$

$d(u,v) \leq 2r(G)$

$\downarrow$

$D(G) = \max d(u,v) \leq 2r(G)$

$$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$$

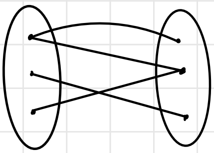
pot passar / " "

Exemple K_n / Exemple $K_{1,n}$

desigualtat triangular

$$d(u,v) + d(v,w) \leq d(u,w)$$

Caracterització dels grafs bipartits



$V = V_0 \cup V_1$, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$

No hi ha arestes dins del conjunt V_0 i V_1

Els cicles tenen longitud parell $\Leftrightarrow$ es bipartit

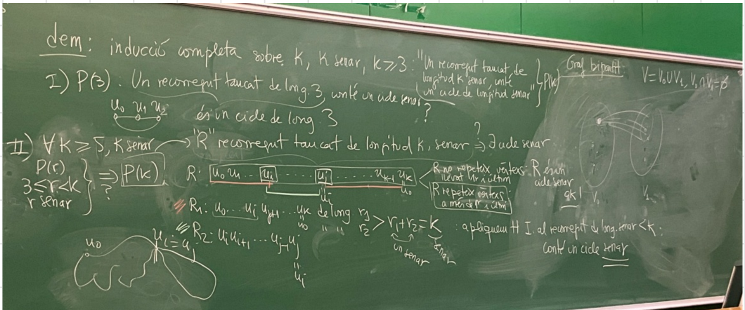
Lema: G graf
si G té algún recorregut tancat de longitud senar, aleshores G té algun cicle de longitud senar (que passa pel vèrtex i arestes del recorregut

demo: inducció completa sobre k, k senar, $k \geq 3$

i) $P(3)$ cert un recorregut tancat de long 3. ja es un cicle

ii) k senar, $k \geq 5$

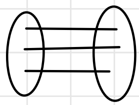
$$\left.\begin{array}{l} P(r) \text{ certa} \\ \forall r,\ 3 \leq r < k,\ r \text{ senar} \end{array}\right\} \Rightarrow P(k) \text{ cert}$$



Teorema: G graf d'ordre n, $n \geq 2$

G es bipartit $\Longleftrightarrow$ no te cicles de long. senar

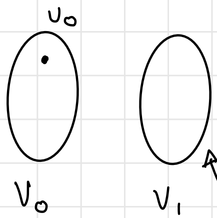
$\Rightarrow$) G bipartit



$V = V_0 \cup V_1$

Cicle en G: $v_0, v_1, \dots, v_k$
long k $\quad v_0 \in V_0,\ v_1 \in V_1,\ \dots,\ v_k \in V_0$

$\Leftarrow$) G connex



v: $d(v_0, v)$ par $\rightarrow V_0$

v: $d(v_0, v)$ senar $\rightarrow V_1$

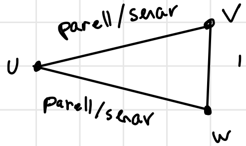
$v_0 \in V$ $\begin{cases} V_0 = \{ v : d(v_0, v) \text{ parella} \} \\ V_1 = \{ v : d(v_0, v) \text{ senar} \} \end{cases}$

$V = V_0 \cup V_1$ ✓
$V_0 \cap V_1 = \emptyset$ ✓
V_0, V_1 particions de V

Si $v, w \in V_0 \quad v \not\sim w$
Si $v, w \in V_1 \quad v \not\sim w$

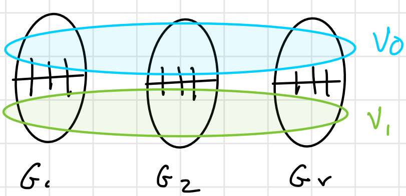
Reducció al absurd

Si $v, w \in V_0 \,/\, v \sim w$
$\exists$ recorregut tancat de long. senar
$\rightarrow$ cicle long. senar Contradicció



$$\boxed{\begin{aligned} &2 \cdot \text{parell} + 1 = \text{senar} \\ &2 \cdot \text{senar} + 1 = \text{senar} \end{aligned}}$$

Si no es connex



Si cap graf te cicles d'ordre senar
$\rightarrow$ es bipartit

Grafs Eulerians i Hamiltonians

Terminologia:

- **Senderó**: recoregut obert que no repeteix arestes
- **Circuit**: recoregut tancat que no repeteix arestes

$G(V, A)$ supasem que G es connex:

- **Senderó euleria**: Un senderó que pasa per totes les arestes del graf
- **Circuit ``**: Un circuit que pasa per totas les arestes del graf

Graf eulerià: Un graf que conté com a minim un circuit euleria. (es pot dibuixar el graf sense aixecar el boli del Full sense repetir aresta)

Teorema: $G(V, A)$ connex no trivial

- G eulerià $\leftrightarrow$ tot vertex te grau parell) *

Demo:

$\rightarrow$) si G eulerià $\rightarrow$ $\exists$ circuit euleria $\rightarrow$ si comença a $u \in V$ (per cada aresta que surt ha d'entrar una)
$\rightarrow$ si $v \neq u$ ``

$\leftarrow$) $u_0 \in V$ avançem desde u_0 per arestes diferents fins que no puguem més $\rightarrow$ el recorregut acaba en u_0 : R_0

- si les arestes del recorregut són totes G : R_0 circuit euleria $\rightarrow$ $\rightarrow$ G eulerià
- si no: Fem el mateix a el grap $G - \{$arestes $R_0\}$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ $\exists$ circuit R_1
  - si $\{$arestes de $R_0\} \cup \{$arestes $R_1\} = A$:

construim un circuit eulorià

- Si no fem el mateix en G - {arestes R_0, R_1} ...

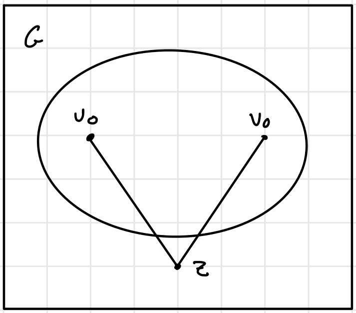
Despres de trobar tots els circuits eulerians, els podem enganchar entre ells per fer un circuit eulerià unic.

Corol·lari G (V,A) graf connex no trivial (almenys 1 aresta)

G te un sendero eulerià <-> G té exactament 2 vertex de grau senar

Demo:

$\Leftarrow$) u_0, v_0 vertex de grau senar:



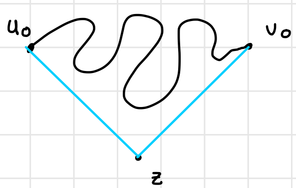
G' connex amb tots els vertex de grau parell $g(z) = 2$, $g(u_0)_{G'} = g(u_0)_G + 1$ (v_0)

$G' = (V', A')$, $V' = V \cup \{z \notin V\}$
$A' = A \cup \{u_0 z, v_0 z\}$
on u_0 i v_0 son els vertex de grau senar

$\rightarrow$ G' es eulerià $\rightarrow$ G' té un circuit eulerià $\rightarrow$ si eliminem z del circuit C, tenim un senderó eulerià en G

$\Rightarrow$) Si G té un sendero eulerià:

$u_0, x_1, x_2, \dots x_k, v_0$



afegit $\rightarrow \exists$ un circuit euleria en $G + z = G' \rightarrow G'$ te tots els graus parells $\rightarrow$
$\rightarrow$ G' euleria hi ha exactament 2 vertex de grau parell

Algorisme Fleury (trobar la solució d'un graf eulerià a la primera)

Podem agafar qualsevol aresta sempre i quan no sigui aresta pont del graf que resulta després d'eliminar les arestes per les que hem passat

Grafs Hamiltonians $G = (V, A)$

OBS: Ni el camí, ni el cicle repeteixen vertex

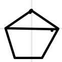
Camí Hamiltonià: Camí obert que passa per tots els vertex del graf

Cicle Hamiltonià: Cicle que passa per tots els vertex del graf

Graf Hamiltonià: graf que conte almenys un cicle Hamiltonià

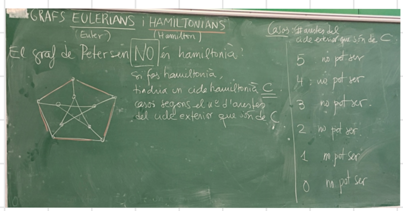
OBS: G Hamiltonià $\rightarrow$ G té un camí Hamiltonià
$\exists$ cicle Ham. $\not\leftarrow$

T_n té un camí pero no un cicle

Hamiltonià \ eulerià	Si	No
Si	C_n	
No		T_n

Condicions necesaries: G hamiltonià $\rightarrow$ $\boxed{\dots}$ Demo No

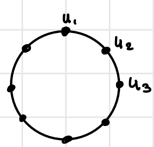
Condicions suficients: $\boxed{\dots}$ $\rightarrow$ G hamiltonià Demo Sí



G hamiltonià el puc representar al pla:

$V(G) = \{ u_0, u_1, \dots, u_n \}$
$|V(G)| = n$

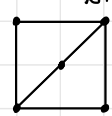
Sempre es pot dibuixar en un cercle



G hamiltonia $\rightarrow$ ordre ≥ 3
$\rightarrow$ G connex
$\rightarrow$ G no té vertex de tall
$\rightarrow$ G no té arestes pont
$\rightarrow$ $\forall u,\ g(u) \geq 2$
$\rightarrow$ $G - S$ té com a molt k c.c si $|S| = k$

Contraexemple graf de Petersen

$\not\leftarrow$ Satisfa "tot"



No hamiltonia

Teorema Ore: $G = (V, A)$ d'ordre n, $n \geq 3$

$\forall w, v \in V$ $w \nsim v$ $g(w) + g(v) \geq n \rightarrow G$ és hamiltonià *

per tot parell de vertex no adjacents, la suma ha de ser $\geq n$

Teorema Dirac: $G = (V, A)$ ordre n, $n \geq 3$

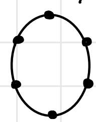
$\forall u$, $g(u) \geq \frac{n}{2} \rightarrow G$ hamiltonià

T. Ore $\rightarrow$ T. Dirac $\rightarrow$ G hamiltonià

$\not\Leftarrow$ Hi ha grafs hamiltonians d'ordre n tq.

no tot vertex te grau $\geq \frac{n}{2}$ $\rightarrow$ C_n, $n \geq 5$

* $\forall w, v$, $w \nsim v$ $g(w) + g(v) \geq n$



$g(v) = 2$

$2 < 3$

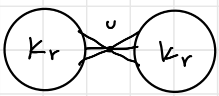
$2+2 < 6$ i es hamiltonià

La fita de n esta ajustada

tq. no pot ser modificada

Contraexemple:

G:



$r \geq 1$

- G no es hamiltonia (u v. de tall)
- $g(u) = 2r \geq n-1$ $n = 2r+1$

$\underset{\substack{\uparrow \\ x \neq u}}{g(x)} = r \geq \frac{n-1}{2}$ $n-1 = 2r$

Lema (Bondy - Chavatal)

G, graf d'ordre n, $n \geq 3$ $u, v \in V$ / $u \nsim v$ i $g(u) + g(v) \geq n$

G hamiltonià $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonià

Exemples de grafs hamiltonians

- K_n sí
- C_n sí
- W_n sí
- $K_{s,r}$ sí $(s = r)$
- T_n No
- Petersen No
- $K_{1,s}$ No

Arbres $G = (V, A)$ graf d'ordre n i mida m

Graf connexos que connecten n vertex amb el mínim de arestes possibles

Prop: G connex $\Rightarrow m \geq n-1$ (* ⊿:)

G acíclic $\Rightarrow m \leq n-1$ (* ⊿:)

demo: inducció sobre l'ordre n, $n \geq 1$

i) $n = 1 \Rightarrow \bullet$ acíclic i es compleix $m = 0 \leq 1-1$ ✓

ii) $\forall n \geq 2$, $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

* si $\forall u \in V, g(u) \geq 2 \Rightarrow G$ té algun cicle
$\nRightarrow P(n)$

G acíclic d'ordre n i mida $m \Rightarrow m \leq n-1$?

$\exists v \in V$, $g(v) < 2$ (si no *) $\Rightarrow \exists u \in V, g(u) = 1 \lor g(u) = 0$

$\Rightarrow$ Considerem $G - u$:

- acíclic
- $ord(G-u) = n-1$

$\overset{HI}{\Rightarrow}$ $mida(G-u) \leq ord(G-u) - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mida\ G = mida(G-u) + g(u) \overset{HI}{\leq} ord(G-u) - 1 + g(u) =$$
$$= (n-1) - 1 + g(u) \leq (n-1) - 1 + 1 = n-1$$

Def: G es arbre si G connex i acíclic

G es bosc si G acíclic (cada c.c es un arbre)

v es fulla si $g(v) = 1$

Propietats (T i B) $T=(V,A) \wedge B=(V,A)$

$T=(V,A)$ arbre d'ordre n i mida m

$\rightarrow$ $m = n-1$, si $g(v)=1 \rightarrow T-v$ es un arbre

T bipartit v. tall : $g(v) \geq 2$, $T-v$ te $g(v)$ c.c

$\forall a \in A$, es pont T te almenys 2 vertex de grau 1

$B=(V,A)$ bosc d'ordre n i mida m

$\rightarrow$ $m = n-k$, B bipartit, $\forall a \in A$, es pont

Propietat $T=(V,A)$ arbre d'ordre n, $n \geq 2$ $\rightarrow$ té almenys 2 vertex $g(v)=1$

ℓ = # Fulles, $n-\ell$ vertex que no son fulles, $g(v) \geq 2$

$\sum g(v) = 2m \rightarrow \sum g(v) = 2(n-1)$ ... $\rightarrow \ell \geq 2$
$\sum g(v) = \ell$

Teorema $T=(V,A)$ graf d'ordre n i mida m.

Aleshores son equivalents:

1) T és arbre (connex i aciclic)
2) T aciclic i $m=n-1$
3) T connex i $m=n-1$ més utilitzada
4) T connex i tota aresta es pont
5) $\forall v,w \in V$, $\exists$ $v-v$ camí unic
6) T aciclic i si $a \notin A$, $T+a$ te exactament un cicle

demo :

1) → 2) ✓ 1) → 4) ✓

1) → 3) ✓ 1) → 5) T connex aciclic | → ∀v,w∈V ∃ un unic v-w cami ✓

Si te 2 camins diferents ∃ cicle X aciclic △

1) → 6)

T connex aciclic | → T aciclic ✓

T+a té un cicle, si a∉A (exactament)

↓ suposem que hi ha 2 camins

∃ un cicle a T

contradiccio aciclic

T connex, a = uv ∉ A | ∃ u-v cami en T → T+a cicle, u-v cami + a

2) → 1) T aciclic △ m = n-1 | → T aciclic ✓

connex → (sup. NO) T bosc amb k ≥ 2 c.c

m = n-k ≠ m = n-1

Contradicció △

3) → 1) T connex m = n-1 | T connex ✓

aciclic → (sup. NO) ∃c cicle a T, sup. a aresta del cicle → T-a connex

mida (T-a) = n-2

ord (T-a) = n

G connex → mida ≥ n-1 ↓ contradicció △

4) → 1) T connex tota a pont | → T connex ✓

aciclic ! Les arestes d'un cicle no son mai pont

5) → 1) ∀u-v ∃! u-v cami | T connex aciclic

Tot G connex te un cami ∀u-v ∈V nomes te un cami, per tenir un cicle calen 2

6) → 1) T aciclic T+a, a∉A ∃! cicle | → T connex aciclic ✓

u,v ∈ V : uv ∈ A ∃ u-v cami a T

uv ∉ A : T+a te cicle i pasa per a

perque sense a $\nexists$ cicle $\rightarrow \exists$ $u-v$ camí en T

Arbres Generadors

(subgraf generador, li restem arestes)

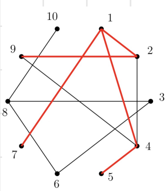
Def: $G=(V,A)$ graf, Un arbre generador de G és un subgraf generador de G que es un arbre

T arbre generador de G:

- $V(T) = V$
- T arbre $\begin{cases} \text{connex} \\ \text{aciclic} \end{cases}$ | tindra $n-1$ arestes si $ord(G)=n$
- $A(T) \subseteq A(G)$
- $|A(T)| = ord(G) - 1$

Altres maneres de trobar a.g.

BFS: fer l'algoritme amb un nou conjunt d'arestes



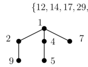
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	6	1	4	3	1	3	2	8
4	4	8	2		8		6	4	
7	9		5				10		
			9						

Cua: W: x: y:

$\{1, 2, 4, 7, 9, 5\}$

$A(T)$:

$\{12, 14, 17, 29, 45\}$



DFS igual

Obs:

G arbre $\rightarrow$ G es a.g de G

G no connex $\rightarrow \nexists$ a.g de G

demo:

$\Rightarrow$) Si G té algun a.g. T:

T connex $\left| \begin{array}{l} V(T) = V(G) \\ A(T) \subseteq A(G) \end{array} \right.$ $\rightarrow$ G connex

$\Leftarrow$) G $\left. \begin{array}{l} \text{connex} \\ \text{aciclic} \end{array} \right|$ $\rightarrow$ G a.g d'ell mateix

$\rightarrow$ G $\left. \begin{array}{l} \text{connex} \\ \exists \text{ cicle} \end{array} \right|$ $\rightarrow$ $G-a$ connex $\rightarrow$

a aresta del cicle

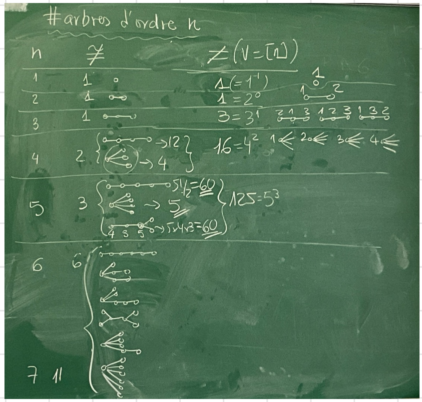
Fins que no hi ha cicles ...

Exercicis

1) arestes de tot a.g ? arestes pont
   " de cap a.g ? totes formen part d'algun a.g

Enumeració d'arbres

Quants arbres poden fer amb n vertex?



$V = \{1, 2, \dots, n\}$

$\text{mida} = n-1$

Teorema (Cayley)

El nombre d'arbres diferents amb $V = [n]$ es n^{n-2}

Equival a: El nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n amb $V=[n]$ és n^{n-2}

Demo: (Prüfer) Si A, B són conjunts finits i $\exists f\ A \to B$ bijectiva aleshores $|A| = |B|$

$A = \{T /$ tots els arbres amb conjunt de vertex $[n]\}$ $|A| = ?$

$B = \{$ Paraules de longitud $n-2$ amb alfabet $[n]\}$ $|B| = n^{n-2}$

paraula = "tira de $n-2$ numeros"

Seqüencia de Prüfer: $n \geq 3$ 4.16 i 4.17

$\phi : A \to B$ ϕ esta ben definida (exemple power)

$T \to \phi(T) =$ paraula de long. $n-2$ i alfabet $[n]$

"sequencia de Prüfer" de T

- Longitud sequencia: $\text{mida}(T) - 1 = \text{ord}(T) - 2$
- El vertex i apareix $g(i)$ (grau del vertex)
- A la sequencia els vertex apareixen $g(i) - 1$ vegades.

arbres $\not\cong$ d'ordre ≥ 3

segons:

- nº Fulles = ℓ : $2 \leq \ell \leq n-1$
- grau maxim : $1 \leq \Delta \leq n-1$
- diametre : $2 \leq D \leq n-1$

- $\ell = n-1 \iff T \cong K_{1,n}$
- $\ell = 2 \iff T \cong T_n$

- $D = n-1 \iff T \cong T_n$
- $D = 2 \iff T \cong K_{1,n-1}$

- $\Delta = n-1 \iff T \cong K_{1,n-1}$
- $\Delta = 2 \iff T \cong T_n$

Algebra lineal

Matrius: (tenen un cos , $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_n$ ...)

- Suma de matrius $(A+B)$
- Producte matriu/escalar $(3A)$
- Trasposada (A^t)
- Producte de matrius $(A \cdot B)$ $A_{m,n}$ $B_{n,\ell}$ Columnes de A = Files de B
- Inversa (A^{-1}) Matrius cuadrades

Transformacions elementals:

1- Intercanviar dues Files d'A

2- Multiplicar una Fila per un escalar no nul

3- Sumar una Fila d'A , el resultat de multiplicar una altra Fila per un escalar

Una matriu elemental (per files) si és pot obtenir a partir d'una matriu d'identitat mitjançant una única transformació

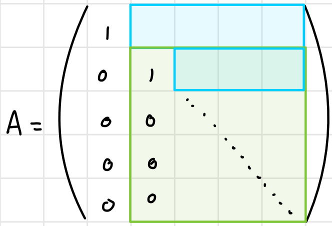
Dues matrius són equivalents si és pot obtenir a partir de una seqüència finita de transformacions elementals.

Matriu escalonada:

- Si una fila és nul·la, totes les que estan per sota d'ella també ho són
- En cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1
- El pivot d'una fila sempre és troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior

Matriu escalonada reduïda: matriu escalonada amb pivots = 1 i tots els altres elements de les columnes dels pivots han de ser 0

Teorema: Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files i a una matriu escalonada reduïda per files



- "posem" un element diferent de 0 al lloc 1,1
- si aquest element és "a", multipliquen la primera fila per 1/a
- "posem" zeros per sota del 1

El **rang** de A = #pivots d'una matriu escalonada equivalent —> rang A <= m, n

Aplicació al càlcul de la inversa

Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus 1 (permutar files) tenim B·B = I
Si C és la matriu elemental amb una transformació tipus 2 (multiplicar fila per un escalar) serà: $M_i^{-1}(\lambda) = M_i(1/\lambda)$, $\lambda \neq 0$
Si D es la matriu elemental amb una transformació tipus 3 (sumar la fila i la fila j multiplicarà per k) tenim: $D_k \cdot D_{-k} = I$

Aplicació al càlcul de la inversa (II)

Siguin A i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és inventi el <—> tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Calcul practic: $\left(A \,\middle|\, I \right) \cdots \underset{\substack{\text{transformacions} \\ \text{per files}}}{\sim} \left(I_n \,\middle|\, A^{-1} \right)$

Si en algun moment tota una fila es 0, $\nexists A^{-1}$

Sistemes d'equacions lineals

x, y, z variables,

Són sistemes d'equacions lineals?

$3x-30y+25z = 2$	Si
$2x-\sin(\pi/3)y+30z = 2$	Si
$2x+2(1/y)+3z = 4$	No
$5x+yz = 2$	No
x+y+z^2	No

Direm que un sistema és:

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solucio
- compatible indeterminat si té més d'una solució

Dos sistemes són equivalents si tenen la mateixa solució general

Resolució de sistemes d'equacions lineals (n = #variables)

- rang A $\neq$ rang (A|b): sistema incompatible
- rang A = rang(A|b) = r = n: sistema compatible determinat
- rang A = rang(A|b) = r < n: sistema compatible indeterminat

Variables principals: variables dels pivots (1 de la diagonal)
Variables lliures: altres

Sistemes homogenis

Un sistema homogeni sis tots els termes independents són igual a s0
Aquest sistemes sempre són compatibles (tot 0)

Espais vectorials

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \ , 1 \leq i \leq n \right\}$

$\begin{cases} \text{Elements d'} E : \text{“vectors”} \\ \text{Elements de } \mathbb{K} : \text{“escalars”} \end{cases}$

Que es un espai vectorial?

Un E no buit

$+$ en E (suma) $E \times E$

$\cdot$ producte per escalar $(\lambda \cdot E)$ $\mathbb{K} \times E$

3 operacions:

1- $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

2- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

3- $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Ejemples d'espais vectorials:

Definir E $\mathbb{K}$-ev o (E e.v sobre $\mathbb{K}$)

- $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n)$
- Matrius $M_{m \times n}(\mathbb{K})$
- Polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\quad (\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{ a_0 + \dots + a_n x_n \ / \ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \})$

  $(a_0, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$

  $\mathcal{P}_d(\mathbb{K})$: grau $\leq d$ $= (a_0, \dots, a_d)$
- Conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni $\{$ sol. d' $Ax = 0 \}$ és e.v.

Propietats d'espais vectorials:

0 = escalar (element neutre de $\mathbb{K}$)

0_E = vector (element neutre de E)

- $0v = 0_E$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- Si $\lambda v = 0_E \rightarrow \lambda = 0 \lor v = 0_E$
- L'element oposat de v és $(-1)v$ normalment $-v$

Subespais vectorials i combinacions lineals

- $S \subseteq E$ (SEV) si compleix:

  1- $S \neq \emptyset$

  2- $\forall u, v \in S \ / \ u + v \in S$

  3- $\forall u \in S$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector 0_E pertany a tots els SEV

$0_E \notin S \subseteq E \rightarrow S$ no es un SEV

Exemples:

- $S = \{$Polinomis: $P_d(\mathbb{R})$ es SEV de $P(\mathbb{R})\}$

Polinomis de grau $\le d$

- $S \neq \emptyset$? $0 \in S$ / $0 = 0 + 0x + 0x^2 \dots + 0x^d$ ✓
- $\forall u,v \in S \Rightarrow v+u \in S$

$$\left.\begin{array}{l} u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d \\ v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_dx^d \end{array}\right\} \Rightarrow u+v = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 \dots \in S \checkmark$$

- $\forall u \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

$$\left.\begin{array}{l} u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + \\ \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_d x^d \in S \checkmark$$

- $S = \{$Matrius Δ superiors $n \times n\}$

- $S \neq \emptyset$, si $0 \in S$ ✓
- $\forall u,v \in S \Rightarrow v+u \in S$

$$\begin{array}{l} u = (0\nabla) \\ v = (0\nabla) \end{array} = u+v = (0\nabla) \in S \checkmark$$

- $\forall u \in S, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S$

$$u = (0\nabla) \quad \lambda \Rightarrow \lambda u = (0\nabla) \checkmark$$

S' utilitza molt

- $S = \{$Sol. sistema homogeni$\} = \{X \cdot AX = 0\}$

on $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ n = incog.

$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$ m = eq.

- $S \neq \emptyset$? $0 \in S$ ✓
- $\forall X,Y \in S$ / $X+Y \in S$?

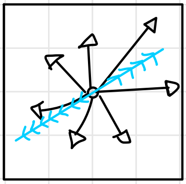
$$\left.\begin{array}{l} AX = 0 \\ AY = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = 0 \checkmark$$

- $\forall X \in S$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda X \in S$

$$AX = 0 \Rightarrow A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda X \in S$$

Subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$

- $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^2$ trivials
- $\boxed{\text{"Rectes"}}$ tots els vectors que podem dibuixar dins de la recta



Subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$

- $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, $\mathbb{R}^3$
- "Rectes" tots els vectors que es poden dibuixar a la recta
- "Pla" tots els vectors dins del pla ($\mathbb{R}^2$)

Lema S, S' subespais de $E \to S \cap S'$ subespai de E

- $S \cap S' \neq \emptyset$:

S, S' subespais d'E $\Rightarrow \begin{cases} 0_E \in S \\ 0_E \in S' \end{cases} \Rightarrow 0_E \in S \cap S' \Rightarrow S \cap S' \neq \emptyset$

- $u, v \in S \cap S' \Rightarrow u+v \in S \cap S'$:

S és subespai d'E

$$\begin{cases} u \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \\ v \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} v \in S \\ v \in S' \end{cases} \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow u+v \in S \\ \Rightarrow u+v \in S' \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow u+v \in S \cap S'$$

S' és subespai d'E

- $\lambda \in \mathbb{K}, u \in S \cap S' \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$:

S subespai d'E

$$\begin{matrix} u \in S, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S \\ u \in S', \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S' \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$$

S' subespai

Subespai generat

$$S = \langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{ \lambda_1 u_1, \dots, \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \} \subseteq E$$

- $\neq \emptyset$: $\underbrace{0 \cdot u_1 + 0 u_2 + \dots + 0 u_k}_{= 0_E} \in S \neq \emptyset$

- $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$:

$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

$v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$

$u+v = (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle = S$

- $u \in S, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha u \in S$:

$\hookrightarrow u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

$\alpha u = \alpha \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha \lambda_k u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle = S$

Independencia lineal

Sigui $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_E$ sempre te la solucio $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Si aquesta es la unica solucio direm que son linearment independents L.I

Si hi ha alguna solucio amb $\lambda_i \neq 0$ direm que son linearment dependents L.D.

Exemple:
- $\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ LI
- $\alpha(1,0) + \beta(3,0) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ LD
  $\alpha = 1$
  $\beta = -3$
- 0_E LD pe: $1 \cdot 0_E = 0_E$
- $\{u_1, u_2, \dots, 0_E\}$ LD $\quad 0u_1, 0u_2, \dots, \underset{\neq 0}{1}0_E = 0_E$
- u LI, si $u \neq 0_E$
- $u, \lambda u$ LD, $\lambda u + -1\,\lambda u = 0_E$
  $\lambda \neq 1$

Per saber si uns vectors son LI o LD hem de discutir un sistema d'equacions

Ex:

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

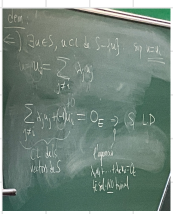
$\nearrow$ SCD LI

$\searrow$ SCI LD

Propietat: $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subseteq E$

S LD $\Leftrightarrow \exists u \in S \,/\, u$ es C.L de vectors de $S - \{u\}$ (combinacio lineal)

Demo: $\Rightarrow)$ $\lambda_1 u_1, \dots, \underset{\neq 0}{\lambda_i} u_i, \dots, \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_i u_i = \sum_{j \neq i}^{k} (-\lambda_j u_j) \underset{\lambda_i \neq 0}{\Rightarrow} u_i = \underbrace{\sum_{j\neq i}\left(-\frac{\lambda_j u_j}{\lambda_i}\right)}_{\text{Combinació linear}}$ □



No es pot fer servir el $\forall$

$S = \{\overset{1}{(1,0)}, \overset{2}{(2,0)}, \overset{3}{(0,3)}\}$

L.D $\quad 2(1,0) - 1(2,0) + 0(0,3) = (0,0)$ ✓

$u_1 = 1/2\, u_2 + 0 u_3$

$u_2 = 2u_1 + 0 u_3$

u_3 No es combinació lineal de $\{u_1, u_2\}$

Corol·lari: $E = \overset{A}{\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle} = \underset{B}{\langle u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\rangle} \Leftrightarrow u_k \in \langle u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\rangle$

Demo:
$\Rightarrow)$ $u_k \in \overset{\text{Hipotesis}}{\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\rangle} \Rightarrow u_k \in \langle u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\rangle$

$\Leftarrow)$ $A \supseteq B$: Cert (no cal hipotesis)

$u \in B \Rightarrow u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} + 0 u_k \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle$

$A \subseteq B$: $u \in A \to u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} + \alpha_k u_k \to u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i u_i$ Posem u_k en funció dels altres termes

- $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ L.I

$\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ LI $\iff u_{k+1} \notin \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$

$\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ LD $\equiv u_{k+1} \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$

Demo: $\Leftarrow$) propietat S L.D. $\equiv \exists u \in S \,/\, u \in \{u_1, \dots, u_k\}$

$\Rightarrow$) $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ LD $\to \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ no tots nuls / $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \underbrace{\lambda_{k+1} u_{k+1}}_{\neq 0} = 0_E$

Si $\lambda_{k+1} = 0 \equiv \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_E \equiv$ L.D

$\lambda_{k+1} u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) u_i$ per def es LI

$\nexists \lambda_{k+1} \neq 0$ contradicció

$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right) u_i \to u_{k+1} \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$

$\hookrightarrow \in =$ es combinació lineal

Metode per trobar el maxim # de vectors LI d'un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$

- Posem els vectors per columnes $\to A = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$
- B matriu reduida equivalent a A per files
  - el conjunt S de vectors de les columnes dels pivots són LI
  - a la resta de columnes tenim els coeficients del vector corresponent com a combinació lineal dels vectors de S

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ LI

$u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$

$u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5$

Base i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$ - espai vectorial, un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es una base de E si:

1- B es LI

2- $E = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ es a dir: $b_1, b_2, \dots, b_n$ generen E

La base canonica:

- $\underbrace{\mathbb{K}^n}_{}$ ($\mathbb{R}^n$) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{K}^n$

- $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{matrius } m\times n \text{ amb} \\ \text{exactament un } 1 \\ \text{i la resta zeros} \end{array} \right\}$ es base de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $P_d(\mathbb{K})$ $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ es base de $P_d(\mathbb{K})$

Propietat: $\forall u \in E$ es pot expressar com a combinació lineal de B i de forma unica

Demo: $u \in E \underset{\langle B\rangle = E}{\rightarrow} \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \,/\, u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$

- Suposem: $\left| \begin{array}{l} u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \\ u = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n \end{array} \right| \rightarrow 0_E = (\beta_1 - \alpha_1) b_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) b_n$

$\equiv \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

Es unic

Quan representem un vector amb base B:

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E

$u \in E \rightarrow u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ on $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$v \in E \rightarrow v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (u+v)_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \beta_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda u)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 \\ \lambda_2 \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \alpha_n \end{pmatrix}$$

Propietat: $\left. \begin{array}{l} \{u_1, \dots, u_k\} \text{ LI} \\ B = \{b_1, \dots, b_n\} \end{array} \right| \rightarrow k \leq n$

Demo: $\{u_1, \dots, u_k\}$ LI $\equiv$ nomes te la sol. trivial

$(\quad '' \quad)_B = 0_{E_B} \equiv \underbrace{x_1 (u_1)_B + \dots + x_k (u_k)_B = 0}_{\text{Sistema SCD}}$ $\begin{cases} n \text{ equacions} \\ k \text{ incognites} \end{cases}$

$n \geq \text{rang } A = \# \text{incognites} = k$

Propietat

$\left.\begin{array}{l} B = \{b_1, \dots, b_n\} \\ B' = \{b_1, \dots b_{n'}\} \end{array}\right\}$ bases d'E $\Rightarrow n = n'$

Demo: $\left.\begin{array}{l} B = \{b_1, \dots, b_n\} \\ B' \ n' \text{ vectors LI} \end{array}\right\} \to n' \leq n$

$\left.\begin{array}{l} B' = \{b_1, \dots, b_n\} \\ B \ n' \text{ vectors LI} \end{array}\right\} \to n' \leq n$

$\Rightarrow n = n'$

Dimensió: Nombre d'elements d'una base

- Habituals : $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(M_{m\times n}) = mn$ i $\dim(P_d(\mathbb{K})) = d+1$
- $\dim(0_E) = 0$

Com trobar una base :

$\mathbb{R}^n$ $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = V$ trobant la dimensió amb la matriu reduida

$\hookrightarrow \dim V =$ màx nº de vectors LI de $\{u_1, \dots, u_k\}$

$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dim $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

coord. base canonica

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \sim$$

- $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \equiv \right\}$ es subespai de $\mathbb{R}^n$
  - $\dim S = \#$ graus de llibertat $= n - \text{rg } A$
  - base de S = sol. parametrica i agafem els vectors

$\dim E = n$ $\quad |B| = n \quad \equiv \quad B$ L.I

$B \subseteq E$ $\quad B$ L.I $\quad\quad \langle B \rangle = E$ (B genera E)

$$|B| = n$$
$$\langle B \rangle = E$$

Espais vectorials:

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensio n, B base d'E

Si $u_1, \dots, u_k \in E$, $((u_1)_B, \dots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B.

1- $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \Longleftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B, (v)_B)$

ej:

$P_3(\mathbb{R})$: $\quad p = 1 - x^2 + x^3 \quad\quad r = 3 + x + x^2 + x^3 \in \langle p, q \rangle$

$q = 2 + 2x - 3x^2$

$$\underbrace{\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=2} = \underbrace{\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=?\,2}$$

2- v es pot expresar com a C.L dels vectors $u_1, \dots, u_k$ d'almenys dues maneres diferents $\Longleftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B, (v)_B) < k$

3- $u_1, \dots, u_k$ són L.I $\Longleftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = k$

4- $u_1, \dots, u_k$ són L.D $\Longleftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) < k$

5- $\{u_1, \dots, u_k\}$ es base d'E $\Longleftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = n \Longleftrightarrow \det \neq 0$

6- $u_1, \dots, u_k$ L.I $\longrightarrow$ existeix una base de E que conte $u_1, \dots, u_k$

7- $u_1, \dots, u_k$ L.I $\longrightarrow$ es pot completar amb $n-k$ vectors adequats d'una base .....

Maneres de donar un subespai F de E:

a) $F = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

b) Base de F: $B_F = \{u_1, \dots, u_k\}$

c) Com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb $x_1, \dots, x_n$

Base i dimensio

a) $F = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

$\dim F = \text{rang}\,((u_1)_B, \dots, (u_k)_B)$

base $F =$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (u_1) & \cdots & (u_k) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

les columnes on els pivots son 1, agafem els originals i tenim la base

vector original per columnes dels pivots

Completar base de subespais

$$\text{rg}\begin{pmatrix} \underbrace{\;|\quad|\;}_{r} & \underbrace{\cdots\cdots}_{n-r} \end{pmatrix}$$

de base canonica

Inclusió de subespais

- $F \subseteq G \iff u_1, \dots, u_k \in G$
- $F = G \iff F \subseteq G \wedge G \subseteq F$
- $\dim F = \dim G$

  $F = G \iff F \subseteq G \vee G \subseteq F$

$\left(\begin{array}{l} \text{Base } F: \{v_1, \dots, v_k\} \\ \\ F = \{\text{solució sistema homogeni}\} \end{array}\right.$

$F = \{\text{Sol. sistema } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\}$

$\rightarrow$ Base de F: resolem el sistema homogeni i expresem la solució de forma parametrica.

$\dim F = n - \text{rang}\, A$

$$F = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \{ \text{sol. } Ax = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in F \iff \begin{pmatrix}1 & 1 & x_1\\2 & -1 & x_2\\3 & 0 & x_3\\4 & 2 & x_4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & x_1\\0 & -3 & x_2-2x_1\\0 & -3 & x_3-3x_1\\0 & -2 & x_4-4x_1\end{pmatrix} \sim \Big($$

Canvi de base

Siguin B i B' dues bases d'un espai vectorial

$$u_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \qquad u_{B'} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

$$\to \quad u \left| \begin{aligned} &= \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \\ &= \mu_1 b'_1 + \dots + \mu_n + b'_n \end{aligned}\right.$$

Si coneixem $b_1, \dots, b_n$ en base B'

$$(u)_{B'} = (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n)_{B'} = \alpha_1 (b_1)_{B'} + \dots + \alpha_n (b_n)_{B'}$$

Matriu de canvi de base $P^B_{B'}$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (b_1)_{B'} & \cdots & (b_n)_{B'} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{u_B} = \underbrace{\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}}_{u_{B'}}$$

- $\to$ $u_{B'} = P^B_{B'} \cdot u_B$ expresant els vectors per columnes
- $\to$ $P^{B}_{B'} = (P^B_{B'})^{-1}$ ja que $(P^B_{B'})^{-1} \cdot (u)_B = (u)_{B'}$
- $\to$ la de dalt en funció dels de baix

Intersecció de subespais

a) F sol. $\}\equiv$
G sol. $\}\equiv$
$\Big\{$ $F \cap G$ sol. dels 2 sistemes

7. Aplicacions lineals

Siguin E i F dos espais vectorials. Una aplicació f: E -> F és lineal si:

- per tot $u,v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- per tot $u \in E$ i $\lambda \in K$ | $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si E = F, direm que f és un endomorfisme

Per comprovar que f es lineal:
1- $\forall u,v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
2- $\forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Exemples:

1- Aplicació trivial - f: E -> F on $f(u) = 0_F$
2- Aplicació identitat - I_E: E -> E on $I_E(u) = u$
3- L'aplicació següent no és lineal

$$f: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x],\quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$$

4- L'aplicació f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

$$f((1,1)+(1,1)) \overset{?}{=} f(1,1) + f(1,1)$$
$$(16,4) \neq (2,4)$$

5- $A \in M_{m\times n}(K)$, $f: K^n \to K^n$ tq. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{M_{m\times n}(K)}{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$

1- $f(x+x') = f(x) + f(x')$
$A(x+x') = Ax + Ax'$ ✓
$Ax + Ax' = Ax + Ax'$

2- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
$A(\lambda x) = \lambda (Ax)$
$\lambda (Ax) = \lambda (Ax)$ ✓

Propietats

1- $f(0_E) = 0_F$ demo: $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$

2- $f(-v) = -f(v)$

3- $f: E \to F$

subespai $S \subseteq E \to f(S) = \{ f(v) / v \in S \}$

demo:

- $f(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0_E \in S \to f(0_E) \in f(S) \neq \emptyset$
- $v, v' \in f(S) \to v+v' \in f(S) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} v = f(u), u \in S \\ v' = f(u'), u' \in S \end{array} \right\} \to f(u) + f(u') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(\underbrace{u+u'}_{u,u' \in S}) \to v+v' \in f(S)$
- $\alpha \in \mathbb{K}, v \in f(S) \to v \in f(u), u \in S \wedge \alpha u \in S$ per S subespai

$$\alpha v = \alpha f(v) \overset{f \text{ lineal}}{=} f(\alpha v) \in f(S)$$

④ Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S' subespai d'$F \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(S')}_{\{u \in E \,:\, f(u) \in S'\}}$ és subespai d'E ?

(1) $f^{-1}(S') \neq \emptyset$?

$0_F \in S'$ i $f(0_E) = 0_F \in S' \Rightarrow 0_E \in f^{-1}(S')$

$\Rightarrow f^{-1}(S') \neq \emptyset$ cert!

(2) $\underbrace{u, u' \in f^{-1}(S')}_{f(u) \in S',\ f(u') \in S'} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{u + u' \in f^{-1}(S')}_{f(u+u') \in S'}$

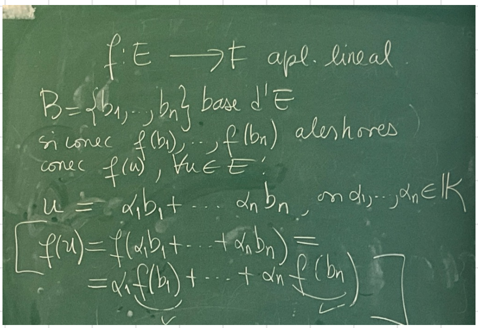
S' subespai $\to \Downarrow$ $\qquad\qquad \Uparrow$

$f(u) + f(u') \in S' \Rightarrow f(u+u') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(u') \in S'$ cert!

(3) $\underbrace{\alpha \in \mathbb{K}, u \in f^{-1}(S')}_{\alpha \in \mathbb{K},\ f(u) \in S'} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{\alpha u \in f^{-1}(S')}_{f(\alpha u) \in S'}$

S' subespai $\to \Downarrow$ $\qquad\qquad \Uparrow$

$\alpha f(u) \in S' \Rightarrow f(\alpha u) \overset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(u) \in S'$ cert!



$f: E_B \to F_W$ $\qquad$ base d'E : $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $\dim E = n$

E, F $\mathbb{K}$-e.v $\qquad$ base d'F : $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $\dim F = m$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (f(b_1))_W & \cdots & (f(b_n))_W \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$(f(v))_W = M_W^B(f) \cdot (v)_B \quad \text{on } v \in E$$

E, F $\mathbb{K}$-e.v

$f: E \to F$ apl. lineal $\to$ $\left| \begin{array}{l} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array} \right.$

$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base d'E

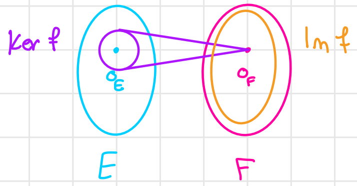
$v \in E \to \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ únics / $v = \alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_n e_n \to f(v) = \alpha_1 f(e_1), \ldots, \alpha_n f(e_n)$

B base d'E $\quad$ W base d'F $\quad \Big| \to M_W^B(f) \in M_{\dim F \times \dim E}(\mathbb{K})$

7.2 Nucli i imatge

Nucli de f: $\operatorname{Ker} f = \{ v \in E \,/\, f(v) = 0_F \} = f^{-1}(0_F)$ Tots els vectors que tenen imatge 0_F

Imatge de f: $\operatorname{Im} f = \{ f(v) \,/\, v \in E \} = f(E)$



Im f pot ser igual o menor a F

Maneres de donar Ker i Im son amb bases.

Nucli: treballant amb coordenades els vectors del nucli són les sol. del sistema homogeni de m equacions i n incognites

$$M\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

- $\operatorname{Ker} f = \{ \text{sol de } MX = 0 \}$

  $\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg} M$, base $\operatorname{Ker} f$ = sol. $MX = 0$ forma paramètrica

Propietat:

S subespai d'E $\to$ $f(S)$ subespai F

$S = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ | $f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$

$$M = M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (f(b_1))_W & \cdots & (f(b_n))_W \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

- $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$

  $\dim \operatorname{Im} f = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matriu associada}}}{\operatorname{rg} M}$, base de $\operatorname{Im} f$: escalonar la matriu... i ens quedem amb les col que corresponen als pivots

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

Caracterització del tipus d'aplicació

- f injectiva $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$ $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim E$
- f exhaustiva $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$ $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim E$
- f isomorfisme $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim E = \dim F$
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors f es un isomorfisme $\Longleftrightarrow$ f exhaustiva $\Longleftrightarrow$ f injectiva

Resum: $f: E \to F$ apl. lineal

f injectiva $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim E$

f exhaustiva $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim F$

f bijectiva $\Longleftrightarrow$ $rg M = \dim F = \dim M$

$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$

- f injectiva $\to$ $\dim E \leq \dim F$ ej: $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ No injectiva
- f exhaustiva $\to$ $\dim F \leq \dim E$ ej: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ No exhaustiva
- f bijectiva $\to$ $\dim E = \dim F$

· En cap cas de les 3 s'aplica la implicació a la dreta $(\leftarrow)$ ✗

Calcul de $f^{-1}(v)$

$M^{B_E}_{B_F} = M$ $\qquad MX = (v)_{B_F}$

$f^{-1}(v) = 0 \Longleftrightarrow SI \Longleftrightarrow rg M < rg(M|v)$

$f^{-1}(v) = 1 \Longleftrightarrow SCD \Longleftrightarrow rg M = rg(M|v) = \dim E$

$f^{-1}(v) > 1 \Longleftrightarrow SCI \Longleftrightarrow rg M = rg(M|v) < \dim E$

7.3 Composicio d'aplicacions lineals

$\left.\begin{array}{l} f: E \to F \\ g: F \to G \end{array}\right\}$ apl. lineals $\qquad E, F, G$ $\mathbb{K}$-e.v

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$\qquad g \circ f$

$u \to f(u) \to g(f(u))$

$g \circ f = E \to G$ $\qquad$ es $g \circ f$ lineal? ✓

demo:

1) $g \circ f(u+v) = g\circ f(u) + g\circ f(v)$

$= g(f(u+v))$

$\xrightarrow{f \text{ lineal}} g(f(u)+f(v))$

g lineal $\longrightarrow g(f(u)) + g(f(v)) = g\circ f(u) + g\circ f(v)$

2) $g\circ f(\lambda v) = g(f(\lambda v)) \underset{f \text{ lineal}}{\longrightarrow} g(\lambda f(v)) \underset{g \text{ lineal}}{\longrightarrow} \lambda\, g(f(v)) = \lambda\, g\circ f(v)$

Calcul inversa $f^{-1}(u)$

Si $f: E \to F$ apl lineal $\to f^{-1}: F \to E$ apl. lineal

demo:

1) $f^{-1}(v+w) = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= v \\ f(u') &= w \end{aligned}\right\} \quad f(u+u') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u)+f(u') = v+w \to f^{-1}(v+w) = u+u' = f^{-1}(v)+f^{-1}(w)$$

2) $f(u) = v \to f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v \to f^{-1}(\lambda v) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$

Matrius associades de la composició i la inversa

1- $M^B_V(g\circ f) = M^W_V(g)\cdot M^B_W(f)$ $\quad M^B_W$ matriu que pasa de base B a W (b)

2- $M^W_B(f^{-1}) = (M^B_W f)^{-1}$ es la inversa de la matriu associada a f

Canvi de Base

$$\begin{tikzcd} E_B \arrow[r, "f", "M^{B}_{W}(f)"'] & F_W \arrow[d, "1_F"] \\ E_{B'} \arrow[u, "1_E"', "P^{B'}_{B}"] \arrow[r, "f", "M^{B'}_{W'}(f)"'] & F_{W'} \arrow[u, phantom, "P^{W}_{W'}"' near start] \end{tikzcd}$$

B i B' bases d'E

W i W' bases d'F

$f = 1_F \circ f \circ 1_E$

$M^{B'}_{W'}(f) = P^{W}_{W'}\, M^{B}_{W}(f)\, P^{B'}_{B}$

Diagonalització de matrius

$f: E \to E$ on E es un $\mathbb{K}$ - e.v i endomorfisme

f diagonalitza $\longleftrightarrow \exists B$ base d'E / $M_B^B(f)$ és diagonal

veps : $\underset{\neq 0_E}{u} \in E \;/\; \exists \lambda \in \mathbb{K},\; f(u) = \lambda u$

vaps: $\lambda \in \mathbb{K} \;/\; \exists u \neq 0_E,\; f(u) = \lambda u$

polinomi caracteristic $=$ $\det(A - x \cdot I_n)$ grau n

vaps = arrels del polinomi caracteristic.

Exemple:

$$M_B^C = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \to p_f(x) = \det \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -(x-4)(x-2)(x+2)$$

arrels $= 2, 4, -2$

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{matrix}$$