Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

6. Espais vectorials

$\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$$

Siguin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són "component a component")

Propietats

La suma a $\mathbb{R}^n$ satisfà les propietats següents:

s1) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$

s2) (commutativa) $x + y = y + x$

s3) (element neutre) $x + \mathbf{0} = x$ on $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

s4) (element oposats) per tot x existeix x' tal que $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a $\mathbb{R}^n$ satisfà:

p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

p3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

p4) $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a $\mathbb{R}$ i les operacions són component a component)

6.2 Espais vectorials

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$

Un **espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$** consisteix en

1. un conjunt no buit E
2. una operació interna $E \times E \to E$ (*suma* $+$) i
3. una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (*producte per escalars* $\cdot$)

de manera que per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es satisfà:

e1) *(associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$

e2) *(commutativa)* $u + v = v + u$

e3) *(element neutre)* existeix un únic element $\mathbf{0}_E \in E$ tal que $u + \mathbf{0}_E = u$

e4) *(element oposat)* per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = \mathbf{0}_E$

e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$

$\begin{cases} \text{Elements d'E : "vectors"} \\ \text{Elements de } \mathbb{K}\text{: "escalars"} \end{cases}$

E e.v. sobre $\mathbb{K}$:

4 operacions

$\left.\begin{cases} + \text{ d'escalars} \\ \cdot \text{ d'escalars} \end{cases}\right\} \mathbb{K}$

$\begin{cases} + \text{ de vectors} \\ \cdot \text{ escalar/vector} \end{cases}$

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

prod escalar/vector

prod escalar/escalar

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

suma vectors

suma vectors

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

suma escalars

suma vectors

Alguns exemples d'espais vectorials

$\mathbb{K}^n$

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^n$
- $\mathbb{Z}_2^n$: cadenes de n bits
  La suma és bit a bit: p. ex.,
  $$(0,1,1,0) + (1,1,1,0) = (1,0,0,0)$$
  Producte per escalars: $0u = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}_2^n}$ i $1u = u$

matrius

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (les matrius $m \times n$ amb entrades en el cos $\mathbb{K}$)
- Les matrius de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que són triangulars superiors

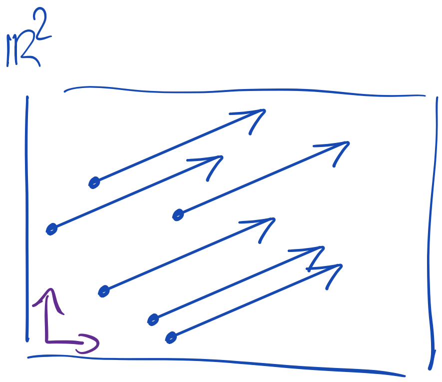
polinomis

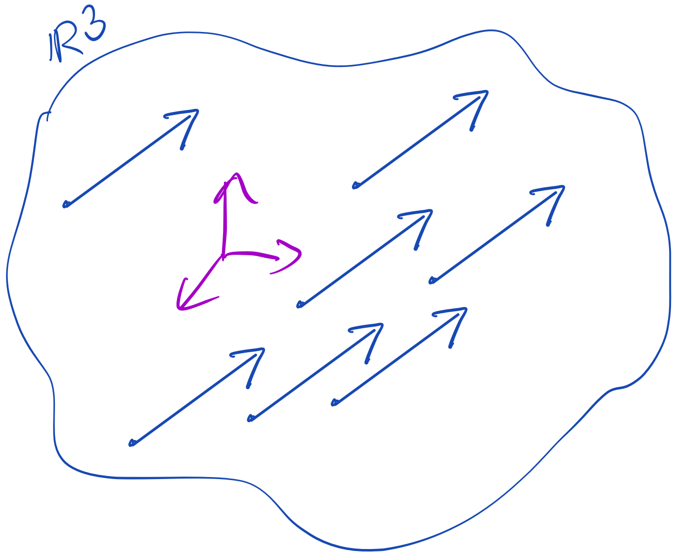
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: el conjunt dels polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$: els polinomis de grau com a molt d i coeficients a $\mathbb{R}$
- L'espai vectorial trivial format per un únic element: $\{\mathbf{0}_E\}$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni

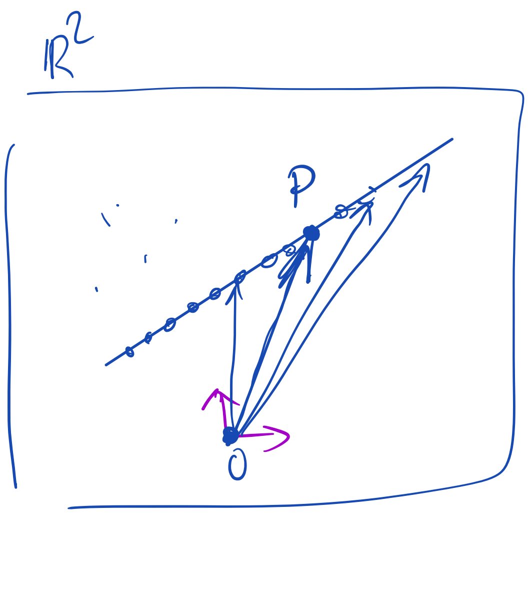
L' ESPAI VECTORIAL $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...

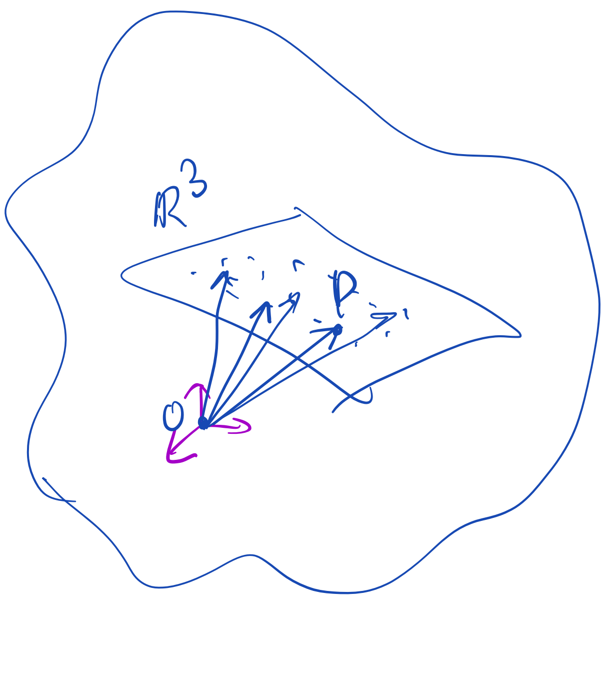
vectors "lliures" del pla, espai, ...

NO confondre amb el conjunt de punts del pla, espai, ...









Propietats

Si v pertany a l'espai vectorial E i λ és un escalar, es satisfà:

- $0v = \mathbf{0}_E$
- $\lambda\,\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$
- Si $\lambda\, v = \mathbf{0}_E$, aleshores $\lambda = 0$ o $v = \mathbf{0}_E$
- L'element oposat de v és $(-1)v$; normalment escriurem $-v$

on:

0 : escalar 0 = element neutre de $(\mathbb{K},+)$
0_E : vector "0" = element neutre de $(E,+)$

6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt $S \subseteq E$ és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1) $S \neq \emptyset$

(s2) per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$

(s3) per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector $\mathbf{0}_E$ pertany a tots els subespais vectorials

Alguns exemples de subespais espais vectorials

- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

- S és subespai d'$E \Leftrightarrow S$ amb les operacions d'E induïdes a S és e.v.
- És a dir: els subespais vectorials són espais vectorials dins d'un altre e.v.

- 0_E és de <u>tot</u> subespai vectorial de E

- E espai vectorial $\Rightarrow$

  $\{0_E\}$ i E són subespais vectorials d'E

  s'anomenen subespais "impropis" o "trivials"

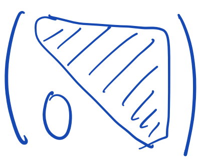
- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\underbrace{\mathcal{P}_d(\mathbb{R})}$: polinomis de grau $\leq d$ amb coeficients reals

- $P_d(\mathbb{R}) \neq \emptyset$: $0 \in P_d(\mathbb{R})$
- $p, q \in P_d(\mathbb{R}) \Rightarrow p+q \in P_d(\mathbb{R})$: la suma de polinomis de grau $\leq d$ és un polinomi de grau $\leq d$
- $\lambda \in \mathbb{R},\ p \in P_d(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda p \in P_d(\mathbb{R})$; el prod. d'un polinomi de grau $\leq d$ per un escalar és un polinomi de grau $\leq d$

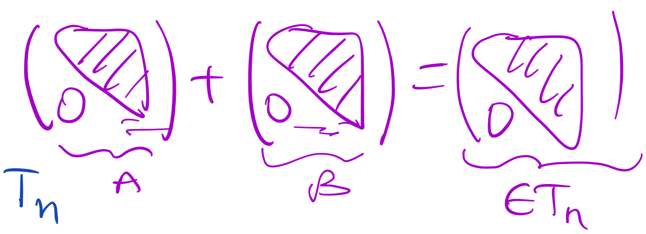
OBS:
p, q polinomis de grau $= d$, pot passar que $p+q$ tingui grau $< d$? SÍ!!!
p.e.: si $d=3$, $p = 1+x+x^3$, $q = 2-x+x^2-x^3$, però $p+q = 3+x^2$, té grau 2.

- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$



$T_n = \{\text{matrius de } M_n(\mathbb{R}) \text{ triangulars superiors}\}$

- $T_n \neq \emptyset$: $0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in T_n$
- $A, B \in T_n \Rightarrow A+B \in T_n$



- $\lambda \in \mathbb{R},\ A \in T_n \Rightarrow \lambda A \in T_n$

- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow A \cdot x = 0, \quad \text{on} \begin{cases} A = (a_{ij}) \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solucions: $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}}$

- $S \neq \emptyset$: $A \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in S$

(un sistema homogeni sempre té la solució trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)

- $x, x' \in S \Rightarrow x + x' \in S$:

$Ax = 0, Ax' = 0 \Rightarrow [A(x+x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0] \Rightarrow$

$\Rightarrow x + x' \in S$

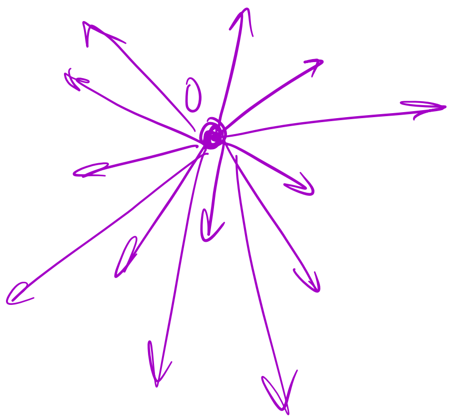
- $\lambda \in \mathbb{R}, x \in S \Rightarrow \lambda x \in S$:

$\lambda \in \mathbb{R}, Ax = 0 \Rightarrow [A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda x \in S$

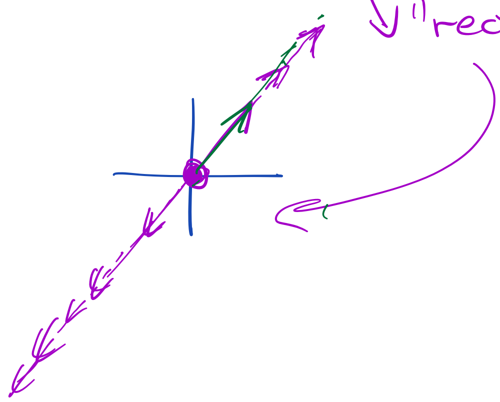
- SUBESPAIS DE $\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}^2$ = vectors lliures del pla



subespais $\begin{cases} \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \\ \mathbb{R}^2 \end{cases}$ trivials

"rectes"



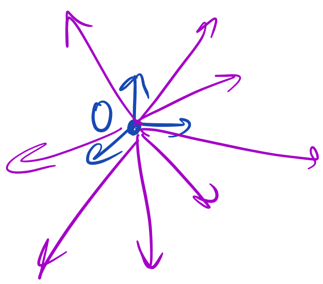
- SUBESPAIS DE $\mathbb{R}^3$:

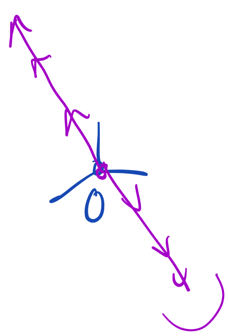
$\mathbb{R}^3$ = vectors lliures de l'espai

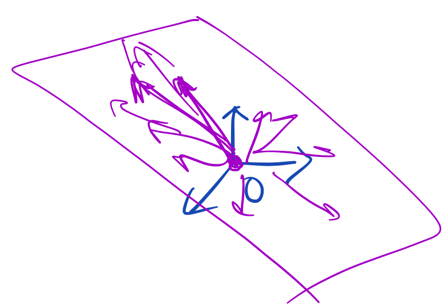
$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ } trivials,

"rectes"

"plans"







Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ $((1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S')$

Combinació lineal

Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

- $S \cap S' \neq \emptyset$:

S, S' subespais d'$E \Rightarrow \begin{cases} 0_E \in S \\ 0_E \in S' \end{cases} \Rightarrow 0_E \in S \cap S' \Rightarrow S \cap S' \neq \emptyset$

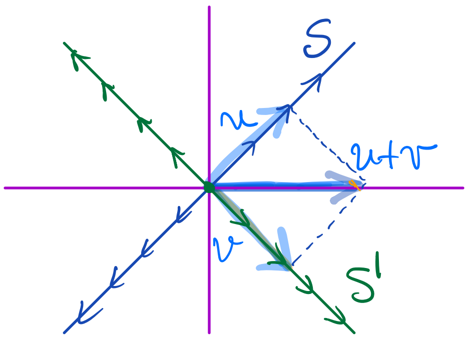
- $u, v \in S \cap S' \Rightarrow u+v \in S \cap S'$:

$$\left.\begin{cases} u \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \\ v \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} v \in S \\ v \in S' \end{cases} \end{cases} \begin{array}{l} \overset{S \text{ és subespai d'}E}{\Longrightarrow} u+v \in S \\ \underset{S' \text{ és subespai d'}E}{\Longrightarrow} u+v \in S' \end{array}\right\} \Rightarrow u+v \in S \cap S'$$

- $\lambda \in \mathbb{K},\ u \in S \cap S' \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$:

$$\left.\begin{array}{l} u \in S,\ \lambda \in \mathbb{K} \overset{S \text{ subespai d'}E}{\Longrightarrow} \lambda u \in S \\ u \in S',\ \lambda \in \mathbb{K} \underset{S' \text{ subespai}}{\Longrightarrow} \lambda u \in S' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$$

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ $((1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S')$



$S \cup S'$:

$\begin{cases} u \in S \cup S' \\ v \in S \cup S' \end{cases}$ però $u+v \notin S \cup S'$

$\left.\begin{array}{l} u = (2,2) \in S \subseteq S \cup S' \\ v = (2,-2) \in S' \subseteq S \cup S' \end{array}\right\}$ però $u+v = \underbrace{(4,0)}_{0 \neq \pm 4} \notin S \cup S'$

$\Rightarrow$ $S \cup S'$ no és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$