Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtica Aplicada II
Febrer 2012

5. Matrius, sistemes i determinants

5.2 Sistemes d'equacions lineals

Sistemes d'equacions lineals

Una **equació lineal** en les variables $x_1, \ldots, x_n$ és una expressió del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

on $a_1, \ldots, a_n, b$ pertanyen al cos d'escalars $\mathbb{K}$

Una **solució** és $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

(Obs. Una equació lineal pot tenir entre zero i infinites solucions)

Exemple: quines de les equacions següents són lineals en x, y, z?

	LINEAL?
$3x - y + z = 1$	SÍ
$2x - \sin\frac{\pi}{4}\, y + z = 2$	SÍ
$3x - \frac{1}{y} + z = 2$	NO
$x + yz = 5$	NO
$x - y + z^2 = 1$	NO
$x + \sin y + z = -3$	NO

Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \ldots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solució
- compatible indeterminat si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b$$

Exemple. Matriu associada al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 0 \\ 3x + 3y - \tfrac{1}{2}z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -1/2 & 2 \end{array}\right)$$

A b

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\boxed{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b}$$

sistema expressat de de forma matricial.

Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

reduïda: hi ha zeros damunt dels pivots (és a dir, a la columna del pivot, els elements diferents del pivot són tots zeros)

Sistemes escalonats

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \ldots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\
x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n
\end{aligned}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

$$\begin{cases} \# \text{ variables principals} = \text{rang } A = r \\ \# \text{ variables lliures} = n - \text{rang } A = n - r \end{cases}$$

Exemple.

Si tenim una matriu reduïda equivalent, el sistema té les mateixes solucions que el sistema que correspon a aquesta matriu reduïda equivalent i per a donar el conjunt de totes les solucions podem aïllar directament les variables principals (les que corresponen a les columnes dels pivots) i donar-les en funció de les variables lliures (la resta de variables):

variables principals

variables lliures

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \end{array} \\
(A|b) \sim & \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

SOLUCIONS:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
x_1 = -2x_2 - 3x_5 + 2x_6 + 4 \\
x_3 = \qquad\quad x_5 - 4x_6 + 5 \\
x_4 = \quad -5x_5 + x_6 + 2
\end{array} \quad , \; x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{K}}
$$

Exemple.

Si el sistema és equivalent a un sistema amb matriu reduïda:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

aleshores no té solució perquè la quarta equació equival a:

$$
\underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6}_{0} = 3
$$

$$
= 3
$$

que no es compleix mai!

Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{aligned}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$

Sigui r el rang d'A i sigui r' el rang de $(A|b)$

Aleshores,

$r \neq r'$:
- si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI)

$r = r'$
- si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD)
- si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat

Anomenarem rang d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$)

Corol·lari

Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables; sigui r el rang d'A. Aleshores

- si $r = n$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

Resolució de sistemes d'equacions lineals

Sistema de m equacions lineals i n incògnites:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

Matriu ampliada associada al sistema:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Resolució de sistemes d'equacions lineals

- $\mathrm{rang} A \neq \mathrm{rang}(A|b)$: sistema incompatible.
- $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = r = n$: sistema compatible determinat.
- $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = r < n$: sistema compatible indeterminat.

Solucions. Si $(A|b)$ és equivalent per files a una matriu escalonada amb zeros damunt dels pivots (matriu escalonada *reduïda*), podem donar les r variables corresponents a les columnes dels pivots (*variables principals*)
en funció de la resta de $n - r$ variables (*variables lliures*).

Direm que el sistema té $n - r$ *graus de llibertat*.

Exemple 1

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Solucions. La solució és única, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Exemple 2

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = 3 \neq 4 = \mathrm{rang}(A|b) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Exemple 3

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 = \text{ nombre d'incògnites } \Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad\qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 3 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned} \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ 2 + x_5 - 5x_6 \\ 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

Exemple 4. Sistema homogeni

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 =$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= x_5 - 5x_6 \qquad\qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 4 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 = x_5 - 5x_6 \\ x_4 = 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{cases} \qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ x_5 - 5x_6 \\ -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

EXEMPLE DE DISCUSSIÓ DE SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu equivalent escalonada

$\Leftarrow$ permutem les files 1a i 3a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} 2^a := 2^a - 1^a \\ 3^a := 3^a - a \cdot 1^a \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a + 2^a$

$ab-b=0 \Leftrightarrow (a-1)b=0 \Leftrightarrow a=1$ o $b=0$

$\boxed{\text{CAS } b=0:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -a \end{array}\right) \sim$$

$2-a-a^2 = (a+2)(1-a)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+(a+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a \cdot (a+2)$

$rg A < rg A' \Rightarrow$ S. Incompatible

- si $1-a \neq 0$: $rg A = 2 < 3 = rg A'$
- si $1-a = 0$: $rg A = 1 < 2 = rg A'$

$\boxed{\text{cas } b \neq 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

CASOS:

$\boxed{a=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \underset{3^a := 3^a - 2^a}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rgA = 1$

i $\begin{cases} rgA' = 1, \text{ si } b = 1 \\ rgA' = 2, \text{ si } b \neq 1 \end{cases}$

Per tant:

$\boxed{b \neq 1}$: S. Incompatible

$\boxed{b = 1}$: S.C. amb 2 graus de llibertat

$$2 = \underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{1}_{rgA = rgA' = 1}$$

$\boxed{a \neq 1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & b-a \end{array}\right)$$

$(a-1)b \neq 0$, $\quad (1-a) \neq 0$, $\quad (a+2) = 0 \iff a = -2$

Casos:

$\boxed{a=-2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right)$$

$\boxed{b=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$rgA = rgA' = 2 \Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

$$1 = \underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{2}_{rgA = rgA' = 2}$$

$\boxed{b \neq -2}$: $\underset{2}{rgA} \neq \underset{3}{rgA'} \Rightarrow$ S.I

$\boxed{a \neq -2}$ $\quad rgA = \underset{\#\text{variables}}{3} = rgA' \Rightarrow$ S.C.D

RESUM DE CASOS:

- $b=0$: S.I.
- $b\neq 0$
  - $a=1$
    - $b\neq 1$: S.I.
    - $b=1$: S.C.I. amb 2 graus de llibertat
  - $a\neq 1$
    - $a=-2$
      - $b=-2$: S.C.I amb 1 grau de llibertat
      - $b\neq -2$: S.I.
    - $a\neq -2$: S.C.D.

Es pot comprovar que és equivalent a:

- $a=1$
  - $b=1$: S.C.I.
  - $b\neq 1$: S.I
- $a=-2$
  - $b=-2$: S.C.I
  - $b\neq -2$: S.I
- $a\neq 1,-2$
  - $b=0$: S.I.
  - $b\neq 0$: S.C.D.