Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

canvis de base i aplicacions lineals: matriu associada?

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

Siguin $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'E, W una base de F i m la dimensió de F

$f : E \longrightarrow F$ aplicació lineal

La **matriu associada a f en les bases B i W** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base B expressades en coordenades en la base W. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \dots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f) u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

7.4 Canvi de base

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin $f : E \to F$ una aplicació lineal, B i B' bases d'E, i W i W' bases d'F

$$\begin{array}{ccc}
E_B & \xrightarrow[M_W^B(f)]{f} & F_W \\
I_E \Big\uparrow P_B^{B'} & & P_{W'}^W \Big\downarrow I_F \\
E_{B'} & \xrightarrow[M_{W'}^{B'}(f)]{f} & F_{W'}
\end{array}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$\boxed{M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^W \; M_W^B(f) \; P_B^{B'}}$$

JUSTIFICACIÓ :

(I)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{B'}{E} \arrow[r, "Id_E", "P^{B'}_{B}"'] \arrow[rrr, bend right, "Id_F \circ f \circ Id_E = f", "M^{B'}_{W'}(f)"'] & \underset{B}{E} \arrow[r, "f", "M^{B}_{W}(f)"'] & \underset{W}{F} \arrow[r, "Id_F", "P^{W}_{W'}"'] & \underset{W'}{F}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{M^{B'}_{W'}(f) = P^{W}_{W'} \cdot M^{B}_{W}(f) \cdot P^{B'}_{B}}$$

(II)

$u \in E$

$$M^{B'}_{W'}(f) \cdot (u)_{B'} = (f(u))_{W'}$$

$$\underbrace{P^{W}_{W'} \, \underbrace{M^{B}_{W}(f) \, \underbrace{P^{B'}_{B} \, (u)_{B'}}_{(u)_B}}_{(f(u))_W}}_{(f(u))_{W'}} = (f(u))_{W'}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M^{B'}_{W'}(f) = P^{W}_{W'} \, M^{B}_{W}(f) \, P^{B'}_{B}}$$

EXEMPLES

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$?

Vam calcular la matriu associada en bases canòniques $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$:

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (vegeu exemple 1 - AL8)

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$P_{C_3}^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{C_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3} = \left(P_{C_2}^{B_2}\right)^{-1} M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 \\ -2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 25 & 8 & 19 \\ -12 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

Matriu associada a f en base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?

Calculem primer la matriu associada en la base canònica: $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = P_B^C \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B = \left(P_C^B\right)^{-1} M_C^C(f) \cdot P_C^B$$

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ :

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

i $u \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

aleshores

$u_C = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

$u_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ja que $u = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}}_{b_1} + 0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_2} + 0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{b_3}$

Podem calcular $f(u)$ utilitzant $M_C^C(f)$ o bé $M_B^B(f)$:

si utilitzem $M_C^C(f)$:

$M_C^C(f)\,(u)_C = (f(u))_C$, per tant $(f(u))_C = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$$

Si utilitzem $M_B^B(f)$:

$M_B^B(f)\,(u)_B = (f(u))_B$, per tant $(f(u))_B = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}3 & -11 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -2 & 16 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Comprovem que, efectivament $P_C^B\,(f(u))_B = (f(u))_C$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P_C^B}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}}_{(f(u))_B} = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}}_{(f(u))_C}$$

CERT!

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

Calculeu la matriu associada en les bases:

$B = \{1+x,\ x^2,\ -1+x+3x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Podem calcular fàcilment la matriu associada a f en les bases canòniques (vegeu l'exemple 3 - AL8)

$C_P = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$

$C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M_{C_M}^{C_P}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_W^B(f) = P_W^{C_M} \cdot M_{C_M}^{C_P}(f) \cdot P_{C_P}^B = \left(P_{C_M}^W\right)^{-1} M_{C_M}^{C_P}(f) \cdot P_{C_P}^B$$

$$P_{C_M}^W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{C_P}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_W^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

4) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i canònica d'$\mathbb{R}^2$?

Coneixem la matriu associada en bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^2$ (vegeu l'exemple 1):

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$M_{C_2}^{B_3}(f) = M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases canònica d'$\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$?

Coneixem la matriu associada en bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^2$ (vegeu l'exemple 1):

$$M^{C_3}_{C_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$M^{C_3}_{B_2}(f) = P^{C_2}_{B_2} \cdot M^{C_3}_{C_2}(f) =$$

$$= \left(P^{B_2}_{C_2}\right)^{-1} \cdot M^{C_3}_{C_2}(f) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\exists$ B base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal ?

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ i $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

aleshores :

$$\begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_1) = \lambda_1 b_1 \\ f(b_2) = \lambda_2 b_2 \\ f(b_3) = \lambda_3 b_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Plantegem el sistema: $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre λ:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(continuarà...)

Per què matrius diagonals?

A més de la interpretació en diferents problemes (estadístics, geomètrics, grafs, ...) el producte de matrius diagonals és més senzill:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2543} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{2543} = \begin{pmatrix} 6^{2543} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2543} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2543} \end{pmatrix}$$