Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials → CANVIS DE BASE
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \dots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$
  (també a $\{x^d, x^{d-1}, \dots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E

Proposició

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

Proposició

Sigui $\{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

Corol·lari

Tota base d'E té n elements

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d + 1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

E e.v. de dimensió n

- E té com a molt n vectors L.I.
- Calen almenys n vectors per a generar E.

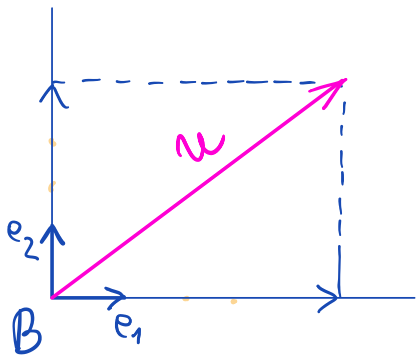
$B \subseteq E$:

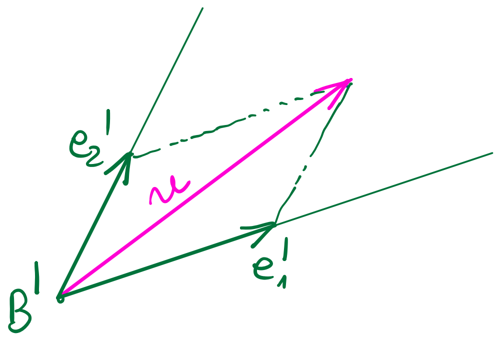
- $|B| = n$
- B L.I
- $\langle B \rangle = E$

dues d'aquestes condicions impliquen la tercera

és a dir:

- n vectors L.I. formen base
- n vectors que generin E, formen base





$$u = 4e_1 + 3e_2 \qquad\qquad u = e_1' + e_2'$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Canvi de base

Siguin $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ i $B' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ dues bases d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Sigui u un vector d'E
Veiem com es relacionen els vectors de coordenades u_B i $u_{B'}$

Anomenem **matriu del canvi de la base B a la base B′** a la matriu que té per columnes els vectors de coordenades $(b_1)_{B'}, \ldots, (b_n)_{B'}$. La denotem per $\mathbf{P^{B}_{B'}}$

$$P^B_{B'} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_1)_{B'} & (b_2)_{B'} & \ldots & (b_n)_{B'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Aleshores

- $u_{B'} = P^B_{B'} u_B$, expressant els vectors de coordenades en columna
- $P^{B'}_B = \left(P^B_{B'}\right)^{-1}$ ja que $\left(P^B_{B'}\right)^{-1} (u)_{B'} = (u)_B$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ $\quad B' = \{b_1', \dots, b_n'\}$, $u \in E$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \\ u = x_1' b_1' + \dots + x_n' b_n' \end{cases}$$

$$\boxed{(u)_{B'}} = (x_1 b_1 + \dots + x_n b_n)_{B'} =$$

$$= x_1 \cdot (b_1)_{B'} + \dots + x_n (b_n)_{B'}$$

$$= \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (b_1)_{B'} & \cdots & (b_n)_{B'} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{P_{B'}^{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(u)_B}}$$

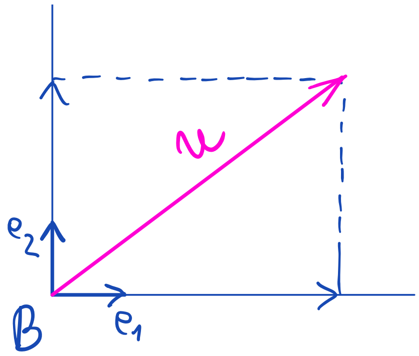
vectors de B en la base B' per columnes

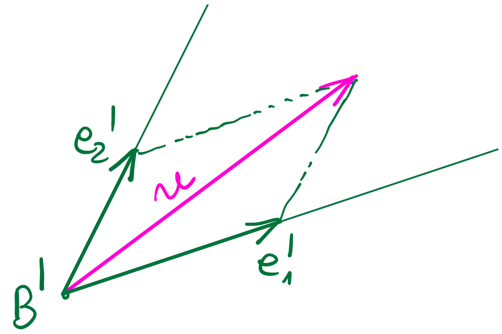
$$(u)_{B'} = P_{B'}^{B} (u)_B \ , \quad P_{B'}^{B} \text{ : matriu de canvi de base de } B \text{ a } B'$$

- $(u)_{B'} = P_{B'}^{B} \cdot (u)_B \iff (P_{B'}^{B})^{-1} (u)_{B'} = (u)_B$
- $(u)_B = P_{B}^{B'} (u)_{B'}$

Per tant: $\boxed{P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1}}$

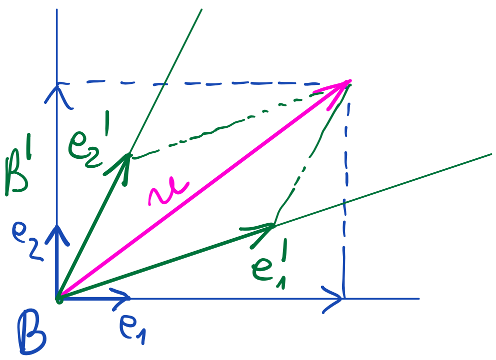
EXEMPLE





$u = 4e_1 + 3e_2$ $\Downarrow$ $(u)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$u = e_1' + e_2'$ $\Downarrow$ $(u)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$B = \{e_1, e_2\}$

$B' = \{e_1', e_2'\}$

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= 3e_1 + e_2 \\ e_2' &= e_1 + 2e_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (e_1')_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (e_2')_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$P_B^{B'} (u)_{B'} = (u)_B$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$P_{B'}^{B} (u)_B = (u)_{B'}$:

$$\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Coordenades de $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}$ en la base B ?

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canònica

conec: $(u)_C$! volem: $(u)_B$?

Matriu de canvi de base:

conec B en base C : $P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^B_C \cdot (u)_B = (u)_C$$

conec: ! ? !

$$\boxed{(u)_B} = \left(P^B_C\right)^{-1} \cdot (u)_C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2. $P_2(\mathbb{R})$

$B = \{2-2x+x^2, 1-x, 2-2x^2\}$. Expresseu $\underbrace{x+2x^2}_{p}$ en la base B.

$C = \{1, x, x^2\}$ ⇝ base canònica.

Conec: $P_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\underbrace{P_C^B}_{!} \underbrace{(p)_B}_{?} = \underbrace{(p)_C}_{!}$

Conec $(p)_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Volem: $(p)_B$?

$P_C^B (p)_B = (p)_C \Rightarrow \boxed{(p)_B = (P_C^B)^{-1} \cdot (p)_C} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

Per tant:

$p = x + 2x^2 =$

$= 3 \cdot (2-2x+x^2) + (-7) \cdot (1-x) + 1/2 (2-2x^2) = .$

Exemple 3. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$. Expresseu $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}}_{M}$ en la base B.

$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

coneixem: $(M)_C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

volem: $(M)_B=?$

conec: $P_C^B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

$$\underset{!}{P_C^B}\ \underset{?}{(M)_B}=\underset{!}{(M)_C}\Rightarrow \boxed{(M)_B}=\left(P_C^B\right)^{-1}\cdot(M)_C=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&-2&1&2\\-3&2&-1&-1\\3&-2&1&2\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-5\\4\\-6\\3\end{pmatrix}}$$

Per tant:

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=(-5)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+(-6)\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$$

Exemple 4. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \right\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} \right\}$, $(u)_B = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Calculeu $(u)_{B'}$.

$C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

conec: $\underbrace{P^B_C = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}}_{P^B_C (u)_B = (u)_C}$, $\underbrace{P^{B'}_C = \begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & -5\end{pmatrix}}_{P^{B'}_C (u)_{B'} = (u)_C}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{P^B_C}_{!} \underbrace{(u)_B}_{!} = \underbrace{P^{B'}_C}_{!} \underbrace{(u)_{B'}}_{?}$$

Conec: ! ! ! ?

$$(P^{B'}_C)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = (u)_{B'}$$

$$\Rightarrow \boxed{(u)_{B'}} = (P^{B'}_C)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & -5\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-27\\-16\end{pmatrix}}$$

Hem vist:

B, B', C bases d'E $\Rightarrow P^{B}_{B'} = P^{C}_{B'} \cdot P^{B}_{C} = \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} \cdot P^{B}_{C}$

ja que:

$$\left.\begin{array}{l} P^{B}_{C}(u)_B = (u)_C \\ P^{B'}_{C}(u)_{B'} = (u)_C \end{array}\right\} \Rightarrow P^{B}_{C}(u)_B = P^{B'}_{C}(u)_{B'} \Rightarrow \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} P^{B}_{C}(u)_B = (u)_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{B}_{B'} = \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} P^{B}_{C} = P^{C}_{B'} P^{B}_{C}$$

En general:

$B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E $\Rightarrow P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r} P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots P^{B_2}_{B_3} \cdot P^{B_1}_{B_2}$

ja que:

$$P^{B_1}_{B_r}(u)_{B_1} = (u)_{B_r}$$

$$\underbrace{P^{B_{r-1}}_{B_r} \cdot P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots \underbrace{P^{B_2}_{B_3} \cdot \underbrace{P^{B_1}_{B_2}(u)_{B_1}}_{(u)_{B_2}}}_{(u)_{B_3}}}_{(u)_{B_r}} = (u)_{B_r}$$

etc.