

Tema 2. Dividir i vèncer

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Antoni Lozano

Q1 2023–2024

Versió de 4 d'octubre de 2023

Tema 2. Dividir i vèncer

1 Ordenació per fusió

- Algorisme de fusió bàsic
- Variants

2 Ordenació ràpida

- Algorisme general
- Variants
- Anàlisi

3 Productes i exponents

- Algorisme de Karatsuba
- Exponenciació ràpida
- Algorisme de Strassen

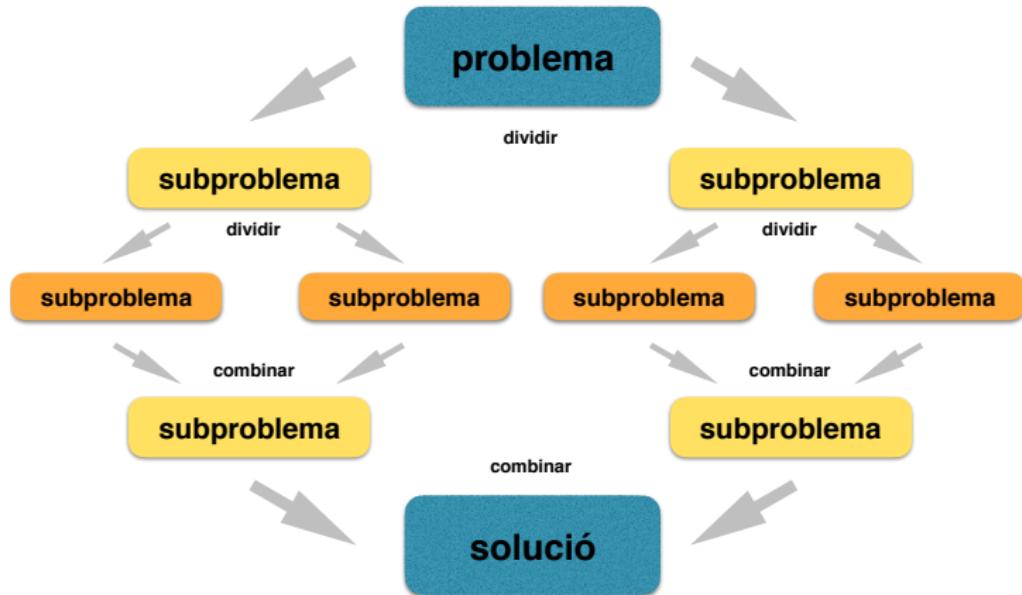
4 Altres algorismes

- Torres de Hanoi
- Mediana

L'estratègia **dividir i vèncer** resol un problema en tres passos:

- ① **dividint-lo** en *subproblems*, exemples més petits del mateix problema
- ② **resolent** els subproblems recursivament
- ③ **combinant** les solucions de manera adequada

Dividir i vèncer



La feina es fa, per tant, en tres parts: (1) en la divisió en subproblemes, (2) al final de la recursió i (3) en la combinació de les solucions.

Els algorismes de dividir i vèncer segueixen sovint una mateixa estratègia.
Ataquen un problema de mida n

- dividint-lo en a subproblemes de mida n/b ,
- resolent els subproblemes recursivament i
- combinant les respostes,

on $a \geq 1$, $b > 1$, i el cost de dividir en subproblemes i combinar respostes és $\Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Per tant, el cost de l'algorisme es pot descriure mitjançant la recurrència

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + \Theta(n^k)$$

que es pot resoldre aplicant el teorema mestre de recurrències divisores.

Teorema mestre de recurredies divisores

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Cerca binària

```
int cerca_binaria(const vector<int>& v, int i, int j, int x) {  
    // retorna la pos. de x entre v[i] i v[j] si hi es; -1 si no  
    if (i <= j) {  
        int k = (i + j) / 2;  
        if (x == v[k])  
            return k;  
        else if (x < v[k])  
            return cerca_binaria(v, i, k-1, x);  
        else  
            return cerca_binaria(v, k+1, j, x);  
    } return -1;  
}
```

El paràmetre de recursió és $n = j - i + 1$ i el cost $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$.
Pel teorema mestre de recurrències divisores, $T(n) \in \Theta(\log n)$.

Exercici: Rang

Escriviu un algorisme de cost $\Theta(\log n)$ i basat en *dividir i vèncer* que, donada una taula ordenada T amb n elements diferents i dos elements x i y amb $x \leq y$, retorni el nombre d'elements en T que es troben entre x i y (x i y inclosos).

Tema 2. Dividir i vèncer

1 Ordenació per fusió

- Algorisme de fusió bàsic
- Variants

2 Ordenació ràpida

- Algorisme general
- Variants
- Anàlisi

3 Productes i exponents

- Algorisme de Karatsuba
- Exponenciació ràpida
- Algorisme de Strassen

4 Altres algorismes

- Torres de Hanoi
- Mediana

Algorisme de fusió bàsic

L'**ordenació per fusió**, o *mergesort*, és un bon exemple de l'esquema **dividir i vèncer** que fa servir un nombre de comparacions gairebé òptim. És un algorisme **estable** en un doble sentit:

- Preserva l'ordre entre valors iguals
- Es comporta de manera semblant amb independència del grau d'ordenació de l'entrada

Mergesort va ser inventat per John von Neumann l'any 1945.



Donat un vector T de talla ≥ 2 , l'algorisme consisteix a:

- ① Partir T en dues meitats
- ② Ordenar recursivament la meitats de T per separat
- ③ Retornar la fusió de les dues meitats

L'operació clau (punt 3) consisteix a combinar (**fusionar**) dos vectors ordenats en un.

Algorisme de fusió bàsic

Exemple de fusió

entrada	E	X	E	M	P	L	E	F	U	S	I	O
ordenar 1a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	U	S	I	O
ordenar 2a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	I	O	S	U
resultat fusió	E	E	E	F	I	L	M	O	P	S	U	X

Algorisme de fusió bàsic

Exemple de fusió

entrada	E	X	E	M	P	L	E	F	U	S	I	O
ordenar 1a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	U	S	I	O
ordenar 2a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	I	O	S	U
resultat fusió	E	E	E	F	I	L	M	O	P	S	U	X

Algorisme de fusió bàsic

Exemple de fusió

entrada	E	X	E	M	P	L	E	F	U	S	I	O
ordenar 1a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	U	S	I	O
ordenar 2a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	I	O	S	U
resultat fusió	E	E	E	F	I	L	M	O	P	S	U	X

Algorisme de fusió bàsic

Exemple de fusió

entrada	E	X	E	M	P	L	E	F	U	S	I	O
ordenar 1a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	U	S	I	O
ordenar 2a meitat	E	E	L	M	P	X	E	F	I	O	S	U
resultat fusió	E	E	E	F	I	L	M	O	P	S	U	X

Algorisme de fusió bàsic

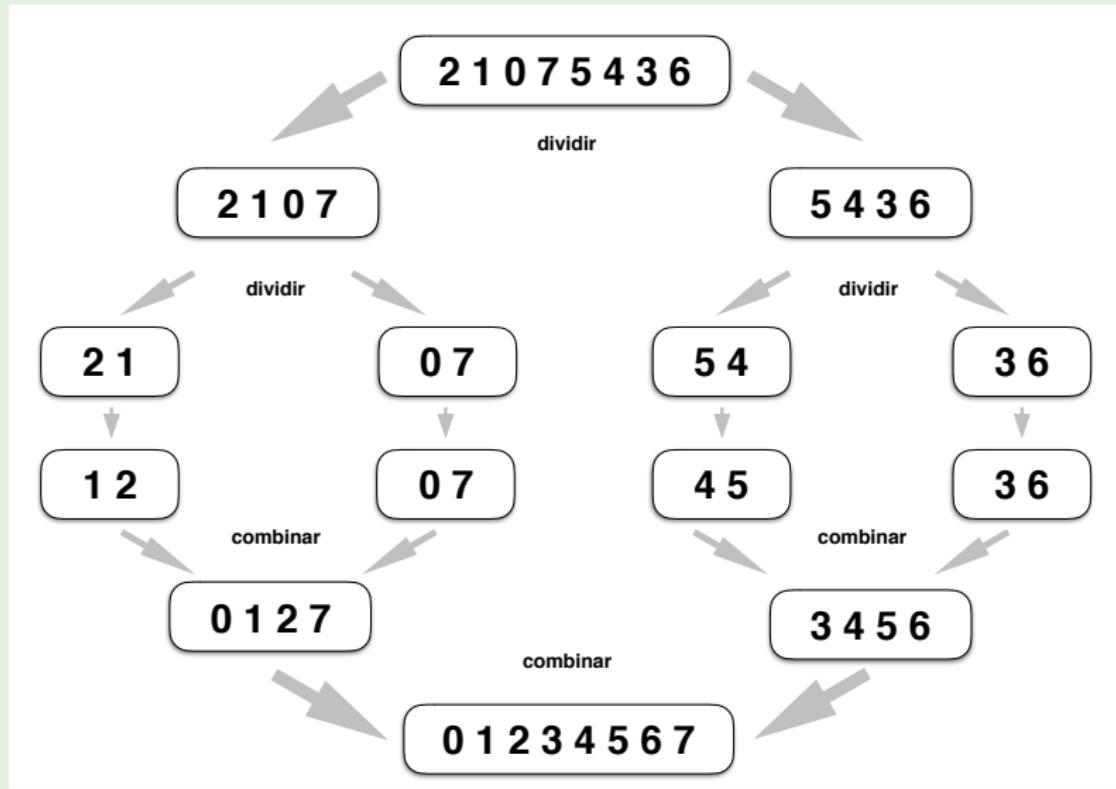
Ordenació per fusió (*Algoritmes en C++, EDA*)

```
template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T) {
    mergesort(T, 0, T.size() - 1);
}

template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        mergesort(T, e, m);
        mergesort(T, m + 1, d);
        merge(T, e, m, d);
    }
}
```

Algorisme de fusió bàsic

Exemple (aquí, la recursió acaba per a talla 2, en l'algorisme és per a 1)



Algorisme de fusió bàsic

El cor de l'algorisme és fer la fusió de dos vectors ordenats.

Fusió (*Algorismes en C++, EDA*)

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d)
// donats els subvectors ordenats T[e..m] i T[m+1..d],
// deixa T[e..d] ordenat
{
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1
---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2
---	---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2	3
---	---	---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2	3	4
---	---	---	---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Exemple

0	1	2	7
---	---	---	---

3	4	5	6
---	---	---	---

0	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

```
template <typename elem>
void merge (vector<elem>& T, int e, int m, int d) {
    vector<elem> B(d-e+1);
    int i = e, j = m + 1, k = 0;
    while (i <= m and j <= d) {
        if (T[i] <= T[j]) B[k++] = T[i++];
        else B[k++] = T[j++];
    }
    while (i <= m) B[k++] = T[i++];
    while (j <= d) B[k++] = T[j++];
    for (k = 0; k <= d-e; ++k) T[e+k] = B[k];
}
```

Observació

Cada comparació afegeix un element a la taula B excepte l'última, que n'afegeix almenys dos.

- Per tant, el nombre de **comparacions** de tipus `elem` és $< n = d - e + 1$
- El nombre d'**assignacions** de tipus `elem` és $2n$
- El cost és **lineal** (assumint que assignar un `elem` és $\Theta(1)$)

Algorisme de fusió bàsic

```
template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        mergesort(T, e, m);
        mergesort(T, m + 1, d);
        merge(T, e, m, d);
    }
}
```

Donat que el procediment `merge` és lineal, el cost de l'ordenació per fusió es pot expressar fàcilment amb la recurrència

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n), & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

i, aplicant el [teorema mestre de recurrències divisores](#), tenim que

$$T(n) \in \Theta(n \log n).$$

Ordenació per fusió amb inserció per a vectors petits (*Alg. en C++, EDA*)

```
template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    const int talla_critica = 50;
    if (d - e < talla_critica)
        ordena_insercio(T, e, d);
    else {
        int m = (e + d) / 2;
        mergesort(T, e, m);
        mergesort(T, m + 1, d);
        merge(T, e, m, d);
    }
}
```

Les dues **versions iteratives** que veurem parteixen del fet que la versió recursiva només fa les fusions al final de la recursió.

Aquestes variants

- comencen directament pels elements a ordenar i
- arriben al vector ordenat mitjançant fusions.

Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```



Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```

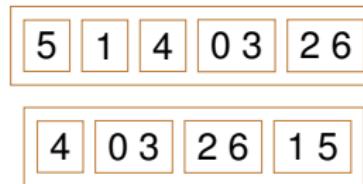


Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```

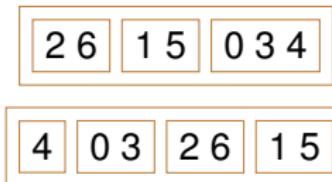


Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```

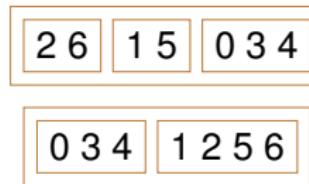


Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```



Ordenació per fusió iterativa 1

Versió del llibre *Algorithms* de Dasgupta/Papadimitriou/Vazirani en pseudocodi (pàg. 51). Es fa servir el TAD cua amb operacions

- `inject (Q , e)`: afegir l'element e a la cua Q i
- `eject (Q)`: funció que extreu i retorna l'últim element de Q

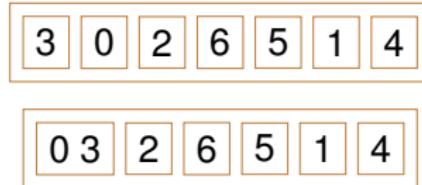
```
function mergesort_queue(a[1...n])
    Q = [] (cua buida)
    for i=1 to n:
        inject(Q, a[i])
    while |Q| > 1:
        inject(Q, merge(eject(Q), eject(Q)))
    return eject(Q)
```

0 1 2 3 4 5 6

0 3 4 1 2 5 6

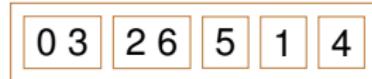
Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```



Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```



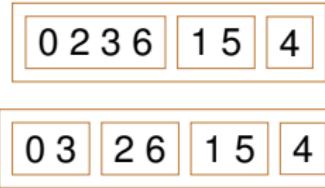
Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```



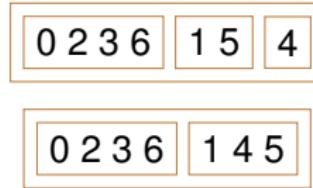
Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```



Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```



Ordenació per fusió iterativa 2 (Algorismes en C++, EDA)

```
template <typename elem>
void mergesort_bottom_up (vector<elem>& T) {
    int n = T.size();
    for (int m = 1; m < n; m *= 2) {
        for (int i = 0; i < n-m; i += 2*m) {
            merge(T, i, i+m-1, min(i+2*m-1, n-1));
    }    }    }
```

0 1 2 3 4 5 6

0 2 3 6 1 4 5

Exercici: Fusió amunt, fusió avall

Ordeneu la taula $\langle 3, 8, 15, 7, 12, 6, 5, 4, 3, 7, 1 \rangle$ amb l'algorisme d'ordenació per fusió recursiu i amb un dels algorismes d'ordenació per fusió iterativa.

Exercicis

Recordem la versió recursiva de *mergesort*

```
template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T) {
    mergesort(T, 0, T.size() - 1);
}

template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        mergesort(T, e, m);
        mergesort(T, m + 1, d);
        merge(T, e, m, d);
    }
}
```

Qüestió: Alcària de pila

Quantes crides recursives cal guardar com a màxim en un instant donat a la pila per ordenar per fusió una taula de n elements?

Exercicis

Recordem la versió recursiva de *mergesort*

```
template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T) {
    mergesort(T, 0, T.size() - 1);
}

template <typename elem>
void mergesort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        mergesort(T, e, m);
        mergesort(T, m + 1, d);
        merge(T, e, m, d);
    }
}
```

Qüestió: Nombre de vectors

Cada crida a `merge` crea un vector auxiliar. Fins a quants n'hi pot haver en un moment donat per a una taula de n elements?

Tema 2. Dividir i vèncer

1 Ordenació per fusió

- Algorisme de fusió bàsic
- Variants

2 Ordenació ràpida

- Algorisme general
- Variants
- Anàlisi

3 Productes i exponents

- Algorisme de Karatsuba
- Exponenciació ràpida
- Algorisme de Strassen

4 Altres algorismes

- Torres de Hanoi
- Mediana

Algorisme general

Com el seu nom indica, l'**ordenació ràpida**, o **quicksort**, és l'algorisme d'ordenació genèric més ràpid. Tot i que el seu cost en el **cas pitjor** és $\Theta(n^2)$, el **cas mitjà** és $\Theta(n \log n)$ i l'eficiència del seu bucle intern el converteix en l'algorisme que es comporta millor a la pràctica.

Quicksort va ser inventat per C. A. R. Hoare l'any 1960. Ha estat molt estudiat des de llavors.

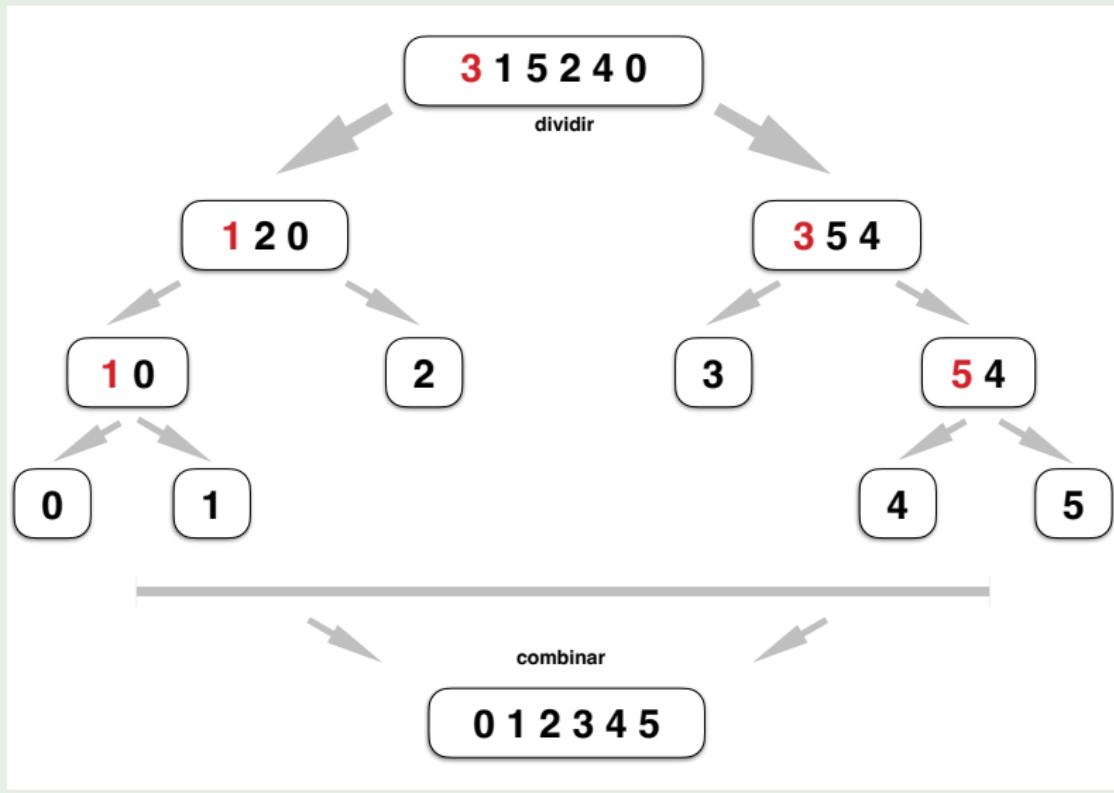


Donat un vector T d'almenys 2 elements, l'**algorisme bàsic** fa el següent:

- 1 Triar un element x de T
- 2 Dividir T en dos grups disjunts:
 - T_1 , que conté elements $\leq x$ de T
 - T_2 , que conté elements $\geq x$ de T
- 3 Ordenar T_1 i T_2 recursivament
- 4 Retornar T_1 seguit de T_2

Algorisme general

Exemple



Algorisme general

Ordenació ràpida (*Algorismes en C++, EDA*)

```
void quicksort(vector<elem>& T) {  
    quicksort(T, 0, T.size() - 1); }  
  
template <typename elem>  
void quicksort(vector<elem>& T, int e, int d) {  
    if (e < d) {  
        int q = partition(T, e, d);  
        quicksort(T, e, q);  
        quicksort(T, q + 1, d); } }
```

$q = \text{partition}(T, e, d)$

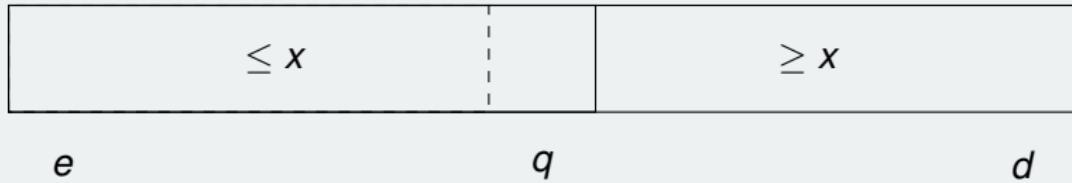
- **Precondició:** $0 \leq e \leq d \leq T.size() - 1$
- **Postcondició:** $\exists x$ (pivot) $\forall i$
 - si $e \leq i \leq q$, tenim que $T[i] \leq x$
 - si $q < i \leq d$, tenim que $T[i] \geq x$

Algorisme general

Ordenació ràpida (*Algoritmes en C++, EDA*)

```
void quicksort(vector<elem>& T) {  
    quicksort(T, 0, T.size() - 1); }  
  
template <typename elem>  
void quicksort(vector<elem>& T, int e, int d) {  
    if (e < d) {  
        int q = partition(T, e, d);  
        quicksort(T, e, q);  
        quicksort(T, q + 1, d); } }
```

$q = \text{partition}(T, e, d)$



- Paral·lelismes amb l'ordenació per fusió:

- resol dos subproblemes
- fa un treball addicional lineal

- Estratègies oposades:

- Ordenació per fusió:

- divisió en subproblemes trivial
 - combinació dels vectors feta amb cura

- Ordenació ràpida:

- divisió en subproblemes feta amb cura
 - combinació de vectors trivial

Partició de Hoare

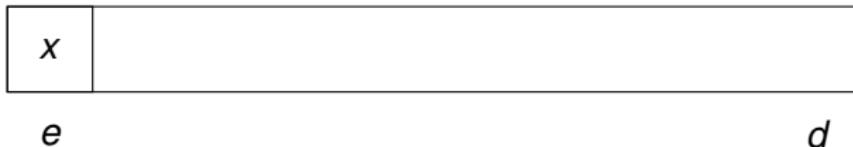
Partició original de Hoare amb el primer element com a pivot.

Partició de Hoare (*Algorismes en C++, EDA*)

```
template <typename elem>
int partition (vector<elem>& T, int e, int d) {
    elem x = T[e];
    int i = e - 1;
    int j = d + 1;
    for (;;) {
        while (x < T[--j]);
        while (T[++i] < x);
        if (i >= j) return j;
        swap(T[i], T[j]);
    }
}
```

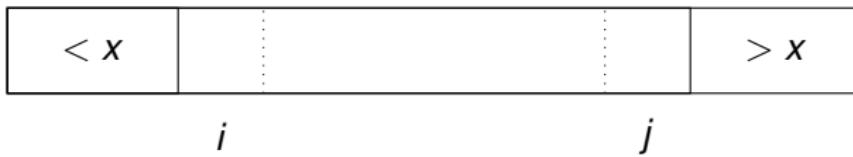
Partició de Hoare

- Inici de la funció `partition(T, e, d)`:

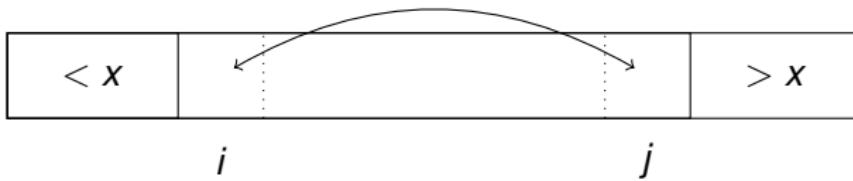


- Bucle principal:

- es troben els valors de i, j més centrals tals que



- s'intercanvien els continguts de les posicions i, j



Exercici

Simuleu `partition(T, 0, 7)` per a la taula `T`: $\langle 4, 2, 1, 6, 4, 0, 2, 6 \rangle$.

Altres diferències amb l'ordenació per fusió:

- Els subproblemes no sempre tenen la **mateixa mida**
- La mida dels subproblemes depèn de la tria del **pivot** (element inicial)

Considerem tres estratègies per a l'elecció del pivot:

1 Tria el **primer** element:

- és acceptable si l'entrada és aleatòria
- si l'entrada està ordenada (en ordre creixent o decreixent), l'algorisme pren temps $\Theta(n^2)$ per no fer res

2 Tria un element **aleatori**

- en mitjana divideix el problema en subproblemes semblants
- no sempre fa l'algorisme més ràpid
(generar nombres aleatoris pot ser costós)

3 Tria la **mediana** de tres elements

- la millor opció seria triar la mediana del vector, però és massa cara
- una bona estimació és fer la mediana de 3, normalment el 1r, l'element del mig i l'últim

Considerem tres estratègies per a l'elecció del pivot:

1 Tria el **primer** element:

- és acceptable si l'entrada és aleatòria
- si l'entrada està ordenada (en ordre creixent o decreixent), l'algorisme pren temps $\Theta(n^2)$ per no fer res

2 Tria un element **aleatori**

- en mitjana divideix el problema en subproblemes semblants
- no sempre fa l'algorisme més ràpid
(generar nombres aleatoris pot ser costós)

3 Tria la **mediana** de tres elements

- la millor opció seria triar la mediana del vector, però és massa cara
- una bona estimació és fer la mediana de 3, normalment el 1r, l'element del mig i l'últim

Considerem tres estratègies per a l'elecció del pivot:

1 Tria el **primer** element:

- és acceptable si l'entrada és aleatòria
- si l'entrada està ordenada (en ordre creixent o decreixent), l'algorisme pren temps $\Theta(n^2)$ per no fer res

2 Tria un element **aleatori**

- en mitjana divideix el problema en subproblemes semblants
- no sempre fa l'algorisme més ràpid
(generar nombres aleatoris pot ser costós)

3 Tria la **mediana** de tres elements

- la millor opció seria triar la mediana del vector, però és massa cara
- una bona estimació és fer la **mediana de 3**, normalment el 1r, l'element del mig i l'últim

Ordenació ràpida per a pivot aleatori (*Algorismes en C++, EDA*)

```
template <typename elem>
void quicksort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int p = randint(e, d);
        swap(T[e], T[p]);
        int q = partition(T, e, d);
        quicksort(T, e, q);
        quicksort(T, q + 1, d);
    }
}
```

Variants

Ordenació ràpida amb la mediana de tres com a pivot

```
template <typename elem>
void quicksort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int centre = (e + d) / 2;
        if (T[e] < T[centre]) swap(T[centre], T[e]);
        if (T[d] < T[centre]) swap(T[centre], T[d]);
        if (T[d] < T[e]) swap(T[e], T[d]);
        // el pivot es a la posicio e
        int q = partition(T, e, d);
        quicksort(T, e, q);
        quicksort(T, q + 1, d);
    }
}
```

Després de les línies 1, 2 i 3, tenim

$$T[\text{centre}] \leq T[e], T[\text{centre}] \leq T[d], T[e] \leq T[d].$$

Per tant, $T[\text{centre}] \leq T[e] \leq T[d]$ i la mediana és $T[e]$.

Per a vectors molt petits, l'ordenació per **inserció** es comporta millor que *quicksort*. Una bona solució, doncs, és tallar la recursió quan el vector és més petit que una certa mida (normalment, entre 5 i 20).

Ordenació ràpida amb inserció per a vectors petits

```
template <typename elem>
void quicksort(vector<elem>& T, int e, int d) {
    const int talla_critica = 20;
    if (d - e < talla_critica)
        ordena_insercio(T, e, d);
    else {
        int q = partition(T, e, d);
        quicksort(T, e, q);
        quicksort(T, q + 1, d);
    }
}
```

Recurrència

Sigui $T(n)$ el cost de l'algorisme d'ordenació ràpida amb n elements.
Llavors,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{si } n \leq 1 \\ T(i) + T(n - i) + \Theta(n), & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

on i és el nombre d'elements de la primera meitat, $n - i$ de la segona i el cost $\Theta(n)$ prové del càclul de la partició de Hoare.

Cas general

$$T(n) = T(i) + T(n - i) + \Theta(n)$$

En el **cas pitjor**, el pivot és sempre l'element més petit o el més gran. Com a resultat, una crida recursiva té cost constant i l'altra $T(n - 1)$.

Cas pitjor

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$$

Resolent la recurrència directament (o aplicant el primer teorema mestre), s'obté:

$$T(n) \in \Theta(n^2).$$

Cas general

$$T(n) = T(i) + T(n - i) + \Theta(n)$$

En el **cas millor**, el pivot és la mediana del vector i , per tant, els dos subvectors tenen la mateixa mida.

Cas millor

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

És la mateixa recurrència de l'ordenació per fusió que, pel segon teorema mestre, dona el cost:

$$T(n) \in \Theta(n \log n).$$

Cas general

$$T(n) = T(i) + T(n - i) + \Theta(n)$$

Per al **cas mitjà**, suposarem que la partició és aleatòria.

Hi ha una probabilitat $\frac{1}{n-1}$ de tenir una meitat de mida i per a $1 \leq i \leq n-1$.

El valor mitjà de $T(i)$ i de $T(n - i)$ serà de $\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} T(j)$.

Cas mitjà

Per a alguna constant c ,

$$T(n) = \frac{2}{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} T(j) \right] + cn \quad (1)$$

Anàlisi: cas mitjà

Multipliquem l'equació 1 per $n - 1$:

$$(n - 1)T(n) = 2 \left[\sum_{j=1}^{n-1} T(j) \right] + cn(n - 1) \quad (2)$$

Per eliminar el sumatori, escrivim el cas $n + 1$:

$$nT(n+1) = 2 \left[\sum_{j=1}^n T(j) \right] + c(n+1)n \quad (3)$$

i restem l'equació (2) de la (3):

$$nT(n+1) - (n - 1)T(n) = 2T(n) + 2cn. \quad (4)$$

Reordenant els termes,

$$nT(n+1) = (n + 1)T(n) + 2cn. \quad (5)$$

Multipliquem l'equació 1 per $n - 1$:

$$(n - 1)T(n) = 2 \left[\sum_{j=1}^{n-1} T(j) \right] + cn(n - 1) \quad (2)$$

Per eliminar el sumatori, escrivim el cas $n + 1$:

$$nT(n+1) = 2 \left[\sum_{j=1}^n T(j) \right] + c(n+1)n \quad (3)$$

i restem l'equació (2) de la (3):

$$nT(n+1) - (n - 1)T(n) = 2T(n) + 2cn. \quad (4)$$

Reordenant els termes,

$$nT(n+1) = (n + 1)T(n) + 2cn. \quad (5)$$

Multipliquem l'equació 1 per $n - 1$:

$$(n - 1)T(n) = 2 \left[\sum_{j=1}^{n-1} T(j) \right] + cn(n - 1) \quad (2)$$

Per eliminar el sumatori, escrivim el cas $n + 1$:

$$nT(n+1) = 2 \left[\sum_{j=1}^n T(j) \right] + c(n+1)n \quad (3)$$

i restem l'equació (2) de la (3):

$$nT(n+1) - (n - 1)T(n) = 2T(n) + 2cn. \quad (4)$$

Reordenant els termes,

$$nT(n+1) = (n + 1)T(n) + 2cn. \quad (5)$$

Anàlisi: cas mitjà

Dividim l'equació (5) per $n(n+1)$:

$$\frac{T(n+1)}{n+1} = \frac{T(n)}{n} + \frac{2c}{n+1}. \quad (6)$$

Substituem n per tots els valors des de $n-1$ fins a 1:

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(n-1)}{n-1} + \frac{2c}{n} \quad (7)$$

$$\frac{T(n-1)}{n-1} = \frac{T(n-2)}{n-2} + \frac{2c}{n-1} \quad (8)$$

⋮

$$\frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + \frac{2c}{2}. \quad (9)$$

La suma de totes les equacions (7)–(9) dona

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(1)}{1} + 2c \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}. \quad (10)$$

Anàlisi: cas mitjà

Dividim l'equació (5) per $n(n+1)$:

$$\frac{T(n+1)}{n+1} = \frac{T(n)}{n} + \frac{2c}{n+1}. \quad (6)$$

Substituem n per tots els valors des de $n-1$ fins a 1:

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(n-1)}{n-1} + \frac{2c}{n} \quad (7)$$

$$\frac{T(n-1)}{n-1} = \frac{T(n-2)}{n-2} + \frac{2c}{n-1} \quad (8)$$

⋮

$$\frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + \frac{2c}{2}. \quad (9)$$

La suma de totes les equacions (7)–(9) dona

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(1)}{1} + 2c \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}. \quad (10)$$

Anàlisi: cas mitjà

Dividim l'equació (5) per $n(n+1)$:

$$\frac{T(n+1)}{n+1} = \frac{T(n)}{n} + \frac{2c}{n+1}. \quad (6)$$

Substituem n per tots els valors des de $n-1$ fins a 1:

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(n-1)}{n-1} + \frac{2c}{n} \quad (7)$$

$$\frac{T(n-1)}{n-1} = \frac{T(n-2)}{n-2} + \frac{2c}{n-1} \quad (8)$$

⋮

$$\frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + \frac{2c}{2}. \quad (9)$$

La suma de totes les equacions (7)–(9) dona

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(1)}{1} + 2c \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}. \quad (10)$$

D'altra banda, se sap que

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \ln(n) + \gamma - 1$$

on $\gamma \approx 0.577$ és la constant d'Euler.

Substituint aquest valor en l'equació (10) obtinguda abans

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(1)}{1} + 2c \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

es dedueix que

$$\frac{T(n)}{n} \in \Theta(\log n)$$

i, per tant,

$$T(n) \in \Theta(n \log n).$$

Exercici: **Quicksort a mà**

Ordeneu la taula $\langle 6, 0, 2, 0, 1, 3, 4, 6, 1, 3, 2 \rangle$ amb l'algorisme d'ordenació ràpida i la partició de Hoare.

Exercici **Quicksort**

Digueu quant triga l'algorisme d'ordenació ràpida amb la partició de Hoare quan l'entrada es troba:

- permutada a l'atzar
- ordenada
- ordenada de l'inrevés
- amb tots els elements iguals

Doneu els temps per a l'elecció de pivot com a primer element i també com a mediana del primer, l'element mig i l'últim.

Exercici: *Quicksort a mà*

Ordeneu la taula $\langle 6, 0, 2, 0, 1, 3, 4, 6, 1, 3, 2 \rangle$ amb l'algorisme d'ordenació ràpida i la partició de Hoare.

Exercici *Quicksort*

Digueu quant triga l'algorisme d'ordenació ràpida amb la partició de Hoare quan l'entrada es troba:

- permutada a l'atzar
- ordenada
- ordenada de l'inrevés
- amb tots els elements iguals

Doneu els temps per a l'elecció de pivot com a primer element i també com a mediana del primer, l'element mig i l'últim.

Tema 2. Dividir i vèncer

1 Ordenació per fusió

- Algorisme de fusió bàsic
- Variants

2 Ordenació ràpida

- Algorisme general
- Variants
- Anàlisi

3 Productes i exponents

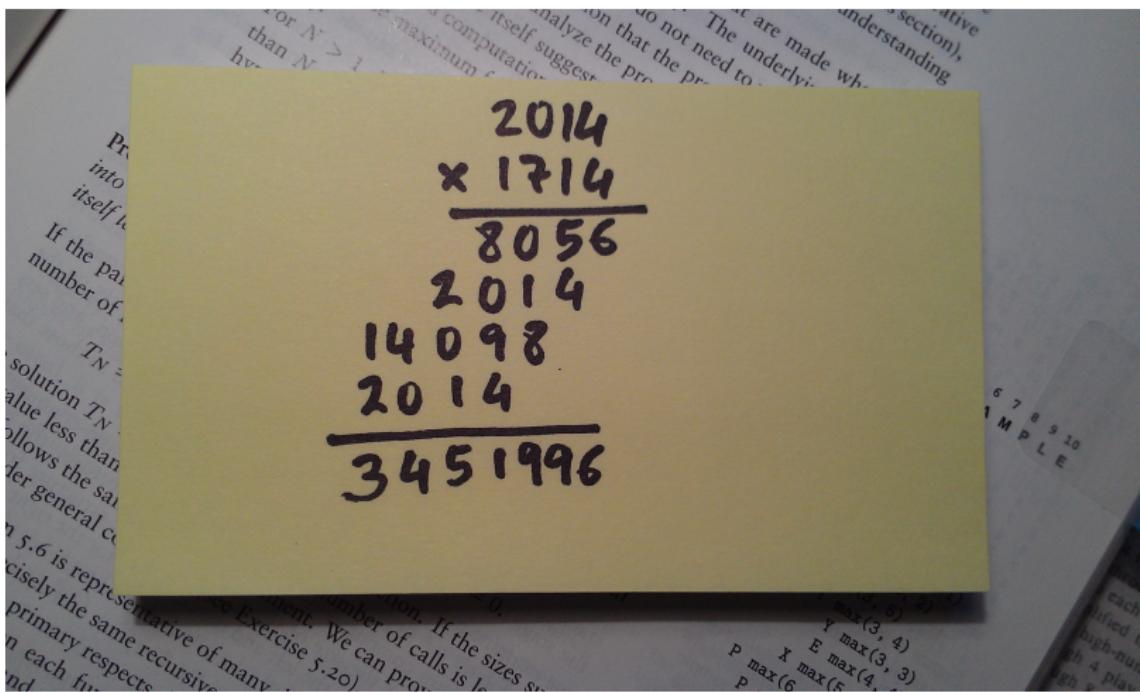
- Algorisme de Karatsuba
- Exponenciació ràpida
- Algorisme de Strassen

4 Altres algorismes

- Torres de Hanoi
- Mediana

Algorisme de Karatsuba

Quin cost té l'algorisme escolar de multiplicació?



Algorisme de Karatsuba

$\Theta(n^2)$, on n és el nombre de díigits del nombre més alt.

$$\begin{array}{r} 2014 \\ \times 1714 \\ \hline 8056 \\ 2014 \\ 14098 \\ 2014 \\ \hline 3451996 \end{array}$$

n x n

Algorisme de Karatsuba

El matemàtic rus A. Kolmogorov va conjecturar que l'algorisme escolar de multiplicació és òptim.

Conjectura (Kolmogorov, 1952)

Qualsevol algorisme per multiplicar dos nombres de n díigits té cost $\Omega(n^2)$.

Un estudiant de 23 anys de Kolmogorov, Anatolii Alexeevitch Karatsuba, va trobar un algorisme de cost $\Theta(n^{1.585})$.

Refutació (Karatsuba, 1960)

Hi ha un algorisme que multiplica dos nombres de n díigits en temps

$$\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.585}).$$

Algorisme de Karatsuba

El matemàtic rus A. Kolmogorov va conjecturar que l'algorisme escolar de multiplicació és òptim.

Conjectura (Kolmogorov, 1952)

Qualsevol algorisme per multiplicar dos nombres de n díigits té cost $\Omega(n^2)$.

Un estudiant de 23 anys de Kolmogorov, Anatolii Alexeevitch Karatsuba, va trobar un algorisme de cost $\Theta(n^{1.585})$.

Refutació (Karatsuba, 1960)

Hi ha un algorisme que multiplica dos nombres de n díigits en temps

$$\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.585}).$$

Algorisme de Karatsuba

L'origen de la idea de l'algorisme de Karatsuba es remunta al s. XVIII.



Observació

El matemàtic Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va observar que malgrat que el producte de dos complexos

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$$

sembla requerir 4 productes de reals, es pot obtenir només amb 3.
La raó és que

$$bc + ad = (a + b)(c + d) - ac - bd.$$

Algorisme de Karatsuba

Avancem ara al s. XX.

Suposem que x i y són dos naturals de n bits. Expressem x , y en dues parts:

$$x = \boxed{x_E} \quad \boxed{x_D} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} x_E + x_D$$

$$y = \boxed{y_E} \quad \boxed{y_D} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} y_E + y_D$$

Exemple

Si $x = 10010111_2$ i $y = 11001010_2$ (el subíndex 2 vol dir "en binari"), llavors

$$x = \boxed{x_E} \quad \boxed{x_D} = \boxed{1001}_2 \quad \boxed{0111}_2$$

$$y = \boxed{y_E} \quad \boxed{y_D} = \boxed{1100}_2 \quad \boxed{1010}_2$$

Algorisme de Karatsuba

Ara, el producte

$$xy = (2^{\lfloor n/2 \rfloor} x_E + x_D)(2^{\lfloor n/2 \rfloor} y_E + y_D)$$

quan n és parell es pot reescriure com

$$xy = 2^n x_E y_E + 2^{n/2}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D \quad (11)$$

i quan n és senar com

$$xy = 2^{n-1} x_E y_E + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D.$$

Un algorisme basat en aquesta expressió tindria cost

$$T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n).$$

Algorisme de Karatsuba

Ara, el producte

$$xy = (2^{\lfloor n/2 \rfloor} x_E + x_D)(2^{\lfloor n/2 \rfloor} y_E + y_D)$$

quan n és parell es pot reescriure com

$$xy = 2^n x_E y_E + 2^{n/2}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D \quad (11)$$

i quan n és senar com

$$xy = 2^{n-1} x_E y_E + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D.$$

Un algorisme basat en aquesta expressió tindria cost

$$T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n).$$

Algorisme de Karatsuba

$$T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n)$$

Pel teorema mestre de recurredades divisores, sabem que $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Però si apliquem el **truc de Gauss**, podem obtenir el producte xy fent servir 3 subproductes en lloc de 4 i, així, rebaixar el cost quadràtic.

$$T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n)$$

Pel teorema mestre de recurredades divisores, sabem que $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Però si apliquem el **truc de Gauss**, podem obtenir el producte xy fent servir **3 subproductes en lloc de 4** i, així, rebaixar el cost quadràtic.

Algorisme de Karatsuba

Com abans, observem que

$$x_E y_D + x_D y_E = (x_E + x_D)(y_E + y_D) - x_E y_E - x_D y_D.$$

Si ara anomenem

$$\textcolor{red}{a} = x_E y_E, \quad \textcolor{red}{b} = x_D y_D, \quad \textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D),$$

llavors el producte per a n parell (l'equació 11)

$$xy = 2^n x_E y_E + 2^{n/2}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D$$

es pot reescrivre com

$$2^n \textcolor{red}{a} + 2^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

que només depèn de 3 subproductes (com el cas de n senar).

Algorisme de Karatsuba

Com abans, observem que

$$x_E y_D + x_D y_E = (x_E + x_D)(y_E + y_D) - x_E y_E - x_D y_D.$$

Si ara anomenem

$$\textcolor{red}{a} = x_E y_E, \quad \textcolor{red}{b} = x_D y_D, \quad \textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D),$$

llavors el producte per a n parell (l'equació 11)

$$xy = 2^n x_E y_E + 2^{n/2}(x_E y_D + x_D y_E) + x_D y_D$$

es pot reescriure com

$$2^n \textcolor{red}{a} + 2^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

que només depèn de 3 subproductes (com el cas de n senar).

La nova expressió dona lloc a un algorisme de cost

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$$

i, pel teorema mestre de recurrències divisores, sabem que

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.585}).$$

Algorisme de Karatsuba

Solució de Karatsuba (cas parell, base 10)

Donat n parell, $x = (10^{n/2}x_E + x_D)$ i $y = (10^{n/2}y_E + y_D)$, tenim que

$$xy = 10^n \textcolor{red}{a} + 10^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

on $\textcolor{red}{a} = x_E y_E$, $\textcolor{red}{b} = x_D y_D$, $\textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D)$.

Exemple: calcular $1234 * 4321$

- Problema: calcular $x * y$ per a $x = 1234$, $y = 4321$
- Subproblemes:
 - 1 Calcular $a = 12 * 43$
 - 2 Calcular $b = 34 * 21$
 - 3 Calcular $c = (12 + 34) * (43 + 21) = 46 * 64$

Algorisme de Karatsuba

Solució de Karatsuba (cas parell, base 10)

Donat n parell, $x = (10^{n/2}x_E + x_D)$ i $y = (10^{n/2}y_E + y_D)$, tenim que

$$xy = 10^n \textcolor{red}{a} + 10^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

on $\textcolor{red}{a} = x_E y_E$, $\textcolor{red}{b} = x_D y_D$, $\textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D)$.

Subproblema 1: calcular $a = 12 * 43$

- Subproblemes:
 - 1 Calcular $a_1 = 1 * 4 = 4$
 - 2 Calcular $b_1 = 2 * 3 = 6$
 - 3 Calcular $c_1 = (1 + 2) * (4 + 3) = 21$
- Solució: $a = 10^2 * 4 + 10 * (21 - 4 - 6) + 6 = 516$

Algorisme de Karatsuba

Solució de Karatsuba (cas parell, base 10)

Donat n parell, $x = (10^{n/2}x_E + x_D)$ i $y = (10^{n/2}y_E + y_D)$, tenim que

$$xy = 10^n \textcolor{red}{a} + 10^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

on $\textcolor{red}{a} = x_E y_E$, $\textcolor{red}{b} = x_D y_D$, $\textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D)$.

Subproblema 2: calcular $b = 34 * 21$

- Subproblemes:
 - 1 Calcular $a_2 = 3 * 2 = 6$
 - 2 Calcular $b_2 = 4 * 1 = 4$
 - 3 Calcular $c_2 = (3 + 4) * (2 + 1) = 21$
- Solució: $b = 10^2 * 6 + 10 * (21 - 6 - 4) + 4 = 714$

Algorisme de Karatsuba

Solució de Karatsuba (cas parell, base 10)

Donat n parell, $x = (10^{n/2}x_E + x_D)$ i $y = (10^{n/2}y_E + y_D)$, tenim que

$$xy = 10^n \textcolor{red}{a} + 10^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

on $\textcolor{red}{a} = x_E y_E$, $\textcolor{red}{b} = x_D y_D$, $\textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D)$.

Subproblema 3: calcular $c = 46 * 64$

- Subproblemes:
 - 1 Calcular $a_3 = 4 * 6 = 24$
 - 2 Calcular $b_3 = 6 * 4 = 24$
 - 3 Calcular $c_3 = (4 + 6) * (6 + 4) = 100$
- Solució: $c = 10^2 * 24 + 10 * (100 - 24 - 24) + 24 = 2944$

Algorisme de Karatsuba

Solució de Karatsuba (cas parell, base 10)

Donat n parell, $x = (10^{n/2}x_E + x_D)$ i $y = (10^{n/2}y_E + y_D)$, tenim que

$$xy = 10^n \textcolor{red}{a} + 10^{n/2}(\textcolor{red}{c} - \textcolor{red}{a} - \textcolor{red}{b}) + \textcolor{red}{b}$$

on $\textcolor{red}{a} = x_E y_E$, $\textcolor{red}{b} = x_D y_D$, $\textcolor{red}{c} = (x_E + x_D)(y_E + y_D)$.

Resultat

- Problema: calcular $x * y$ per a $x = 1234$, $y = 4321$
- Subproblemes:
 - 1 $a = 12 * 43 = 516$
 - 2 $b = 34 * 21 = 714$
 - 3 $c = 46 * 64 = 2944$
- Solució: $10^4 * 516 + 10^2 * (2944 - 516 - 714) + 714 = 5332114$

Algorisme de Karatsuba

Exercici 1

Digueu per què entre n i $2n$ sempre hi ha una potència de 2 per a qualsevol natural n .

Exercici 2

Proposeu un mètode per implementar l'algorisme de Karatsuba sense diferenciar entre els casos parell i senar.

Raoneu per què té el mateix cost $\Theta(n^{\log_2 3})$ que Karatsuba.

Exercici 1

Digueu per què entre n i $2n$ sempre hi ha una potència de 2 per a qualsevol natural n .

Exercici 2

Proposeu un mètode per implementar l'algorisme de Karatsuba sense diferenciar entre els casos parell i senar.

Raoneu per què té el mateix cost $\Theta(n^{\log_2 3})$ que Karatsuba.

Exponenciació ràpida

- L'**algorisme iteratiu** evident per calcular x^n fa servir la descomposició

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ factors}}$$

que requereix $\Theta(n - 1) = \Theta(n)$ multiplicacions.

- Però amb un **enfocament recursiu**, tenim

$$x^n = x^{n/2} \cdot x^{n/2}$$

quan n és parell i

$$x^n = x^{(n-1)/2} \cdot x^{(n-1)/2} \cdot x$$

quan n és senar.

Exponenciació ràpida

- L'**algorisme iteratiu** evident per calcular x^n fa servir la descomposició

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ factors}}$$

que requereix $\Theta(n - 1) = \Theta(n)$ multiplicacions.

- Però amb un **enfocament recursiu**, tenim

$$x^n = x^{n/2} \cdot x^{n/2}$$

quan n és parell i

$$x^n = x^{(n-1)/2} \cdot x^{(n-1)/2} \cdot x$$

quan n és senar.

Exponenciació ràpida

Definició recursiva de x^n

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{si } n > 0 \text{ i parell} \\ x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

Exemple

Amb un algorisme basat en la definició anterior, tindríem

$$\begin{aligned} x^{62} &= (x^{31})^2, \quad x^{31} = (x^{15})^2 \cdot x, \quad x^{15} = (x^7)^2 \cdot x \\ x^7 &= (x^3)^2 \cdot x, \quad x^3 = (x^1)^2 \cdot x, \quad x^1 = (x^0)^2 \cdot x, \quad x^0 = 1 \end{aligned}$$

(en blau, els valors calculats recursivament)

Exponenciació ràpida

Definició recursiva de x^n

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{si } n > 0 \text{ i parell} \\ x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot x, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

Exemple

Amb un algorisme basat en la definició anterior, tindríem

$$x^{62} = (\textcolor{blue}{x^{31}})^2, \quad x^{31} = (\textcolor{blue}{x^{15}})^2 \cdot x, \quad x^{15} = (\textcolor{blue}{x^7})^2 \cdot x$$

$$x^7 = (\textcolor{blue}{x^3})^2 \cdot x, \quad x^3 = (\textcolor{blue}{x^1})^2 \cdot x, \quad x^1 = (\textcolor{blue}{x^0})^2 \cdot x, \quad x^0 = 1$$

(en blau, els valors calculats recursivament)

Exponenciació ràpida

Exponenciació ràpida

```
double potencia (double x, int n) {  
    if (n == 0) {  
        return 1;  
    } else {  
        double y = potencia (x, n / 2);  
        if (n % 2 == 0) return y * y;  
        else return y * y * x;  
    } }
```

El càlcul del cost és directe i ve donat per la recurrència

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

que, segons el teorema mestre de recurrències divisores, implica

$$T(n) \in \Theta(\log n).$$

Qüestió

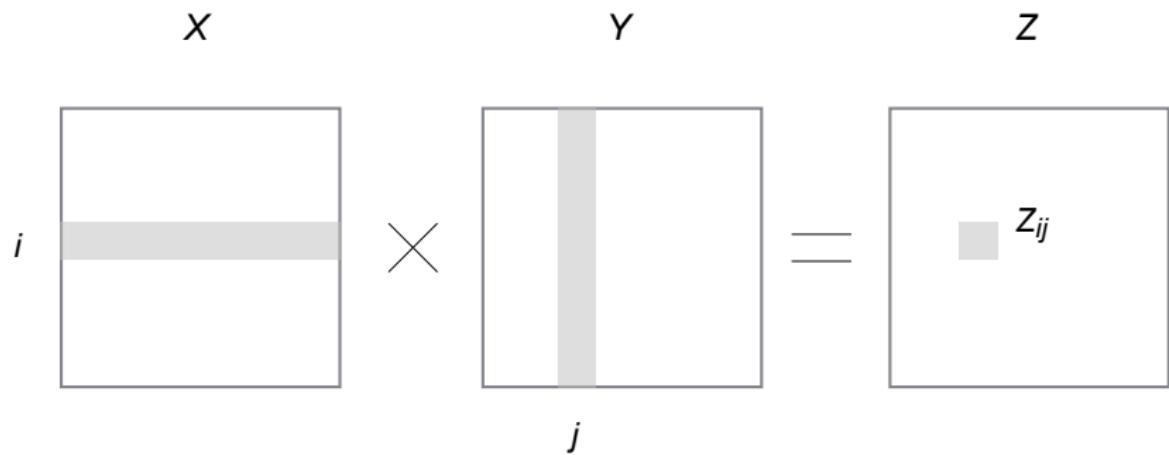
Digueu si l'algorisme d'exponenciació ràpida és **lineal** o **logarítmic** quan el seu cost s'expressa en funció de la mida de l'entrada.

Algorisme de Strassen

El producte de dues matrius X i Y de mida $n \times n$ és una matriu Z de mida $n \times n$ tal que

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj}.$$

Z_{ij} és el producte de la fila i -èsima de X per la columna j -èsima de Y :



Algorisme de Strassen

La fórmula

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj}.$$

calculada per a cada i, j amb valors $i, j = 1 \dots n$ implica un algorisme $\Theta(n^3)$.

Es va pensar que el cost $\Theta(n^3)$ era òptim fins al 1969.

Algorisme de Strassen (Volker Strassen, 1969)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81})$ per al producte de matrius.

Algorisme de Le Gall (François Le Gall, 2014)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{2.3728639})$ per al producte de matrius.
(article *Powers of Tensors and Fast Matrix Multiplication*)

Algorisme de Strassen

La fórmula

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj}.$$

calculada per a cada i, j amb valors $i, j = 1 \dots n$ implica un algorisme $\Theta(n^3)$.

Es va pensar que el cost $\Theta(n^3)$ era òptim fins al 1969.

Algorisme de Strassen (Volker Strassen, 1969)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81})$ per al producte de matrius.

Algorisme de Le Gall (François Le Gall, 2014)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{2.3728639})$ per al producte de matrius.
(article *Powers of Tensors and Fast Matrix Multiplication*)

Algorisme de Strassen

La fórmula

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj}.$$

calculada per a cada i, j amb valors $i, j = 1 \dots n$ implica un algorisme $\Theta(n^3)$.

Es va pensar que el cost $\Theta(n^3)$ era òptim fins al 1969.

Algorisme de Strassen (Volker Strassen, 1969)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81})$ per al producte de matrius.

Algorisme de Le Gall (François Le Gall, 2014)

Existeix un algorisme de cost $\Theta(n^{2.3728639})$ per al producte de matrius.
(article *Powers of Tensors and Fast Matrix Multiplication*)

Algorisme de Strassen

Producte estàndard de matrius

Algorisme $\Theta(n^3)$, adaptat de *Data Structures and Alg. Analysis in C++, M.A. Weiss*.

```
matrix<int> producte_matrius
    (const matrix<int>& X, const matrix<int>& Y)
{
    int n = X.numrows();
    matrix<int> Z(n, n, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            for (int k = 0; k < n; k++)
                Z[i][j] += X[i][k] * Y[k][j];
    return Z;
}
```

Algorisme de Strassen

Una primera idea és que el producte de matrius es pot fer *per blocs*.

Dividim X i Y en quatre quadrants cadascuna:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Llavors, es pot veure que

$$XY = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}.$$

Els subproductes es poden calcular aleshores recursivament.

Algorisme de Strassen

Exemple

Per fer el producte de X i Y

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

definim les vuit matrius 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algorisme de Strassen

Exemple

Per fer el producte de X i Y

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

i l'expressem en termes de les submatrius

$$XY = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Quin cost té el nou algorisme? Recordem que es basa en el producte

$$XY = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}.$$

El cost $T(n)$ és la suma de fer:

- vuit productes de matrius de mida $n/2$: $8T(n/2)$
- quatre sumes de matrius de mida $n/2$: $\Theta(n^2)$

Per tant, tenim la recurrència

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$$

que, pel teorema mestre de recurrències divisores, dona

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 8}) = \Theta(n^3).$$

Algorisme de Strassen

Però el nombre de productes es pot reduir a 7.

Volker Strassen (1969)

$$XY = \begin{bmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{bmatrix}$$

on

$$P_1 = A(F - H), \quad P_4 = D(G - E)$$

$$P_2 = (A + B)H, \quad P_5 = (A + D)(E + H)$$

$$P_3 = (C + D)E, \quad P_6 = (B - D)(G + H)$$

$$P_7 = (A - C)(E + F)$$

Fent servir la descomposició de Strassen, obtenim un algorisme amb cost

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

que, pel teorema mestre de recurrències divisores, dona

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81}).$$

Algorisme de Strassen

Però el nombre de productes es pot reduir a 7.

Volker Strassen (1969)

$$XY = \begin{bmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{bmatrix}$$

on

$$P_1 = A(F - H), \quad P_4 = D(G - E)$$

$$P_2 = (A + B)H, \quad P_5 = (A + D)(E + H)$$

$$P_3 = (C + D)E, \quad P_6 = (B - D)(G + H)$$

$$P_7 = (A - C)(E + F)$$

Fent servir la descomposició de Strassen, obtenim un algorisme amb cost

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

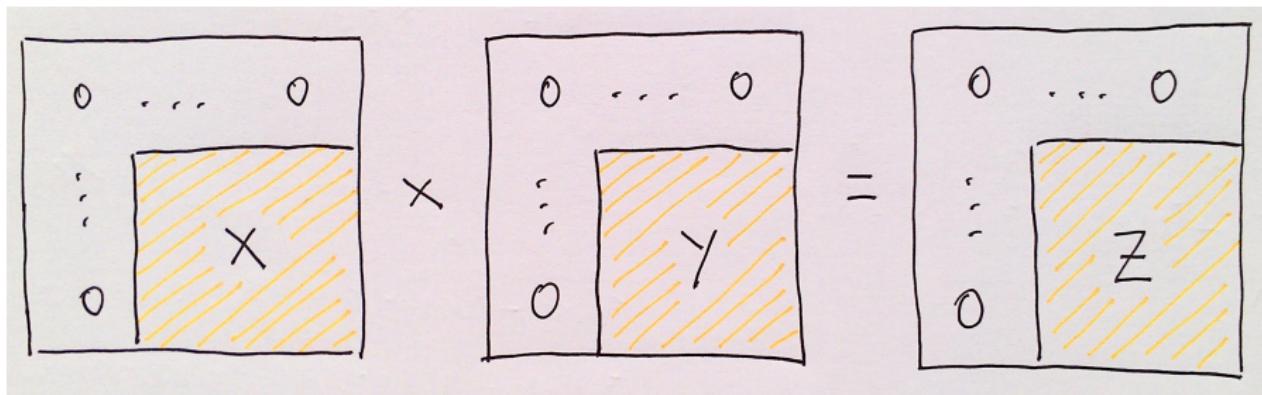
que, pel teorema mestre de recurrències divisores, dona

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81}).$$

Algorisme de Strassen

Exercici

Si n no és potència de 2, generem matrius $m \times m$ on m és la primera potència de 2 més gran que n i encabim les matrius originals a dins. Per què no varia el cost de l'algorisme?



Tema 2. Dividir i vèncer

1 Ordenació per fusió

- Algorisme de fusió bàsic
- Variants

2 Ordenació ràpida

- Algorisme general
- Variants
- Anàlisi

3 Productes i exponents

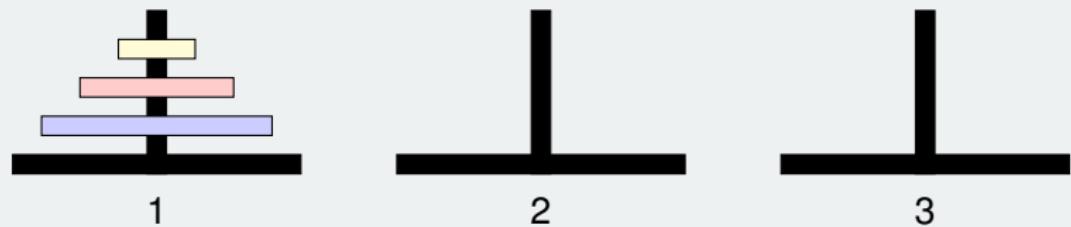
- Algorisme de Karatsuba
- Exponenciació ràpida
- Algorisme de Strassen

4 Altres algorismes

- Torres de Hanoi
- Mediana

Joc de les torres de Hanoi

Donades tres varetes 1, 2 i 3 i una sèrie de discs col·locats en la primera com indica el dibuix



cal traslladar-los a la vareta 2 amb dues restriccions:

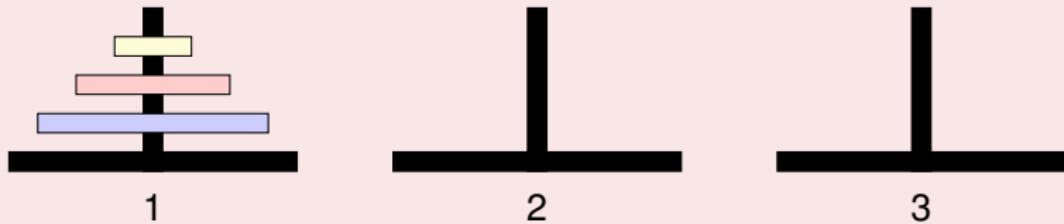
- només es pot moure un disc a la vegada i
- no es pot col·locar un disc a sobre d'un de més petit.

Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

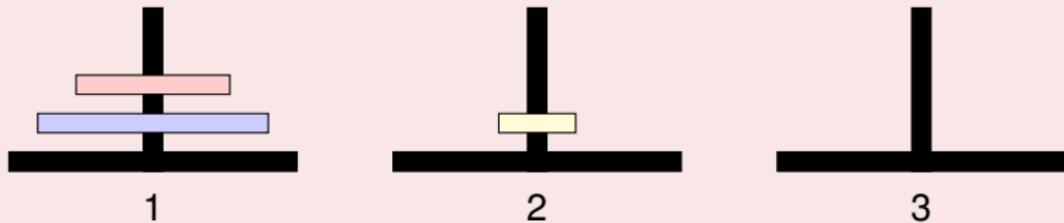


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

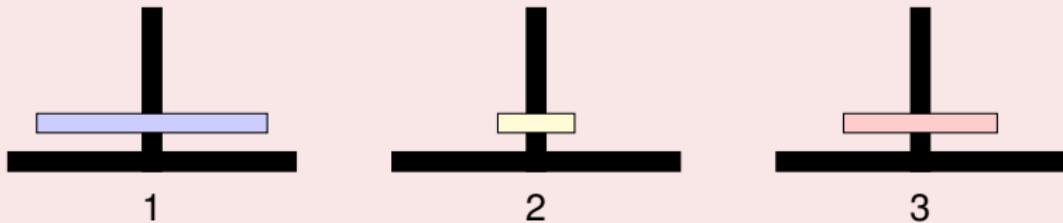


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

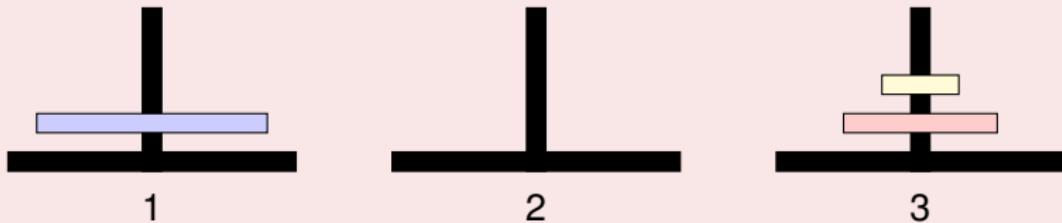


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

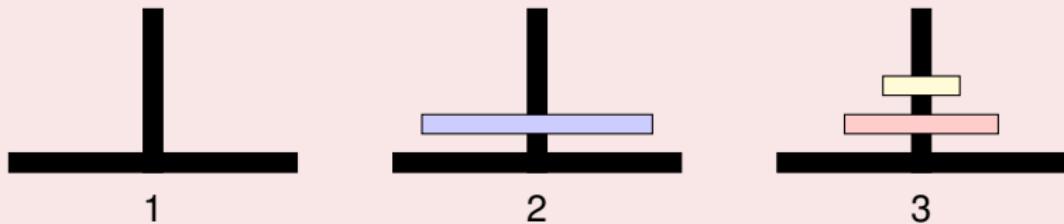


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

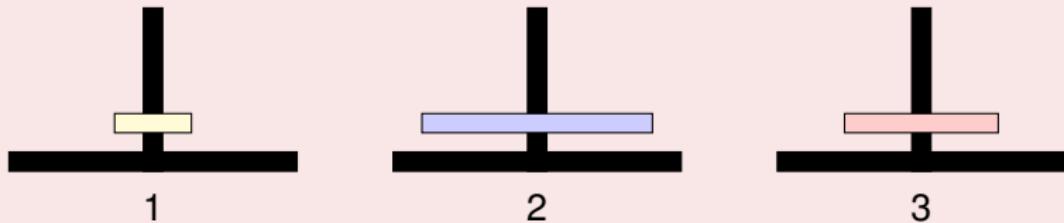


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

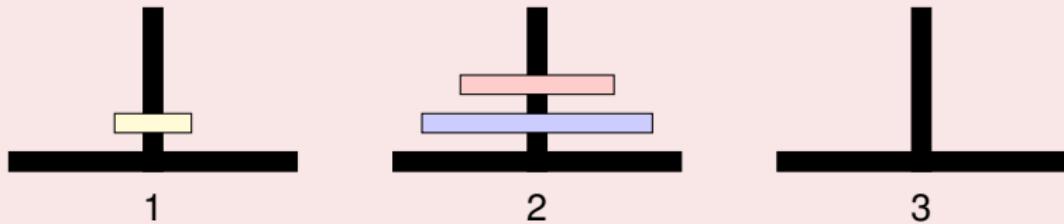


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

Moviment senar – Moviment parell

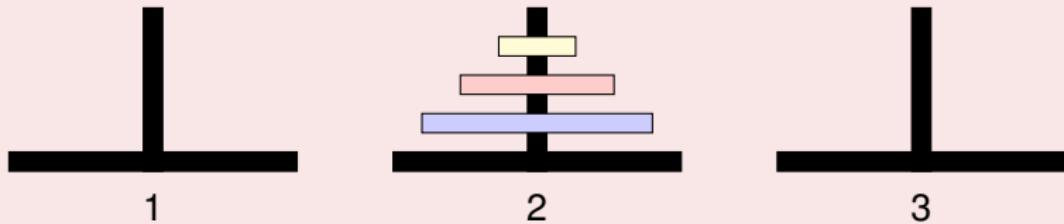


Solució 1

Imaginem les varetes disposades en forma de triangle. Ara, en els moviments:

- **senars**: movem el disc més petit una vareta en sentit horari
- **parells**: fem l'únic moviment possible que no involucri el disc més petit

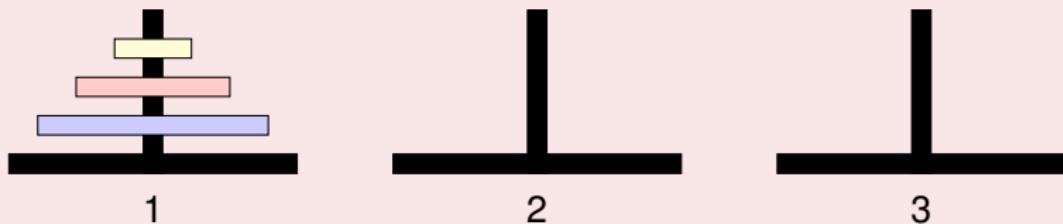
Moviment senar – Moviment parell



Solució 2

Per traslladar n discs de la vareta a a la b (on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$):

- si $n = 1$, moure l'únic disc de a a b
- si $n > 1$,
 - 1 traslladar $n - 1$ discs de a a c
 - 2 moure el disc restant (el més gros) de a a b
 - 3 traslladar $n - 1$ discs de c a b

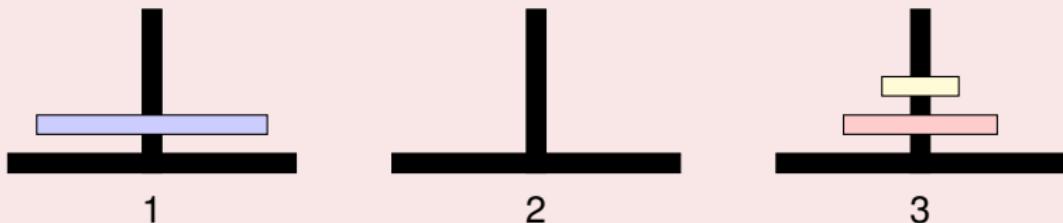


Solució 2

Per traslladar n discs de la vareta a a la b (on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$):

- si $n = 1$, moure l'únic disc de a a b
- si $n > 1$,
 - 1 traslladar $n - 1$ discs de a a c
 - 2 moure el disc restant (el més gros) de a a b
 - 3 traslladar $n - 1$ discs de c a b

Traslladar 2 discs de 1 a 3

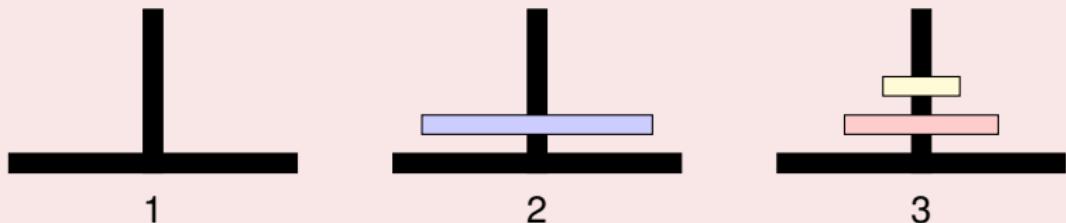


Solució 2

Per traslladar n discs de la vareta a a la b (on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$):

- si $n = 1$, moure l'únic disc de a a b
- si $n > 1$,
 - 1 traslladar $n - 1$ discs de a a c
 - 2 moure el disc restant (el més gros) de a a b
 - 3 traslladar $n - 1$ discs de c a b

Moure el disc restant de 1 a 2

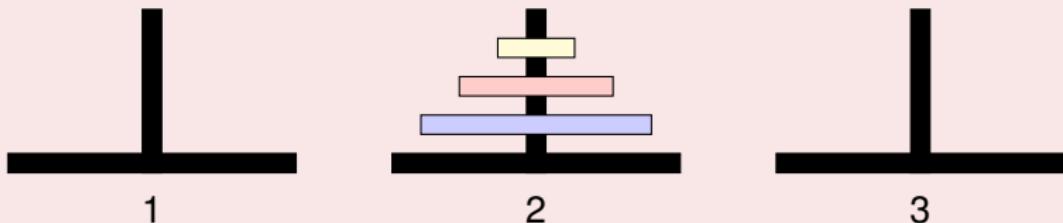


Solució 2

Per traslladar n discs de la vareta a a la b (on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$):

- si $n = 1$, moure l'únic disc de a a b
- si $n > 1$,
 - 1 traslladar $n - 1$ discs de a a c
 - 2 moure el disc restant (el més gros) de a a b
 - 3 traslladar $n - 1$ discs de c a b

Traslladar 2 discs de 3 a 2



Torres de Hanoi

Algorisme

```
void hanoi(int n, int a, int b, int c) {
    // descriu els moviments de n discs des d'a fins a b
    // fent servir c com a auxiliar
    if (n > 0) {
        hanoi(n-1, a, c, b);
        cout << a, b;
        hanoi(n-1, c, b, a);
    }
}
```

Cost

El cost creix com el nombre de moviments. Definim

$$T(n) = \text{nombre de moviments que fa } \text{hanoi}(n, 1, 2, 3).$$

Llavors,

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 2T(n-1) + 1, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Recurrència

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 2T(n - 1) + 1, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Solució asimptòtica

Aplicant el teorema mestre de recurrències subtractives, obtenim $T \in \Theta(2^n)$.

Solució exacta

Definim $S(n) = T(n) + 1$ i l'escrivim sense dependre de $T(n)$:

- $S(0) = 1$
- $S(n) = 2T(n - 1) + 2 = 2(S(n - 1) - 1) + 2 = 2S(n - 1), \text{ si } n > 0$

Ara, $S(n)$ es resol directament i dona: $S(n) = 2^n$ per a tot $n \geq 0$.

Per tant,

$$T(n) = 2^n - 1 \text{ per a tot } n \geq 0.$$

Recurrència

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 2T(n - 1) + 1, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Solució asimptòtica

Aplicant el teorema mestre de recurrències subtractives, obtenim $T \in \Theta(2^n)$.

Solució exacta

Definim $S(n) = T(n) + 1$ i l'escrivim sense dependre de $T(n)$:

- $S(0) = 1$
- $S(n) = 2T(n - 1) + 2 = 2(S(n - 1) - 1) + 2 = 2S(n - 1)$, si $n > 0$

Ara, $S(n)$ es resol directament i dona: $S(n) = 2^n$ per a tot $n \geq 0$.

Per tant,

$$T(n) = 2^n - 1 \text{ per a tot } n \geq 0.$$

Recurrència

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 2T(n - 1) + 1, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Solució asimptòtica

Aplicant el teorema mestre de recurrències subtractives, obtenim $T \in \Theta(2^n)$.

Solució exacta

Definim $S(n) = T(n) + 1$ i l'escrivim sense dependre de $T(n)$:

- $S(0) = 1$
- $S(n) = 2T(n - 1) + 2 = 2(S(n - 1) - 1) + 2 = 2S(n - 1), \text{ si } n > 0$

Ara, $S(n)$ es resol directament i dona: $S(n) = 2^n$ per a tot $n \geq 0$.

Per tant,

$$T(n) = 2^n - 1 \text{ per a tot } n \geq 0.$$

Mediana

Definició

La **mediana** d'una llista S de n nombres és l'element $\lfloor n/2 \rfloor$ -èsim de $\text{SORT}(S)$, on $\text{SORT}(S)$ és la llista dels elements de S ordenada creixentment.

Exemple

La mediana de $[15, 3, 34, 5, 10]$ és 10 perquè quan s'escriuen en ordre, és el nombre que queda al mig:

3 5 10 15 34

La mediana de $[15, 3, 12, 34, 5, 10]$ també és 10 perquè la llista és

3 5 10 12 15 34

Mediana

Definició

La **mediana** d'una llista S de n nombres és l'element $\lfloor n/2 \rfloor$ -èsim de $\text{SORT}(S)$, on $\text{SORT}(S)$ és la llista dels elements de S ordenada creixentment.

Exemple

La mediana de $[15, 3, 34, 5, 10]$ és 10 perquè quan s'escriuen en ordre, és el nombre que queda al mig:

3 5 10 15 34

La mediana de $[15, 3, 12, 34, 5, 10]$ també és 10 perquè la llista és

3 5 10 12 15 34

Característiques de la mediana:

- Sempre és **un dels valors** del conjunt de dades
- És **menys sensible a les observacions atípiques** (*outliers*). Per exemple:
 - 1 Donats els nombres 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 100
(10 vegades 1 i una vegada 100),
 - la mitjana és 10
 - la mediana és 1
 - 2 Donats 2, 4, 6, 8, 10.000,
 - la mitjana és 2004
 - la mediana és 6

Mediana

Per **calcular** la mediana, n'hi ha prou a ordenar els elements.

Es pot fer en temps $\Theta(n \log n)$

[8, 0, 3, 10, 5, 7, 12, 3, 7, 2, 9, 1, 6]



[0, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12]

Però es fa més feina de la necessària:

només volem l'element del mig i no caldria ordenar la resta

{0, 3, 5, 3, 2, 1}, 6, {8, 10, 7, 12, 7, 9}

Mediana

Per **calcular** la mediana, n'hi ha prou a ordenar els elements.

Es pot fer en temps $\Theta(n \log n)$

[8, 0, 3, 10, 5, 7, 12, 3, 7, 2, 9, 1, 6]



[0, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12]

Però es fa més feina de la necessària:

només volem l'element del mig i no caldria ordenar la resta

{0, 3, 5, 3, 2, 1}, 6, {8, 10, 7, 12, 7, 9}

Sovint és més fàcil treballar amb una versió més general d'un problema.
En aquest cas, triem **el problema de selecció**.

Definició

Si S és una llista i k tal que $1 \leq k \leq |S|$, anomenem

$$\text{SEL}(S, k)$$

al k -èsim element més petit de S .

Problema de selecció

Donada una llista S i un natural k , $1 \leq k \leq |S|$, determinar $\text{SEL}(S, k)$.

La mediana d'una llista S de n nombres és $\text{SEL}(S, \lfloor n/2 \rfloor)$.

Problema de selecció

Donada una llista S i un natural k , determinar $\text{SEL}(S, k)$.

Idea per a un algorisme

Per a cada nombre x , dividim la llista en 3 conjunts d'elements:

- els més petits que x
- els que són iguals a x
- els més grans que x

Si tenim el vector

$$S = [\begin{array}{cccccccccc} 2 & 36 & 5 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 & 5 & 4 & 1 \end{array}]$$

per a $x = 5$ el dividim en

$$S_E = [\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \end{array}] \quad S_x = [\begin{array}{cc} 5 & 5 \end{array}] \quad S_D = [\begin{array}{cccccc} 36 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 \end{array}]$$

Mediana

Idea per a un algorisme

$$S_E = [\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \end{array}] \quad S_x = [\begin{array}{cc} 5 & 5 \end{array}] \quad S_D = [\begin{array}{ccccccc} 36 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 \end{array}]$$

Suposem ara que volem el 8è element de S

$$S = [\begin{array}{cccccccccc} 2 & 36 & 5 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 & 5 & 4 & 1 \end{array}]$$

Sabem que serà el 3r element de S_D perquè $|S_E| + |S_x| = 5$.

$$S_E = [\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \end{array}] \quad S_x = [\begin{array}{cc} 5 & 5 \end{array}] \quad S_D = [\begin{array}{ccccccc} 36 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 \end{array}]$$

Podem definir l'operador $\text{SEL}(S, k)$ de manera recursiva:

$$\text{SEL}(S, k) = \begin{cases} \text{SEL}(S_E, k), & \text{si } k \leq |S_E| \\ x, & \text{si } |S_E| < k \leq |S_E| + |S_x| \\ \text{SEL}(S_D, k - |S_E| - |S_x|), & \text{si } k > |S_E| + |S_x| \end{cases}$$

Mediana

Idea per a un algorisme

$$S_E = [\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \end{array}] \quad S_x = [\begin{array}{cc} 5 & 5 \end{array}] \quad S_D = [\begin{array}{ccccccc} 36 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 \end{array}]$$

Suposem ara que volem el 8è element de S

$$S = [\begin{array}{cccccccccc} 2 & 36 & 5 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 & 5 & 4 & 1 \end{array}]$$

Sabem que serà el 3r element de S_D perquè $|S_E| + |S_x| = 5$.

$$S_E = [\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \end{array}] \quad S_x = [\begin{array}{cc} 5 & 5 \end{array}] \quad S_D = [\begin{array}{ccccccc} 36 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 \end{array}]$$

Podem definir l'operador $\text{SEL}(S, k)$ de manera recursiva:

$$\text{SEL}(S, k) = \begin{cases} \text{SEL}(S_E, k), & \text{si } k \leq |S_E| \\ x, & \text{si } |S_E| < k \leq |S_E| + |S_x| \\ \text{SEL}(S_D, k - |S_E| - |S_x|), & \text{si } k > |S_E| + |S_x| \end{cases}$$

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- ① Triar un element x a l'atzar
- ② Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- ③ Calcular $SEL(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que $T(n) \in O(n)$ en mitjana.

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- ① Triar un element x a l'atzar
- ② Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- ③ Calcular $\text{SEL}(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que $T(n) \in O(n)$ en mitjana.

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- 1 Triar un element x a l'atzar
- 2 Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- 3 Calcular $\text{SEL}(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que $T(n) \in O(n)$ en mitjana.

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- ① Triar un element x a l'atzar
- ② Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- ③ Calcular $\text{SEL}(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que $T(n) \in O(n)$ en mitjana.

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- ① Triar un element x a l'atzar
- ② Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- ③ Calcular $\text{SEL}(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow **cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo**

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que $T(n) \in O(n)$ en mitjana.

Esbós de l'algorithm

Algorithm:

- ① Triar un element x a l'atzar
- ② Dividir S respecte de x : S_E , S_x , S_D
- ③ Calcular $\text{SEL}(S, k)$ recursivament

A quin ritme convergeix?

- diem que un element triat és **bo** si és $\geq 25\%$ i $\leq 75\%$ del vector
- \Rightarrow un element triat a l'atzar té una probabilitat del 50% de ser bo
- \Rightarrow **cal triar 2 elements de mitjana abans de trobar-ne un de bo**

Això dona

$$T(n) = T(3n/4) + O(n)$$

que implica que **$T(n) \in O(n)$ en mitjana.**

Exercici

Suposeu que fem servir l'algorisme anterior per trobar la mediana del vector

$$\textcolor{red}{S} = [\begin{array}{cccccccccc} 2 & 36 & 5 & 21 & 8 & 13 & 11 & 20 & 5 & 4 & 1 \end{array}].$$

Quantes vegades s'executa el bucle principal si l'element triat inicialment és $x = 5$? Per què?