Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

6. Espais vectorials

6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt $S \subseteq E$ és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1) $S \neq \emptyset$

(s2) per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$

(s3) per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector $\mathbf{0}_E$ pertany a tots els subespais vectorials

Alguns exemples de subespais espais vectorials

- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

Exemple: $S = \{(x,x,1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ és subespai de $\mathbb{R}^3$?

$(0,0,0) \notin S \Rightarrow S$ no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ ($(1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S'$)

Combinació lineal

Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

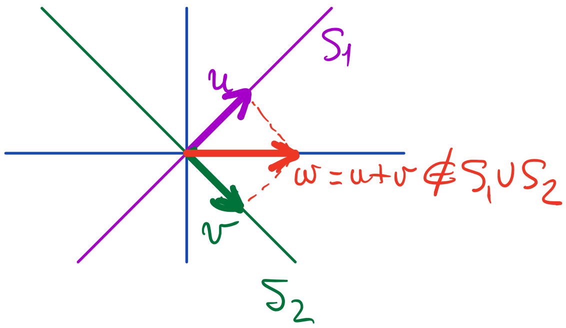
on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que

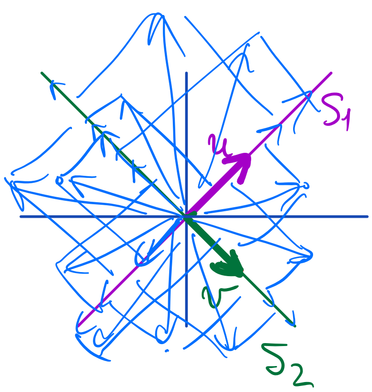
$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Exemple:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \\ S_2 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{són subespais de } \mathbb{R}^2 \\ \text{però } S_1 \cup S_2 \text{ no és subespai} \end{array}$$



S = Subespai més petit que conté u i v:



$$\left.\begin{array}{l} u \in S \Rightarrow \underbrace{\lambda u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{vectors de la recta } S_1} \\ v \in S \Rightarrow \underbrace{\mu v \in S, \ \forall \mu \in \mathbb{R}}_{\text{vectors de la recta } S_2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda u + \mu v \in S}_{\text{obtenim tots els vectors de } \mathbb{R}^2}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Subespai generat

Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \ldots, u_k$

Proposició

El subespai generat $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \ldots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

Demostració de que $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ és subespai:

$S = \langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$

és un subespai vectorial, ja que:

- $\neq \emptyset$: $\underbrace{0 \cdot u_1 + 0 u_2 + \dots + 0 u_k}_{= 0_E} \in S \neq \emptyset$

- $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$:

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$
$$v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$$
$$u + v = (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle = S$$

- $u \in S$, $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha u \in S$:

$\hookrightarrow u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

$$\alpha u = \alpha \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha \lambda_k u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle = S$$

Exemples de subespais generats

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \rangle$
- L'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ està generat per les matrius M_{ij} que tenen totes les entrades iguals a 0, excepte la de la posició i, j, que és igual a 1, $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$
Per exemple, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) =< M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} >$, on

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Polinomis de grau $\leq d$, $P_d(\mathbb{R})$:
$P_d(\mathbb{R}) = < 1, x, x^2, \ldots, x^d >$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} =$

$$= \{x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1) \rangle$$

En general, el conjunt de generadors d'un subespai no és únic.
P.e., es pot demostrar que:

$$\mathbb{R}^3 \begin{cases} = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle \\ = \langle (1,1,0), (1,0,0), (1,1,1) \rangle \\ = \langle (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,2,3), (4,5,6) \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} =$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $P_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\} =$

$$= \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle 1, x, \dots, x^d \rangle$$

(*)

- Si volguéssim generar les matrius triangulars superiors, agafaríem de les matrius M_{ij} anteriors només les que tenen $i \leq j$
- Subespai donant els vectors en funció de paràmetres

$$
\begin{aligned}
&\{a + (b-a)x + (c-b)x^2 + (a-c)x^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1 - x + x^3) + b(x - x^2) + c(x^2 - x^3) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle 1 - x + x^3, x - x^2, x^2 - x^3 \rangle
\end{aligned}
$$

(*) P.e: $\{$matrius triangulars superiors $2\times 2\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemples:

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & c \\ d & c-a & b+2c \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

  Demostreu que S és subespai de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, S és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

i $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 2a-3b \\ a+b+c \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

  Demostreu que S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -3b \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

- $S = \{ \alpha + (\alpha+\beta)x + (\alpha - 2\beta)x^2 + (2\alpha+\beta)x^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

  Demostreu que S és subespai de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S = \{ \alpha(1 + x + x^2 + 2x^3) + \beta(x - 2x^2 + x^3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \langle 1 + x + x^2 + 2x^3, \; x - 2x^2 + x^3 \rangle$$

Per tant, S és subespai de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i $\{ 1 + x + x^2 + 2x^3, \; x - 2x^2 + x^3 \}$ és un conjunt generador de S.

- $S = \{ \text{solucions del sistema homogeni} \begin{cases} x = 2y - t \\ z = 3t \end{cases} \} \subseteq \mathbb{R}^4$

  Sabem que S és subespai de $\mathbb{R}^4$. Doneu un conjunt generador de S.

Resolem el sistema i donem les solucions de forma paramètrica:

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ \hline 1 & -2 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}}_{\operatorname{rg} A = 2}$$

variables principals: x, z ; variables lliures: y, t

$$\begin{cases} x = 2y - t \\ z = 3t \end{cases} \quad y, z \in \mathbb{R}$$

Solucions:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = 2y - t \\ z = 3t \end{array}, y, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - t \\ y \\ 3t \\ t \end{pmatrix} : y, t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : y, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ és un conjunt generador de S.

OBSERVACIONS :

- En general, un subespai té més d'un conjunt generador.

  P.e: es pot demostrar que:

$$\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

- Si un vector es pot expressar com a combinació lineal d'uns altres, la forma d'expressar-lo com a combinació lineal d'aquests vectors no és necessàriament única.

  P.e.: $(5,-1,-4)$ es pot expressar com a combinació lineal de $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$ d'almenys dues maneres diferents:

$$(5,-1,-4) = \begin{cases} 3\cdot(1,-1,0) + 2\cdot(0,1,-1) + 2(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0) + 3\cdot(0,1,-1) + 1\cdot(1,0,-1) \end{cases}$$

- No sempre es pot expressar un vector com a combinació lineal d'un conjunt de vectors donats.

  P.e. $(1,1,0)$ no és c.l. de $(0,0,1)$ i $(1,0,0)$, ja que les combinacions lineals d'aquest vectors són els vectors de la forma $\{a(0,0,1) + b(1,0,0) : a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,0,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ és a dir, la segona component és sempre 0, cosa que no compleix el vector $(1,1,0)$.