Grau en Enginyeria Informàtica

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Matemàtiques 1

Part II: Àlgebra Lineal

Exercicis i problemes

Curs 2022-2023(2)

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Els problemes d'aquesta col·lecció han estat recopilats per Anna de Mier i Montserrat Maureso el curs 2011/2012. En part provenen de reculls de problemes elaborats pels membres del Departament de Matemàtica Aplicada 2 per a les diverses assignatures que s'han impartit al llarg dels anys. D'altres provenen de la bibliografia de l'assignatura o d'altres llibres, i n'hi ha que són de nova collita. Aprofitem per fer constar i agrair la tasca del becari docent Gabriel Bernardino en la redacció de les solucions. El curs 2018/2019 s'ha fet una revisió general.

Anna de Mier
Mercè Mora
Febrer 2019

Índex

5
Matrius, sistemes i determinants

Si no especifiquem el contrari, el cos en el que treballem és $\mathbb{R}$.

5.1 Àlgebra de matrius

5.1 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu: 1) $3A$; 2) $3A - B$; 3) AB; 4) BA; 5) $C(3A - 2B)$.

5.2 Calculeu els productes $(1\ 2\ -3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}(1\ 2\ -3)$.

5.3 Donades A i B matrius tals que AB és una matriu quadrada, proveu que el producte BA està definit.

5.4 Per a les matrius A i B següents, doneu els elements c_{13} i c_{22} de la matriu $C = AB$ sense calcular tots els elements de C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.5 Una empresa confecciona bosses i maletes en dues fàbriques diferents. La taula adjunta dóna la informació del cost total de fabricació en milers d'euros de cada producte a cada lloc:

	Fàbrica 1	Fàbrica 2
Bosses	135	150
Maletes	627	681

Responeu les preguntes següents mitjançant operacions matricials.

1) Sabent que el cost de personal representa 2/3 del cost total, trobeu la matriu que representa el cost de personal de cada producte en cada fàbrica.

2) Trobeu la matriu que representa els costos de material de cada producte en cada fàbrica, suposant que, a més dels costos de personal i de materials, hi ha un cost de 20.000 euros per cada producte a cada fàbrica.

5.6 En aquest exercici es vol trobar una fórmula per calcular les potències d'una matriu diagonal.

a) Calculeu A^2, A^3 i A^5, sent
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Quina matriu creieu que és A^{32}?

c) Sigui D una matriu $n \times n$ diagonal que té per elements a la diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Conjectureu quina és la matriu D^r, per a $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, i proveu la conjectura per inducció.

5.7 Doneu un exemple de dues matrius A i B de tipus 2×2 tals que $(AB)^t \neq A^t B^t$.

5.8 Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu $(AB)^t$ i $B^t A^t$. Observeu que, encara que A i B són matrius simètriques, el seu producte no ho és.

5.9 Siguin A i B dues matrius simètriques del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu simètrica si, i només si, A i B commuten.

5.10 Siguin I la matriu identitat i $\boldsymbol{O}$ la matriu nul·la de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trobeu matrius $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tals

1) $A^2 = I$ i $A \neq I, -I$;

2) $B^2 = \boldsymbol{O}$ i $B \neq \boldsymbol{O}$;

3) $C^2 = C$ i $C \neq I, \boldsymbol{O}$;

4) $DE = \boldsymbol{O}$ però $E \neq D$ i $ED \neq \boldsymbol{O}$.

5.11 Esbrineu si les igualtats següents les satisfan totes les matrius $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En cas negatiu, doneu alguna condició sobre A i B per tal que es satisfacin.

1) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;

2) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

5.12 Siguin A i B matrius quadrades del mateix tipus. Direm que A és *semblant* a B si existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Si aquest és el cas, proveu:

1) B és semblant a A. En general direm que A i B són semblants.

2) *Ser semblants* és una relació d'equivalència.

3) A és invertible si, i només si, B és invertible.

4) A^t és semblant a B^t.

5) Si $A^n = \mathbf{0}$ i B és semblant a A, aleshores $B^n = \mathbf{0}$.

5.13 Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a cadascuna de les matrius següents. Doneu el rang de cada matriu.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.14 Trobeu la inversa de les matrius elementals següents.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

5.15 Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents, seguint el mètode de Gauss-Jordan.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| \leq 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

5) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 2^{j-1}$ si $i \geq j$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

6) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

5.2 Sistemes d'equacions

5.16 Quines de les equacions següents són lineals en x, y i z?

1) $x + 3xy + 2z = 2$;
2) $y + x + \sqrt{2}z = e^2$;
3) $x - 4y + 3z^{1/2} = 0$;
4) $y = z \sin \frac{\pi}{4} - 2y + 3$;
5) $z + x - y^{-1} + 4 = 0$;
6) $x = z$.

5.17 Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5.18 Responeu raonadament les preguntes següents

1) Quin és el rang de la matriu associada a un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és compatible indeterminat?
2) Quantes equacions com a mínim són necessàries per tenir un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?
3) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?
4) És possible que un sistema lineal amb menys equacions que incògnites sigui incompatible?
5) Inventeu un sistema compatible determinat, un sistema compatible indeterminat i un sistema incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

5.19 Resoleu els sistemes lineals següents amb coeficients a $\mathbb{Z}_2$. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$
2) $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 1 \\ y+z & = & 1 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$
3) $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{array}\right.$

5.20 Resoleu el sistemes lineals següents. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \begin{cases} x+y+2z = 8 \\ -x-2y+3z = 1 \\ 3x-7y+4z = 10 \\ 3y-2z = -1 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x-y+2z-w = -1 \\ 2x+y-2z-2w = -2 \\ -x+2y-4z+w = 1 \\ 3x-3w = -3 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y+2z = 3 \\ 2x-2y+5z = 4 \\ x+2y-z = -3 \\ 2y+2z = 1 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_5 = 0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6 = -1 \\ 5x_3+10x_4+15x_6 = 5 \\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6 = 6 \end{cases}$$

5.21 Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \begin{cases} 2x+2y+2z = 0 \\ -2x+5y+2z = 0 \\ -7x+7y+z = 0 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x_2-3x_3+x_4 = 0 \\ x_1+x_2-x_3+4x_4 = 0 \\ -2x_1-2x_2+2x_3-8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x-4y+z+w = 0 \\ x-5y+2z = 0 \\ -2y-2z-w = 0 \\ x+3y+w = 0 \\ x-2y-z+w = 0 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_5 = 0 \\ -x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5 = 0 \\ x_1+x_2+x_3+2x_5 = 0 \\ 2x_3+2x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$$

5.22 Discutiu els sistemes següents segons els valors dels paràmetres a $\mathbb{R}$.

$$1)\ \begin{cases} x+y+2z = a \\ x+z = b \\ 2x+y+3z = c \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+(a^2-14)z = a+2 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} bx+y+z = b^2 \\ x-y+z = 1 \\ 3x-y-z = 1 \\ 6x-y+z = 3b \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} x+y = k \\ ax+by = k^2 \\ a^2x+b^2y = k^3 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} ax+y-z+t-u = 0 \\ x+ay+z-t+u = 0 \\ -x+y+az+t-u = 0 \\ x-y+z+at+u = 0 \\ -x+y-z+t+au = 0 \end{cases}$$

5.3 Determinants

5.23 Suposant que $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents.

1) $\begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix}$

5.24 Trobeu els valors de λ per als quals les matrius següents tenen determinant 0.

1) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

5.25 Calculeu els determinants següents.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

5.26 Siguin A i B matrius quadrades d'ordre 3 tals que $\det(A) = 10$ i $\det(B) = 12$. Calculeu

1) $\det(AB)$, 2) $\det(A^4)$, 3) $\det(2B)$, 4) $\det(A^t)$, 5) $\det(A^{-1})$.

5.27 Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

$$a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$a(a^3-3a+2)-3(a^2-2a+1)$

$a^4-3a^2+2a-3a^2+6a-3$

a^4-6a^2+8a-3

$(a+3)(a-1)^3 \to a^3-3a^2+3a-1$

$a^4-\cancel{3a^3}+3a^2-a+\cancel{3a^3}-9a^2+9a-3$

$a^4-6a^2+8a^2-3$

6
Espais vectorials

Un *espai vectorial sobre un cos* $\mathbb{K}$ consiteix en

1) un conjunt no buit E,
2) una operació interna $E \times E \to E$ anomenada suma i denotada per $+$, i
3) una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ anomenada producte per escalars i denotada $\cdot$,

de manera que es satisfan les 8 propietats següents per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

e1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(associativa)*;

e2) $u + v = v + u$ *(commutativa)*;

e3) existeix un únic element $0_E \in E$ tal que $u + 0_E = u$ *(element neutre)*;

e4) per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = 0_E$ *(element oposat)*;

e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;

e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;

e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;

e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$.

(Nota: habitualment el cos $\mathbb{K}$ serà $\mathbb{R}$, però podríem considerar altres cossos, com ara $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$.)

Exercicis

6.1 Siguin $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Calculeu

1) $u - v$; 2) $5v + 3w$; 3) $5(v + 3w)$; 4) $(2w - u) - 3(2v + u)$.

6.2 Dibuixeu en el pla els vectors següents de $\mathbb{R}^2$.

$$1)\ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2)\ v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad 3)\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad 4)\ v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu $v_1 + v_2$, $v_1 - v_3$ i $v_2 - v_4$ gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

6.4 Siguin u, v, w elements d'un espai vectorial i siguin α, β, γ elements del cos d'escalars amb α diferent de 0. Suposem que es compleix la relació $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Escriviu els vectors u, $u - v$ i $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w.

6.5 Sigui $P(\mathbb{R})_p$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$ i on totes les potències de x tenen grau parell. Esbrineu si $P(\mathbb{R})_p$ és un espai vectorial amb les operacions de suma i producte per escalar habituals. (Considerem que el polinomi 0 té grau 0.)

2) la.

6.6 Considereu el conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ format per totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donades dues funcions $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim les funcions $f + g$ i λf com

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Demostreu que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ amb aquestes operacions és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

6.7 Esbrineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$. (Justifiqueu les respostes.)

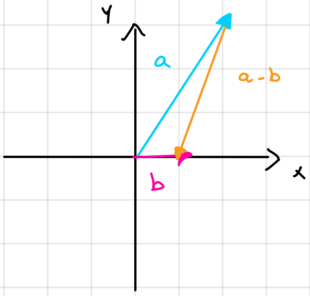
$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + \pi y = 0\}, \quad E_5 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, x - t = 0\},$$

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = \pi\}, \quad E_6 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 0\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}, \quad E_7 = \{\begin{pmatrix} a+b \\ a-2b \\ c \\ 2a+c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}, \quad E_8 = \{\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ b+a \\ 2+a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

6.8 Denotem per $P(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i variable x. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $P(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les



útil per fer demos amb triangles

4-

a) $u = \alpha^{-1}(-\beta v - \gamma w)$

b) $u - v = \alpha u - \alpha v + \beta v + \alpha v + \gamma w = 0$ ò $u - v = \alpha^{-1}(-\beta v - \gamma w) - v$

$\alpha u - \alpha v = -\beta v + \alpha v + \gamma w$

$\alpha(u - v) =$ "

$u - v = \alpha^{-1}(-\beta v + \alpha v + \gamma w)$

c) $u + \alpha^{-1}\beta v = \cancel{\alpha^{-1}}(-\cancel{\beta v} - \gamma w) + \cancel{\alpha^{-1}}\cancel{\beta v}$

$-\gamma \alpha w$

6- associativa (suma)

- $((f+g)+h)(x) \equiv (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \equiv f(x) + (g+h)(x) = (f + (g+h))(x)$
- $(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
- $0_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to 0$
- $f + \bar{f} = 0_E \qquad \bar{f} = -f$
- $\lambda(\mu f)(x) = \lambda\mu f(x) = (\lambda\mu) f(x) = ((\lambda\mu) f)(x)$
- $\lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)$
- $((\lambda+\mu) f)(x) = (\lambda+\mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$
- $1 \in \mathbb{R}$

5- veurem que $P(\mathbb{R})_p$ és subespai vectorial de $P(\mathbb{R})_d$ on d és el grau màxim de la variable

$P, Q \in P(\mathbb{R})_p$ $\quad P + Q \in P(\mathbb{R})_p \to P = \sum_{i=0}^{n} p_i \cdot x^{2i} \quad Q = \sum_{i=0}^{m} q_i\, x^{2i}$ si $n > m$, $q_i = 0$ per $i > m$

$\lambda P \in P(\mathbb{R})_p$

$P + Q = \sum_{i=0}^{n} (p_i + q_i)\, x^{2i} \to P + Q \in P(\mathbb{R})_p$

$\downarrow$

$\lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} p_i\, x^{2i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda p_i\, x^{2i} \to \lambda P \in P(\mathbb{R})_p$

7- E_1 $\quad u \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \quad v \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \qquad u + v \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$

$(x_u + x_v) + \pi(y_u + y_v) = 0$?

$\underbrace{x_u + \pi y_u}_{0} + \underbrace{x_v + \pi y_v}_{0} = 0$ ✓

$\lambda v \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}$

$\lambda x_v + \pi \lambda y_v = 0$

$\lambda(x_v + \pi y_v) = 0$ ✓

9- M_s $\quad AB = 0 \qquad \lambda AB = 0$ ✓

$A'B = 0$

$(A + A')B \to \underbrace{AB}_{0} + \underbrace{A'B}_{0} = 0$ ✓

M_1

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a + b & a + b \\ 2c + d & c + d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix}$ $\qquad b = c \qquad a + b = 2b + d$

$2c + d = a + c \qquad c = b$

respostes.)

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) : a_2 = a_0\} \\ F_2 & = & \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau } 3\} \\ F_3 & = & \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau parell}\} \\ F_4 & = & \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \\ F_5 & = & \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\} \\ F_6 & = & \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\} \end{array}$$

6.9 Considerem $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius $n \times m$ amb coeficients reals. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{array}{rcl} M_1 & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\ M_2 & = & \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\ M_3 & = & \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 0 \ \forall i \in [m]\} \\ M_4 & = & \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 1 \ \forall i \in [m]\} \\ M_5 & = & \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : AB = 0\} \text{ (on } B \text{ és una matriu fixa)} \end{array}$$

6.10 Considerem el conjunt $T \subset \mathbb{R}^4$. Proveu que el vector u es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt almenys de dues maneres diferents.

$$T = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.11 Per a quins valors del paràmetre a el vector u de $\mathbb{R}$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}, \quad T = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

6.12 Doneu els valors dels paràmetres a i b per als quals la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ és combinació lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.13 Donats els vectors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, trobeu quina condició han de complir les components d'un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per a que pertanyi al subespai generat per $\{u, v\}$.

6.14 Doneu la forma genèrica dels polinomis de $P(\mathbb{R})$ que pertanyen al subespai vectorial generat pel conjunt $\{1+x, x^2\}$.

6.15 Siguin $F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ i $G = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ subespais de $\mathbb{R}^3$.

1) Demostreu que $F = G$.

2) Sigui $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen F.

6.16 Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents a l'espai vectorial que s'indica.

1) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \}$ a $\mathbb{R}^3$;

2) $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ a $\mathbb{R}^3$;

3) $\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ a $\mathbb{R}^3$;

4) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \}$ a $\mathbb{R}^4$;

5) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \}$ a $\mathbb{R}^5$.

6.17 A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$. Determineu a i b per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector $0_{\mathbb{R}^4}$ com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

6.18 Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i u, v, w tres vectors qualssevol d'E. Demostreu que el conjunt $\{u-v, v-w, w-u\}$ és linealment dependent.

6.19 Demostreu que les matrius A, B i C següents formen un conjunt linealment independent a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proveu que per a qualsevol valor de λ la matriu següent és combinació lineal d'A i B.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.20 Demostreu que els polinomis $-1+2x+x^2$, $1+x^2$ i $x+x^2$ són linealment dependents a l'espai $P(\mathbb{R})$.

6.21 Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent d'un espai vectorial, és cert que qualsevol e_i es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

6.22 Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors en un espai vectorial E són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

1) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores el conjunt $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és linealment independent.
2) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \notin \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$, aleshores $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és linealment independent.
3) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt generador de E i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és un conjunt generador de E.
4) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt generador de E i $e_r \in \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$, aleshores $\{e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ és un conjunt generador de E.
5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

6.23 Considereu el conjunt de vectors $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}$.

1) Demostreu que formen una base de $\mathbb{R}^4$.
2) Trobeu les coordenades del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en aquesta base.
3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ en aquesta base.

6.24 Sigui $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Comproveu que és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Doneu les coordenades d'$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B.

6.25 Sigui $P_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis de grau com a molt 3. Demostreu que els polinomis $1+x, -1+x, 1+x^2$ i $1-x+x^3$ formen una base de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu les coordenades del polinomi $-5+6x+3x^2+x^3$ en aquesta base.

6.26 Considereu el subespai $F = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base de F i la condició (en forma de sistema d'equacions lineals homogènies) que ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per pertànyer a F.

6.27 Considereu els subespais següents de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad G = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Proveu que $F = G$ i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertany a F i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

6.28 Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que el conjunt $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també és una base d'E.

6.29 Trobeu una base del subespai E de $\mathbb{R}^5$ i completeu-la a una base de $\mathbb{R}^5$.

$$E = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4,\ x_5 = x_2 - x_1 \}.$$

6.30 Considereu els vectors de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que formen un conjunt linealment independent i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6.31 Per a quins valors de λ els vectors $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ generen un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2?

28- $E = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 0 = 12 \neq 0 \quad LI \to$$ Son una base d'E perquè te dimensió 3.

29-

$x_3 = x_1 + x_2 - x_4$ $\quad\to\quad$ $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_5 = x_2 - x_1$ $\quad\quad\quad$ $x_1 - x_2 + x_5 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$rg\,M = 2 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \begin{matrix} x_4 = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_5 = -x_1 + x_2 \end{matrix}$$

3 graus de llibertat

dim E = 3

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{Base d'}E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per completar la base només caldria afegir els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^5$ x_4 i x_5.

30-

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Base de $M_2(\mathbb{R})$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 104 - 10 = 94 \\ 4 + 100 - 20 + 10 \neq 0 \to rg\,M = 3 \to LI \end{matrix}$$

Te rang 4, així que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ son base de $M_2(\mathbb{R})$

31-

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-2\lambda & \lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$1 - \lambda^2 = 0$ → $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

$\lambda - \lambda^2 = 0$ → $\lambda = 0$, $\lambda = 1$

Si $\lambda = 1$, $rg\,M = 2$ → genera un s.e.v de dim 2

33-

1) $E: \begin{cases} x = y \\ 2x = z \end{cases} \wedge F: \begin{cases} x+y-z=0 \to z=-x \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

$\downarrow 1+2$

$4x+2y=0$

$-2x=y$

$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$E \cap F = 0_E$ E i F tenen la mateixa dimensió i $E \neq F$ per tant $E \cap F = \{0_E\}$

$x-y=0$

$2y-z=0$

$x+y-z=0$

$3x+y+z=0$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 4z+2x+2y=0$

$2z+x+y=0$

3) $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

34-

$B = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad B' = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$P_B^E = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad P_{B'}^E \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad P_B^{B'} = P_E^{B'} \cdot P_B^E$

$P_E^{B'} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_B^{B'} = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

6.32 Considerem el subespai $F_a = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, amb $a \in \mathbb{R}$.

1) Trobeu el valor de a per al qual F_a és de dimensió 2.

2) Sigui $a = a_0$ el valor de a obtingut a l'apartat anterior. Trobeu les condicions, en la forma d'un sistema d'equacions lineals homogeni en x, y, z, t, per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de F_{a_0}.

3) Raoneu que $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ i $B' = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ són bases de F_{a_0}.

6.33 Doneu una base i la dimensió dels espais E, F i $E \cap F$ en els casos següents:

1) $E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z \}$ i $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0 \}$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

2) $E = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ i $F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

3) $E = \{ \begin{pmatrix} a \\ a + 3b \\ 2a - b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \}$ i $F = \{ \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \}$ com a subespais de$\mathbb{R}^4$.

4) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b = c \right\}$ i $F = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ com a subespais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6.34 Considereu els subespais E de l'exercici anterior (exercici 6.33). Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai vectorial on es troben.

6.35 Considereu la base $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Doneu la matriu P_B^C de canvi de base de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a B.

2) Sigui ara $B' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ una altra base de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu $P_B^{B'}$ de canvi de base de B' a B.

6.36 Considereu l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ dels polinomis de grau menor o igual a 2 i amb coeficients reals.

1) Proveu que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una base de $P_2(\mathbb{R})$ i calculeu la matriu de canvi de base de base canònica a base B.
2) Trobeu les coordenades de $p(x) = 3 - x + 2x^2$ en la base B.

6.37 Siguin $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ i $B' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

1) Comproveu que efectivament són bases.
2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P_{B'}^{B}$) i la matriu del canvi de B' a B ($P_{B}^{B'}$).
3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector que en base canònica té coordenades $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.38 Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P_{B'}^{B}$ i $P_{B}^{B'}$.

6.39 Considereu els conjunts B i B' i comproveu que són bases de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}, \qquad B' = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Sigui u un vector de $\mathbb{R}^3$ que en la base B té coordenades $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i en la base B', $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z', i viceversa.

6.40 Sigui $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$, l'espai dels polinomis de grau ≤ 2. Considerem els polinomis $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = 2x^2 + 3$ i $w(x) = x^2 + x$. Si en la base B les coordenades de $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$ són

$$u(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

respectivament, doneu les coordenades dels vectors de B en base canònica $\{x^2, x, 1\}$.

7
Aplicacions lineals

Exercicis

7.1 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$;

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2y^2$;

3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+7 \\ 2y \\ x+y+z \end{pmatrix}$;

4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ x+y \end{pmatrix}$;

5) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ x \end{pmatrix}$.

7.2 Determineu quines de les següents aplicacions $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ són lineals:

1) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$;

2) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$;

3) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2$.

7.3 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$;

2) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$, on $f(A) = AB$, essent $B \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ una matriu fixada;

3) $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(A) = \det(A)$.

7.4 Sigui $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ l'aplicació lineal definida per: $f(1) = 1 + x$, $f(x) = 3 - x^2$ i $f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Quina és la imatge del polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2$? Calculeu $f(2 - 2x + 3x^2)$.

7.5 Estudieu si existeix algun endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3$, on:

1) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ i $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}$;

2) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ i $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}$;

3) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ i $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

7.6 Siguin E i F dos espais vectorials, $f\colon E \to F$ una aplicació lineal, i $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectors d'E. Discutiu les afirmacions següents: demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses.

1) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents.

2) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.

3) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F.

4) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E.

5) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\operatorname{Im} f$.

7.7 Per als següents subespais E i F de $\mathbb{R}^4$, esbrineu si existeix una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(u) = 0$ per a tot $u \in E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

1) $E = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$ i $F = \langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$.

2) $E = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$ i $F = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix} \rangle$.

7.8 Doneu la matriu associada a les aplicacions lineals següents en les bases canòniques i calculeu la dimensió del nucli i de la imatge:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = 3x$;

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$;

3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$;

4) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, on $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b+c \\ c+d \\ 2a-b+c-d \end{pmatrix}$;

5) $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_1 - a_0) + (2a_1 - a_2)x + (3a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2)x^3$.

7.9 Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ amb matriu associada

$$\begin{pmatrix} (m-2) & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$

Determineu la dimensió de la imatge segons els valors de m.

7.10 Sigui E un espai vectorial i $B = \{u, v, w, t\}$ una base d'aquest. Sigui f un endomorfisme d'E tal que:

$$f(u) = u + 2w,\ \ f(v) = v + w,\ \ f(w) = 2u + v + w,\ \ f(t) = 2u + 2v + 4w.$$

Escriviu la matriu d'f en la base B, i trobeu una base i la dimensió de la imatge d'f.

7.11 Trobeu el nucli de l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$, calculeu $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i les antiimatges, si en tenen, dels vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7.12 Determineu si les aplicacions lineals següents són o no bijectives usant la informació que es dóna:

1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;

2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amb $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n-1$;

3) $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, amb $n < m$;

4) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^n$.

7.13 Per a cadascuna de les aplicacions lineals següents, doneu la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques; doneu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació; digueu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva, bijectiva o cap de les tres; i determineu l'aplicació inversa, en el cas que existeixi:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ fix;

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$;

3) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z+2t \\ y-z+t \\ x-2y+2z \end{pmatrix}$;

4) $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1)+(a_1-a_2)x+(a_2-a_0)x^2$;

5) $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0+a_1x+a_2x^2) = 3a_0+(a_0-a_1)x+(2a_0+a_1+a_2)x^2$;

6) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, on $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$;

7) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z-y & x-z \end{pmatrix}$.

7.14 Sigui B una matriu invertible $n \times n$. Demostreu que l'aplicació $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = AB$ és un endomorfisme bijectiu.

7.15 Per a les aplicacions lineals següents f_1 i f_2, digueu si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva, bijectiva.

1) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x+y \\ x+2z-y \end{pmatrix}$ i $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3z \\ y+4z \end{pmatrix}$;

2) $f_1\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ i $f_2\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f_1(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_2+a_3x+a_0x^2$ i $f_2(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_1+a_2)+(a_0+a_2)x+(a_0+a_1)x^2$;

3) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$ i $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ y+x \end{pmatrix}$.

7.16 Doneu les matrius associades a les aplicacions lineals següents respecte de les bases canòniques:

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.17 Sigui f un endomorfisme de $P_2(\mathbb{R})$ donat per $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$. Doneu la matriu d'$f$ en la base $B = \{1 + x^2, -1 + 2x + x^2, 2 + x + x^2\}$.

7.18 Sigui $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i sigui $B_F = \{v_1, v_2\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial F. Considerem l'aplicació lineal $f\colon E \to F$ definida per

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2z)v_1 + (y + z)v_2.$$

Trobeu la matriu associada a f en les bases:

1) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.
2) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.
3) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.
4) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

7.19 Considerem l'endomorfisme $f_N\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per $f_N(A) = NA$ on

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Trobeu la matriu associada a f_N en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Calculeu $\ker f_N$ i $\operatorname{Im} f_N$.
3) Trobeu la matriu associada a f_N en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7.20 Sigui $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

1) Trobeu els subespais $\mathrm{Ker} f$ i $\mathrm{Im} f$.
2) Trobeu una base B de $\mathbb{R}^3$ per a la qual la matriu associada f sigui $M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.21 Siguin $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^4$ i E el subespai generat per $B_E = \{u_1, u_2\}$.
Siguin $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^3$ i F el subespai generat per $B_F = \{v_1, v_2\}$. Definim $f \colon E \to F$ tal que $f(x_1u_1 + x_2u_2) = (x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v_2$.

1) Trobeu la matriu d'f en les bases B_E i B_F.
2) És f injectiva? És exhaustiva?
3) Siguin $B'_E = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ i $B'_F = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Proveu que són bases d'E i F respectivament i doneu la matriu d'f en aquestes noves bases.

7.22 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ s'obté respectivament

1) la reflexió respecte de l'eix OX;
2) la reflexió respecte de l'eix OY;
3) la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
4) la projecció ortogonal sobre l'eix OY;
5) un escalat de factor k;
6) una rotació en sentit antihorari d'angle α amb centre l'origen.

7.23 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^2$ següents:

1) una rotació de 30^o en sentit antihorari seguida d'una reflexió respecte a l'eix OY;
2) una projecció ortogonal sobre l'eix y, seguida d'un escalat de factor $k = 1/2$;
3) un escalat de factor $k = 2$, seguida d'una rotació de 45^o en sentit antihorari seguit d'una reflexió respecte a l'eix OY.

21 –

$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f: E \to F$ $E = \langle u_1, u_2 \rangle$ $F = \langle v_1, v_2 \rangle$

$f(x_1 u_1 + x_2 u_2) = (x_1 - x_2) v_1 + (x_1 + x_2) v_2$

$f(u_2) = -v_1 + v_2$

1) $M_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \to rg M = 2$

$f(u_1) = v_1 + v_2$

2) $\dim E = \dim F$

f bijectiva $\Leftrightarrow$ f injec $\Leftrightarrow$ f exhaust

f bijectiva $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

3) $B_E' = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ base E

- L.I sí
- $\langle B_E' \rangle = E$ $\quad 1 = u_2 - u_1$, $2 = u_1 + u_2 \to \in E$

dimensió 2

$B_F' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \to \dim 2 \wedge$ $\quad 3 = v_1 - v_2$, $4 = 2v_1 - v_2 \to \in F$

3 4

4) $M_{B_F'}^{B_E'}(f) = P_{B_F'}^{B_F} \, M_{B_F}^{B_E} \, P_{B_E}^{B_E'}$

7.24 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 és la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
2) f_1 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_2;
3) f_1 és la reflexió respecte l'eix OX i f_2 és la reflexió respecte l'eix OY;
4) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 la rotació en sentit antihorari d'angle θ.

7.25 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ s'obté respectivament

1) la reflexió respecte del pla $z = 0$;
2) la reflexió respecte del pla $y = 0$;
3) la reflexió respecte del pla $x = 0$;
4) la projecció ortogonal sobre el pla $z = 0$;
5) la projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;
6) la projecció ortogonal sobre el pla $x = 0$;
7) una rotació d'angle α respecte a l'eix OZ en sentit antihorari si observem el pla $z = 0$ des del semiplà $z > 0$;
8) una rotació d'angle α respecte a l'eix OY en sentit antihorari si observem el pla $y = 0$ des del semiplà $y > 0$;
9) una rotació d'angle α respecte a l'eix OX en sentit antihorari si observem el pla $x = 0$ des del semiplà $x > 0$.

7.26 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ següents:

1) una reflexió respecte el pla $x = 0$, seguida d'una projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;

2) una rotació de 45^o en sentit antihorari respecte l'eix OY, seguida d'un escalat de factor $k = \sqrt{2}$;

3) una rotació de 30^o en sentit antihorari respecte l'eix OX, seguida d'una rotació de 30^o en sentit antihorari respecte l'eix OZ, seguida d'un escalat de factor $k = 1/3$.

7.27 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és un escalat de factor k i f_2 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ;

2) f_1 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OX d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ_2.

8
Diagonalització

Exercicis

8.1 Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais de vectors propis de les matrius següents. Determineu quines són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base en la que diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8.2 Sigui J la matriu de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ formada íntegrament per uns. Trobeu una base de $\mathbb{R}^5$ que estigui formada per un vector propi de J de valor propi 5 i per quatre vectors propis de valor propi 0.

8.3 Trobeu els valors i vectors propis dels endomorfismes següents. En cas que siguin diagonalitzables, doneu una base en què diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4z \\ 3x-4y+12z \\ x-2y+5z \end{pmatrix}$.

2) $f\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$, on
$$f(a+bx+cx^2) = (5a+6b+2c) - (b+8c)x + (a-2c)x^2.$$

3) $f\colon P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$, on
$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+b+c+d) + 2(b+c+d)x + 3(c+d)x^2 + 4dx^3.$$

2 -

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = (-1)^5 (x-5)\, x^4 = -(x-5)\, x^4$$

var lliure $= x_2, x_3, x_4, x_5$

$$E_0 = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{X} \text{ t.q. } JX = 0 \Big\} \longrightarrow \text{Variable parl} = x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\boxed{\dim E_0 = 5 - rg\, J = 4}$$

nombre de variables lliures

$$\equiv x_2 \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + x_3 \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + x_4 \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + x_5 \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

L.I

4 veps de vap 0

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ vep de vap 5

8.4 Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

8.5 Discutiu la diagonalització de les matrius següents sobre $\mathbb{R}$ en funció dels seus paràmetres:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8.6 Siguin f un endomorfisme d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i $u \in E$ un vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que:

1) $-u$ és un vector propi de f de valor propi λ;

2) u és un vector propi de f^2 de valor propi λ^2.

8.7 Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i f un endomorfisme de E. Demostreu que$f$ és bijectiu si i només si 0 no és valor propi d'f.

8.8 Demostreu que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una matriu triangular superior, amb els elements de la diagonal principal diferents dos a dos, aleshores A és diagonalitzable.

8.9 Raoneu si existeix algun endormorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifiqui les condicions que s'especifiquen a continuació. En cas que existeixi, determineu-lo, calculeu el seu polinomi característic i digueu si és o no diagonalitzable.

1) Tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ són vectors propis de valor propi 1 i $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 0.

2) Tal que $\operatorname{Ker} f = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+y-2z=0\}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi $-1/2$.

3) Tal que $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8 -

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\qquad \overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{\neq}$ $\qquad P_A(x) = \det(A - xI_n) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\dots(\lambda_n - x)$

Valors propis = Vaps matriu = $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

n arrels diferents $\rightarrow$ Diagonalitza

7 - · f bijectiva $\iff$ f injectiva $\iff$ $rg A = n \iff \det A \neq 0$ *

· 0 no es $\underset{\text{valor propi}}{\text{vap}}$ $\iff$ 0 no es arrel de $P_A(x) \iff$ 0 no es arrel de $\det(A - x\cdot I_n) \iff$
$\iff \det(A - 0I) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$ *

* f bijectiva $\iff$ 0 no es vap

f injectiva $\iff$ $\ker f = \{0_E\} \iff E_0 = \{0_E\}$
$\iff$ 0 no es vap

veps de vap 0: v tq. $f(v) = 0v = 0_E$
$E_0 = \ker f$

6 - u $\underset{\text{vector propi}}{\text{vep}}$ de $\underset{\text{valor propi}}{\text{vap}}$ λ de f $\equiv f(u) = \lambda u$

1) $-u$ vep de vap λ de $f \equiv f(-u) = \lambda(-u)$

$u \in E_\lambda = \{u : f(u) = \lambda u\}$, E_λ es subespai d'E

$u \in E_\lambda \xrightarrow[E_\lambda \text{ subespai}]{} -u \in E_\lambda \rightarrow -u$ es vep de vap λ de f

$(-1)u \in E_\lambda$

2) $f^2(u) = \lambda^2 u$

$f^2(u) \equiv f \circ f(u) \equiv f(f(u)) \equiv f(\lambda u) \equiv \lambda f(u) \equiv \lambda(\lambda u) \equiv \lambda^2 u$

f lineal $\qquad$ u es vep de vap λ^2 de f^2

5 - 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ diagonalitza $\overset{?}{\iff}$ $a = 0 \wedge b \neq 1$

· $P_A(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} 1-x & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x)(b-x)$

Si $b \neq 1 \wedge 2$

vaps:	mult:
1	2
2	1 ✓
b	1 ✓

$a = 0$

si $b = 1$

vaps	mult
1	3 ✗
2	1 ✓

No

si $b = 2$

vaps:	mult
1	2
2	2

si $a = 0$ ✓

$-b=1$ diag $\Leftrightarrow$ $\dim E_1 = 3$

$\dim E_1 = 4 - \text{rg } A = 3? = 2$ no diagonalitza $\neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg } A = 2$$

$-b=2$

diag $\Leftrightarrow$ $\dim E_1 = 2 \wedge \dim E_2 = 2 \Leftrightarrow a=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

si $a \neq 0$ rg $=3$ $4-3=1$ ✗

si $a=0$

$\det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 2$ $4-2=2$ ✓

$$B = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg } B = 2 \rightarrow 4-2=2 ✓$$

$-\ b \neq 1 \wedge 2$

diag $\Leftrightarrow$ $\dim E_1 = 2 \Leftrightarrow a=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix} = a(b-1) = 0$$

$a=0 \rightarrow \text{rg } A = 2$

$b=1 \rightarrow \text{rg } A = 2$ hipòtesis $b \neq 1$

$4-3=1$ si $a \neq 0$

$4-2=2$ si $a=0$

9-

3) $\exists f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } M = 3 \rightarrow \exists f$$

Si els 3 vectors son L.I $\rightarrow \exists f: E \rightarrow F$

$u_1 \rightarrow v_1$

$u_2 \rightarrow v_2$

$u_3 \rightarrow v_3$

$\vdots$

diag ?

matriu associada base canonica

$$C = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$P_A(x) = \det(A - xI_3) = (2-x)(1-x)^2$$

Vap :	mult
1	2
2	1

diag $\iff \dim E_1 = 2$

$$E_1 = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \text{rg}\, E_1 = 2 \qquad 3-2 = 1 \neq 2 \times$$

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \ker f = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \qquad f(w) = 0$

$$F = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} : x + y - z = 0 \right\} = E_2$$

$\dim F = 3 - 1 = 2$

sol.

$$\begin{matrix} x \\ y \\ x+y \end{matrix} = x \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} + y \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$f(u) = 2u$

$f(v) = 2v$

$0u + 2v + 0w$

$$M_B^B f = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \leftarrow 0u + 0v + 0w$$

$2u + 0v + 0w$

$$M_C^B \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}$$

4) Tal que $\operatorname{Ker} f = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ i $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + y = z \}$ sigui el subespai vectorial dels vectors propis de valor propi 2.

8.10 Considereu l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - y \\ x + y + z \\ 2z \end{pmatrix}$, on a és un paràmetre real.

1) Doneu la dimensió de $\operatorname{Im} f$ segons els valors de $a \in \mathbb{R}$.

2) És f diagonalitzable per a $a = 3$?

3) Doneu condicions sobre a per tal que f tingui tots els seus valors propis reals.

8.11 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Quina relació hi ha entre els valors propis d'A i els d'A^k? I entre els vectors propis?

2) Demostreu que si la matriu A es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on P és una matriu invertible, aleshores $A^k = PD^kP^{-1}$.

3) Fent ús de l'apartat anterior, calculeu

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100}, \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2001}, \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{70}.$$

8.12 Un OVNI surt d'un planeta en el qual tenen el seu origen els vectors v_1, v_2, v_3. Aquests vectors són utilitzats com base d'un sistema de coordenades de l'univers ($\mathbb{R}^3$). Després d'arribar al punt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la nau es deixa portar per una estranya força tal que cada dia la transporta de la situació v a la Av, on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) On estarà al cap de 10 dies?

2) Arribarà algun dia a la Terra, que està situada al punt $\begin{pmatrix} -4098 \\ 2049 \\ 4149 \end{pmatrix}$ segons les seves coordenades?

Exercicis de repàs i consolidació

Matrius, sistemes i determinants

B.1 Donades A i B matrius diagonals del mateix tipus, proveu que $AB = BA$.

B.2 Siguin A i B dues matrius triangulars superiors (inferiors) del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu triangular superior (inferior).

B.3 Proveu que si A és una matriu $m \times n$, aleshores AA^t i A^tA són matrius simètriques.

B.4 Sigui A una matriu $n \times n$ simètrica i tal que $A^2 = A$. Proveu que si per algun i es té $a_{ii} = 0$, aleshores tots els elements de la fila i i tots els elements de la columna i són zeros.

B.5 Trobeu el conjunt de les matrius $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tals $A^2 = I$.

B.6 Siguin A, B i C matrius. Proveu que

1) si A és equivalent per files a B, aleshores B és equivalent per files a A;
2) si A és equivalent per files a B i B és equivalent per files a C, aleshores A és equivalent per files a C.

B.7 Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té 2 graus de llibertat.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x - y + z + 2t + 2u & = & 1 \\ y + z - 2u & = & 1 \\ 2x + z + t & = & 1 \\ x - y + t + 2u & = & 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u & = & 3 \end{array}\right.$$

Responeu les preguntes següents.

1) Quin és el nombre màxim d'equacions independents?
2) Esbrineu si la segona equació és combinació lineal de les altres. Feu el mateix per a la quarta.

3) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual $x = 2\pi$. El mateix per a $y = 2\sqrt{3}$.

4) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual $x = 0$ i $y = 2\sqrt{3}$. El mateix per a $z = 2\pi$ i $t = 2\sqrt{3}$.

B.8 Sigui A una matriu i sigui B una matriu que s'obté d'A multiplicant una fila d'A per una constant c. Demostreu que $\det B = c\,\det A$.

B.9 Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcr} x+y &=& 2\\ x+3y &=& 0\\ 2x+4y &=& 2\\ 2x+3y &=& -3 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z &=& 7\\ 2x-2y+2z-4w &=& 12\\ -x+y-z+2w &=& -4\\ -3x+y-8z-10w &=& -29 \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{rcr} -x+y+2z &=& 1\\ 2x+3y+z &=& -2\\ 5x+4y+2z &=& 4 \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{rcr} x+6y-z-4w &=& 0\\ -2x-12y+5z+17w &=& 0\\ 3x+18y-z-6w &=& 0\\ 5x+30y-6z-23w &=& 0 \end{array}\right.$$

B.10 Discutiu els sistemes següents, segons els valors a $\mathbb{R}$ dels paràmetres.

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& m\\ x+my+z &=& m\\ mx+y+z &=& m \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+3y &=& 2\\ 3x+2y &=& a\\ 2x+ay &=& 3 \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{rcc} (a-1)x-ay &=& 2\\ 6ax-(a-2)y &=& 5-a \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+2y+3z+u &=& 6\\ x+3y-z+2u &=& b\\ 3x-ay+z &=& 2\\ 5x+4y+3z+3u &=& 9 \end{array}\right.$$

Espais vectorials

B.11 Considereu l'espai vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ definit al problema 6.6. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{array}{rcl} F_1 &=& \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1)=f(2)\}\\ F_2 &=& \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1)=f(2)+1\}\\ F_3 &=& \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1)=0\}\\ F_4 &=& \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\}\\ F_5 &=& \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ és contínua}\} \end{array}$$

B.12 Demostreu que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals amb n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ si i només si el sistema és homogeni.

B.13 A l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ considerem els subespais

$$F = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \rangle \text{ i } G = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\a\end{pmatrix} \rangle.$$

Determineu per a quins valors de a es té $F = G$.

B.14 Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i u, v, w tres vectors que compleixen la relació $2u+2v-w = -4u - 5v + w$. Demostreu que $\{u, v, w\}$ formen un sistema linealment dependent.

B.15 Siguin E un espai vectorial i v_1, v_2, v_3 vectors d'E. Demostreu que les afirmacions següents són equivalents.

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ és linealment independent.

b) $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 + v_3\}$ és linealment independent.

c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ és linealment independent.

B.16 Demostreu que el conjunt $\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Escriviu el vector $\begin{pmatrix}-3\\7\\6\\-5\end{pmatrix}$ com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base.

B.17 Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ donat per

$$F = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\\42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-1\\37\end{pmatrix} \rangle.$$

1) Trobeu una base de F.

2) Comproveu que $e = \begin{pmatrix}9\\7\\2\\79\end{pmatrix} \in F$ i calculeu les coordenades de e en la base de l'apartat anterior.

3) Trobeu una base de F que contingui e.

B.18 Sigui $\{u, v\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Proveu que el conjunt $\{\alpha u + \beta v : \alpha + \beta = 0\}$ és un subespai vectorial. Descriviu aquest subespai geomètricament i trobeu-ne una base.

B.19 Sigui E un espai vectorial. Demostreu:

1) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és un conjunt generador d'E tal que en treure-li qualsevol dels e_i ja no és generador, aleshores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base d'E.

2) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és un conjunt independent d'E tal que en afegir-li qualsevol altre vector d'E el resultat esdevé un conjunt dependent, aleshores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base d'E.

B.20 Trobeu una base i la dimensió dels subespais següents.

1) $E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y = 2z\}$.

2) $E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y - 3z, z = t\}$.

3) $E_3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ a $(\mathbb{R})^3$.

4) $E_4 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ a $(\mathbb{R})^3$.

5) $E_1 \cap E_2$.

6) $E_3 \cap E_4$.

B.21 Considereu els subespais E_1, E_2, E_3 i E_4 de l'exercici anterior. Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai on es troben.

B.22 Sigui $F = \{\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2b - a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Demostreu que és un subespai vectorial de $\mathbb{Q}^3$, i trobeu-ne una base i la dimensió.

Responeu les mateixes preguntes si enlloc de considerar $\mathbb{Q}$ prenem $\mathbb{Z}_2$.

B.23 Diem que una matriu $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és *màgica* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal principal és sempre la mateixa. Demostreu que el conjunt de les matrius màgiques és un subespai de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Per $n = 2, 3$ trobeu-ne una base i la dimensió.

B.24 Siguin $B = \{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ i $B' = \{\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

1) Comproveu que efectivament són bases.

2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P^B_{B'}$)i la matriu del canvi de B' a B ($P^{B'}_B$).

3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector v que en base canònica té coordenades $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

B.25 Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensió 3 i sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'E. El vector v té coodenades $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en aquesta base. Calculeu les coordenades de v en la base:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 \\ u_3 &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

(No cal que demostreu que és una base.)

B.26 Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P^B_{B'}$ i $P^{B'}_B$.

Aplicacions lineals

B.27 Sigui $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, on $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. Hi ha alguna aplicació lineal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, i $f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? En cas afirmatiu, doneu la imatge del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per aquesta aplicació f.

B.28 Esbrineu quins dels espais vectorials següents són isomorfs a $\mathbb{R}^6$: $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_6[x]$, $\mathcal{M}_{6\times 1}(\mathbb{R})$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0, x_5, x_6, x_7) : x_i \in \mathbb{R}\}$.

B.29 Sigui $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = A - A^t$. Determineu el nucli d'f i la seva dimensió.

B.30 Sigui $B = \{u, v, w\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, i sigui f un endomorfisme d'E tal que:

$$f(u) = u + v, \; f(w) = u, \; \mathrm{Ker} f = \langle u + v \rangle.$$

Doneu una base i la dimensió dels subespais Imf, Ker$f$, Imf^2 i Kerf^2.

B.31 Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ i $\operatorname{Ker} f = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0\}$. Trobeu

1) la matriu associada a f en la base canónica;
2) la dimensió del nucli i de la imatge;
3) l'expressió explícita de la imatge d'un vector qualsevol;
4) si és injectiu, exhaustiu, bijectiu, o cap de les tres coses.

B.32 Siguin f_r els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ definits per

$$f_r\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y+2z\\x+y\\x+2y+rz\end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

1) Trobeu el valor de r per al qual $\operatorname{Im} f_r$ té la dimensió més petita possible.
2) Pels valors de r obtinguts a l'apartat anterior, doneu una base i la dimensió del nucli d'f_r.
3) Donat $v = \begin{pmatrix}3\\2\\t\end{pmatrix}$, vegeu si existeix algun t tal que Ker$f_r = \langle v \rangle$.
4) Sigui $w = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, calculeu $f_r(w)$ i $f_r^{-1}(f_r(w))$.

B.33 Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials i $f\colon E \to F$ una aplicació lineal. Siguin v_1, v_2 dos vectors d'E. Demostreu les proposicions següents:

1) si v_1 i v_2 són linealment dependents, aleshores $f(v_1)$ i $f(v_2)$ també ho són;
2) si $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment independents, aleshores v_1 i v_2 també ho són;
3) suposem que f és injectiva, si $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment dependents, aleshores v_1 i v_2 també ho són.

B.34 Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i siguin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectors d'E. Considereu l'aplicació $f\colon \mathbb{R}^n \to E$ donada per $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$. Proveu les proposicions següents.

1) f és injectiva si, i només si, els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.
2) f és exhaustiva si, i només si, els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generen E.

3) f és bijectiva si, i només si, els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són una base d'E.

B.35 Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriu associada a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en les bases $B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

1) Trobeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

2) Trobeu la matriu associada a f en les bases $B_1' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $B_2' = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

3) Sigui $v \in \mathbb{R}^3$ de coordenades $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base B_1. Doneu les coordenades d'$f(v)$ en la base B_2'.

B.36 Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$, que en la base $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, té per matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) Trobeu la matriu associada a f en la base canònica.

2) Esbrineu si f és injectiu, exhaustiu o bijectiu.

3) Trobeu l'antiimatge del vector $w = au_1 + bu_2 - bu_3$ segons els valors reals de a i b. Doneu el resultat en base canònica.

B.37 Donada una base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E, definim una aplicació lineal $f : E \to E$ tal que:

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = (x_1 + x_2)e_1 + (x_3 + x_4)e_2.$$

1) Doneu la matriu associada a f en la base B.

2) Demostreu que $f \neq f^2$ i que $f^2 = f^3 \neq 0$.

3) Busqueu una base i la dimensió dels subespais $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f, \mathrm{Ker} f^2, \mathrm{Im} f^2$.

4) Comproveu que els vectors $e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_3$ formen una base d'E i escriviu la matriu associada a f en aquesta base.

B.38 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^2$ següents:

1) una reflexió respecte l'eix x, seguida d'una dilatació de factor $k = 3$;
2) una rotació de 60^o en sentit contrari al de les agulles del rellotge, seguida d'una projecció ortogonal sobre l'eix x, seguida d'una simetria central.

B.39 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ següents:

1) una projecció ortogonal sobre el pla xy, seguida d'una reflexió respecte al pla yz, seguida d'una contracció de factor $k = 3$;
2) una reflexió respecte al pla xy, seguida d'una reflexió respecte al pla xz, seguida d'una d'una rotació de 60^o en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix z.

Diagonalització

B.40 Sigui $f\colon E \to E$ un endomorfisme bijectiu. Demostreu que f diagonalitza en la base B si, i només si, f^{-1} diagonalitza en la base B. Quina relació hi ha entre els valors propis d'f i els d'f^{-1}?

B.41 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu tal que $A^2 = A$, i sigui $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu qualsevol. Demostreu que tot valor propi d'AB és valor propi d'ABA.

B.42 Per a cadascun dels endomorfismes següents, trobeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais propis. Determineu si són o no diagonalitzables.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ -z \end{pmatrix}$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 3y \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -8x - 2y + 36z \\ -2x + 4z \end{pmatrix}$.

5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 3x + 2y + 3z \\ x + z \end{pmatrix}$.

6) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 5y + 6z + 7t \\ 3x + 8z + 9t \\ 4x + 10t \end{pmatrix}$.

7) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_2 + \cdots + x_n \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

B.43 Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.
2) Trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ formada per vectors propis.
3) Doneu la matriu P del canvi de la base de l'apartat 2) a la base canònica. Calculeu P^{-1}.
4) Escriviu la matriu diagonal associada a f respecte a la base de l'apartat 2) i comproveu que és igual a $P^{-1}AP$.

B.44 Sigui $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu no nul·la fixada i $f_C \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una aplicació definida per $f_C(A) = CA - AC$, per a tota matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Comproveu que f_C no és injectiva.
2) Si $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Per a quins valors dels paràmetres reals a, c i d l'endomorfisme f_C és diagonalitzable?