Tema 2: Sucesiones de numeros reales

DeF: Una sucesion de numeros reales es una aplicacion

$$a: D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a(n) = a_n$$

El conjunto imajen : $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ terminos de la sucesion

$$\{a_n\}_{n \in D} \quad o \quad (a_n)_{n \in D} \to a_n : \text{termino general}$$

Formas de dar una sucesion:

- "Todos" los terminos de la sucesion $\{2, 4, 6, 8 \dots\}$
- Dando el termino general $\to$ $a_n = 2n$
- Formula recurente $a_1 = 2$ n $a_{n+1} = a_n + 2$ $n \geq 1$

ej: Fibonacci:

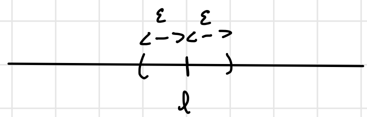
$$\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{matrix} \to a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \{1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots\}$$

Limite de una sucesion

DeF limite Finito : $\leftrightarrow$ la sucecion es convergente

$$\lim_{n \to \infty} a_n \to l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \ |x_n - l| < \varepsilon$$

$a_n \to l$



ej: $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

$\varepsilon = 0{,}001$ a partir de $\dfrac{1}{1000} = 0{,}001$ $n_0 = 1000$

todos caen dentro del margen entre ε i l

Def: Sucesiones divergentes $+\infty \mid -\infty \mid \nexists$ o ∞

$+\infty$

$\forall k>0 \; \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad x_n > k$ ejemplo $a_n = 2n \rightarrow +\infty$

$-\infty$ $\{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\}$

$\forall k<0 \; \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad x_n < k$

∞

$$a_n = (-1)^n 2n \rightarrow \infty \text{ o } \nexists$$

Propiedades de lim

1- si $\exists \lim a_n$, es unico

2- $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

$a_n < b_n \quad \forall n \geq n_0 \rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

Indeterminaciones

$$+\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

$\frac{0}{0}$ v $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{P(n)}{Q(n)}$:

grau $P(n) >$ grau $Q(n) \rightarrow \lim = \pm\infty$

grau $P(n) <$ grau $Q(n) \rightarrow \lim = 0$

grau $P(n) =$ grau $Q(n) \rightarrow \lim = \frac{x}{y}$ $\qquad \frac{x n^2}{y n^2}$

$+\infty - \infty$

$\lim 4n^3 - 2n^2 = +\infty$ cojer termino dominante

$\lim \sqrt{n-1} - \sqrt{2n+3}$

multiplicar y dividir por el conjugado

$$\sqrt{n-1} - \sqrt{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{2n+3}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{2n+3}} = \frac{-n+2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{2n+3}}$$

1^{∞}

$\lim e^{(a_n-1)\cdot b_n}$

$0 \cdot \infty$ se pasa a $\frac{0}{0}$ v $\frac{\infty}{\infty}$

ej $\lim \frac{1}{3n+1} \cdot n^2 \to \frac{n^2}{3n+1} = +\infty$

$0 \cdot \infty$

0^0 v ∞^0

$0^0 \to e^{\ln 0^0}$

$0 \cdot \infty$

1) $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

2) convertir a 1^{∞}

$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} a_n \cdot b_n = 0 \cdot \infty \to \left.\begin{array}{l} a_n + 1 \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \lim (a_n+1)^{b_n} =$

$= \lim e^{a_n \cdot b_n}$

Cojemos ln: $\ln(\lim (a_n+1)^{b_n}) = \lim(\ln (a_n+1)^{b_n}) = \lim$

$\to \ln (a_n)^{b_n} \underset{1^{\infty}}{=} \lim e^{(a_n-1)\cdot b_n}$

2-

a) $\lim \frac{6n^3+4n+1}{2n} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{6n^3}{2n} = +\infty$

grau $P(n) >$ grau $Q(n) \to \lim = \pm\infty$

grau $P(n) <$ grau $Q(n) \to \lim = 0$

grau $P(n) =$ grau $Q(n) \to \lim = \frac{x}{y}$

b) $\lim \frac{n^2-6n-2}{3n^2-9n} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{1}{3}$

c) $\lim \left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n-1}} = (\sqrt{1/2})^{2/3} \to (1/2)^{1/3} = \sqrt[3]{1/2}$

5.

a) $\lim \dfrac{\cos n}{n^2} = 0$

b) $\lim \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \to \pm\dfrac{\infty}{\infty} \to$ Dividir por el termino dominante (numero que llega antes al ∞)

$\hookrightarrow \dfrac{\frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n} - \frac{3^n}{3^n}} \to \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} \to \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

c) $\lim \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n-1}{5}} \to \lim e^{\left(\frac{n+2}{n-3} - 1\right)\cdot \frac{2n-1}{5}}$

1^{∞}

$\downarrow$

$\dfrac{n+2}{n-3} - \dfrac{n+3}{n-3} = \dfrac{-1}{n-3} \cdot \dfrac{2n-1}{5}$

$e^{\frac{2n-1}{n-3}} = e^2$

d) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$

$\downarrow$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(n+1)}\left[\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right.$

$\downarrow$

$= \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\downarrow$

$\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$

Criterio del cociente

$a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ (cierto numero)

El que mas se usa

$\hookrightarrow \begin{cases} \ell < 1 & \lim a_n = 0 \\ \ell > 1 & \lim a_n = +\infty \\ \ell = 1 & ? \end{cases}$

Criterio de la raiz

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \quad \ell \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \ell < 1 & \lim a_n = 0 \\ \ell > 1 & \lim a_n = +\infty \\ \ell = 1 & ? \end{cases}$$

Criterio raiz - cociente

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \lim \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \ell \quad \ell \in \mathbb{R} \rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

Criterio sandwitch

$$b_n \leq a_n \leq c_n \rightarrow \lim a_n = \ell$$

$b_n \xrightarrow{\lim} \ell$, $c_n \xrightarrow{\lim} \ell$

Si algun criterio da 1 hay que usar otro

1c) $\lim \sqrt[n]{n} =$ Criterio cocionte - raiz $= n \rightarrow a_n = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \frac{n+1}{n} = 1 \in \mathbb{R}$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

3- $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ '' ''

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \text{sumatorio} \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \longrightarrow \lim b_n = 1$$

5-

a) $\lim \dfrac{a^n}{n!}$ $\qquad |a|>1 \rightarrow \lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$

Criterio del cociente

$a_n \rightarrow \dfrac{\frac{a^{n+1}}{n+1!}}{\frac{a^n}{n!}} \rightarrow \lim \dfrac{a}{n+1} = 0$

b) $\lim \dfrac{n^\alpha}{|a|^n}$ $\qquad |a|>1 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \rightarrow \lim \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$

C. Cociente $\rightarrow \dfrac{\frac{(n+1)^\alpha}{|a|^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{|a|^n}} \rightarrow \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \dfrac{1}{|a|}$

$1^\alpha = 1 \rightarrow \dfrac{1}{|a|} = 0$

Sucesiones acotadas

Def $\{a_n\}_n$ esta acotada superiormente si $\exists K_1 / a_n \leq K_1 \ \forall n$

" " " inferiormente si $\exists K_2 / a_n \geq K_2 \ \forall n$

" " Acotada si $\exists K / |a_n| \leq K \quad \forall n$

Ejemplo : $\{\frac{1}{n}\}_n$ Acotada $\begin{cases} \text{Superior para } 1 & \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \\ \text{inferior para } 0 & 1/n \geq 0 \quad \forall n \end{cases}$

$\{(-1)^n \cdot n\}_n = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6 \ldots\}$ No acotada ni superior ni inferior

Sucesiones monotonas

Def: $\{a_n\}_n$ es creciente si $a_n \geq a_{n-1}$

" " decreciente si $a_n \leq a_{n-1}$

Si cumple alguna de estas 2 condiciones diremos que es monotona

$\{a_n\}_n$ es estrictamente creciente si $a_n > a_{n-1}$
" " " decreciente si $a_n < a_{n-1}$

Ejemplo: $\{1/n\}_n = \{1, 1/2, 1/3, 1/4 \ldots\}$ es estrictamente decreciente

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n = \overset{\circ}{2}+1 \\ \frac{n}{2} & \text{si } n = \overset{\circ}{2} \end{cases} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3 \ldots\} \text{ creciente}$$

Teorema convergencia monotona ⚠ importante ⚠

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\}_n \text{ monotona creciente} \\ \text{acotada superiormente} \end{array}\right] \rightarrow \{a_n\}_n \text{ es } \underset{\exists \lim \text{ (Finito)}}{\overset{}{\text{convergente}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\}_n \text{ monotona decreciente} \\ \text{acotada inferiormente} \end{array}\right] \rightarrow \{a_n\}_n \text{ es convergente}$$

Ejemplo: $\{1/n\}_n$ $\left.\begin{array}{l} \text{decreciente} \\ \text{acotada inf} \end{array}\right] \rightarrow \exists \lim 1/n = 0$

Ejercicios:

$a_0 = \sqrt{2}$
$a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} \quad n \geq 1$

Demo convergente
$\downarrow$
Probar monotona $\rightarrow$ acotada $\rightarrow \ldots$

Monotonia: $a_0 = \sqrt{2}$
$a_1 = \sqrt{\sqrt{2}+2} \qquad a_1 \geq a_0 \qquad$ ¿ creciente ?

i) $a_n \geq a_{n-1}$
ii)
$$a_n \geq a_{n-1} \xrightarrow{+2} a_n + 2 \geq a_{n-1} + 2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{a_n+2} \geq \sqrt{a_{n-1}+2}$$
$$a_{n+1} \geq a_n$$

Acotada: $a_n \leq 4 \qquad a_0 = \sqrt{2} \leq 4$ ✓
$a_1 = \sqrt{\sqrt{2}+2} \leq 4$ ✓

i) ✓

ii) $a_n \leq 4 \Rightarrow a_{n+1} \leq 4$

$$a_n \leq 4 \xrightarrow{+2} a_n + 2 \leq 6 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{a_n+2} \leq \sqrt{6} \Rightarrow a_{n+1} \leq \sqrt{6} \leq 4$$

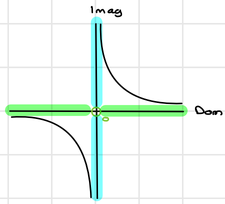
Convergencia :

$$a_n \left[\begin{array}{l} \text{creciente} \\ \text{acotada sup.} \end{array}\right. \xrightarrow{TCM} \{a_n\} \text{ convergente}$$

Tema 3 : Funciones continuas

Def : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una Función si: a cada $x \in \mathbb{R}$
$x \to y = F(x)$ le corresponde un valor $y = F(x)$ (1 como max)

Def : $\text{Dom } F = \{ x \in \mathbb{R} / \exists F(x) = y \}$ que valores puede tener x para que tenga imagen



- Recorrido/Imagen F: $\text{Im } F = \{ y \in \mathbb{R} / \exists x : F(x) = y \}$

- Grafica de F : $\text{Gr } f = \{ (x,y) / y = F(x) \}$

Ejemplo : $1/x$ $\quad \text{Dom } F = \mathbb{R} - \{0\}$
$\text{Im } F = \mathbb{R} - \{0\}$

Def: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en "a" si
$x \to y = F(x)$

- $\exists F(a)$ $[a \in \text{Dom } F]$

- $\exists \lim\limits_{x \to a} F(x) = L$ $\left[\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} F(x) \right]$

- $F(a) = \lim\limits_{x \to a} F(x)$

Def: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en A
si es continua en "a", $\forall a \in A$

Tipos de discontinuidad

1) Disc. evitable $[F(a) \neq \lim F(x)]$

ej: $F(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ Disc. $x = 2$

Disc. evitable

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \to \frac{0}{0} \to \frac{(x-\cancel{2})(x+2)}{x-\cancel{2}} = x+2 = 4 = \lim F(x)$$

evitamos $g(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim F(x) & \text{si } x = a \end{cases}$

2) Disc. de salto (1ª especie)

2.a) Salto Finito $\exists \lim\limits_{x \to a^-} F(x) \neq \exists \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$

ej: $F(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 1 \\ 3x+2 & x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 1^+} = 5$ Disc. en $x = 1$ de salto Finito.

2.b) Salto infinito $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) \vee \lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \pm \infty$

ej: $F(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$ Disc en $x = 3$

$$\lim_{x \to 3} F(x) = \frac{10}{0} = \infty \to \lim_{x \to 3^-} F(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty$$

Disc. esintotica $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x) = \dfrac{16}{0^+} = +\infty$

3) Disc de 2ª especie : $\nexists \lim F(x)$ ($\mathbb{N}, \mathbb{R}$, ni ∞)

ej: $F(x) = \sin \frac{1}{x}$ $\rightarrow$ Disc en $x = 0$

Funciones elementales (polinomicas, potenciales, racionales, trigo, expo hiperbolicas, potenciales - exponenciales)

Proposiciones:

1) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ elemental, $a \in \text{Dom } F$ $\rightarrow$ F continua

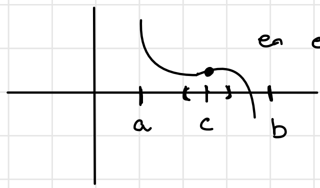
2) F, g continuas en $a \in \text{Dom } F \wedge \text{Dom } g$ $\rightarrow$
$\begin{cases} F \pm g & \text{cont.} \\ \lambda F \text{ (multiplicacion)} & \text{cont} \\ F^g & \text{cont} \\ \frac{F}{g} \text{ cont} & g(a) \neq 0 \end{cases}$

Teoremas de Funciones continuas

- **T. conservacion del signo**

$\left. \begin{array}{l} F \text{ continua en } [a, b] \\ c \in (a,b),\ F(c) \neq 0 \end{array} \right\}$ $\exists r > 0 \ / \ F(c) \cdot F(x) > 0 \quad \forall x \in (c+r, c-r)$

$F(c), F(x)$ mismo signo



en este intervalo mismo signo

- **T. Bolzano**

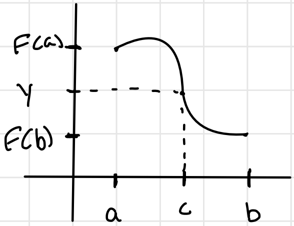
$\left. \begin{array}{l} F \text{ continua } [a,b] \\ F(a) \cdot F(b) < 0 \end{array} \right\}$ $\rightarrow$ $\exists c \in (a,b) \ / \ F(c) = 0$

si $F(a)^{+}$ y $F(b)^{-}$ en algun momento pasa por el 0

- T. del valor intermedio

F continua en $[a,b] \rightarrow \forall y < F(a), F(b) > \exists c \in (a,b) /$

$/ F(c) = y$



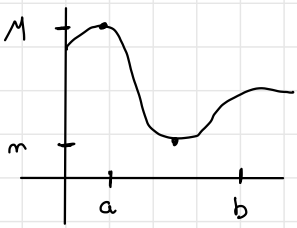
- T. Weierstrass

F continua en $[a,b] \rightarrow \exists M, m / \quad m \leq F(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b)$

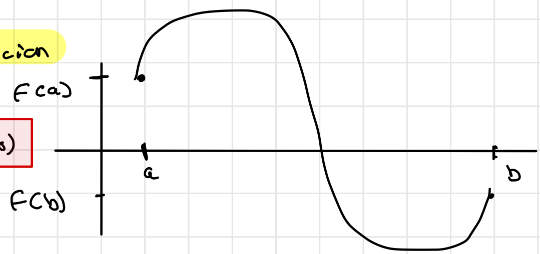
(m min, M max)

$m = F(c_1) \quad c_1, c_2 \in [a,b]$

$M = F(c_2)$



Calculo de raices de una Funcion



1- Metodo de bisección (sale mucho)

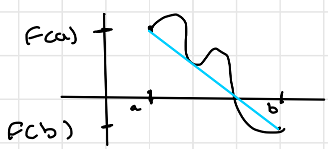
$$c_1 = \frac{a+b}{2}$$

si $F(c_1) \cdot F(a) < 0 \rightarrow c_2 = \dfrac{c_1 + a}{2}$

$$\text{Error} = |c - c_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

si $F(c_1) \cdot F(b) < 0 \rightarrow c_2 = \dfrac{c_1 + b}{2}$

2- Metodo secante (no costuma salir) intervalos pequeños



$y = mx + n \dashrightarrow x = c_1$

ir marcando rectas con los puntos

y encontrar el punto de corte $(a-b), (c_1, b)$..

$a = x_{-1}$
$b = x_0$ $\rightarrow$ recta secante, donde corta con el eje $x = x_1$

$F(a) \wedge F(b)$

recta que pasa por 2 puntos $(a, F(a))$ $(b, F(b))$

$$y = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)$$

$\downarrow$

$$y = F(x_n) + \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - y_n)$$

$x_n = a$

$x_{n-1} = b$

$\downarrow$ corte eje x / $y = 0$

Criterio de parada

$$0 = F(x_n) + \underbrace{\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}_{m}(x - x_n)$$

$$\begin{cases} |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ \wedge \\ |F(x_n)| < \varepsilon \end{cases}$$

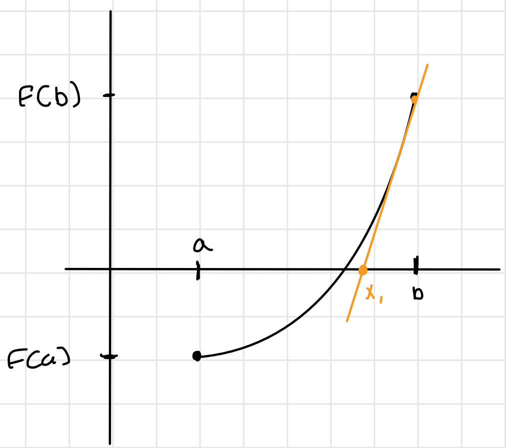
$$0 = F(x_n) + m x - m x_n$$

$$-F(x_n) + m x_n = m x$$

$\downarrow$ $\vdots$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \cdot F(x_n)$$

Metodo Newton-Raphson (tangente)



Recta tangente por $(x_n, F(x_n))$

$$y = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n)$$

$\downarrow$

$$0 = F(x_n) + F'(x_n) \cdot (x - x_n)$$

$$\frac{-F(x_n) + F'(x_n) \cdot x_n}{F'(x_n)} = x$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

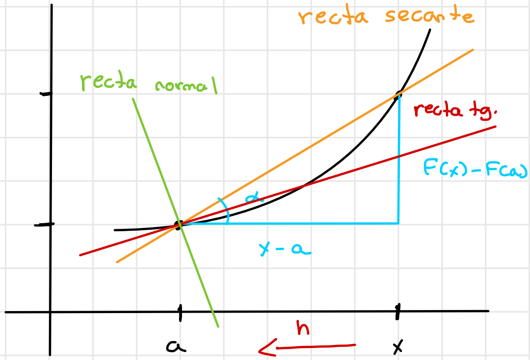
Criterio de parada

$$\begin{cases} |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ |F(x_{n+1})| < \varepsilon \end{cases}$$

Tema 4 derivadas (una variable)

Def Derivada de $F(x)$ en el punto a: ($F(x)$ continua)

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$



$F'(a)$: pendiente recta tangente a $(a, F(a))$

Ecuacion recta tg:

$$y - F(a) = F'(a)(x-a)$$

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} =$$

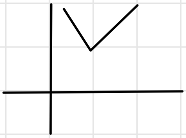
Ecuacion recta normal:

$$y - F(a) = -\frac{1}{F'(a)}(x-a)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

$x = a + h$

F derivable → F continua   no al reves   ej:



continua y no derivable

Proposicion:

$$\left.\begin{array}{l} F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ elemental} \\ a \in \text{Dom } \mathbb{R} \end{array}\right\} \to F \text{ derivable en } a$$

F, g elementales , $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Dom} F \wedge \operatorname{Dom} g$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda F \\ F \pm g \\ F \cdot g \\ \frac{F}{g} \quad g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Derivables en } a$$

Calculo de derivadas

- $y = \lambda F \xrightarrow{F'} y' = \lambda F'$
- $y = F \pm g \xrightarrow{F'} y' = F' \pm g'$
- $y = F \cdot g \xrightarrow{F'} y' = F'g + Fg'$
- $y = \frac{F}{g} \rightarrow y' = \frac{F'g - Fg'}{g^2}$
- $y = F^g \xrightarrow{\ln} \ln(y) = g \cdot \ln F \xrightarrow{F'} \frac{1}{y} \cdot y' = g' \ln F + g \cdot \frac{1}{F} \cdot F'$

$\Rightarrow y' = y\,(g' \ln F + g \cdot \frac{1}{F} \cdot F')$

Regla de la cadena

$a \in \operatorname{Dom} F$
$F(a) \in \operatorname{Dom} g$
F, g derivables en $a \wedge F(a)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$a \rightarrow F(a) \rightarrow g(F(a)) = g \circ F$

$(g \circ F)' = g'(F(a)) \cdot F'(a)$

ej: $F = \sin x$, $g = e^{x^2}$ $\Rightarrow g \circ F = e^{\sin^2 x} =$

$= y' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x$

Def:

F es creciente en un intervalo si
$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y) \quad \forall x, y \in [a, b]$

F es estrictamente creciente en $[a, b]$ si
$x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$

" decreciente " "

$x < y \to F(x) \geq F(y) \quad \forall x, y \in [a, b]$

" estrictamente decreciente " "

$x < y \to F(x) > F(y) \quad \forall x, y \in [a, b]$

Def: x_0 es un mínimo relativo si:

$\exists I_{x_0} / F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$ $\quad$ I_{x_0} (intervalo centrado en x_0)

$I_{x_0} = (x_0 - a, x_0 + a)$

x_1 es un máximo relativo si

$\exists I_{x_1} / F(x_1) \geq F(x) \quad \forall x \in I_{x_1}$

Teorema del extremo interior

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ continua en } [a,b] \\ F \text{ derivable en } (a,b) \\ c \text{ extremo relativo} \end{array}\right] \to F'(c) = 0$$

(la recta tangente tiene pendiente 0)

Demo:

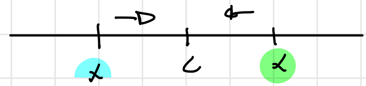
$$\left.\begin{array}{l} F \text{ derivable } (a,b) \\ c \text{ extremo relativo (min)} \end{array}\right] \to F \text{ derivable en } c \quad \exists F'(c)$$

$$F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

$\Downarrow$

$$\exists \lim_{x \to c^-} = \exists \lim_{x \to c^+}$$

$$\exists \lim_{x \to c^-} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \le 0$$

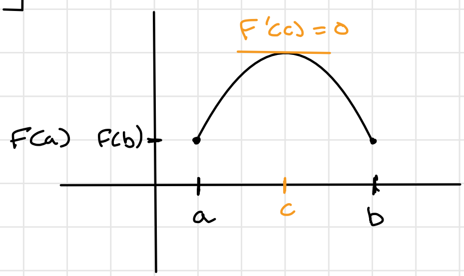


$$\equiv 0$$

$$\exists \lim_{x \to c^+} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \ge 0$$

Teorema de Rolle

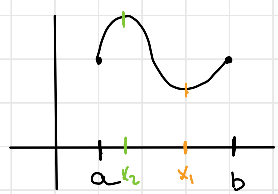
$$\left.\begin{array}{l} F \text{ continua en } [a,b] \\ F \text{ derivable en } (a,b) \\ F(a) = F(b) \end{array}\right] \Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, F'(c) = 0$$



Demo:

T. Weierstrass

F continua en $[a,b] \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]$ $\quad \forall x \in [a,b]$ $F(x_1) \le F(x) \le F(x_2)$



Si $x_1 \in (a,b) \Rightarrow x_1$ min relativo $\Rightarrow F'(x_1) = 0$

Si $x_2 \in (a,b) \Rightarrow x_2$ max relativo $\Rightarrow F'(x_2) = 0$

Si $x_1, x_2 \notin (a,b) \Rightarrow \{x_1, x_2\} \equiv \{a, b\}$

$F(x_1) \le F(x) \le F(x_2)$

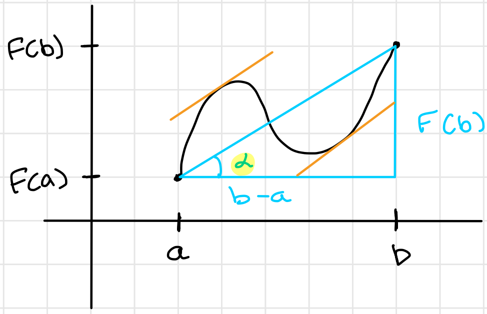
$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow F$ constante $\Rightarrow F' = 0$

Teorema de lagrance (valor intermedio)

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ continua en } [a,b] \\ F \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right| \rightarrow \exists c \in (a,b) / \boxed{F'(c)} = \boxed{\frac{F(b)-F(a)}{b-a}}$$

α

$$F(b)-F(a) = F'(c)(b-a)$$



pendiente de la recta

Demo

$$y = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

Definimos una funcion auxiliar

$$g(x) = F(x) - y: \quad \begin{array}{l}\text{Continua } [a,b] \\ \text{derivable } (a,b)\end{array} \rightarrow g'(x) = F'(x) - y'$$

$$= F'(x) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$g(b) = F(b) - y(b) = F(b) - F(b) = 0$$

$$g(a) = F(a) - y(a) = F(a) - F(a) = 0$$

$$0 = g'(c) = F'(c) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Colonario

Si $F'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ es estrictamente creciente

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) \qquad b > a \qquad \text{estrictamente creciente}$$

$F(b) > F(a) \leftarrow \quad + \quad +$

Si $F'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ $\qquad F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$

$F(a) > F(b) \leftarrow \quad + \quad -$

estrictamente decreciente

Regla de l'Hôpital

Resuelve: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $0 \cdot \infty$ [$\infty - \infty$] este no

F, g Funciones derivables en un entorno de a [$a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$]

$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

$\vee$

$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

$\to$ Si $\exists \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$: $\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F'(x)}{g'(x)}$

$\downarrow$

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

ejemplo!

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$\downarrow$ Hopital

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{1}{4}$$

5. Polinomio de Taylor

$F(x)$, $x_0 \in \text{Dom} F$

Queremos aproximar f por un polinomio en un entorno de x_0

$F(x) = e^x$ aprox $x_0 = 0$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = F(0) + F'(0)(x-0)$ recta tg

$\cup$ convexo

$P_2(x) =$ misma curvatura

$P_3(x) =$ misma 3ra derivada

$\vdots$

Polinomio de Taylor de grado n de la Funcion $F(x)$ en un entorno de x_0:

$$P_{n,F,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \ldots + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$k=0$

$F(x) = e^x$, $x_0 = 0$ $\quad P_{5,F,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$

$F(x) = e^x$ $\quad F(0) = 1$ $\quad P_{5,F,0}(x) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{F'''(0)}{3!}(x-0)^3 \ldots + F'''$

$F'(x) = e^x$ $\quad F'(0) = 1$

$F(x) = \ln(x+1), \quad x_0 = 0$

$P_{4,F,0} \equiv P_4(x)$

$$F(x) = \ln(x+1) \qquad F(0) = 0$$
$$F'(x) = (x+1)^{-1} \qquad F'(0) = 1$$
$$F''(x) = -(x+1)^{-2} \qquad F''(0) = -1$$
$$F'''(x) = 2(x+1)^{-3} \qquad F'''(0) = 2$$
$$F''''(x) = -6(x+1)^{-4} \qquad F''''(0) = -6$$

$$P_4 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{6x^2}{24}$$

Proposición $\quad P^{k}_{n,F,x_0}(x) = F^{k}(x_0)$

Def: Termino complementario, resto o residuo del polinomio de Taylor de orden n de la Función F en el punto x_0:

$$R_{n,F,x_0}(x) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$c \in \langle x, x_0 \rangle$ intervalo más pequeño que contiene x y x_0

Teorema Taylor = Resto lagrange

$$F(x) - P_{n,F,x_0}(x) = R_{n,F,x_0}(x) \to F(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ej: $\quad P_{5,F,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \qquad F(x) = e^x$

$$R_{5,F,0}(x) = \frac{F''''''(c)}{6!}(x-0)^6 = R_{n,F,x_0} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad c \in \langle x, x_0 \rangle$$

Aproximacion y acotación del error

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F, F', F'', \dots, F^n$ continuas en $[a,b]$

$\exists\, F^{(n+1)}$ en $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ $\quad \to$

$$\exists\, M_{n+1} = \max_{t \in \langle x, x_0 \rangle} F^{(n+1)}(t)$$

Acotamos el error $F(x) - P_n(x)$

$$|F(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| =$$

$$= \left| \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Aplicaciones polinomio de taylor

$F(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$F(x) = F(a) + \frac{F^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$

$F(x) - F(a) = \frac{F^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$

Suponemos $x \simeq a$ $\quad P_n(x) > R_n(x)$

1- Monotonia y extremos:

F $(n+1)$ veces derivada

$F'(a) = F''(a) = \dots = F^{n-1}(a) = 0$

$F^n(a) \neq 0$

ejemplo: $F(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$F' = 0 \rightarrow$ puntos criticos

$F'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$F''(x) = 12x - 18$

$(1) = -6 \rightarrow$ max

$(2) = 6 \rightarrow$ min

n par:

$F^n(a) > 0 \rightarrow F(x) > F(a) \rightarrow a$ min. loc.

$F^n(a) < 0 \rightarrow F(a) > F(x) \rightarrow a$ max loc.

n impar:

$F^n(a) > 0 \rightarrow$
- $x - a > 0 \rightarrow F(x) > F(a) \rightarrow$ creciente
- $x - a < 0 \rightarrow F(x) < F(a) \rightarrow$ creciente

$F^n(a) < 0 \rightarrow$
- $x - a > 0 \rightarrow F(x) < F(a) \rightarrow$ decreciente
- $x - a < 0 \rightarrow F(x) > F(a) \rightarrow$ decrecinte

$F(x) = x^8 - 25$

$F'(x) = 8x^7 = 0 \rightarrow x = 0$ (punto critico)

$F''(0) = 56x^6 = 0$

$F'''(0) = 56 \cdot 6 x^5 = 0$

$F^{IV}(0) = 56 \cdot 6 \cdot 5 \cdot x^4 = 0$

$F^{V}(0) = 56 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 0$

$F^{VI}(0) = \sim x^2 = 0$

$F^{VII}(0) = \sim x = 0$

$F^{VIII}(0) = 8! \rightarrow x = 0$ minimo

2- Curvatura y puntos de inflexión

Convexa $= \cup$ $\qquad$ Concava $= \cap$

F $(n+1)$ veces derivables

$F''(a) = F'''(a) = \dots = F^{n-1}(a) = 0$

$F^n(a) \neq 0$

$x \simeq a$

$F(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F^n(a)}{n!} x^n + R_n$

$$F(x) - \underbrace{[F(a) + F'(a)(x-a)]}_{\text{Recta tangente}} = \frac{F^n(a)}{n!} x^n$$

n par:
- $F^n(a) > 0 \rightarrow F(x) >$ recta tg. $\rightarrow$ convexa
- $F^n(a) < 0 \rightarrow F(x) <$ recta tg. $\rightarrow$ concava

n impar
- $F^n(a) > 0$
  - $x > a \rightarrow$ convexa $\cup$
  - $x < a \rightarrow$ concava $\cap$

  $\rightarrow$ a punto de inflexión
- $F^n(a) < 0$
  - $x > a \rightarrow$ concava $\cap$
  - $x < a \rightarrow$ convexa $\cup$

  $\rightarrow$ a punto de inflexión

$f(x) = \frac{1}{x^2-2}$

$f' = \frac{-2x}{(x^2-2)^2}$

$f'' = \frac{2(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$

$P_0(3)$

$P_1(3)$

$P_2(3)$

$P_3(3)$

Tema 6: Calculo de integrales

6.1: Teorema Fundamental del calculo
Regla de Barrow, Integraler definidas, calculo de areas

def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a < b \in \mathbb{R}$ $\quad [a,b] \in \text{Dom } F \cap \text{Dom } F'$

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \text{Dom } f$

" " " en $[a,b]$ " "

ej: $f(x) = 3x^2 \to F(x) = x^3$ $\quad$ } diferentes porque una constante

$f(x) = 3x^2 \to F(x) = x^3 + 5$ $\quad$ desaparece al derivar

Def: Integral definida de f

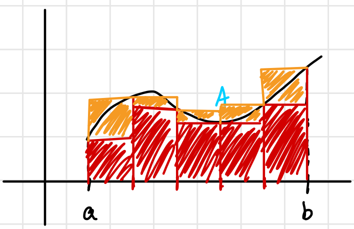
$$f(x)\,dx = \{F(x) / F'(x) = f(x)\} = F(x) + c$$

Def: Integral definida

$f \geq 0$ en $[a,b]$

$$L_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U_n$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n \to \int_a^b f(x)\,dx$$



A : Area por debajo de f

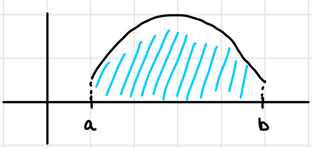
Suma inferior

$L_n = \sum \min f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \text{Area}$

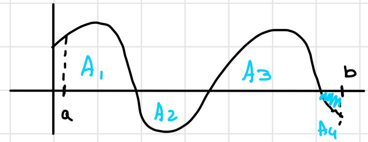
Suma superior

$U_n = \sum \max f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq \text{Area}$

Si $f \geq 0$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = $ Area por debajo de f

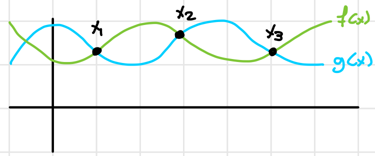


Si $f < 0$ $\displaystyle\int_a^b f(x) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$



Area entre dos Funciones (f, g)

$$f = g \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right. \qquad A = \left| \int_{x_1}^{x_2} f - g \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f - g \right|$$



Teorema Fundamental de calculo : TFC

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$
sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

$\to$ $F(x)$ continua en $[a, b]$
$\wedge$ derivable en (a, b)
$F'(x) = f(x)$

Corolario 1: Regla de Barrow

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$
F derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$

$\to$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

ej:
$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \to \Big|_1^3 \quad \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Corolario 2:

$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $[a, b]$ $\to$ $\displaystyle\left(\int_x^a f(x)dx\right)' = -f(x)$

Corolario 3:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b) $\Big| \Rightarrow \left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Corolario 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$
$g_1, g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b) $\Big| \Rightarrow \left(\int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g_1(x)) \cdot g_1'(x) - f(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$

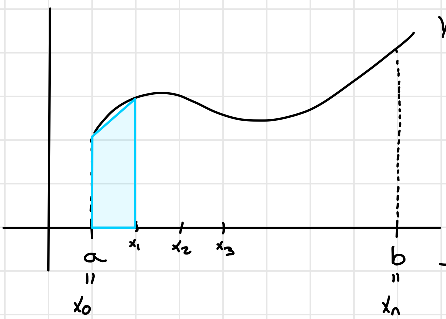
6.2 Integracion numerica (Aprox Integrales)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$

$f \geq 0$

Queremos calcular $\int_a^b f(x)$ con la precision deseada

Metodo de los trapecios



$\rightarrow$ n subpuntos (n+1 puntos)

Particion de $[a,b]$: $\{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$

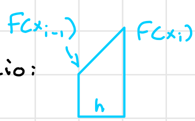
Paso: $h = \frac{b-a}{n}$; $x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_1 + h \; (2h + x_0)$

$\vdots$

$x_1 = x_0 + ih$

Area trapecio:



$A = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i) + f(x_{i-1})\right)$

$$\int_a^b f(x) \simeq \sum A_{\text{trapecios}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i-1})\right] \Rightarrow T_n = h\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) \ldots\right]$$

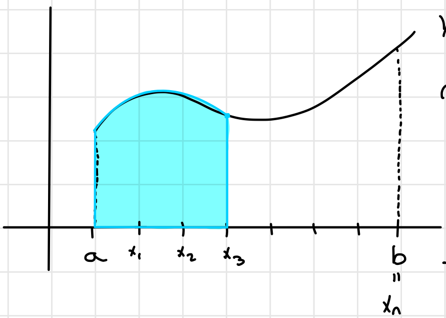
$$\text{Error} = \int_a^b f(x) - T_n = \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \cdot f''(c)$$

Si f derivable 2 veces en (a,b)
$c \in [a,b]$

cota del error: $M_2 > \max_{x \in [a,b]} f''(x) \rightarrow$

$$\boxed{\text{Error} \leq \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \cdot M_2}$$

Método de Simpson



n par

$\rightarrow$ n subintervalos
n+1 puntos

Particion de $[a,b] = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$
$x_i = x_0 + ih$

$h = \frac{b-a}{n}$ (Paso)

Area parabola:

$$A = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4 f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\int_a^b f(x) \simeq S_n = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4 \underset{\substack{\uparrow \\ x_1, x_3, x_5 \ldots}}{f(\text{impar})} + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ x_2, x_4, x_6 \ldots}}{f(\text{par})} + f(x_n)\Big]$$

Error:
f 4 veces derivable en $[a,b]$
$c \in [a,b]$

$$\rightarrow \int_a^b f(x) - S_n = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot f^{IV}(c)$$

Sea $M_4 = \max f^{IV}(x)$ $x \in [a,b]$ cota error $\leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot M_4$

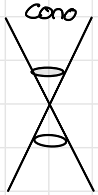
Hasta aqui el 1r parcial

Tema 7: Funciones de varias variables

Conicas: Ecuacion de 2do grado en $\mathbb{R}^2$

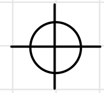
ej: $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + 2y = 0$

cono



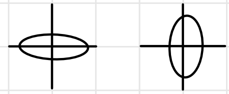
Circunferencia de centro en (a,b) y radio r

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$



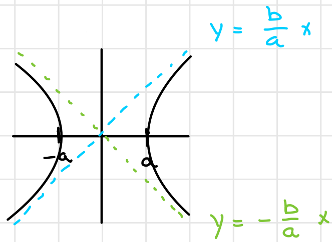
elipse ejes a, b, centro (x_0, y_0)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



hipervola centro (x_0, y_0) ejes a, b

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



hipervole equilatera $xy = k$

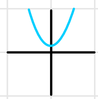
$k > 0$ $k < 0$

Parabolas

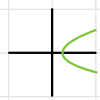
$y = ax^2 + bx + c$ 1

$x = ay^2 + by + c$ 2

1



2



Ejemplos:

$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow$ centro $(0,0)$ i $r = 2$

$2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0 \rightarrow$ si el numero de x^2 i y^2 es el mismo $\rightarrow$ circunferencia

$2x^2 + 3x \quad 2y^2 + 5y = 5$

$x^2 + 3/2x \quad y^2 + 5/2y = 5/2 \rightarrow (x + 3/4)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} + \frac{25}{16} = \frac{74}{16}$

Circunferencia centro $(-3/4, -5/4)$ y $r = \frac{\sqrt{74}}{16}$

$x^2 + 4y^2 = 100$

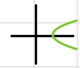
$\downarrow$

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

si x^2 y y^2 tienen el mismo signo elipse, si no hipervola

$y^2 - 4y - 6x + 5 = 0 \to$ parabola

$x = \frac{y^2 - 4y + 5}{6} \to$

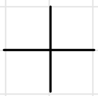


elipse centrada $(0,0)$ ejes $(10,5)$

7.1 Topologia en el espacio n-dimensional

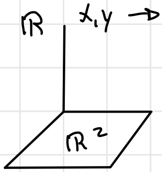
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$



$f \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x, y \to z = f(x,y)$



$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Def: Norma de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2$

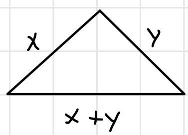
$$\|x\| = +\sqrt{x_1^2, \dots, x_n^2}$$

Propiedades:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Desigualdad triangular



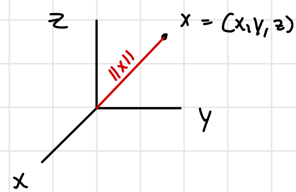
Def:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

distancia x, y: $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

$\|x\| = d(x, 0)$

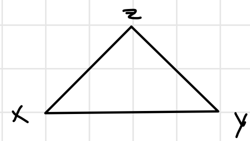


Propiedades

1) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \|x-y\| = \|y-x\|$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

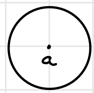


DeF

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

Bola abierta de centro a y radio $r > 0$

$B_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^2 / d(a,x) < r \}$



$\mathbb{R}^2$ circulo

$\mathbb{R}^3$ esfera

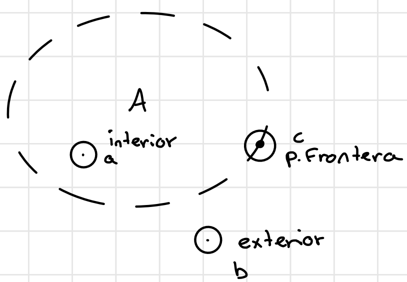
Cualquier punto dentro de la bola es $< r$

DeF: Complementario de A, $A^c = \{ x \in \mathbb{R} / x \notin A \}$ son los puntos que no pertenecen a A

DeF: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$

- a es interior a A si $\exists r / B_r(a) \subset A$
- a es exterior a A si $\exists r / B_r(a) \subset A^c$ $[B_r(a) \cap A = \emptyset]$
- a es punto Frontera si $\forall r / B_r(a) \cap A = \emptyset$, $B_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$ $\Big\} \to$ $B_r(a)$ contiene puntos de A y A^c

Ej:



DeF: $A \subset \mathbb{R}^n$

A es abierto $\iff$ a interior $\forall a \in A$

A es cerrado $\iff$ A contiene todos los puntos Frontera

A es acotado $\iff$ $\exists r > 0 / B_r(a) \supset A$

A es compacto $\iff$ A $\underbrace{\text{cerrado y acotado}}$

Def: Frontera de A $Fr(A) = \partial A$ conjunto de todos los puntos frontera

- Interior de A: $\mathring{A}$, conjunto de todos los puntos interiores
- Adherencia de A: $Adh(A) = \bar{A}$: Menor conjunto cerrado que contiene a A

Obs: A abierto si: $A = \mathring{A}$

A cerrado si $Fr(A) \subset A \longleftrightarrow \bar{A} = A$ $[\bar{A} = A \cup Fr(A)]$

Ej: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4,\ x+y < 1\} \rightarrow y = 1-x$

$\downarrow$

$x^2+y^2 = 4 \rightarrow$ $c = (0,0)$ $r = 2$

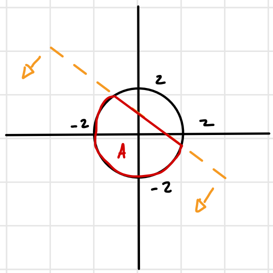
$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 4,\ x+y < 1\}$

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 4,\ x+y \leq 1\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 1,\ x^2+y^2 < 4\}$

$\bar{A} = A \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4,\ x+y \leq 1\}$

$Ext(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 4 \vee x+y > 1\}$



Sol: $0^2+0^2 \leq 4$ ✓

$0+0 < 1$ ✓

$A \neq \mathring{A} \rightarrow$ A no es abierto

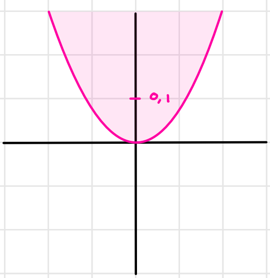
$A \neq \bar{A} \rightarrow$ A no es cerrado

A es acotado

A no es compacto (es acotado pero no cerrado)

Ej: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2\}$ $\quad 1 \geq 0$ ✓

$y = x^2$ $\quad \cup$



$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2\}$

$Fr(A) \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$

$\bar{A} = A \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2\} = A$

- A no es abierto
- A es cerrado ✓
- A no acotado ✗
- A no compacto ✓ ∧ ✗ → ✗

7.2 Funciones de varias variables

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

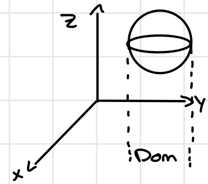
$x \to y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

imagen de $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$

- A: Dom f
- $f(A)$: Im f
- $(x, f(x))$ grafica de f

ej: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to z = f(x,y)$ superficie

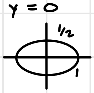


Def: Curva de nivel: curva donde f es constante

(connecta los puntos donde f tiene el mismo valor constante λ)

ej: $z = f(x,y) = x^2 + 4y^2$: calcular curvas de nivel $z = -2, -1, 0, 1, 2$ (5 curvas de nv.)

- $x^2 + 4y^2 = 0$ $(z=0) \to x = 0 \wedge y = 0$ $(0,0)$
- $x^2 + 4y^2 = 1$ $(z=1) \to$ elipse



- $x^2 + 4y^2 = 2$

  $\hookrightarrow$ $\frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1 \to \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$ elipse $c = 0,0$ $a = \sqrt{2}$ $b = \sqrt{1/2}$ $< z = 1$

- $x^2 + 4y^2 = -1$ $\nexists$
- $x^2 + 4y^2 = -2$ $\nexists$

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ $f: A \to \mathbb{R}^n$ $(a \in \text{Dom}?)$ Mismas propiedades $n = 1$

$a \in A$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \to \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x \in B_r(a) - \{a\} \ \| f(x) - \ell \| < \varepsilon$$

Def: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ f continua en $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$a \in A$ $a \to f(a)$

$C(a) = \{$ Funcion continuas en "a" $\}$

Propiedades: $f, g \; A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f, g continuas en $a \in A$ $[f, g \in C(a)]$

- $f \pm g \in C(a)$
- $\lambda f \in C(a)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $f/g \in C(a)$ $\quad$ si $g(a) \neq 0$

- $f \in C(a)$
  $f(a) = b$
  $h \in C(b)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$$a \to f(a) = b \to c = h(b)$$

$$(h \circ f)(a)$$

- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; $h \in C(b)$ $\Big|$ $\to \lim\limits_{x \to a} h \circ f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x \to a} f(x)) = h(b)$

- $f \in C(a) \to \exists r > 0 \, / \, B_r(a) \cap A$ acotada

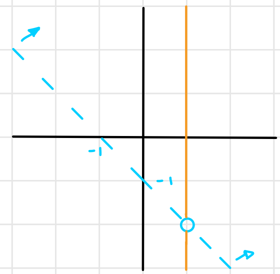
ej: Calcular Dom f (Dibujar y "escribir")

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

$x + y + 1 > 0$ $\quad$ $y = -x - 1$

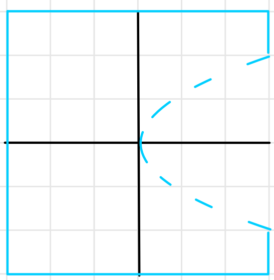
$x - 1 \neq 0$

Dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 1 \wedge y > -x-1\}$



ej: $z = x \ln(y^2 - x)$

$y^2 - x > 0$



Tema 8 Derivadas parciales y direccionales de funciones en varias variables

Derivada direccional

DeF: $f \; A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in A$ abierto

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ unitario $\quad \|\vec{v}\| = 1 \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

Derivada direccional de f en el punto "a" y dirección $\vec{v}$: $D_{\vec{v}} f(a) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(a + \lambda v) - f(a)}{\lambda}$

Derivada parcial (derivada en $i, j, k \dots$)

$v = e_i \to$ base canonica $(e_1, \dots, e_n)$

$D_{e_i} f(a)$ $\qquad \mathbb{R}^2 = e_1 (1,0)\ \vec{i}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e_2 (0,1)\ \vec{j}$

Notacion: $D_{e_i} f(a) = D_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{x_i} f(a) = f_{x_i}$

1- $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$

$f_x = \sin y\, (\sin x)^{\sin y - 1}$

$f_y = \sin x^{\sin y} \cdot \ln(\sin x) \cdot \cos y$

2- $f(x,y) = x^2 + y^2$ calcular $D_v f(p)$ $v = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ $P = (2,3)$

a) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(p+\lambda v) \cdot f(p)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f((2,3) + \lambda(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})) - f(2,3)}{\lambda} =$

$= \dfrac{f(2 + \frac{3\lambda}{5}, 3 + \frac{4\lambda}{5}) - f(2,3)}{\lambda} \to \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{(2 + \frac{3\lambda}{5})^2 + (2 + \frac{4\lambda}{5})^2 - (2^2 + 3^2)}{\lambda} \to$

$\to \cancel{4} + \frac{12\lambda}{5} + \frac{9\lambda^2}{25} + \cancel{9} + \frac{24\lambda}{5} + \frac{16\lambda^2}{25} - \cancel{13} = \dfrac{\frac{36\lambda}{5} + \lambda^2}{\lambda} \to \dfrac{\cancel{\lambda}(\frac{36}{5} + \lambda)}{\cancel{\lambda}} = \dfrac{36}{5}$

Ej: $f(x,y) = \dfrac{-x^2}{2} - y^2 + \dfrac{25}{8}$ en $(1/2, 1, 2)$ $\quad$ comprovar $f(1/2, 1) = 2$?

$= -\dfrac{1/2^2}{2} - 1^2 + \dfrac{25}{8}$

$= -\dfrac{1}{8} - 1 + \dfrac{25}{8} = 2$

Pendiente en dir "x" $\quad f_x(1/2, 1)$

$f_x = -x = -\frac{1}{2}$

$f_y = -2y = -2$

Vector gradiente

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in A$ (abierto)

f tiene todas las derivadas parciales en "a"

$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = (f_x(a), f_y(a))$

ej: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z)$ $x^2 y\cos(xz) + xe^{yz} - 7z^3$ $\qquad \nabla f(1,2,0) = (5,1,2)$

$f_x = y(2x\cos(xz) + x^2 - \sin(xz)\cdot z) + e^{yz} : 5$

$f_y = x^2\cos(xz) + x\,e^{yz}\cdot z : 1$

$f_z = -x^2 y \sin(xz)\cdot x + x\,e^{yz}\cdot y - 21z^2 : 2$

Generalizando: (campos vectoriales)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad$ ej: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \to (2x+y,\ x^2 y,\ x-y)$

$(1,2) \to (4,2,-1)$

Matriz Jacobiana

$$DJ(x,y) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & \cdots & f_{1n} \\ f_{2x} & f_{2y} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{mx} & f_{my} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

Plano tangente y recta normal a una superficie

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in A$ (abierto)

f es C^0 en a si: f es continua en a

f es C^1 en a si $\exists$ todas las derivadas parciales $\underset{}{\overset{\text{ord } 1}{\vee}}$ y son continuas

$\vdots$

f es C^n en a si $\exists$ " " " de orden n y son continuas

Superficie
a) $z = f(x,y)$ (Funcion de Forma explicita) puedo despejar la z $\qquad$ ej: $z = x^2+y^2$
b) $F(x,y,z) = 0$ (Funcion " " implicita) no " " " $\qquad$ $x^2+y^2-z=0$

Plano tangente en $(a,b,f(a,b))$

a) $z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \underset{\text{prod. escalar}}{\times} (x-a, y-b)$

$z = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

Recta normal del plano

$Ax + By + Cz = D$

$(A,B,C) =$ vector normal ($\perp$ a π)

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z - f(a,b)}{-1}$$

b) $F(x,y,z)=0$ ej: $x^2+y^2+z^2=1$ $c=(0,0,0)$ $D=1$

Plano tangente en (a,b,c)

$$\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a)(y-b)(z-c) \equiv F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(x-a)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$$

Recta normal de (a,b,c) $\in Int(Dom\ F)$

obs: $\nabla F \perp$ superficie

$$\frac{x-a}{F_x(a,b,c)}=\frac{y-b}{F_y(a,b,c)}=\frac{z-c}{F_z(a,b,c)}$$

8.3 Propiedades del gradiente (∇)

Proposicion: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $a\in Int(Dom\ f)$
$f\in C^1(a)$
$v\in\mathbb{R}^n$ unitario $(\|v\|=1)$

$\Rightarrow D_v f(a)=\underbrace{\nabla f(a,b)\cdot v}_{\text{prod escalar}}$

Corol·larios:

1- $\nabla f(a)=0 \equiv D_v f(a)=0 \quad \forall v\in\mathbb{R}^n$

2- $D_v f(a)=\nabla f(a)\cdot v=\|\nabla f(a)\|\,\|v\|\cdot\cos\alpha=\|\nabla f(a)\|\cdot\cos\alpha$

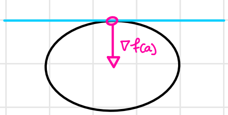
α angulo $(\nabla f(a),v)$

Si $\alpha=\pi/2 \equiv D_v f(a)=0$ $(v\perp\nabla f(a))$

Si $\alpha=0 \equiv D_v f(a)=\|\nabla f(a)\|$ es maxima (el valor de $D_v f(a)$ esta en la direccion y sentido del vector gradiente)

Si $\alpha=\pi \equiv D_v f(a)$ es minima (el valor minimo de $D_v f(a)$ esta en direccion y sentido de $-\nabla f(a)$ y vale $-\|\nabla f(a)\|$)

3- $\nabla f(a)$ es ortogonal a las curvas de nivel en $(a,f(a))$



2- (hecho con lim) $f(x,y)=y^2+y^2$ $D_v f(2,3)$ $\vec{v}=(3/5, 4/5)$

$\|v\|=1$

$D_v f(a,b)=\nabla f(a,b)\cdot\vec{v}$ $f\in C^1$ (polinomio)

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \nabla f(2,3) = (4,6) \to (4,6)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5} + \frac{24}{5} = \frac{36}{5}$

$\|v\| = 1$

$\sqrt{3/5^2 + 4/5^2} = 1$

Tema 9: Formula de Taylor y extremos relativos en diversas variables

Formula de Taylor

Def :

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad n \geq 2 \qquad i \in \{1, \dots, n\}$

La Función i- esima derivada parcial de f (Derivada parcial respecto "i" variable)

$D_i f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(a_1, \dots, a_n) \to D_i f(a_1, \dots, a_n)$

Esta Funcion puede admitir derivadas parciales (derivadas parciales segundas)

$D_{ij} f(a_1, \dots, a_n) = D_j [D_i f(a_1, \dots, a_n)] \qquad 1 \leq i, j \leq n$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f tiene n derivadas parciales 1^{as}
f " n^2 " " 2^{as}
f " n^3 " " 3^{as}
⋮
f " n^k " " k esimas

ej: $f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \to f(x,y,z) = xe^{yz} - 7z^3$

$D_x = e^{yz}$

$D_y = xe^{yz} \cdot z$

$D_z = xe^{yz} \cdot y - 21z^2$

$D_{xx} = 0 \qquad D_{yx} = ze^{yz}$

$D_{xy} = ze^{yz} \qquad D_{yy} = xz^2e^{yz}$

$D_{xz} = e^{yz} \cdot y \qquad D_{yz} = x(e^{yz} + zye^{yz})$

$D_{zx} = ye^{yz}$

$D_{zy} = x(e^{yz} + yze^{yz})$

$D_{zz} = xy^2e^{yz} - 42z$

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n \geq 1$

$A \subset \text{Int}(\text{Dom } f)$

$f \in C^k$ si f tiene derivadas parciales de orden k y son continuas.

$f \in C^\infty$ si todas las derivadas parciales son continuas.

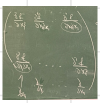
Teorema de Schwartz

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n \geq 2$ $A \subseteq \text{Int}(\text{Dom } f)$

$$f \in C^2 \to D_{ij} = D_{ji} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$

Matriz Hessiana (segunda derivada)

Obs: $f \in C^2 \to Hf$ simetrica

$Hf(a) = \Bigg($  $\Bigg)$ $\quad \nabla f = (F_x, F_y, F_z)$

Polinomio de Taylor

1- grado 2, $n = 2$ $f \in C^2$

$$P_{2,f,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

Resto de lagrange ($n=2$, Taylor grado 2)

$$f(x,y) - P_{2,f,(x_0,y_0)} = R_2(x,y)$$

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)(x-x_0) + \dots + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)(y-y_0)\right]^{\text{"}3\text{"}}$$

$(a,b) \in$ segmento $[(x_0,y_0), (x,y)]$

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \frac{\partial^3 f(c,d)}{\partial x^{3-i} \partial y^i} (x-a)^{3-i} (y-b)^i$$

$c, d \in$ segmento $<(a,b)\ (x,y)>$

1- $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$

a) $P_2(x,y)$ en $(0,0)$

$f_x = \dfrac{2}{1+2x+3y}$ $\quad f(0,0)=0$ $\quad f_x(0,0)=2$

$f_y = \dfrac{3}{1+2x+3y}$ $\quad f_y(0,0)=3$

$f_{xxx} = 16(1+2x+3y)^{-3} =$

$f_{xxy} = 24(1+2x+3y)^{-3} =$

$f_{xyy} = 36(1+2x+3y)^{-3} =$

$f_{yyy} = 54(1+2x+3y)^{-3} =$

$f_{xx} = 2(1+2x+3y)^{-1} = -4(1+2x+3y)^{-2} \overset{(0,0)}{=} -4$

$f_{xy} = -6(1+2x+3y)^{-2} = -6$

$f_{yy} = -9(1+2x+3y)^{-2} = -9$

$P_2(x,y) = 0 + 2x + 3y + \frac{1}{2}(-4x^2 - 12xy - 9y^2) =$
$= 2x + 3y - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2}y^2$

b) aprox $f(0,1;0,1) \cong P_2(0,1;0,1) = 0,2 + 0,3 - 0,02 - 0,06 - \frac{9}{2}0,01 = 0,375$

$$|R_2(0,1;0,1)| = \frac{1}{3!}\left| 16 \cdot 0,1^3 + 72 \cdot 0,1^3 + 108 \cdot 0,1^3 + 54 \cdot 0,1^3 \right| \simeq 0,41\hat{6}$$

$x,y=0$

$f_{xxx} \leq 16$

$f_{xxy} \leq 24$

$f_{xyy} \leq 36$

$f_{yyy} \leq 54$

2- a) Equacion plano tg a la superficie $z = \sqrt[3]{xy}$ en $f = (1,1,1)$

b) Calcular aprox $\sqrt[3]{0,99 \cdot 1,01}$ calcular error

a) $f \in C^1$ $\qquad 1 = f(1,1)$? ✓ $1 = \sqrt[3]{1}$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

$f(1,1) = 1$

$f_x = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot y \overset{1,1}{=} 1/3 \rightarrow \frac{1}{3}x^{-2/3} \cdot y^{1/3}$

$f_y = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot x \overset{1,1}{=} 1/3$

$$z = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1)$$

b) $P_1(x,y) =$ "Derecha del plano tg" $= 1 + (x-1)/3 + (y-1)/3$

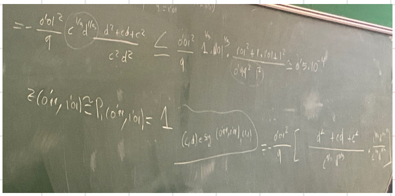
$P_1(0{,}99;\ 1{,}01) \cong 1$

$(c,d) \in \langle (0{,}99;\ 1{,}01), (1,1) \rangle$

$$f_{xx} = -\frac{2}{9} y^2 (xy)^{-5/3}$$
$$f_{xy} = 1/9\, x^{-2/3} y^{-2/3}$$
$$f_{yy} = -\frac{2}{9} x^2 (xy)^{-5/3}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{9} d^2 (cd)^{-5/3} (0{,}01)^2 + \frac{2}{9} c^{-2/3} d^{-2/3} (-0{,}01)^2 - \frac{2}{9} c^2 (cd)^{-2/3} (0{,}01)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{9}\, 0{,}01^2 \left[\frac{d^{1/3}}{c^{5/3}} + \frac{1}{c^{2/3} d^{2/3}} + \frac{c^{1/3}}{d^{5/3}}\right] = \frac{0{,}01^2}{9}$$



9.2 Puntos criticos. Calculos extremos

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a = (a_1 \dots a_n) \in \text{Int}(\text{Dom} f)$

- f tiene un maximo relativo en "a" si:
  $\exists r > 0 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(a)$, $f(a) \geq f(x)$

- f tiene un minimo relativo en "a" si:
  $\exists r > 0 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(a)$, $f(a) \leq f(x)$

$B_r(a)$ = Bola de radio r y centro a.

- $f \in C^1$ en un entorno de "a"
  "a" es un punto critico de f si $\vec{\nabla} f(a) = 0$

Proposición (condicion necesaria de extremo relativo)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Int}(\text{Dom} f)$

$f \in C^1$

f tiene un extremo en "a" $\to$ "a" es un punto crítico $(\vec{\nabla} f(a) = 0)$

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \text{Int}(\text{Dom } f)$

f tiene un punto de silla (sella) si a no es extremo pero es punto crítico

Proposición (condición suficiente de extremo relativo)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (a,b) \in \text{Int}(\text{Dom } f)$ $\quad (\nabla f(a,b) = 0)$

$f \in C^2$

Matriz Hessiana: $Hf(a,b) \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$\det Hf(a,b) = \Delta_2$

$\Delta_2 < 0 \to$ punto de silla

$\Delta_2 > 0 \to \Delta_1 > 0$ min

$\Delta_1 < 0$ max

$\Delta_2 = 0$? (Estudio local)

10 Extremos condicionados (Multiplicadores de Lagrange)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n \to f(x_1, \dots, x_n)$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}\right| \quad 1 \leq \text{condiciones} \leq n-1$$

Def:

$g_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \ \forall i = 1, \dots, m \quad ; \quad \exists r > 0 \ / \ \forall \vec{x} \in B(\vec{a}, r) \wedge \text{Dom } f$

Ej: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ Extremos condicionados por $x+y=2$

$(x,y) \to f(x,y)\ 4 - x^2 - y^2$

Siempre que una variable se pueda despejar sin raizes

condición $x+y=2 \to y = 2-x$

$y = 2-x \to f(x,y) = 4 - x^2 - (2-x)^2$

$4 - x^2 - 4 + 4x - x^2 = -2x^2 + 4x$

$f(x) = -2x^2 + 4x$

$f'(x) = -4x + 4 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f''(x) = -4 < 0 \to$ max relativo en $x=1$

$y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$

$f(x,y)$ tiene $(1,1)$ como máximo condicionado por $x+y=2$

Metodo de multiplicadores de Lagrange (2 variables y 1 condición)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcion a optimizar
$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ g(x,y)=0$ condicion

$f, g \in C^1$ $(a,b) \in \operatorname{Dom} f \wedge \operatorname{Dom} g$
$\exists L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x,y,\lambda) \to L(x,y,\lambda) =$
$= f(x,y) + \lambda g(x,y)$

Si f tiene un extremo en (a,b) condicionado por $g(x,y)=0 \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ / \ \vec{\nabla} L(a,b,\lambda_0) = \vec{0}$

todas las derivadas son igual a 0

$$\begin{aligned} L_x &= f_x + \lambda g_x \\ L_y &= f_y + \lambda g_y \\ L_\lambda &= g(x,y) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & f_x(a,b) + \lambda_0 g_x(a,b) = 0 \\ & f_y(a,b) + \lambda_0 g_y(a,b) = 0 \\ & g(a,b) = 0 \end{aligned}$$

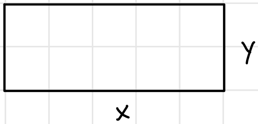
Criterio de la Hessiana ampliada

$$H(x_0,y_0,\lambda_0) \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{x^2}+\lambda g_{x^2} & f_{xy}+\lambda g_{xy} \\ g_y & f_{xy}+\lambda g_{xy} & f_{y^2}+\lambda g_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{cases} >0 & \text{maximo en } (x_0,y_0) \\ <0 & \text{minimo en } (x_0,y_0) \end{cases}$$

HL
Hessiana de L

Ejemplo:

Area S
perimetro min:



$f(x,y) = 2x+2y$
$g(x,y) = xy - S$

$L(x,y,\lambda) = 2x+2y+\lambda(xy-S)$

$L_x = 2 + \lambda y = 0 \qquad L_y = 2 + \lambda x = 0$

$L_\lambda = xy - S = 0$

Sistema

$$\begin{array}{l|l} 2+\lambda x=0 & y=-\frac{2}{\lambda} \\ 2+\lambda y=0 & x=-2/\lambda \\ xy-5=0 & \end{array}$$

$$4/\lambda^2 - 5 = 0 \rightarrow 4-\lambda^2 5 = 0$$
$$\lambda = \pm 2/\sqrt{5}$$

Si $\lambda = 2/\sqrt{5}$ | $x=-\sqrt{5}$, $y=-\sqrt{5}$

Si $\lambda = -2/\sqrt{5}$

$\rightarrow$ $x=y=\sqrt{5}$

punto crítico

$(\sqrt{5}, \sqrt{5})$

$\lambda_0 = -2/\sqrt{5}$

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & \lambda \\ x & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}(x_0,y_0,\lambda_0) \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{5} < 0 \quad \text{min condicionado}$$

$x_0 = \sqrt{5} = y_0$

$\lambda_0 = -2/\sqrt{5}$

Metodo de Lagrange (caso general)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Función a optimizar

$(x_1,\dots,x_n) \rightarrow f(x_1,\dots,x_n)$

$g_1(x_1,\dots x_n)=0$

$\vdots$

$g_m(x_1,\dots,x_n)=0$

$1 \leq m \leq n-1$ condiciones

$f, g_1, \dots, g_m \in C^1$

$L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \rightarrow L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1\dots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n)$$

$\rightarrow$ Si f tiene un extremo en $(a_1,\dots,a_n)$ condicionado por $g_1,\dots,g_m$

10.2 Extremos absolutos en compactos:

Teorema de Weierstrass:

valor max absoluto en D

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \geq 1)$$
$$\vec{x} \to f(\vec{x}) = \mathbb{R}$$

$D \subseteq \text{Dom } f$, D compacto $\wedge$ f es C^0 en D $\Big| \xrightarrow{T.W} \exists\, \vec{x}^m, \vec{x}^M \in D \ / \ \forall \vec{x} \in D \quad f(x^m) \leq f(x) \leq f(x^M)$

puede tener mas de un punto que sea max o min

Valor min absoluto en D