Diagonalització d'endomorfismes

M1. FIB. Curs 2020-2021(2)

Mercè Mora

Dept. Matemàtiques. UPC

1 Resum de teoria

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n ($\mathbb{K}$ pot ser, per exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ amb p primer) direm que f *diagonalitza* si existeix una base d'E tal que la matriu associada a f en aquesta base és diagonal.

Valors i vectors propis

• *valor propi (vap.)* d'f: $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$, per a algun vector $v \neq 0_E$

• *vector propi (vep.)* d'f: $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ i $f(v) = \lambda\, v$, per a algun $\lambda \in \mathbb{K}$ (direm que v és un *vector propi de valor propi* λ)

▷ f diagonalitza si i només si existeix una base de vectors propis

• $E_\lambda = \{v \ : \ f(v) = \lambda\, v\}$ (vectors propis de valor propi λ, més el vector 0_E)

Si A és la matriu associada a f en una base qualsevol B, aleshores:

- E_λ és un subespai vectorial de dimensió $n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, I_n)$
- E_λ está format per les solucions del sistema d'equacions lineal homogeni $(A - \lambda I_n)X = 0$.
- $\lambda \in K$ és valor propi d'f $\Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda\, I_n) = 0$
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ són valors propis diferents d'f i $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són vectors propis de valor propi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ respectivament, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són linealment independents

Polinomi característic

• *Polinomi característic* d'f: $p_f(x) = \det(A - x\, I_n)$, on A és la matriu associada a f en una base qualsevol d'E. (Es pot demostrar que el polinomi característic és invariant per canvis de base.)

- $p_f(x)$ és un polinomi de grau n tal que el terme independent és $\det A$; el coeficient de x^n és $(-1)^n$; i el coeficient de x^{n-1} és $(-1)^{n-1}\operatorname{tr} A$, on $\operatorname{tr} A$ és la suma dels elements de la diagonal principal d'A.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ és valor propi d'f si, i només si, λ és arrel de $p_f(x)$
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, aleshores $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat 1 (arrel simple) del polinomi característic, aleshores $\dim E_\lambda = 1$.

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, direm que m és la *multiplicitat algebraica* de λ i $\dim E_\lambda$ és la *multiplicitat geomètrica* de λ.

Teorema. *f diagonalitza si, i només si, es compleixen alhora les dues condicions següents:*
(i) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{K}[x]$;
(ii) per a tota arrel λ de $p_f(x)$, la dimensió d'E_λ és igual a la multiplicitat de λ en $p_f(x)$.

La condició ii) és equivalent a dir que per a tota arrel λ de $p_f(x)$ la multiplicitat algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari. *Si $p_f(x)$ té n arrels diferents en $\mathbb{K}$, aleshores f diagonalitza.*

▷ Si f diagonalitza, una base de vectors propis d'f s'obté com a unió de bases dels subespais E_λ tals que λ és valor propi, i la matriu associada a f en aquesta base és una matriu diagonal D on cada valor propi apareix a la diagonal tantes vegades com la seva multiplicitat en el polinomi característic.

2 Passos a seguir per a diagonalitzar un endomorfisme

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n i A la matriu associada a f en la base B,

(i) Determinar si l'endomorfisme diagonalitza.

(1) *Calcular el polinomi característic d'f i descompondre'l en factors de grau 1:*

$$p_f(x) = \det(A - x\ I_n) = \cdots = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}\ (x-\lambda_2)^{m_2}\ \ldots (x-\lambda_k)^{m_k},$$

on $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són arrels diferents de multiplicitat $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivament ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són els valors propis d'f).

Si $p_f(x)$ no es pot descompondre en factors de grau 1, f ***no diagonalitza***.
Altrament, continuem.

(2) *Comprovar si* $dim E_{\lambda_i} = m_i$, *per a tots els valors propis* λ_i *tals que* $m_i > 1$*:*
equival a comprovar si $n - \text{rang}(A - \lambda_i\ I_n) = m_i$.

Si en algun cas no es compleix, f ***no diagonalitza***.
Altrament, f ***diagonalitza***

(ii) Trobar una base en que diagonalitzi, si és possible, i la matriu associada diagonal

(3) Calcular una base B_i d'$E_{\lambda_i} = \{ v\ :\ f(v) = \lambda_i\, v\}$ per a tot valor propi λ_i. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - \lambda_i\ I_n$ i calculem una base del subespai vectorial solució. La base tindrà exactament m_i vectors, $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i\,m_i}\}$.

(4) Una base de vectors propis d'f és:

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = \{\underbrace{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1\,m_1}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_1}, \underbrace{v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2\,m_2}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_2}, \ldots, \underbrace{v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{k\,m_k}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_k}\}$$

(5) La matriu associada en la base B' és la matriu diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_1 &&&&&& \\ &&& \lambda_2 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_2 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& \lambda_k & \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& \lambda_k \end{pmatrix}$$

on cada λ_i apareix exactament m_i vegades i els elements que no són de la diagonal principal són nuls.

A més, es satisfà la igualtat $D = P^{-1}\, A\, P$, on P és la matriu de canvi de base de B' a B, és a dir, les columnes de P són les components dels vectors de B' en la base B

3 Exemples

Exercici 1

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x^2+4)$.

No diagonalitza perquè el polinomi característic no té totes les arrels reals, és a dir, no es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{R}[x]$.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-4)(x-2)(x+2).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-1)^2\,(x-2)$$

valors propis	multiplicitat
1	2
2	1

(2) El valor propi 1 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_1 = 2$:

$$\dim E_1 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

(d) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ 1 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)^2\,(-1-x)$

valors propis	multiplicitat
5	2
-1	1

(2) El valor propi 5 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_5 = 2$:

$$\dim E_5 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ -1 & -1-5 & 0 \\ 1 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

Exercici 2

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-x & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2\,(4-x)^2$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
4	2

(2) Els dos valors propis, -2 i 4, tenen multiplicitat $2 > 1$.
Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-(-2) & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-(-2) & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-(-2) \end{pmatrix}$$
$$= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Comprovem ara si $\dim E_4 = 2$:

$$\dim E_4 = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-4 \end{pmatrix}$$
$$= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-x & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2\,(-1-x)\,(2-x)$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
-1	1
2	1

(2) El valor propi -2 té multiplicitat 2, diferent de 1. Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} -2-(-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-(-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-(-2) & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-(-2) \end{pmatrix}$$
$$= 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3\,(-1-x)$$

valors propis	multiplicitat
2	3
-1	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat $3 > 1$.
Comprovem si $\dim E_2 = 3$:

$$\dim E_2 = 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} = 4 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= 4 - 3 = 1 \neq 3.$
Per tant, f no diagonalitza.

Exercici 3

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x) - 6 = x^2 - 3\,x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 2 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

valors propis	multiplicitat
4	1
-1	1

(2) No hi ha valors propis de multiplicitat > 1.

(3) (i) Base d'E_4. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 4I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y) : x = \frac{2}{3}y\} = \{(\frac{2}{3}y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

Base: $\{(\frac{2}{3}, 1)\}$

(ii) Base d'E_{-1}. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - (-1)I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y) : x = -y\} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

Base: $\{(-1, 1)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(\frac{2}{3}, 1), (-1, 1)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 4

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x)^2(4-x)+2+2-(4-x)-3\,(3-x)-2\,(3-x) =$$
$$\cdots = -x^3+10x^2-28x+24 = -(x-2)^2(x-6)$$

valors propis	multiplicitat
2	2
6	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat $2 > 1$.

Comprovem si $\dim E_2 = 2$:

$$\dim E_2 = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3-1 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

(3) (i) Base d'E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x,y,z) : x+y+z = 0\} = \{(x,y,z) : x = -y-z\} = \{(-y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) : y,z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

(ii) Base d'E_6. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 6I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x = z\,,\ y = 2z\} = \{(z,2z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,2,1) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(1,2,1)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,2,1)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 5

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{pmatrix} = (2-x)(-4-x)(5-x) - 24 - 4\,(-4-x) - 24(2-x) = \cdots = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$

valors propis	multiplicitat
0	1
1	1
2	1

Diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i $\dim\mathbb{R}^3 = 3$.

(2) No hi ha valors propis amb multiplicitat > 1.

(3) (i) Base d'E_0. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 0 \cdot I_3 = A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =\equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x + 2z = 0\,, -2y + 3z = 0\} = \{(x,y,z) : x = -2z\,, y = \frac{3}{2}z\} = \{(-2z, y\frac{3}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, \frac{3}{2}, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,3,2)\}$, ja que el vector $(-2, \frac{3}{2}, 1)$ genera el mateix subespai que $2\,(-2, \frac{3}{2}, 1) = (-4,3,2)$

(ii) Base d'E_1. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 1 \cdot I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 4 \\ 3 & -4-1 & 12 \\ 1 & -2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x + 4z = 0\,, y = 0\} = \{(x,y,z) : x = -4z\,, z = 0\} = \{(-4z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-4,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,0,1)\}$

(iii) Base d'E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2\,I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 4 \\ 3 & -4-2 & 12 \\ 1 & -2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : z = 0\,, x = 2y\} = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(2,1,0)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(-4,3,2),(-4,0,1),(2,1,0)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercici 6

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució.

Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x-2i)(x+2i)$.

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i $\dim \mathbb{C}^3 = 3$.