MATEMÀTIQUES 2
Exercicis

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques
Jordi Girona 1-3, Edifici Omega, 08034 Barcelona, Espanya.

6 de febrer de 2023

Pròleg

L'assignatura de MATEMÀTIQUES 2 consta de dues parts, una primera part (fins l'examen parcial) en què s'aprofundeix en l'estudi de les funcions reals d'una variable real; i la segona part en què s'introdueixen les funcions reals de diverses variables.
Aquest document inclou material de treball i enunciats d'exercicis de l'assignatura de MATEMÀTIQUES 2. Després de l'índex, es troba un apartat de bibliografia bàsica. A continuació, els enunciats d'exercicis s'han organitzat per capítols, cada capítol correspon aproximadament a un tema de l'assignatura. Cada capítol conté quatre tipus de seccions: Problemes, Taller, A més hauríeu de fer i Solucions.
Els professors de l'assignatura exposaran els conceptes clàssics d'aquests temes; resoldran, a les classes expositives, gran part dels exercicis de la secció Problemes, i conjuntament amb els estudiants a les classes de taller, trobaran les solucions de gran part dels exercicis de les seccions Taller. Els exercicis de la part A més hauríeu de fer, junt amb els exercicis de les primeres seccions no resolts a classe, són perquè els resolguin els estudiants sense ajut d'un professor, com part del desenvolupament del seu aprenentatge autònom.

Índex

Part I

Funcions reals de variable real

Capítol 1

Equacions i inequacions amb nombres reals.

1.1 Taller de problemes

1 Resoleu les desigualtats següents:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x+1} < 0; \qquad \text{b) } \frac{1}{x+3} > \frac{1}{4}; \qquad \text{c) } \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}; \qquad \text{d) } x^2 + x \leq 0; \quad \text{e) } 1 < x^2 < 4.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

2 Trobeu tots els nombres reals x que satisfan les desigualtats següents:

$$\text{a) } |2x+7| \geq 3; \qquad \text{b) } |x^2-1| \leq 3; \qquad \text{c) } |x-1| > |x+1|; \qquad \text{d) } |x| + |x+1| < 2.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

3 Per a cadascun dels conjunts següents:

$$\text{a) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x < 0\}; \quad \text{b) } \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 2^{-n}\}; \quad \text{c) } \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ y = 1 + x^2\},$$

determineu si el conjunt és fitat superiorment, fitat inferiorment, és fitat o no. Trobeu el suprem i l'ínfim, si s'escau.

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄

Conjunto de los numeros reales

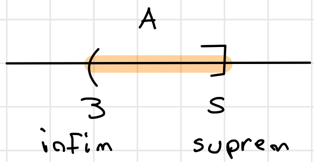
Acotado superiormente: $\exists k \in \mathbb{R},\ k \geq a \quad \forall a \in A$

Acotado inferiormente: $\exists k \in \mathbb{R},\ k \leq a \quad \forall a \in A$

Definicion 2 - $A \subset \mathbb{R} \wedge S, I \in \mathbb{R}$

S es supremo, es el menor de las cotas superiores

I es infimo, es la mayor de las cotas inferiores



$A = (3, 5]$

3 no $\in A$

5 si $\in A$

Si el suprem $\in A$, este es un maximo

Si el infimo $\in A$, este es un minimo

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En sentido geometrico representa la distancia del eje $(|x|, 0)$

Propiedades $|x|$

1- $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \longleftrightarrow x = 0$

2- $|xy| = |x| \cdot |y|$

3- $|x+y| \leq |x| + |y|$

4- $a > 0 \rightarrow |x| \leq a \equiv -a \leq x \leq a$

$|x| = a \equiv x = \pm a$

$|x| > a \equiv x > a \vee x < -a$

1-

a) $\dfrac{x-1}{x+1} < 0 \equiv \begin{matrix} x-1<0 \\ x+1>0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x<1 \\ x>-1 \end{matrix} \Rightarrow -1 < x < 1 \equiv x \in (-1,1)$

Esta acotado superiormente (1) y también inferiormente (-1)

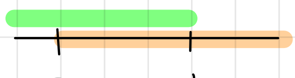
suprem = 1 — infim = -1

b) $\dfrac{1}{x+3} > \dfrac{1}{4}$ $\quad x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

- Si $x > -3$

$\underset{>0}{\dfrac{1}{x+3}} > \underset{>0}{\dfrac{1}{4}} \Rightarrow 4 > x+3 \equiv 1 > x \Rightarrow -3 < x < 1$

$(-3, 1)$



Acotado superior e inferiormente

suprem = 1

infim = -3

c) $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$

$\wedge \begin{matrix} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{matrix}$ Trabarar por intervalos

$x < -1 \Rightarrow \begin{matrix} x+1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{matrix} \Rightarrow \underset{+}{\dfrac{x-1}{x+1}} \leq \underset{+}{\dfrac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$

$+1 - 1 \leq 4x$

$0 \leq x$

$\begin{matrix} 0 \leq x \\ -1 > x \end{matrix}$ imposible

Si $-1 < x < 1 \xrightarrow{+1} 0 < x+1 < 2 \quad x+1 = +$

$\xrightarrow{-1} -2 < x-1 < 0 \quad x-1 = -$

$\overset{-}{\dfrac{x-1}{x+1}} \geq \overset{-}{\dfrac{x+1}{x-1}}$

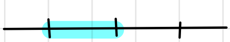
$(x-1)^2 \geq (x+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 \geq x^2 + 2x + 1$

$x \leq 0$

$\begin{matrix} x \leq 0 \\ -1 < x < 1 \end{matrix}$

$(-1, 0]$

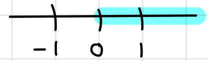


Si $x > 1 \to x - 1 > 0$

$x + 1 > 0$

$$\frac{x-1}{x+1} \le \frac{x+1}{x-1} \to x \ge 0$$

$x > 1$



$(1, +\infty)$

Conjunto de soluciones

$x \in (-1, 0] \cup (1, +\infty)$

infim $= -1$ no minim

suprem $\nexists$

d) $x^2 + x \le 0 \to x(x+1) \le 0 \to x \ge 0$

$\wedge$

$x+1 \le 0 \iff x \le -1$

$\nexists$

$-1 \ge x \ge 0$

$\to x \le 0$

$x+1 \ge 0 \iff x \ge -1$

$-1 \le x \le 0$

$[-1, 0]$

suprem $= 0$ max

infem $= -1$ min

2-

a) $|2x+7| \le 3 \equiv |2x+7| \ge 3 \vee |2x+7| \le -3$

$2x \ge -4$ $\qquad$ $2x \le -10$

$x \ge -2$ $\qquad$ $x \le -5$

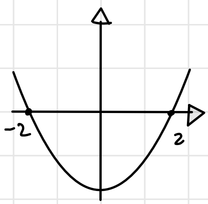
$(-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$ No esta citado sup ni inf

b) $|x^2 - 1| \le 3 \equiv x^2 - 1 \le 3 \vee x^2 - 1 \ge -3$

$x^2 \le 4$ $\qquad$ $x^2 \ge -2$

$-2 \le x \le 2$

$[-2, 2]$



d) $|x|+|x+1|<2$ $\quad |x| \begin{cases} x & si \ x\geq 0 \\ -x & si \ x<0 \end{cases}$ $\quad |x+1| \begin{cases} x+1 & si \ x\geq -1 \\ -(x+1) & si \ x<-1 \end{cases}$

- si $x<-1$

$-x-x-1<2 \equiv -2x-1<2 \equiv x>-\frac{3}{2}$ $\quad$ $-3/2<x<-1$

- si $-1\leq x<0$ $\quad -x+x+1<2$ $\quad 1<2$ $\quad [-1,0)$

- si $x\geq 0$ $\quad x+x+1<2$

$2x+1<2$

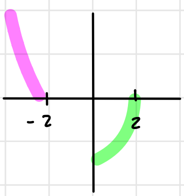
$x<1/2$

Conjunt resultat $(-3/2,\ 1/2)$

3-

a) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^3-4x<0\} \to x(x^2-4)<0$ $\begin{cases} x>0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<0 \\ x^2-4>0 \end{cases}$

grafica



$(0,2)$

$(-\infty,-2)$

$\downarrow$

$(-\infty,-2)\cup(0,2)$ $\quad$ acotado super.

suprem = 2

b) $B=\{x\in\mathbb{R} \mid \exists n\in\mathbb{N},\ x=2^{-n}\}$

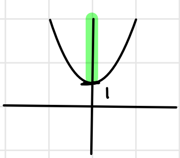
$n>0: \{1/2, 1/4, 1/8 \cdots\} = (0, 1/2]$ $\quad$ Suprem max = 1/2 $\quad$ inf = 0

$n\geq 0: \{1, 1/2, 1/4, 1/8 \cdots\} = (0, 1]$ $\quad$ suprem max = 1 $\quad$ inf = 0

c) $C=\{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in\mathbb{R},\ y=1+x^2\} = \{y\in\mathbb{R} / y\in[1,+\infty)\}$

inf = min = 1

grafica:



10 -

c) $|x| - |x^2| = |x| - x^2 = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $||x|-1| = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \geq 0 \\ |-x-1| & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 & [1, +\infty) \\ -(x-1) & \text{si } x < 1 & [0, 1) \\ -x-1 & \text{si } x \leq -1 & (-\infty, -1] \\ -(-x-1) & \text{si } x > -1 & (-1, 0) \end{cases}$

1.2 A més hauríeu de fer

4 Trobeu tots els nombres reals x que satisfan cadascuna de les desigualtats següents:

$$\text{a) } x^2 > 3x + 4; \qquad \text{b) } \frac{1}{x} < x.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

5 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } x^3 - 1 \geq 0; \qquad \text{b) } (x-1)\left|x^2 - 2\right| > 0; \qquad \text{c) } |4x - 5| \leq 13;$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

6 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } |x-3| = 2; \quad \text{b) } |x+1| < 4; \quad \text{c) } |x-1| + |x+3| = 4; \quad \text{d) } |x+1| + |x+2| < 2.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt té màxim o mínim.

7 Proveu que si $|x| \leq 1$, llavors es té $\left|x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right| < 2.$

8 Siguin a i b nombres reals amb $a < b$, demostreu que $a < \frac{(a+b)}{2} < b$.

9 Siguin $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nombres reals.

i) Demostreu que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

ii) Demostreu que la desigualtat és una igualtat si i només si, $a = b$.

10 Escriviu les expressions següents prescindint dels valors absoluts:

$$\text{a) } |x-1| - |x|; \qquad \text{b) } \big||x| - 1\big|; \qquad \text{c) } |x| - |x^2|; \qquad \text{d) } x - \big|x + |x|\big|.$$

11 Demostreu que per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix $|x-1| + |x-2| \geq 1$. En quin cas aquesta desigualtat és una igualtat?

12 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } |x-1||x+2| = 3 \qquad \text{b) } \frac{1}{4} \leq \left|x^2-5x+6\right| \leq 3.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt té màxim o mínim.

13 Resoleu les inequacions següents:

$$\text{a) } \left|\frac{2x-2}{x+4}\right| < 1; \qquad \text{b) } \left|\frac{x}{x-2}\right| > 10; \qquad \text{c) } |3x-5| - |2x+3| > 0;$$

$$\text{d) } |2-x^2| < 1; \qquad \text{e) } x^2 < |2x+8|; \qquad \text{f) } \left|x^2-5x\right| > \left|x^2\right| - |5x|.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si el conjunt de solucions, en cadascun dels casos, té màxim o mínim.

14 Siguin

$$A = (-3, 9], \qquad B = \mathbb{N}, \qquad C = (4, +\infty), \qquad D = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$$

Trobeu, en cas que existeixin, el suprem i l'ínfim dels conjunts A, B, C, D, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap (C \cup A)$. Digueu si aquests són o no màxim i mínim.

◇◇◇◇◇

1.3 Solucions

1 a) $A = (-1, 1)$; és un conjunt fitat, $\inf(A) = -1$ i $\sup(A) = 1$.
b) $B = (-3, 1)$; és un conjunt fitat, $\sup(B) = 1$ i $\inf(B) = -3$.
c) $C = (-1, 0] \cup (1, \infty)$; és un conjunt fitat inferiorment amb $\inf(C) = -1$.
d) $D = [-1, 0]$; és un conjunt fitat, $\sup(D) = 0$ i $\inf(D) = -1$.
e) $E = (-2, -1) \cup (1, 2)$; fitat superiorment, $\sup(B) = 2$ i fitat inferiorment, $\inf(B) = -2$.

2 a) $A = (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$; no és un conjunt fitat i no hi ha màxim ni mínim.
b) $B = [-2, 2]$; fitat $\sup(B) = 2$ i $\inf(B) = -2$.
c) $C = (-\infty, 0)$; fitat superiorment amb $\sup(C) = 0$.
d) $D = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; fitat $\sup(D) = 1/2$ i $\inf(D) = -3/2$.

3 a) $A = (-\infty, -2) \cup (0, 2)$; fitat superiorment, $\sup(A) = 2$; no fitat inferiorment.
b) B és fitat, $\sup(B) = 1/2$ i $\inf(B) = 0$.
c) $C = [1, +\infty,)$ fitat inferiorment amb $\inf(C) = 1$, no és fitat superiorment.

4 a) $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$; no fitat.
b) $C = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$; fitat inferiorment amb $\inf(C) = -1$.

5 a) $A = [1, +\infty)$; és un conjunt fitat inferiorment, $\inf(A) = 1$.
b) $B = (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; és un conjunt fitat inferiorment, $\inf(B) = 1$.
c) $C = [-2, \frac{9}{2}]$; fitat, $\inf(A) = -2$ i $\sup(A) = \frac{9}{2}$.

6 a) $A = \{1,\ 5\}$; és un conjunt fitat, $min(A) = 1$ i $max(A) = 5$.
b) $B = (-5, 3)$; és un conjunt fitat, $\sup(B) = -5$ i $\inf(B) = 3$ i no hi ha màxim ni mínim.
c) $C = [-3, 1]$; és un conjunt fitat, $min(C) = -3$ i $max(C) = 1$.
d) $D = (-5/2, -1/2)$; és un conjunt fitat, $\sup(D) = -1/2$ i $\inf(D) = -5/2$ i no hi ha màxim ni mínim.

10 a) $|x-1| - |x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ -2x+1 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ -1 & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$ c) $|x| - |x^2| = \begin{cases} -x - x^2 & \text{si } x < 0, \\ x - x^2 & \text{si } x \ge 0; \end{cases}$

b) $\big||x| - 1\big| = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1, \\ 1 + x & \text{si } -1 \le x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x < 1, \\ -1 + x & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$ d) $x - \big|x + |x|\big| = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ -x & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$

11 S'obté la igualtat en $1 \le x \le 2$.

12 a) $A=\left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$; és un conjunt fitat, $max(F)=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ i $min(F)=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.
b) $B=\left[\frac{5-\sqrt{13}}{2},\frac{5-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{2}}{2},\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]\cup\frac{5}{2}$; $\sup(F)=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, $\inf(F)=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ és un conjunt fitat.

13 a) $A=(-2/3,6)$; és un conjunt fitat, $\inf(A)=-2/3$ i $\sup(A)=6$ i no hi ha màxim ni mínim.
b) $B=(20/11,2)\cup(2,20/9)$; és un conjunt fitat $\inf(B)=20/11$ i $\sup(B)=20/9$ i no hi ha màxim ni mínim.
c) $C=(-\infty,2/5)\cup(8,+\infty)$; no és un conjunt fitat i no hi ha màxim ni mínim.
d) $D=(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$; és un conjunt fitat, $\inf(D)=-\sqrt{3}$ i $\sup(D)=\sqrt{3}$ i no hi ha màxim ni mínim.
e) $E=(-2,4)$; és un conjunt fitat, $\inf(E)=-2$, $\sup(E)=4$ i no hi ha màxim ni mínim.
f) $F=(-\infty,0)\cup(0,5)$; és un conjunt fitat superiorment, $\sup(F)=5$ i no hi ha màxim ni mínim.

14 $\inf(A)=-3, \sup(A)=\max(A)=9.$
$\inf(B)=\min(B)=1.$
$\inf(C)=4.$
$\inf(D)=\min(D)=0, \sup(D)=\sqrt{2},$
$\inf(A\cap B)=\min(A\cap B)=1, \sup(A\cap B)=\max(A\cap B)=9.$
$\inf(A\cap C)=4, \sup(A\cap C)=\max(A\cap C)=9.$
$\inf(B\cap(C\cup A))=\min(B\cap(C\cup A))=1.$

◇◇◇◇◇

Capítol 2

Successions de nombres reals.

2.1 Problemes

1 Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{b) } n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{c) } \sqrt[n]{n}.$$

2 Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \frac{6n^3+4n+1}{2n}; \qquad \text{b) } \frac{n^2-6n-2}{3n^2-9n}; \qquad \text{c) } \left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n-1}}.$$

3 Feu servir el criteri del sandvitx per trobar, si és possible, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ on el terme general de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

4 Calculeu els següents límits:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad |a|>1; \qquad \text{b) } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}, \quad |a|>1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

5 Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \frac{\cos n}{n^2}; \quad \text{b) } \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}; \quad \text{c) } \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n-1}{5}}; \quad \text{d) } \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

6 Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = -2/3$ i $3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \geq 1$.

a) Proveu que $-2 \leq a_n \leq 1$, per a tot $n \geq 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

◇◇◇◇◇

1- Calcular el limite

a) α^n $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \lim \alpha^n \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & -1 < \alpha < 1 \\ \nexists & \alpha \leq -1 \end{cases}$

b) $\lim n^\alpha$ $\quad \begin{matrix} +\infty \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha < 0 \end{cases}$

6 - $a_1 = -2/3$ $\quad 3a_{n+1} = 2 + a_n^3$ $\quad n \geq 1 \equiv a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n^3}{3}$

a) Demostrar $-2 \leq a_n \leq 1$ $\quad \forall n \geq 1$

i) $-2/3$ ✓ $\quad -2 \leq -2/3 \leq 1$

ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1) \equiv -2 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow -2 \leq a_{n+1} \leq 1$

$-2 \leq a_n \leq 1 \xrightarrow{x^3} -8 \leq a_n^3 \leq 1 \xrightarrow{+2} -6 \leq 2 + a_n^3 \leq 3 \Rightarrow$

$\xrightarrow{/3} -2 \leq \dfrac{a_n^3 + 2}{3} \leq 1 \xrightarrow{HI} \boxed{-2 \leq a_{n+1} \leq 1}$

b) Creciente $\Leftrightarrow a_2 > a_1$

i) $n = 1 \begin{cases} a_1 = -2/3 \\ a_2 = 2 + (-2/3)^3 / 3 = \dfrac{46}{89} \end{cases}$

ii) $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

$\downarrow x^3$

$(a_{n-1})^3 \leq a_n^3$

$\downarrow +2$

$(a_{n-1})^3 + 2 \leq a_n^3 + 2$

$\downarrow /3$

$\dfrac{2 + (a_{n-1})^3}{3} \leq \dfrac{2 + a_n^3}{3} \xrightarrow{HI} \boxed{a_n \leq a_{n+1}}$

c) $\{a_n\}_n$ es convergente

a) esta acotada superiormente
b) es creciente

$\left.\begin{array}{l}\text{a) esta acotada superiormente}\\ \text{b) es creciente}\end{array}\right] \xrightarrow{TCM}$ es converjente $(\exists \lim_{n\to\infty} a_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \quad 3a_{n+1} = 2 + a_n^3$$

$\Updownarrow \; L = \lim_{n\to+\infty} a_n$

$$3L = 2 + L^3 \Leftrightarrow L^3 + 3L - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

el 1 funciona si la suma de los cocientes es 0

$$L^2 + L - 2 = 0 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot -2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

El limite es 1 porque la sucesion esta acotada entre

$$-2 \leq a_n \leq 1$$

Y como es creciente y el segundo termino es + el limite es 1.

2.2 Taller de problemes

7 Calculeu el límit de les successions següents:

a) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$; b) $\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{\sin(1/n)}$;

c) $\dfrac{n!}{n^n}$; d) $\dfrac{n^7}{7^n}$; e) $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$.

8 Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n^3+2n+2}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}}$; d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n\cdot 3^n+5^{n+1}}{(2^n+1)(3^{n-1}-1)}$;

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\dfrac{n^2+2}{n+1}}$; f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[5]{\dfrac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$.

9 Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1=1$ i $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$ si $n>1$.

a) Demostreu que $0<a_n<2,\quad \forall n\geq 1$.

b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

10 Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}$ si $n\geq 1$.

a) Calculeu a_1, a_2 i a_3. Obteniu una fórmula recurrent, tipus $a_{n+1}=f(a_n)$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és decreixent.

c) Enunciei el Teorema de la Convergència Monòtona.

d) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent.

◇◇◇◇◇

7a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = $

$= \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+n)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = 1/2$

7e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n} = \frac{\infty}{\infty} = 4/e$ C. arrel - cocient

$\shortparallel$

$\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n}} \to \frac{\frac{(n\cancel{+1})(n\cancel{+2})\cancel{\dots}(2n)}{n^n}}{\frac{n(n\cancel{+1})\cancel{\dots}(2\cancel{n}-2)}{(n-1)^{n-1}}} =$

$= \frac{\frac{(2n-1)(2n)}{n^n}}{\frac{n\cdot(n-1)}{(n-1)^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n-2}{n-1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = 4\cdot 1^\infty$

$= 4\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{\frac{n-1}{-n}} = 4\cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$

7c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \frac{\infty}{\infty}$

$\downarrow$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{n-1!}{(n-1)^{n-1}}} \equiv \frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$

$\frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

1^∞

$\hookrightarrow \frac{n}{n}-\frac{1}{n} = \left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = 1/e < 1$

$\downarrow$ criteri cocient

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

Criteri del cocient

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell \qquad \ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Si $\ell<1 \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\ell>1 \to \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

8-

b) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)\,n^{n-1}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$* \quad (n+1)^{n+1} \equiv (n+1)^n \cdot (n+1)$

$* \quad \frac{1}{n^{n-1}} = \frac{n}{n^n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{5(n+1)\cdot n}{(3n^2+1)} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{5n^2+5n}{3n^2+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{5}{3} \cdot 1^\infty$$

$\hookrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$= 5/3 \cdot e$$

a) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\underset{+\text{ gran}}{\frac{n}{n^2+1}} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \underset{+\text{ petit}}{\frac{n}{n^2+n}}\right) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$b_n \le a_n \le c_n \quad \forall n \geq \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \ell = \lim_{n \to +\infty} c_n \to \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

$$b_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \qquad c_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}$$

$$b_n \le a_n \le c_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+n} \cdot n = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot n = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

c. sandwitch $\to$ $\lim a_n = 1$

8d) $$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n \cdot 3^n + 5^{n+1}}{(2^n+1)(3^{n-1}-1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{6^n + 5^n \cdot 5}{2^n \cdot 3^n/3 - 2^n + 3^n/3 - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6^n + 5 \cdot 5^n}{6^n/3 - 2^n + \frac{3^n}{3} - 1}$$

$\downarrow$ $1/6^n$

$$\frac{1+5\cdot 0}{\frac{1}{3}-0+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{1}{1/3}=3 \longleftarrow \frac{\frac{6^n}{6^n}+5\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{3}\cdot\frac{6^n}{6^n}-\left(\frac{2}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{1}{6^n}}$$

8F) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{\frac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}=\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^{1^\infty}=\boxed{\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^{e^{-1}}}$$

$$* \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1} *$$

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}\quad \square \text{ algo que tiende a } \infty}$$

$$\downarrow$$

$$1+\frac{n^3+1}{n^3+n}-1 \to 1+\frac{\cancel{n^3}+1-\cancel{n^3}-n}{n^3+n}\to\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{1-n}}\right)^{n^2+1}\to$$

$$\to \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{1-n}}\right)^{\frac{n^3+n}{1-n}}}}_{e}\cdot\frac{1-n}{n^3+n}\cdot n^2+1$$

$$\to e^{\lim_{n\to\infty}}\frac{-n^3+n^2-n+1}{n^3+n}=-1 = e^{-1}$$

$$* \; e^{\lim_{n\to\infty}(n^2+1)\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}-1\right)}$$

8c) $$\frac{\sqrt{\underbrace{\boxed{3n^3+2n+2}}_{a}}-\sqrt{\underbrace{\boxed{3n^3-2n-1}}_{b}}}{\sqrt{\underbrace{\boxed{n^3+n^2+3n}}_{c}}-\sqrt{\underbrace{\boxed{n^3+n^2-3n}}_{d}}}=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$$

$$\to \frac{a-b}{c-d}\cdot\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\cancel{3n^2}+2n+2-\cancel{3n^2}+2n+1}{\cancel{n^3}+\cancel{n^2}+3n-\cancel{n^3}-\cancel{n^2}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{6n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{1+1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

9a) inducció

i) $n=1$ $\quad a_1=1 \quad 0<1<2$ ✓

ii) $\forall n>1$

HI = suponemos cierto an $\quad 0<a_n<2$

TI = comprovar cert a_{n+1} $\quad 0<a_{n+1}<2$

$$HI \xrightarrow{+1} 1<a_n+1<3 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{1}<\sqrt{1+a_n}<\sqrt{3} \to 1<a_{n+1}<\sqrt{3}$$

cert que esta acotada $0<a_n<2$ $\qquad 0<1<a_{n+1}<\sqrt{3}<2$

b) Provar que es creixent $\quad a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \ge 1$

inducció

i) $n=1 \to a_1 \le a_2 \to 1 \le \sqrt{2}$ ✓

ii) HI $\quad a_n \le a_{n+1}$

TI $\qquad \forall n \ge 1$

$$a_n+1 \le a_{n+1}+1 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{1+a_{n+1}} \to a_{n+1} \le a_{n+2} \quad \square$$

c) Provar que es (convergente) $\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathbb{R}$

Teorema convergencia monotona (TCM)

a) acotada superior
b) creixent

$\xrightarrow{TCM} \exists \lim\limits_{n\to\infty} = \ell \in \mathbb{R}$

$a_1 = 1$

$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n}$$

$$\ell = \sqrt{1+\ell}$$

$$\ell^2-\ell-1=0 \quad \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & -0{,}62 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \approx 1{,}62 \end{cases}$$

creciente $\lim > 1$

$$\lim_{n\to\infty} = 1{,}62$$

10-

a) $a_1 = 1/2 \quad a_2 = 3/8 \quad a_3 = 15/48 = 5/16 \qquad a_n = a_{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n}$

b) Provar que es decreixent

$$a_{n+1} = a_n \cdot \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{<1} \rightarrow a_n \geq a_{n+1}$$

c) TCM enunciat

d) * a_n es decreixent (b)

Comprovar que es acotada inducció

i) $n=1 \quad a_1 > a_2 \Leftrightarrow 1/2 > 3/8$ ✓

ii) $0 < a_n$

$$a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = a_{n+1} > \frac{2n+1}{2n+2} \cdot 0 > 0$$

↳ llei recurrent

$1/2 > a_{n+1} > 0$

$(5n+25)^{n+1}$

2.3 A més hauríeu de fer

11 Calculeu a i b a cadascuna de les igualtats següents:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-an^2}{3n^2-2}\right)^{1-bn^2}=\sqrt{e}\,;$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{2n+a}.$

12 Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}$, on a, b, c i d són nombres reals, amb $c\neq d$.

13 Demostreu que la successió de terme general

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},\quad \text{per a tot } n\geq 1,$$

és convergent i doneu un interval de longitud menor o igual que $1/2$ dins el qual es trobi el valor del límit.

14 Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals definida per

$$\left\{\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\dots\right\}$$

a) Trobeu una llei de recurrència per aquesta successió.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és fitada.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

d) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

2.4 Solucions

1 a) $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } -1 < \alpha < 1, \\ \nexists & \text{si } a \leq -1; \end{cases}$ b) $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

2 a) $+\infty$, b) $\dfrac{1}{3}$, c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

3 1.

4 a) 0; b) 0.

5 a) 0, b) -1, c) e^2, d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

6 c) $l = 1$.

7 a) $\dfrac{1}{2}$, b) 1, c) 0, d) 0, e) $\dfrac{4}{e}$.

8 a) 1, b) $\dfrac{5}{3}e$, c) $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$, d) 3, e) e^2, f) $\sqrt[5e]{\dfrac{2}{3}}$.

9 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10 a) $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} a_n$.

11 a) $a = -3$ i $b = -1/2$; o $b = 0$ i $a = -3\sqrt{e}$;
b) S'ha de complir la condició $2b - 4 = a(a-2)$.

12 $\dfrac{a-b}{c-d}$.

13 $1/2 \leq l \leq 1$.

14 a) $a_1 = \sqrt{3}$ i $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$; d) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

◇◇◇◇◇

Capítol 3

Teoremes de funcions contínues d'una variable.

3.1 Problemes

1 Demostreu que l'equació $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ té una solució a l'interval $[0, 2]$.

2 Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, amb $a < b$, i siguin f i g dues funcions contínues en $[a, b]$ amb $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Demostreu que existeix $c \in (a, b)$ que verifica $f(c) = g(c)$.

3 Podem assegurar que la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ pren el valor 2.5 a l'interval tancat $[-2, 2]$?

4 Raoneu perquè l'equació $e^{-x^2} = 2x$ té una solució en l'interval $[0, 1]$ i calculeu-la aproximadament amb una precisió de 0.1.

5 a) Separeu les dues solucions reals de l'equació $x - 3 \ln x = 0$.

b) Apliqueu el mètode de la bisecció per calcular les dues solucions de l'equació amb una precisió de $0.5 \cdot 10^{-3}$.

c) Apliqueu el mètode de la secant per calcular les dues solucions de l'equació amb una precisió de tres decimals correctes.

◇◇◇◇◇

3.2 Taller de problemes

6 Demostreu que:

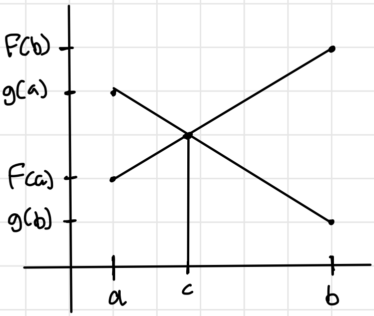
a) l'equació $\ln x = x^2 - 4x$ té una solució real a l'interval $[1, +\infty)$

b) l'equació $x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$ té una solució positiva i una solució negativa.

c) l'equació $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ té totes les seves arrels a l'interval $[-1, 3]$.

2. $a < b \in \mathbb{R}$

F, g continuas $[a,b]$; $F(a) < g(a)$, $F(b) > g(b)$ $\rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, F(c) = g(c)$



1- Demo $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene sol $[0,2]$

$F(0) = 1 > 0$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$F(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 1 = -3 < 0$

Suma de polinomios $\equiv$ continua en $[0,2]$

Usar los 2 valores del intervalo

↳ Bolzano $\rightarrow \exists\, c \in (0,2) \,/\, F(c) = 0$

$c =$ sol. ecuación

3- $F(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 3$ toma el valor 2,5 en $[-2,2]$

$g(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 0{,}5 = 0$

$g(x)$ continua (polinomio + trigo)

$g(x) > 0$ → $g(-2) = -2 - \sin(-2\pi) + 0{,}5 = -1{,}5 < 0$

$g(x) < 0$ $\quad g(2) = 2 - \sin(2\pi) + 0{,}5 = 2{,}5 > 0$

$\Downarrow$ T. Bolzano

$\exists c \in (-2,2) \,/\, g(c) = 0$

4- $e^{-x^2} = 2x$ ¿ Tiene solucion $[0,1]$? sol con presicion 0,1

$\underbrace{e^{-x^2} - 2x}_{F(x)} = 0$

Bolzano $F(x)$ continua en $[0,1]$
suma de exponencial $\pm$ polinomica

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = e^{-0^2} - 0 = 1 < 0 \\ F(1) = e^{-1} - 2 = < 0 \end{array}\right] \xrightarrow{T.B} \exists c \in (0,1) \,/\, F(c) = 0$$

Probar

$F(0,5) = -0,22 \rightarrow c \in (0, 0,5)$

$F(0,3) = e^{-0,09} - 2 \cdot 0,3 = 0,3 > 0 \rightarrow c \in (0,3; 0,5)$

$c = 0,4 \pm 0,1$

5- a) 2 sol $\mathbb{R}$ $x - 3\ln x = 0$
b) biseccion presicion $0,5 \cdot 10^{-3}$ para ambas sol.
c) secante con 3 decimales correctos para ambas sol.

$F(x) = x - 3\ln x$

$F(x)$ continua en $(0, +\infty)$ suma log + poli

a)

1) $F(1) = 1 - 3\ln 1 = 1 > 0$ $\xrightarrow{T.B} \exists c_1 \in (1,2)$
$F(2) = 2 - 3\ln 2 = -0,08 < 0$ $/ F(c_1) = 0$

" $(0, +\infty)$

2) $F(4) = -0,16 < 0$ $\rightarrow \exists c_2 \in (4,5) \,/\, F(c_2) = 0$
$F(5) = 0,17 > 0$

b) biseccion error $0,5 \cdot 10^{-3} \rightarrow$ 3 decimales correctos

$|Error| \leq \dfrac{b-a}{2^n} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$

$1/2^n \leq 0,5 \cdot 10^{-3} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \ln(0,5 \cdot 10^{-3})$

$-n \ln 2 \leq$ "

$n \geq \dfrac{\ln(0,5 \cdot 10^{-3})}{\ln 2} = 11$

	c_i	$F(c_i)$
$a =$	1	1
$b =$	2	-0,08
$c_1 =$	1,5	0,28
$c_2 =$	1,75	0,07
$c_3 =$	1,875	-0,01
$c_4 =$	1,812	0,02
	$\vdots$	
$c_{11} =$	1,8564	

$c_2 \in (4,5)$

sol. $4,53640 = 0,0000021$

$c_2 \in (4,5) \to c_{11} = 4,5366$

c) $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \cdot F(x_n)$$

$c_1 \in (1,2)$

$\downarrow$

$$2 - \frac{2-1}{-0,08-1} \cdot -0,08 = 1,9259 = x_{n+1}$$

$\vdots$

$= 1,8496 = x_{n+2}$

$= 1,85756 = x_{n+3}$

$= 1,85718 = \text{sol.}$

Continuitat

$\sin(2x)$

$2x - 1$

1- $\exists F(x_0)$ $(x_0 \in \mathrm{Dom}\, F)$

2- $\exists \lim_{x \to x_0} F = \lim_{x \to x_0^+} F = \lim_{x \to x_0^-} F$

3- $\lim_{x \to x_0} F = F(x_0)$

6-

a) $\ln x = x^2 - 4x$ té solució real a $[1, +\infty)$

$F(x) = \ln x - x^2 + 4x$ contínua a su domínio $(0, +\infty)$ (polinòmica + log.)

$F(1) = \ln 1 - 1 + 4 = 3 > 0$

$F(5) = \ln 5 - 25 + 20 = -3{,}39 < 0$

Bolzano $\to$ $\exists c \in (1,5) \,/\, F(c) = 0$

Per trobar el valor quan al interval hi ha un infinit també es pot trobar amb el límit:

$\lim_{x \to +\infty} \ln x - x^2 + 4x$

b) $x^2 = x \sin x + \cos x$ té sol. + i − (Funcions trigonomètriques unitat rad)

$\downarrow$

$F(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ es contínua (poli + trigo)

$F(1) = < 0$ | $F(0) < 0$

$F(2) = > 0$ | $F(-2) > 0$

$\downarrow$ Bolzano

$\exists c^+ \in (1,2) \,/\, F(c^+) = 0$

$\exists c^- \in (-2, 0) \,/\, F(c^-) = 0$

7- T. Bolzano a $F(x) = \frac{1}{1 - e^{1/x}}$ en $[-1, 1]$

En $x = 0$ $\nexists F(0) \to F$ no contínua en $[-1, 1]$

b) Demo $F(x) + \frac{1}{2} = 0$ té sol. i trobeu un interval de long. $\leq 1/3$ que contingui la sol.

$g(x) = F(x) + 1/2 = \frac{1}{1 - e^{1/x}} + \frac{1}{2}$

g contínua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$g(-1) = 2{,}08 > 0$

$1 + 1/2 = 3/2 > 0$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 - e^{1/x}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - 1/e^{\infty}} + 1/2 \to$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{0^-} = -\infty$

3/2 no pertenece a $[-1, 0)$

$g(1) = -0{,}082 < 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - e^{1/x}} + 1/2 = \frac{1}{1 - e^{\infty}} + 1/2 = \frac{1}{+\infty} + 1/2 = 1/2 > 0$

$1/0^+ = +\infty$

$0 + 1/2$

$\downarrow$ Bolzano

$\exists c \in (0,1) \,/\, F(c) = 0$

$g(1) < 0$

$g(0{,}7) > 0$ $\to$ $c \in (0{,}7, 1)$

7 És possible aplicar el teorema de Bolzano a la funció $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ en l'interval $[-1,1]$? Demostreu que l'equació $f(x) + \dfrac{1}{2} = 0$ té solució, i trobeu un interval de longitud menor o igual a $1/3$ que la contingui.

8 Siguin les tres funcions polinòmiques següents:

a) $f(x) = x^3 - x + 5$; b) $g(x) = x^5 + 4x^3 - 2x + 2$; c) $h(x) = 4x^4 - 5x - 1$.

i) Per a cadascuna d'elles trobeu el nombre k tal que en l'interval $[k, k+1]$ existeixi algun zero de la funció.

ii) Aplicant el mètode de la bisecció calculeu una arrel per a cada funció amb una precisió d'un decimal correcte ($\eta = 0.05$).

iii) Aplicant el mètode de la secant calculeu una arrel per a cada funció dels tres apartats anteriors amb una precisió de $\eta = 0.05$.

iv) Aplicant el mètode de la tangent calculeu les arrels per a cadascuna d'aquestes funcions amb una precisió de $\eta = 0.005$.

3.3 A més hauríeu de fer

9 Demostreu que per algun valor real de x es compleix la igualtat:

$$x^{163} + \frac{134}{1 + x^4 + \cos^2 x} = 113.$$

10 Trobeu totes les solucions de:

a) l'equació $10x^3 - 10x + 1 = 0$ amb una precisió de 0.000005.

b) l'equació $\sin 2x = \cos 3x$ a l'interval $[0, 2\pi]$. Quina precisió preneu?

11 Demostreu que:

a) l'equació $x^3 - 2x^2 + 3 = 2$ té una solució a l'interval $[-1, 2]$.

b) l'equació $\sin x = x - 1$ té una solució real a l'interval $[1, 2]$.

c) l'equació $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ té quatre arrels reals.

◇◇◇◇◇

8-

a) $F(x) = x^3 - x + 5$

i) $\exists\, k \,/\, [k, k+1]$ existeix algun zero de la Funció

$F(-2) = -1 < 0$ | $k = -2$ | $[-2, -1]$ | $\xrightarrow{\text{Bolzano}}$ $\exists\, c \in (-2,-1) \,/\, F(c) = 0$

$F(-1) = 5 > 0$ | $k+1 = -1$

ii) Secante

* $[-2, -1]$

* $$\boxed{x_n = x_{n-1} - F(x_{n-1}) \cdot \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{F(x_{n-2}) - F(x_{n-1})}}$$

iv) Tangent

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-1} - F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}}$$

-2	-1	-1	5	$-1{,}8333$	$0{,}6713$
-1	5	$-1{,}8333$	$0{,}6713$		

⋮

3.4 Solucions

4 0.4.

5 a) $[1, 2]$ i $[4, 5]$.
b) 1.8569 i 4.5366
c) 1.8572 i 4.5364

7 L'interval és $[3/4, 1]$.

8 i) a) $[-2, -1]$, b) $[-1, 0]$, c)$[-1, 0]$ i $[1, 2]$.
ii) a) -1.91, b) -0.91, c)-0.22 i 1.16.
iii) a) -1.90, b) -0.92, c)-0.20 i 1.14.
iv) a) -1.904, b) -0.926, c)-0.199 i 1.137.

10 a)-1.046680, 0.101032 i 0.945652. b) Hi ha sis arrels, amb una precisió de 0.00005 són 0.31416, 1.57080, 2.82743, 4.08407, 4.71239 i 5.34070.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Capítol 4

Teoremes de funcions derivables d'una variable.

4.1 Problemes

1 Trobeu el punt de la paràbola $y = x^2$ en el qual la recta tangent és paral.lela al segment AB definit pels punts $A(1,1)$ i $B(3,9)$.

2 Demostreu que l'equació $3^{-x} = x$ té una única solució. Quina és la part entera d'aquesta solució?

3 Demostreu que la funció polinòmica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no té dues zeros en $[0,1]$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

4 Considerem l'equació :

$$e^{-x} = \ln x. \tag{4.1}$$

a) Demostreu que l'equació (4.1) té una solució en el conjunt $[1, +\infty)$.

b) Doneu un interval de longitud 0.1 que contingui aquesta solució.

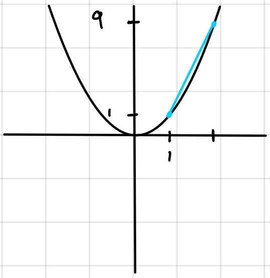
c) Raoneu perquè l'equació donada no pot tenir dues solucions en $[1, +\infty)$.

d) Apliqueu Newton-Raphson amb el valor inicial $x_0 = 1$ per a determinar l'arrel positiva. Atureu el càlcul quan la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que 10^{-4}. Quantes iteracions calen en aquest cas?

5 Calculeu els límits següents: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

1- Que punto de $y = x^2$ en que la recta tg. es paralela al segmento AB [$A = (1,1)$, $B = (3,9)$]



Pendiente AB $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8}{2} = 4$

Pendiente $F'(x) = 2x$

$4 = 2x \to x = 2$ $\quad (2, 4)$ (x^2)

2- Demo $3^{-x} = x$ tiene una unica sol. Calcular la parte entera

Demo $\begin{cases} \exists \text{ sol} \\ ! \text{ (unica)} \end{cases}$

- Existencia

$F(x) = 3^{-x} - x$, $F(x)$ continua en $\mathbb{R}$ (expo + polinomica) suma

$F(0) = 1 > 0$

$F(1) = -\frac{2}{3} < 0$

Bolzano $\to$ $\exists c \in (0,1) \ / \ F(c) = 0$ $\square$

- Unicidad (!) suponemos que hay 2 soluciones $F(c_1) = 0 = F(c_2)$

Teorema Rolle

F continua $[0, 1]$

F derivable $(0,1)$ (exp + polinomio)

$F(c_1) = F(c_2)$

Rolle $\to$ $\exists t \in (c_1, c_2) \ / \ F'(t) = 0$ Contradiccion

$F'(x) = -3^{-x}\log 3 - 1 = 0$

$3^{-x} = -\dfrac{1}{\log 3}$ No sol

$F'(x) \ -3^{-x}\log 3 - 1 < 0$

estrictamente decreciente

Parte entera de c : $(0, 1) \to 0$

3- Dem $F_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene dos ceros en $[0, 1]$ $m \in \mathbb{R}$

F_m continua (polinomio)

$F_m(c_1) = F_m(c_2)$

F_m derivable (")

Rolle $\to$ $\exists t \in (0,1) \ / \ F_m'(t) = 0$

$F'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ no $\in (0,1)$

4- $e^{-x} = \ln x$

a) F continua en $(0, +\infty)$ incluido en $[1, +\infty)$

(suma exp + log en su dominio)

$F(1) \ e^{-1} > 0$ $\quad e^{-1} - \ln 1 = \frac{1}{2{,}7} > 0$

$F(2) \ e^{-2} - \ln 2 < 0$ $\quad e^{-2} - \ln 2 = -0{,}56 < 0$

Bolzano $\to$ $\exists c \in (1,2) \ / \ F(c) = 0$

b) $F(1{,}5) = -0{,}18$
$F(1{,}25) = 0{,}01$ $\to$ $c \in (1{,}3;\ 1{,}4)$
$F(1{,}4) = -0{,}09$

c) $f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$

$-e^{-x} = \frac{1}{x}$ no puede ser 0

$-$ $+$

d) $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

$x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

$1 - \frac{0{,}36788}{-1{,}36788} = x_1$

	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$
x_0	1	0,36788	−1,36788
x_1	= 1,26894	0,04295	−1,06919
x_2	= 1,30910	0,00071	−1,03395
x_3	= 1,30979	$2 \cdot 10^{-7}$	−1,03335
x_4	= 1,30980		

4 interacciones

5- a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hopital}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \quad \frac{1}{x} : \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2x^{1/2}}{x} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1 \\ \quad '' \quad \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \quad '' \quad \frac{x}{tg\, x} = 1 \end{array}}$$

b) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty$

$\to \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hopital}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$

ej: $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x = 0^0 \xrightarrow{\text{Hopital}}$

$'' \quad e^{\ln(\sin x)^x} = e^{x \cdot \ln \sin x} \to e^{\frac{\ln \sin}{\frac{1}{x}}}$

$0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$\to \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x} = -\frac{x^2}{tg\, x} \overset{H}{=} \frac{2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{1} = 0 \to e^0 = 1$

$\frac{0}{0}$

10- TVM, Dem

Teorema del valor medio $\to \exists c \in (a,b) / \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c)$

a) $\operatorname{arctg} x > \frac{x}{1+x^2}$ si $x > 0$ $b = x \wedge a = 0$

$\xrightarrow{\text{TVM}} \exists c \in (0,x) / \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0}{x - 0} = F'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$

$c \in (0,x)$
$c < x \to c^2 < x^2$
$1+c^2 < 1+x^2$
$\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$

b) $\frac{\overbrace{\ln(1+x)}^{F(x)}}{} \leq x$

$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} \xrightarrow{\text{TVM}} \exists c \in (0,x) / F'(c) = \frac{1}{1+x}$

$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$ $c \in (0,x)$

$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c} < x$

$1 + c > 1$
$\frac{1}{1+c} < 1$

c) $\arccos x > \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (0,1)$
$0 < x < 1$

$$\frac{\arccos x - \arccos 0}{x - 0} = F'(c) = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \equiv \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \equiv \arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

$\exists c \in (0,x) \mid F'(c)$

$$c < x$$
$$c^2 < x^2$$
$$-c^2 > -x^2$$
$$1-c^2 > 1-x^2$$
$$\sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} > -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.2 Taller de problemes

6 Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 1$ per a tot $x \in [0,1]$. Demostreu que existeix un únic $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

7 Considerem l'equació

$$e^x = \frac{1}{2}x + 2. \tag{4.2}$$

a) Demostreu que l'equació (4.2) té una solució positiva i una de negativa a l'interval $[-5, 2]$.

b) Demostreu que l'equació (4.2) només té dues solucions reals.

c) Calculeu, sense fer **cap** iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva l'equació (4.2) amb un error absolut menor que 10^{-8}.

8 Calculeu, utilitzant la regla de l'Hôpital, els límits de les funcions següents:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}$; b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$;

d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; f) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

g) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$; h) $\lim_{x\to+\infty} x^{\tan\frac{1}{x}}$; i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(1+x^\beta)}$ si $(\alpha > \beta > 0)$.

9 Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x - \sin x}$.

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄

4.3 A més hauríeu de fer

10 Feu ús del teorema del valor mitjà per a demostrar que es compleix

a) $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$ si $x > 0$; b) $\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$; c) $\arccos x > \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$.

6 $f: \boxed{[0,1] \to [0,1]}$ Demostrar que existe una unica sol. / $F(x_0) = x_0$

F continua
derivable $\wedge$ $\boxed{F'(x) \neq 1}$ $\forall x \in [0,1]$

Existencia de solucions Bolzano

$g(x) = F(x) - x \to$ $g(x)$ continua (resta continuas)
$g(x)$ derivable ($F(x)$ derivable y x)

$g(x)$ continua

$g(0) = F(0) - 0 = F(0) \underset{HI}{\geq} 0$
$g(1) = F(1) - 1 \underset{HI}{\leq} 0$

$\to$ Bolzano $\exists c \in [0,1] / g(c) = 0$
$g(c) = F(c) - c = 0$
$F(c) = c$

Unicidad (Rolle)

$g(x)$ continua
$g(x)$ derivable
$0 = g(a) = g(b)$ $\forall a,b \in [0,1]$

$\xrightarrow{\text{Rolle}}$ $\exists c \in (a,b) / g'(c) = 0 \iff F'(c) - 1 = 0 \iff \boxed{F'(c) = 1}$

$g'(x) = F'(x) - 1$ Contradicció $\triangle$

$\downarrow$ Reducció al absurd
$\exists$ 2 punts $g(x_0) = g(x_1) = 0$

7

$e^x = 1/2 x + 2$

a) Demostra 2 sol. $<^{+}_{-}$ en $[-5, 2]$

Aplicar Bolzano en $\left\langle \begin{array}{l} [0,2] \ + \\ [-5,0) \ - \end{array} \right.$

$F(x) = e^x - \frac{x}{2} - 2$

$F(x)$ continua $[-5,0] \to$ $F(-5) = 0,50 > 0$
$F(0) = -1 < 0$
$\xrightarrow{T.B}$ $\exists c \in (-5,0) / F(c) = 0 \wedge c < 0$

$F(x)$ continua $[0,2] \to$ $F(0) = -1 < 0$
$F(1) = 4,39 > 0$
$\xrightarrow{T.B}$ $\exists d \in (0,2) / F(d) = 0 \wedge d > 0$

b) $F(x)$ continua $[-5,2]$
$F(x)$ derivable

$F'(x) = e^x - 1/2$
$F'(x_0) = 0 \to$ $e^x - 1/2 = 0$
$e^x = 1/2$
$x_0 = \ln(1/2) \simeq -0,7$

c) $\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-8}$ Per la sol. $+ \in (0,2]$

$\frac{2-0}{2^n} \leq 10^{-8} \to 2 \leq 2^n \cdot 10^{-8}$

$\ln(2) \leq n \cdot \ln 2 + \ln 10^{-8}$

$\frac{\ln(2) - \ln(10^{-8})}{\ln 2} \leq n$

$n \geq 27,57 \to n \geq 28$

8-

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} = $ ord infinit $+\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5!} = \dots \frac{e^x}{120} = \infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$ e^x derivable, x^5 derivable

e) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$ $x^{x^{-1}}$ $= \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$

$\hookrightarrow \frac{1}{1+x} : \frac{1}{1} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

$\downarrow =$

$\ln(\ell) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\ln(\ell) = 0 \to e^0 = \ell = 1$

c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 0^0$

$\downarrow$

$\ell = \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

$x>0$, $\ln(x)$ derivable, $1/\sin x$ derivable

$\ln(\ell) = \sin x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$

$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin x^2}} = \frac{\sin^2 x}{-\cos x \cdot x} = 0 \to \ell = 1$

g) $\lim_{x\to\infty} (\cos x)^{1/x} = 1^\infty$

$\downarrow$

$(1+\cos x - 1)^{1/x} \to \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos - 1}}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot \frac{\cos x - 1}{1} \cdot \frac{1}{x}$

$\leftarrow$

$1 = e^0 = \frac{-\sin x}{1} = 0 \leftarrow e^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \frac{0}{0}$

9-

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} = \frac{0 \cdot \leq_1^{-1}}{0} = \frac{0}{0}$

Criteri sandwitch

$\frac{x^2 \cdot -1}{\sin x} \leq \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \leq \frac{x^2 \cdot 1}{\sin x}$

$\downarrow \lim$ $\quad\downarrow$ C. Sandwitch $\quad\downarrow \lim$

$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sin x}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = 0$

$\downarrow LH$ $\quad\quad \downarrow LH$

$\frac{-2x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad\quad \frac{2x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

11 Estudieu el nombre d'arrels reals de la funció $f(x) = 2x^3 - 3bx^2 + 8$ segons els valors del paràmetre b. Per a $b = 3$, calculeu el valor aproximat de l'arrel més petita amb dues xifres decimals correctes.

12 Siguin a, b i c nombres reals i suposem $a^2 < 3b$. Demostreu que la gràfica de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ talla exactament una vegada l'eix d'abscisses.

13 Apliqueu el mètode iteratiu de Newton (o de la tangent) per calcular les dues solucions de l'equació $x - 3\ln x = 0$, amb una precisió de sis decimals correctes.

14 Resoleu pel mètode de Newton les equacions següents obtenint el resultat amb una precisió de sis decimals correctes:

a) $x - \cos x = 0$; b) $10^x = 6x + 30$; c) $x^2 - 1 = \sin x$;

d) $x^x = 10$; e) $5\sin x = x + \dfrac{1}{x}$; f) $xe^x = 1$;

g) $e^x = 5x + 10$, h) $\ln x = 1 + \dfrac{1}{x}$; i) $2x^2 - 10x + 10 + \cos\dfrac{x}{9} = 0$.

Problemes temari de batxillerat

15 Determineu el punt de la gràfica de la funció $f(x) = (x-2)^2$ en el qual la tangent és perpendicular a la recta d'equació $2x - y + 2 = 0$.

16 Calculeu a, b i c de manera que les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^3 - c$ es tallin en el punt $(1, 2)$ i tinguin la mateixa tangent en aquest punt.

17 Calculeu i simplifiqueu les derivades de les funcions següents:

a) $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; b) $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$; d) $y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

e) $y = \ln\sqrt{x^2+x+1}$; f) $y = e^{\sin((2x)^{\frac{1}{3}})}$; g) $y = \sin(\ln x)$; h) $y = x^{x^{\ln x}}$.

18 Determineu i classifiqueu el punts crítics de la funció $f(x) = e^{\,8x - a(x^2+16)}$ segons els valors del paràmetre a ($a \in \mathbb{R}$). Té asímptotes? Calculeu-les en funció de a.

19 Descomposeu el nombre 100 en dos sumands de manera que la suma dels seus cubs sigui mínima.

20 Trobeu els extrems absoluts de las funcions següents als intervals que s'indiquen:

a) $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$ en $[-1, 2]$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \sqrt[3]{x^2}$ en $[-20, 1]$; c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en $[1, e^2]$.

21 Determineu els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius, si existeixen, de cada una de les funcions següents en els dominis de definició:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 9),\ |x| > 3$; b) $f(x) = x^{2/3}(x-1)^4,\ 0 \le x \le 1$.

22 Trobeu els intervals de creixement, concavitat i convexitat de la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{12 + x^2}$.

◇◇◇◇◇

4.4 Solucions

1 $(2, 4)$

2 0

4 *Examen parcial, 9/11/2011.*

5 a) 0, b) 0.

7 *Examen parcial, 13/04/2011.*

8 a) $+\infty$, b) 1, c) 1, d) $\sqrt{ab}$, e) 1, f) 1 g) 1, h) 1, i) α/β.

9 a) 0, b) 1.

11 Per a $b < 2$, una solució; per a $b = 2$ dues solucions i per a $b > 2$ tres solucions.
Si $b = 3$ el valor aproximat de l'arrel més petita amb dues xifres decimals correctes és -0.864.

13 1.8571839 i 4.5364037.

14 a) 0.7390851, b) 1.5975328, i 4.9999983, c) 1.4096240 i -0.6367327,
d) 2.5061841, e) ± 0.5141686 i ± 2.5189457, f) 0.5671433,
g) 3.2718121 i -1.9721691, h) 3.5911215, i) 1.6292701 i 3.3859854.

◇◇◇◇◇

Capítol 5

Fórmula de Taylor.

5.1 Problemes

1 Empreu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1728 + x}$ per tal d'avaluar $\sqrt[3]{1731}$. Fiteu l'error comès.

2 Considereu la funció $f(x) = \ln(1 - x)$.

a) Determineu els cinc primers termes no nuls del polinomi de Taylor centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange de la funció $f(x)$.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor de $\ln 0.75$ amb error més petit que 10^{-3}.

3 Doneu una cota superior de l'error en la fórmula $e \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$ mitjançant la fórmula de Taylor de e^x.

◇◇◇◇◇

5.2 Taller de problemes

4 Sigui $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau dos de la funció $f(x)$ en $x_0 = 1$.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat **a)** calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1.02}$.

c) Doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat **b)**.

5 Avalueu amb tres decimals correctes ($error \leq \frac{1}{2}10^{-3}$) les quantitats següents:

a) $e^{0.25}$; b) $\sin(-0.2)$; c) $\cos(0.9)$; d) $\ln(1.1)$; e) $\ln(0.9)$; f) $\sqrt{1.05}$; g) $\sqrt{0.97}$; h) $1/\sqrt{e}$.

◇◇◇◇◇

1- Usa Taylor de grado 2 de $F(x) = \sqrt[3]{1728+x}$ para calcular $\sqrt[3]{1731}$. Acotar el error

$\sqrt[3]{1731} \simeq P_2(3) \qquad x_0 = 0$

$P_2(x) = F(0) + F'(0)(x \quad) + \frac{F''(0)}{2}(x \quad)^2$

Pol. taylor de grado 2 en un entorno de $x_0 = 0$

$F(x) = \sqrt[3]{1728+x} = (1728+x)^{1/3} \qquad F(0) = 12$

$F'(x) = 1/3\,(1728+x)^{-2/3} \qquad F'(0) = 1/3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1728}^{2}} = \frac{1}{432}$

$P_2(x) = 12 + x/432 - \frac{x^2}{2239488}$

$F''(x) = -1/3 \cdot 2/3 (1728+x)^{-5/3} \qquad F''(0) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1728}^{5}} = \frac{1}{1119744}$

$\sqrt[3]{1731} \simeq P_2(3) = 12{,}00694042$

$F'''(x) = \frac{10}{27}(1728+x)^{-7/3}$

b) $R_2(3) = \frac{F'''(c)}{3!} x^3 = \frac{10 \cdot \cancel{3}}{\cancel{27} \cdot 6 \sqrt[3]{1728+c}^{7}}$

$c \in (0,x)$

$(0,3)$

$\hookrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1728+c}^{7}} \leq \frac{5}{3 \cdot 12^7}$

$c = 0$

2- Hallar los 5 primeros terminos no nulos del polinomio de Taylor ($x_0 = 0$) y el Resto de Lagrange ($F(x) = \ln(1-x)$)

$P_n(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{F^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$P_5(x) = -x - 1/2\, x^2 - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 - \frac{24}{5!}x^5$

$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}$

$R_5(x) = \frac{-120}{6!(1-c)^6} x^6 = \frac{-x^6}{6(1-c)^6}$

$F(x) = \ln(1-x) \qquad f(0)\ \ln(1) = 0$

$F'(x) = -(1-x)^{-1} \qquad F'(0) = -1$

$F''(x) = -(1-x)^{-2} \qquad F''(0) = -1$

$F'''(x) = -2(1-x)^{-3} \qquad F'''(0) = -2$

$F^{IV}(x) = -6(1-x)^{-4} \qquad F^4(0) = -6$

$F^{V}(x) = -24(1-x)^{-5} \qquad F^{V}(0) = -24$

$F^{VI}(x) = -120(1-x)^{-6}$

b) $P_n(0{,}75)$ error $< 10^{-3}$

$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} < 10^{-3}$

$F^{n+1}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \rightarrow$

$R_n(x) = \frac{n!}{(n+1)(1-c)^{n+1}} x^{n+1} \leq 10^{-3}$

$c \in (0;0{,}25)$

$P_n(0{,}75) = \ln(0{,}75) = F(0{,}25) \rightarrow x = 0{,}25 \rightarrow \frac{\cancel{n!} \cdot 0{,}25^{n+1}}{(\cancel{n+1})!\,(1-c)^{n+1}} = \frac{0{,}25^{n+1}}{n+1\,(1-c)^{n+1}} \leq \frac{0{,}25^{n+1}}{n+1 \cdot 0{,}75^{n+1}} \leq 10^{-3} =$

$c = 0{,}25$

$= \frac{1}{n+1\,(3^{n+1})} \leq 10^{-3}$ Probando $n \geq 4$

3- Cota superior del error de la Formula $e \simeq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ usando Taylor

$e^x \qquad F(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x & F(0) &= 1 \\ F'(x) &= e^x & F'(0) &= 1 \\ F''(x) &= e^x & F''(0) &= 1 \\ F'''(x) &= e^x & F'''(0) &= 1 \\ F^{IV}(x) &= e^x & F^{IV}(0) &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$P_4(1) = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \qquad F(1) \simeq P_4(x)$

El error es $R_4(1) = \frac{e^c}{5!} \le \frac{e}{5!} = \frac{3}{5!}$

$c \in (0,1)$

4- $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f(1) &= \sqrt{x} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = 1/2 \\ f''(1) &= -1/4\, x^{-1/2-1} = \frac{1}{4} x^{-3/2} = -1/4 \end{aligned}$$

a) $P_2(f, 1, x) =$
$= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$

b) $\sqrt{1{,}02} \simeq P_2(f, 1, 1{,}02) = 1 - \frac{1}{2}\, 0{,}2 - \frac{1}{8}(1{,}02-1)^2 = 1{,}0095$

c) Doneu una Fita superior del error comes en el calcul de b)

Resto de lagrange : $R_2(f, 1, 1{,}02) = \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$

$$\frac{3c^{-5/2}}{8 \cdot 3!}\, 0{,}02^3 = \frac{2^3 \cdot 10^{-6}}{16} \cdot \frac{1}{c^{5/2}} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$c \in [1; 1{,}02]$
max $c = 1$

5- Avaluar amb $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ error

a) $e^{0{,}25} \rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \end{aligned}$$

Taylor $\rightarrow x_0 = 0$
Evaluar $\rightarrow x = 0{,}25$

$P_n(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$

$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$

$P_n(f, 0, 0{,}25) = \boxed{1 + 0{,}25 + \frac{0{,}25^2}{2!} + \frac{0{,}25^3}{3!} + \frac{0{,}25^4}{4!}} + \dots + \frac{0{,}25^n}{n!}$

$f(0{,}2) \simeq 1{,}2840$

$e^0 < e^c < e^{0{,}25} \dots \quad e^1 \simeq 2{,}7$

n? ← cota d'error

$0 < c < 0{,}25$

$R_n(f, 0, 0{,}25) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} 0{,}25^{n+1} = \frac{e^c}{n+1!} 0{,}25^{n+1} < \frac{3}{n+1!} 0{,}25^{n+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

$\boxed{n = 4} \rightarrow \frac{3}{5!}\, 0{,}25^5 = 0{,}0000024$

d) $\ln(1{,}1)$

$f(x) = \ln(1+x)$
$x_0 = 0$
$x = 0{,}1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & &\rightarrow & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} & & & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} & & & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & & & f'''(0) &= 2! \\ f^{IV}(x) &= -6(1+x)^{-4} & & & f^{IV}(0) &= -3! \\ &\vdots & & & f^n(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

$0 < c < 0{,}1$

$|R_n| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{1}{(n+1)\, 9^{n+1}} \le 0{,}0005 \qquad n = 2 \rightarrow 0{,}000457$

$\ln(1{,}1) \simeq P_2(f, 0, 0{,}1) = x - \frac{x^2}{2!}\Big|_{x=0{,}1} = 0{,}0950$

5.3 A més hauríeu de fer

6 Determineu els cinc primers termes no nuls del polinomi de Taylor centrat a l'origen i l'expressió del residu en la forma de Lagrange de les funcions següents:

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin(x)$; c) $f(x) = \cos(x)$;

d) $f(x) = \ln(1 + x)$; e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$; f) $f(x) = \sinh x$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$; i) $f(x) = (1 + x)^\alpha$;

7 Demostreu, emprant la fórmula de Taylor en 0, les equivalències entre les parelles d'infinitèssims equivalents següents:

a) $\sin x \cong x \quad (x \to 0)$; b) $1 - \cos x \cong \dfrac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$; c) $\tan x \cong x \quad (x \to 0)$;

e) $e^x - 1 \cong x \quad (x \to 0)$; f) $a^x - 1 \cong x \ln a \quad (x \to 0)$; g) $\ln(1 + x) \cong x \quad (x \to 0)$.

$\Big($ L'expressió $f(x) \cong g(x)$ $(x \to a)$ significa que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ i que $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0\Big)$.

8 Calculeu els límits següents fent ús de la fórmula de Taylor i/o d'infinitèssims equivalents:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x^2 - 4ax + 3a^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x \to 1/2} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$.

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{2 - 2\cos x}$; e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \sin^2 x}$; f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\cosh x - 1) \ln(1 + x) - \dfrac{x^3}{2}}{x(\sin x - \arcsin x)}$.

9 Trobeu el desenvolupament de Taylor

a) d'ordre 3 a l'origen de la funció $f(x) = e^x \tan x$.

b) d'ordre 4 a l'origen de la funció $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

c) d'ordre 3 a l'origen de la funció $f(x) = e^{\cos x}$.

d) de grau 2 en $x = \dfrac{\pi}{2}$ per a la funció $f(x) = \ln(\sin x)$.

10 Un corda fixada pels seus extrems descriu una corba anomenada *catenaria*, que té l'equació $f(x) = a \cosh(x/a)$. Demostreu que, per valors petits de x, la catenaria es pot aproximar per la paràbola $y = a + x^2/(2a)$.

11 Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

a) Construïu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$.

b) Escriviu el terme complementari de l'error que es comet en considerar el polinomi de Taylor de grau 1 obtingut enlloc de la funció irracional $f(x)$.

c) Trobeu una cota superior de l'error si $|x| < \dfrac{1}{16}$ en l'aproximació $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$.

d) En la teoria de la relativitat especial la massa m d'una partícula que es mou amb velocitat v ve donada per $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$, on m_0 és la massa en repòs de la partícula i c la velocitat de la llum. Fent ús dels apartats **(a)** i **(c)** justifiqueu que per a velocitats petites en comparació amb la velocitat de la llum $m \approx m_0\left(1+\dfrac{v^2}{2c^2}\right)$.

◇◇◇◇◇

5.4 Solucions

1 $P_2(x) = 12 + \dfrac{x}{432} - \dfrac{x^2}{2239488}, \quad \varepsilon \le 0.4\cdot 10^{-8}.$

2 a) $P_5(x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5$, b) $n \ge 4$.

4 a) $P_2(x) = 1 + \dfrac{(x-1)}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8}$; b) $\sqrt{1.02} \approx P_2(1.02) = 1.00995$; c) $\varepsilon \le 0.5\cdot 10^{-6}$.

5 a) 1.2840 , b) −0.1987 , c) 0.6216 , d) 0.0950 , e) −0.1050 , f) 1.0247 , g) 0.9849 , h) 0.6065 .

6 a) $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4, \quad R_4(x) = \frac{x^5}{120}e^c$;
b) $P_9(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9, \quad R_{10}(x) = -\frac{x^{11}}{39916800}\cos(c)$;
c) $P_8(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8, \quad R_9(x) = -\frac{x^{10}}{3628800}\cos(c)$;
d) $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{5}x^5, \quad R_5(x) = -\frac{x^6}{6(c+1)^6}$;
e) $P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4, \quad R_4(x) = \frac{7\,x^5}{256(c+1)^{9/2}}$;
f) $P_9(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9, \quad R_{10}(x) = \frac{x^{11}}{39916800}\cosh(c)$;
g) $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, \quad R_4(x) = \frac{x^5}{(1-c)^6}$;
h) $P_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4, \quad R_4(x) = \frac{6x^5}{(1-c)^7}$;
i) $P_4(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$,
$R_4(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(1+c)^{\alpha-5}x^5}{5!}$.

8 a) 1, b) $\dfrac{-\cos a}{2a}$, c) $\dfrac{1}{\pi}$, d) $+\infty$, e) 1/2, f) $\dfrac{3}{4}$.

9 a) $x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3$, b) $1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4$, c) $e - \dfrac{e}{2}x^2$, d) $-\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

11 *Examen final, 17/01/2012.*

◇◇◇◇◇

Capítol 6

Càlcul Integral.

6.1 Problemes

1 Calculeu la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \displaystyle\int_3^x \sin \ln t \, dt, \; x > 3;$

b) $g(x) = \displaystyle\int_x^{10} \sin \ln t \, dt, \; x > 0;$

c) $h(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} \sin t^3 \, dt, \; x > 0;$

d) $s(x) = \displaystyle\int_{x^2+3x}^{x^4+2x+1} e^{\sin t} \, dt.$

2 Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} \, dt}{x^3};$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \, dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2} \sin t \, dt}.$

3 Sigui $f : (0, +\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Proveu que f és estrictament creixent a $(0, 1)$ i a $(1, +\infty)$.

4 Sigui $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} t^2 e^{t^2} \, dt$. Proveu que F' és una funció parella i estudieu la concavitat de F.

5 Calculeu la integral següent $I = \displaystyle\int_0^4 (1 - e^{\,x/4}) \, dx$.

(a) Fent ús de la regla de Barrow.

(b) Fent ús de la fórmula dels trapezis amb una partició de 4 subintervals.

(c) Fent ús de la fórmula de Simpson amb una partició de 4 subintervals.

1-

a) $f(x)=\int_3^x \sin\ln t\,dt,\ x>3;$ $\qquad f'(x) = \sin(\ln x)\cdot 1$

b) $g(x)=\int_x^{10} \sin\ln t\,dt,\ x>0;$ $\qquad g'(x) = -\sin(\ln x)$

c) $h(x)=\int_0^{\ln(x)} \sin t^3\,dt,\ x>0;$ $\qquad h'(x) = \sin((\ln(x))^3)\cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(\ln^3(x))}{x}$

d) $s(x)=\int_{x^2+3x}^{x^4+2x+1} e^{\sin t}\,dt.$ $\qquad s'(x) = e^{\sin(x^4+2x+1)}\cdot(4x^3+2) - e^{\sin(x^2+3x)}\cdot(2x+3)$

2-

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hopital}} \frac{\sin(\sqrt{x^2})\cdot 2x}{3x^2} = \frac{\sin x\cdot 2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\cdot 2}{3x}$$

1

$= 2/3$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\int_0^x e^{t^2}\cdot\sin t\,dt} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hopital}} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt + x\cdot e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot\sin x} = \frac{e^{x^2}+1\cdot e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{e^{x^2}\cdot 2x\cdot\sin x + e^{x^2}\cdot\cos x} = 2$$

$1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 0$

$\downarrow \frac{0}{0}$

$0 \quad + \quad 1$

3- $f:(0,+\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ $\qquad$ Demo: est. creciente en $(0,1)$ $\wedge$ $(1,+\infty)$

$$f(x) = \int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$

$\downarrow$

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

$(0,1)$: $\frac{x-1<0}{\ln x<0} \to >0$

$(1,+\infty)$: $\frac{x-1>0}{\ln x>0} \to >0$

$\to f'>0 \Leftrightarrow f$ est. creciente

4- $$F(x) = \int_{-x}^{x} t^2\cdot e^{t^2}\,dt$$

Recuerdo: f par si: $f(-x) = f(x)$

f impar si: $f(-x) = -f(x)$

a) Demo $F'(x)$ par $\equiv F'(-x) = F'(x)$

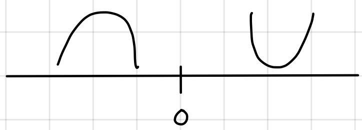
$F'(x) = x^2\cdot e^{x^2} + x^2\cdot e^{x^2} = 2(x^2+e^{x^2})$ $\qquad$ como tiene x^2 siempre sera par ya que el cuadrado de $(-x)^2 = x^2$

b) concavidad $\to$ $F''(x) = 2\left[2x\cdot e^{x^2} + x^2\cdot 2x\cdot e^{x^2}\right]$

$4x\cdot e^{x^2}(1+x^2) = 0$

$4x\cdot e^{x^2} = 0$

$4x = 0 \to x = 0$



$x=0$ punto de inflexión

$(-\infty,0) \to F''(-1) < 0$ cóncava $\cap$

$(0,+\infty) \to F''(1) > 0$ convexa $\cup$

5- Calcula $I = \int_0^4 (1 - e^{x/4})\, dx$

a) Barrow

$$\int_0^4 (1-e^{x/4}\, dx) = x - 4e^{x/4} \Big|_0^4 \quad (4-4e^1) - (-4e^{0/4}) = 8-4e \simeq -2,8731$$

$$4\int e^{x/4} \cdot \frac{1}{4} \rightarrow \int e^{F(x)} F'(x) = e^{F(x)}$$

b) T_4 $\quad h = \frac{b-a}{4} = 1 \rightarrow h\left[\frac{f(0)+f(4)}{2} + f(1) + f(2) + f(3)\right] = -2,9089$

Partición

$x_0 = 0$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$
$x_4 = 4$

c) S_4 $\quad 1/3\left[f(0) + 4[f(1)+f(3)] + 2f(2) + f(4)\right] = 2'8733$

d) T_n, Error $= \frac{(b-a)^3}{12n^4} f''(c) \quad c \in [0,4]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad M_2$

Error $\leq \frac{4^3}{12 \cdot 4} \cdot \frac{1}{16} \cdot e = \boxed{0,057}$

S_n, Error $= \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(c) \quad c \in [0,4]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M_4$

Error $\leq \frac{4^5}{180\, 4^4} \cdot \frac{1}{256} e = \boxed{0,0002}$

$f(x) = 1 - e^{\frac{x}{4}}$

$f'(x) = -e^{\frac{x}{4}} \cdot 1/4$

$c \in [0,4]$
Max $\rightarrow$ $c=4$

$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{x/4} \cdot \frac{1}{4} = \left|-\frac{1}{16} \cdot e^{x/4}\right| \leq \frac{1}{16} \cdot e^{4/4}$

$f'''(x) = -\frac{1}{64} \cdot e^{x/4}$

$c \in [0,4]$ max $c=4$

$f^{IV}(x) = \left|-\frac{1}{256} \cdot e^{\frac{x}{4}}\right| \leq \frac{1}{256} \cdot e^{4/4}$

a) $-2,8\boxed{73}\boxed{1}$
b) $-2,9\boxed{08}9$
c) $-2,873\boxed{3}$

6- $I = \int_{0,6}^{1} (\sin x \cos x)^{4/3}\, dx$

a) Sabiendo que $0 < f^{IV}(x) < 20 \quad \forall x \in [0,6;\,1]$, calcular el numero de subintervalos para que Simpson tenga error $< 0,5 \cdot 10^{-4}$

Simpson cota: $\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 = \frac{(1-0,6)^5}{180n^4} \cdot 20 < 0,5 \cdot 10^{-4}$
$\downarrow$ Probando $n \geq 4$

b) S_4 $\quad h = \frac{1-0,6}{4} = 0,1$ $\qquad x_0 = 0,6 \quad x_1 = 0,7 \quad x_2 = 0,8 \quad x_3 = 0,9$
$x_4 = 1$

$\hookrightarrow$ $h/3\left[f(0,6) + 4[f(0,7) + f(0,9)] + 2f(0,8) + f(1)\right] = 0,1531$

(d) Avalueu l'error absolut en cas que fem ús dels resultats dels apartats **(b)** i **(c)** per aproximar el valor de la integral I. Comenteu els resultats obtinguts.

(e) Calculeu les cotes superiors de l'error que es comet en els càlculs dels apartats **(b)** i **(c)** utilitzant les fórmules de l'error dels mètodes. Comenteu els resultats obtinguts.

6 Siguin $f(x) = \big(\sin(x)\cos(x)\big)^{4/3}$ i $I = \displaystyle\int_{0.6}^{1.0} f(x)\, dx$.

(a) Sabent que $0 < f^{(4)}(x) < 20$, $\forall x \in [0.6, 1.0]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral fent ús de la fórmula de Simpson amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes $(0.5 \cdot 10^{-4})$.

(b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat **a)**.

◇◇◇◇◇

6.2 Taller de problemes (I)

7 Calculeu les integrals immediates següents:

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$; c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx$; d) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$; f) $\displaystyle\int x5^{2x^2}\, dx$; g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+16x^2}\, dx$ h) $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$.

8 Calculeu per parts:

a) $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\, dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$; c) $\displaystyle\int \arcsin x\, dx$; d) $\displaystyle\int x\sin 2x\, dx$.

9 Trobeu l'àrea determinada per la paràbola $y = x^2 + 7$ i la recta $y = 10$.

10 Calculeu l'àrea de la regió tancada determinada per l'eix d'abscisses, les corbes $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ i les rectes $x = 2$ i $x = -2$.

11 Calculeu l'àrea de la regió del quart quadrant limitada per la corba $y = (x^2 - x)e^{-x}$ i el semieix positiu d'abscisses.

◇◇◇◇◇

7-

d) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{1+1/2} = \int x^{3/2} \to \frac{2x^{5/2}}{5} + k = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k = \frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x} + k$

a) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int\frac{x}{x^2}dx + \int\frac{x^2}{x^2}dx$

$\int x^{-2}dx - 2\int x^{-1}dx + \int dx = -1/x - 2\ln(x) + x + k$

b) $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^4+1}4x^3\,dx \to \frac{1}{4}\ln|x^4+1| + k$

$F(x) = x^4+1$
$F'(x) = 4x^3$

$\int \frac{1}{U(x)}U'(x)\,dx = \ln|U(x)| + k$

c) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int(\arcsin x)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{(\arcsin x)^{1/2+1}}{1/2+1} + k = \frac{2\sqrt{\arcsin x^3}}{3} + k$

$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$

f) $\int x\cdot 5^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int 5^{2x^2}\cdot 4x\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\ln(5)}\cdot 5^{2x^2} + k = \frac{5^{2x^2}}{4\ln 5} + k$

$(2x^2)' = 4x$

$\int a^{U(x)}\cdot U'(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^{U(x)}$

e) $\int\frac{1}{x\ln x}dx = \int\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int(\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln(\ln(x)) + k$

$(\ln x)' = 1/x$

g) $\int\frac{1}{1+16x^2}dx = \int\frac{1}{1+(4x)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(4x)^2}4\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(4x) + k$

$\int\frac{1}{1+(U(x))^2}U'(x) = \operatorname{arctg}(U(x)) + k$

h) $\int tg^2 x\,dx = \int\left[\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 - 1\right]dx = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} - 1\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int 1\,dx$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$tg\,x - x + k$

8- Integració per parts $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

d) $\int x\cdot\sin(2x)\,dx = x\cdot\frac{-1}{2}\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot 1\,dx = \frac{-x}{2}\cdot\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)dx =$

$U = x \quad du = dx$

$dv = \sin(2x)\,dx$

$v = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$= \frac{-x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$

b) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \ln x\cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 4\sqrt{x} + k$

$U = \ln x \quad du = 1/x$

$dv = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad V = \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$\int x^{-1/2} = 2\sqrt{x}$

a) $\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = -e^{2x} \cos x - \int -2e^{2x} \cos x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx \rightarrow$ por partes cíclica...

A

$u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x}$

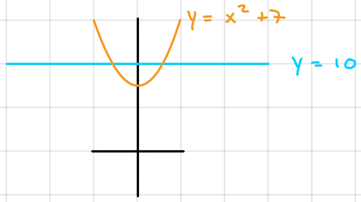
$dv = \sin x \quad v = -\cos x$

$\hookrightarrow A = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4A$

$A = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$

9- parabola $= x^2 + 7$

recta $= 10$



$y = y \rightarrow 10 = x^2 + 7 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x) - g(x) \, dx = \int 10 - x^2 - 3 \, dx = -\frac{x^3}{3} + 3x$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad = -x^2 + 3 \, dx$$

$$\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}^3}{3} + \frac{\sqrt{3}^3}{3} + 3(\sqrt{3} + \sqrt{3}) =$$

$-2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

$$= -\frac{2\sqrt{3}^3}{3} + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{\cancel{3}} 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

6.3 Taller de problemes (II)

12 Utilitzeu el mètode dels trapezis i la regla de Simpson amb 4 subintervals per avaluar les integrals

$$a) \int_0^1 e^{x^2}\,dx\ ; \qquad\qquad b) \int_0^1 \cos(x^2)\,dx\ ,$$

i calculeu la cota superior de l'error comès.

13 Feu ús de les fórmules dels trapezis i de Simpson per avaluar les integrals següents amb un error més petit que $0.5 \cdot 10^{-2}$

$$a) \int_0^1 e^{x^2}\,dx\ ; \qquad\qquad b) \int_0^1 \cos(x^2)\,dx\ .$$

14 Siguin $f(x) = \cos^3(x)$ i $I = \displaystyle\int_0^1 \cos^3(x)dx$.

a) Comproveu que $f''(x) = 6\cos(x) - 9\cos^3(x)$ y $f^{(4)}(x) = -60\cos(x) + 81\cos^3(x)$.

b) Justifiqueu que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| \le 3$ y $\max\limits_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \le 21$.

c) Calculeu a I amb un error menor que 10^{-4}.

15 Sigui $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+2} \frac{e^t}{t}dt$.

a) Comproveu que $x = 0$ és un punt crític de F.

b) Calculeu el valor aproximat de $F(0)$ utilitzant el mètode de Simpson amb 4 subintervals.

c) Sabent que per $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ es té $|f^{(4)}(x)| < 25$, $\forall x \in [1,2]$, calculeu la cota superior de l'error comès.

◇◇◇◇◇

6.4 A més hauríeu de fer

16 Calculeu les integrals següents fent servir canvis de variable:

$$\text{a)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x^{1/3}}\,dx; \qquad \text{b)} \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}}\,dx; \qquad \text{c)} \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx.$$

Para que sirve el TFC (teorema Fundamental de calculo)

- Puntos criticos de una integral (F) $\rightarrow$ $F'(x_0)=0$
- $\lim\limits_{x\to} \dfrac{F=\int}{g(x)} = \text{indet} = \underset{\text{Hopital}}{} \lim \dfrac{F'}{g'} \dots$

Integracion numerica (aprox integrals)

Tipo de ejercicios

Tipo 1

- Dan n° subintervals
- Calcular
  - $\rightarrow$ integral
  - $\rightarrow$ error

Ex 12

Tipo 2

- Dan cota de error
- Calcular
  - $\rightarrow$ n° subintervalos
  - $\rightarrow$ integral

Ex 13

12-

a) $\int_0^1 e^{x^2}dx = ?$ Dan $n=4 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25 = 1/4$

$x_i = a + \frac{1}{4} = 1/4$

$f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2x\, e^{x^2}$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x\cdot 2x\cdot e^{x^2} = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$ $\rightarrow$ error trapezio $< \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \max\limits_{[a,b]} |f''|$

$f'''(x) = 2\cdot 2x\, e^{x^2} + 4\cdot 2x\cdot e^{x^2} + 4x^2\cdot 2x\, e^{x^2}$

$4x\, e^{x^2} + 8x\, e^{x^2} + 8x^3\cdot e^{x^2}$

$8x^3 e^{x^2} + 12x^2 e^{x^2}$

$f^{IV}(x) = 12e^{x^2} + 48x^2 e^{x^2} + 16x^4 e^{x^2}$ $\rightarrow$ error Simpson $< \dfrac{(b-a)^5}{180n^4} \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}|$

error trapezio como la Funcion es creciente el $f''(1) > f''(0) \rightarrow \frac{1}{192} 6e \simeq 0{,}084946$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^0+e^1}{2} + e^{1/4^2} + e^{2/4^2} + e^{3/4^2}\right] \simeq 1{,}4907$$

error Simpson $f^{IV}(x)$ creciente $f^{IV}(1) > f^{IV}(0)$

$f^{IV}(1) = 76e \rightarrow \dfrac{1^5}{\underset{46080}{180\cdot 4^4}}\cdot 76e = 0{,}004483$ $\int_0^1 e^{x^2}dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3)\right]$

$\simeq 1{,}46371$

13-

b) Simpson $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ error $< 0{,}5\cdot 10^{-2} \rightarrow n? \rightarrow \int \simeq 0{,}905$

$f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = -2x\sin(x^2)$

$f''(x) = -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2$

$f'''(x) = -2\cdot 2x\cos x^2 - 4\cdot 2x\cos x^2 + 4x^2\sin x^2 = -12x\cos x^2 + 8x^3\sin x^2$

$f^{IV}(x) = -12\cos x^2 - 12x\cdot 2x - \sin x^2 + 8\cdot 3x^2\sin x^2 + 8x^3\cdot 2x\cos x^2 = \underbrace{-12\cos x^2}_{<0} + \underbrace{48x^2\sin x^2}_{\geq 0} + \underbrace{16x^4\cos x^2}_{\geq 0} < 16+48 = 64$

error $< 0{,}5\cdot 10^{-2} > \frac{1}{180n^4}\cdot 64 \rightarrow n \geq 2{,}90$

$n \geq 3$ $\rightarrow$ Simpson $\boxed{n \text{ parell}}$

4

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \rightarrow F'(x) = f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$$

15- $\int_1^{x^2+2} \frac{e^t}{t}\,dt$ $\qquad f = \frac{e^t}{t}$ continua $t \in \mathbb{R} - \{0\} \to$ continua $\forall x \in [1, x^2+2]$ $\Big|\ \xrightarrow{TFC} F \begin{cases} \text{cont.} \\ \text{deri.} \end{cases}$

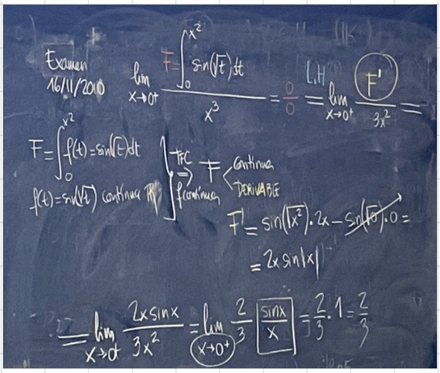
$$F'(x) = \frac{e^{x^2+2}}{x^2+2}\cdot 2x - \cancel{\frac{e^1}{1}\cdot 0}$$

a) Comproveu que $x=0$ es un punt crític

$$F'(0) = \frac{e^{0^2+2}}{0^2+2}\cdot 2\cdot 0 = 0$$

Parcial 16/11/2010

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{LH}{=} \frac{F'(x)}{3x^2}$$



17 Calculeu, les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$; b) $\displaystyle\int_2^4 x \ln x \, dx$; c) $\displaystyle\int_0^\pi \cos x \cosh x \, dx$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \sinh x \cosh x \, dx$; e) $\displaystyle\int_1^3 x \, \mathrm{e}^x \, dx$.

18 Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^3/2$, $y = x^2 - 2x + 4$ i l'eix d'ordenades.

19 Calculeu l'àrea limitada per la corba $y = |x^2 - 4x + 3|$ i les rectes $x = 0,\ x = 4$ i $y = 0$.

20 Calculeu l'àrea de la regió limitada per les gràfiques de:

a) $y = 1/x^2,\ y = 0,\ 1 \le x \le 4$;

b) $y = e^{-x},\ y = 0,\ 0 \le x \le 1$;

c) $y = (x-1)(x-2)(x-3),\ y = 0,\ x = 1$ i $x = 3$.

21 Trobeu l'àrea de la regió determinada per les corbes $y = 2/(1+x^2)$ i $y = x^2$.

22 Calculeu l'àrea d'una de les regions determinades per les corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$.

23 Calculeu, amb un error més petit que 10^{-3}, les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sin^3 x \, dx$; b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(1+x^4) \, dx$; c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{2+x^6} \, dx$;

d) $\displaystyle\int_2^3 x \tanh x \, dx$; e) $\displaystyle\int_3^7 \ln x \sin x \, dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x) \, dx$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

6.5 Solucions

1 a) $\sin(\ln x)$; b) $-\sin(\ln x)$; c) $\dfrac{1}{x}\sin((\ln x)^3)$;

d) $(4x^3+2)e^{\sin(x^4+2x+1)} - (2x+3)e^{\sin(x^2+3x)}$.

2 a) $\dfrac{2}{3}$, b) 2 .

4 Si $x<0$, $F''(x)<0$; si $x>0$, $F''(x)>0$; $x=0$ és un punt d'inflexió.

5 *Examen final, 17/01/2012.*

6 *Examen parcial, 16/11/2010 grup matí.*

7 a) $x-\dfrac{1}{x}-2\ln x+k$; b) $\dfrac{1}{4}\ln(x^4+1)+k$; c) $\dfrac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+k$; d) $2\dfrac{\sqrt{x^5}}{5}+k$;

e) $\ln(\ln(x))+k$; f) $\dfrac{5^{2x^2}}{4\ln 5}+k$; g) $\dfrac{1}{4}\arctan(4x)+k$; h) $\tan(x)-x+k$.

8 a) $\dfrac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+k$; b) $2\sqrt{x}\ln(x)-4\sqrt{x}+k$;

c) $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+k$; d) $\dfrac{1}{4}\sin(2x)-\dfrac{x}{2}\cos(2x)+k$.

9 $4\sqrt{3}$.

10 $2\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$.

11 $\dfrac{3-e}{e}$.

12 a) $T(4)=1.49068$, $\varepsilon_T \le 0.085$, $S(4)=1.46371$, $\varepsilon_S \le 0.0045$;
b) $T(4)=0.89576$, $\varepsilon_T \le 0.020$, $S(4)=0.90450$, $\varepsilon_S \le 0.0009$.

13 a) $T(18)=1.463$, $S(4)=1.464$;
b) $T(10)=0.903$, $S(4)=0.905$.

14 0.6429 (*Examen Parcial-2, 17/12/2018*)

15 $F(0) \simeq 3.05924...,\quad \varepsilon < 0.00055\,.$ (*Examen Parcial-2, 07/06/2018*)

16 a) $6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + x + 6\ln(\sqrt[6]{x} - 1) + k\,;$

b) $\arcsin\left(\dfrac{e^x}{2}\right) + k\,;$ c) $\arctan(\sin x) + k\,.$

17 a) $\dfrac{1}{3} + \arctan 1\,;$ b) $14\ln 2 - 3\,;$ c) $-\dfrac{1}{2}\sinh\pi\ ;$ d) $-\dfrac{1}{2}\left(1 - \cosh(1)^2\right);$ e) $2e^3\,.$

18 $\dfrac{14}{3}\,.$

20 a) $\dfrac{3}{4}\,,$ b) $1 - \dfrac{1}{e}\,,$ c) $\dfrac{1}{2}\,.$

23 a) $T(13) = 0.180\,,\ S(4) = 0.179\,;$ b) $T(18) = 0.323\,,\ S(6) = 0.322\,;$
c) $T(12) = 0.015\,,\ S(6) = 0.014\,;$ d) $T(4) = 2.463\,,\ S(2) = 2.463\,;$
e) $T(96) = -2.597\,,\ S(12) = -2.598\,;$ f) $T(18) = 0.743\,,\ S(12) = 0.743\,.$

◇◇◇◇◇

Part II

Funcions reals de diverses variables

Capítol 7

Funcions de diverses variables.

7.1 Problemes

1 Considereu els conjunts:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, |y| \leq x^2, \, y \neq 0, \, x \in [-2, 2]\right\}.$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.

c) Són conjunts oberts? Són conjunts tancats?

d) Són conjunts compactes?

2 Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$; b) $g(x, y) = \sqrt{y \sin x}$.

3 Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

a) $z(x, y) = x^2 - y^2$; b) $z(x, y) = 1 - |x| - |y|$,

corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

◇◇◇◇◇

1- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}$

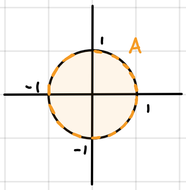
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \leq x^2 \wedge y \neq 0 \wedge x \in [-2,2]\}$

a) Dibujar

b) Frontera, Interior Adherencia

c) Abierto? Cerrado?

d) Compacto?



$y^2+y^2=1 \rightarrow c=(0,0) \wedge r=1$

$0^2+0^2<1$ ✓

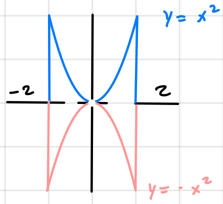
$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$

$\bar{A} = A \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

$\rightarrow$ $A = \mathring{A} \rightarrow A$ abierto $\Leftrightarrow$ A no es cerrado

A no es compacto, A acotado



$|y| \leq x^2 \rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$

$Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y=x^2, x \in [-2,2]\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y=-x^2, x \in [-2,2]\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x=\{2,-2\}, |y| = x^2\} \cup$ Hasta la parabola

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y=0, x \in [-2,2]\}$

$\bar{B} = B \cup Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \leq x^2, x \in [-2,2]\}$

$\mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in (-2,2), |y| < x^2, y \neq 0\}$

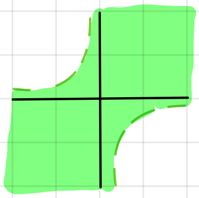
$\rightarrow$ B no abierto B acotado

B no cerrado $\rightarrow$ B no compacto

2- $f(x,y) = \ln(1+xy)$

$1+xy>0 \rightarrow 1+xy=0$

$xy=-1$

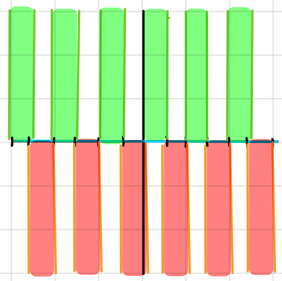


$Dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x>0 \wedge y>-\frac{1}{x} \cup$

$\cup\, x<0 \wedge y<-\frac{1}{x} \cup x=0\}$

b) $g(x,y) = \sqrt{y \sin x}$ (hallar y rep. Dom)

$y \sin x \geq 0$
- $y=0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$
- $y>0 \rightarrow \sin x \geq 0: [2k\pi, 2k+1\pi] \quad k \in \mathbb{Z}$
- $y<0 \rightarrow \sin x < 0: [2k-1\pi, 2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z}$



$Dom\, g = \{(x,y), y=0\} \cup \{(x,y)\ y>0, x \in \{2k\pi, 2k+1\pi\} \cup$

$\cup \{y<0, x \in \{2k-1\pi, 2k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}\}$

3- Dibujar las curvas de nivel $z=-2,-1,0,1,2$

a) $z(x,y) = x^2-y^2$

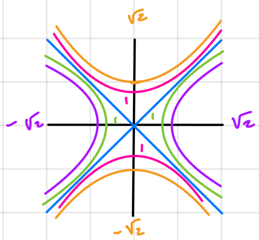
$-2 = x^2-y^2 \rightarrow 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

$-1 = x^2-y^2 \rightarrow 1 = -x^2+y^2$

$0 = x^2-y^2 \rightarrow y = \pm x <$ $y=x$, $y=-x$

$1 = x^2-y^2 \rightarrow$ hipervola horitontal

$2 = x^2-y^2 \rightarrow 1 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$



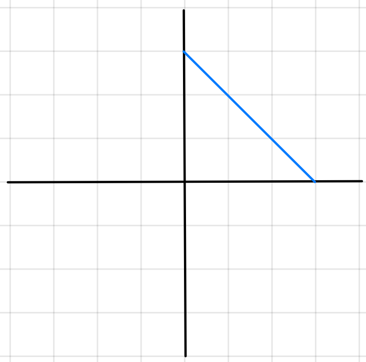
b) $z(x,y) = 1-|x|-|y|$

a) $x \geq 0, y \geq 0$

$-2 = 1-x-y$

$y = -x+3$

$z=-2 \quad -2 = 1-|x|-|y|$



7.2 Taller de problemes

4 Dibuixeu els subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents:

a) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-3| < 2, \ |1-y| \leq 5\big\}$;

b) $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x^2+4x+1| = -x^2-4x-1, \ |y-2| < 10\big\}$;

c) $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x < y\big\}$.

5 Considereu els conjunts:

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 < 1\big\} ;$$

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0, \ xy \leq 1\big\} ;$$

$$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z = 1, \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\big\} .$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.

c) Quins d'aquests conjunts són oberts? I quins tancats? I quins compactes?

6 Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$; b) $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; c) $h(x,y) = \ln(x+y)$.

7 Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

a) $z(x,y) = x^2 y$; b) $z(x,y) = x^2+y^2-1$; c) $z(x,y) = |x+y| + |x-y|$;

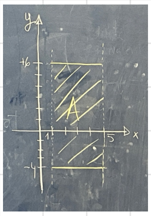
corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

8 Comproveu que les paràboles $y = ax^2$ són corbes de nivell de la funció

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^4+y^2)^3} .$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

4- a) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x-3| < 2,\ |1-y| \leq 5$



$\to |x-3| < 2 \equiv -2 < x-3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5$

$\to |1-y| \leq 5 \equiv -5 \leq 1-y \leq 5$

$5 > y-1 > -5 \quad 6 \geq y \geq -4$

A Fitat

A no obert
no tancat $\to$ No compacte

b) $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x^2+4x+1| = -x^2-4x-1 ;\ |y-2| < 10 \}$

$\to |x^2+4x+1| = \begin{cases} x^2+4x+1 & \text{si eq.} \geq 0 \equiv (-\infty, -3{,}75] \cup [-0{,}27, +\infty) \\ -(x^2+4x+1) & \text{si eq} < 0 \equiv (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}) \end{cases}$

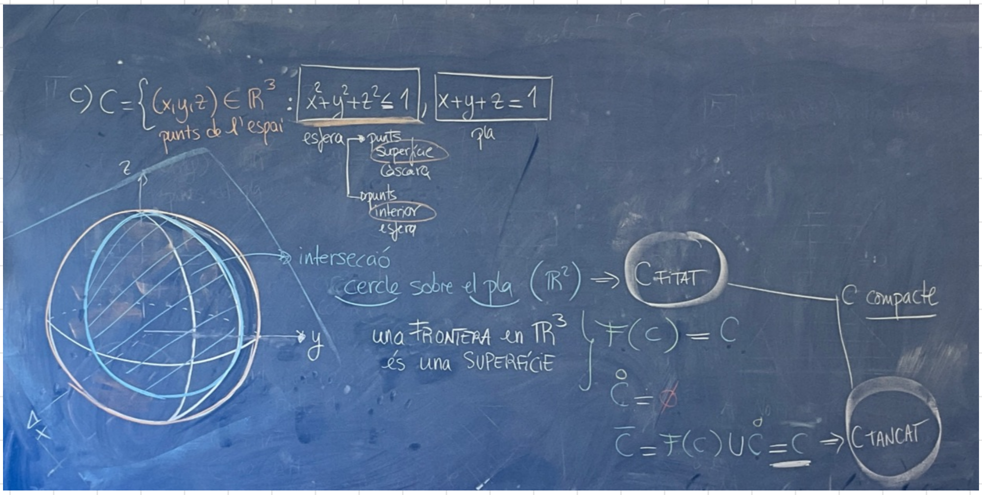
$\to x_1 = -2-\sqrt{3}$
$x_2 = -2+\sqrt{3}$

$x^2+4x+1 = 0 < \begin{matrix} -2-\sqrt{3} \simeq -3{,}75 \\ -2+\sqrt{3} \simeq -0{,}27 \end{matrix}$

$\hookrightarrow \forall x \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$

$\to |y-2| < 10 \to -10 < y-2 < 10$

$-8 < y < 12$



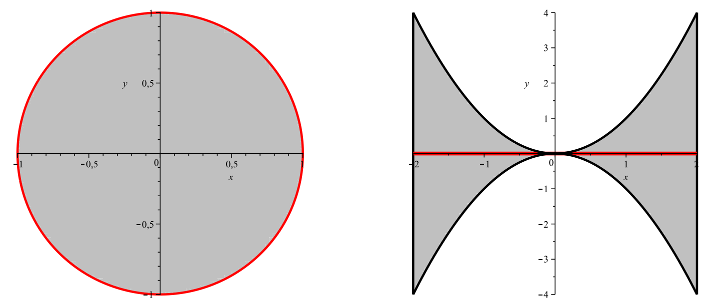


Figura 7.1: Conjunt A (esquerra) i conjunt B (dreta).

7.3 Solucions

1 a) En la representació gràfica, en negre i gris els punts del conjunt, en vermell punts que no són del conjunt.

b) $\operatorname{int}(A) = A, \quad \operatorname{adh}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}, \quad \operatorname{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$
$\operatorname{int}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2, y \ne 0, x \in (-2, 2)\},$
$\operatorname{adh}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le x^2, x \in [-2, 2]\},$
$\operatorname{Fr}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^2 \land x \in [-2, 2]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \{-2, 2\} \land -4 \le y \le 4)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \land -2 \le x \le 2)\}.$

c) El conjunt A és obert, no és tancat. El conjunt B no és obert ni tancat.

d) Ni el conjunt A ni el conjunt B són compactes.

2 En la representació gràfica, en negre i gris els punts del conjunt, en vermell punts que no són del conjunt.

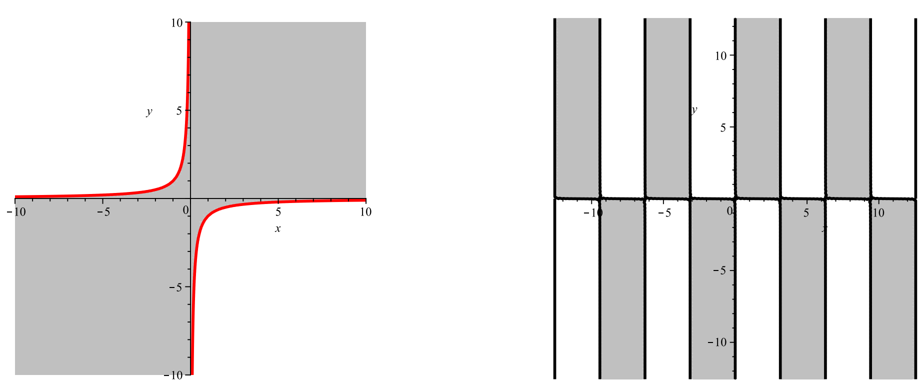


Figura 7.2: $Dom(f)$ (esquerra) i $Dom(g)$ (dreta).

a) $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \land y > -1/x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \land y < -1/x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$
b) $Dom(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2n\pi \le x \le (2n+1)\pi, \ y \ge 0, \ n \in \mathbb{N}\} \cup$
$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2n-1)\pi \le x \le (2n)\pi, \ y \le 0, \ n \in \mathbb{N}\}.$

3 En la representació gràfica, cada corba de nivell en color diferent.

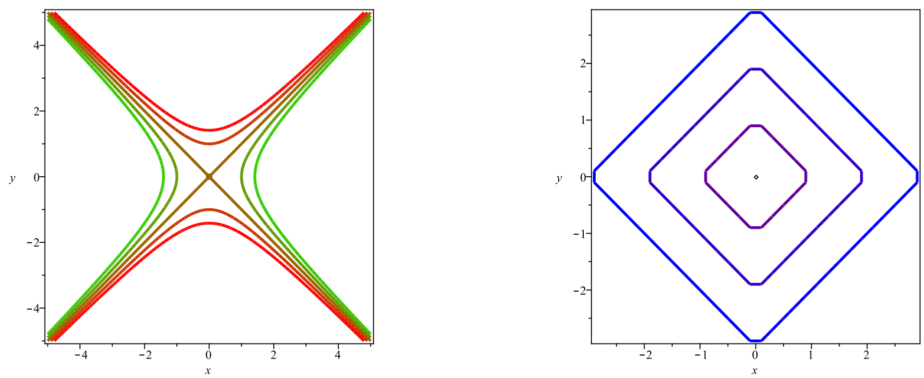


Figura 7.3: Conjunts $z = x^2 - y^2$ (esquerra) i conjunts $z = 1 - |x| - |y|$ (dreta).

4 En gris i negre punts dels conjunts, en vermell no són del conjunt.

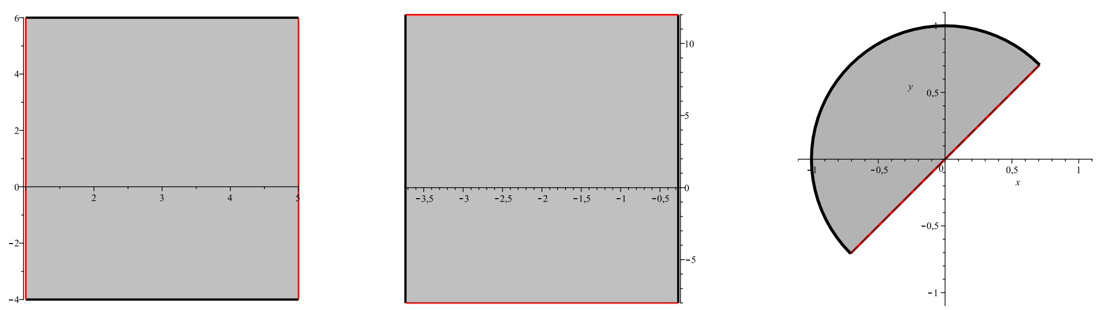
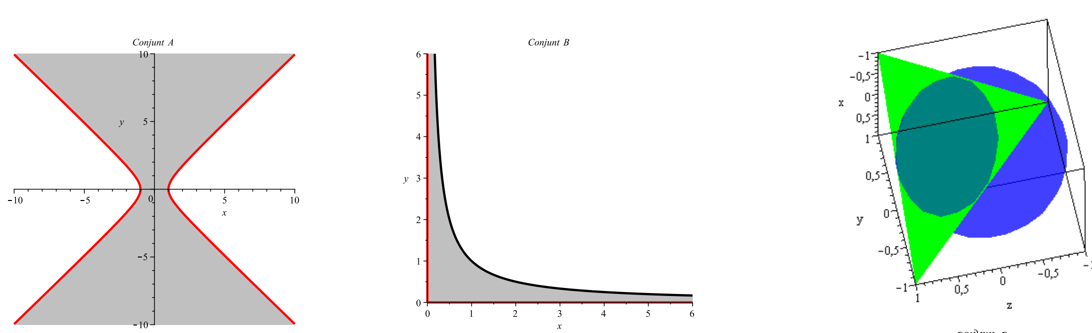


Figura 7.4: Conjunt A (esquerra), conjunt B (mig) i conjunt C (dreta).

5 a) Conjunt A (esquerra), conjunt B (mig) i conjunt C (dreta).



b) $\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 = 1\}$; $\quad \mathrm{int}(A) = A, \quad \mathrm{adh}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 \leq 1\}$.
$\mathrm{Fr}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0,\ y > 0,\ xy = 1 \ \text{ o } \ x = 0,\ y \geq 0 \ \text{ o } \ y = 0,\ x \geq 0\}$;

$\text{int}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, xy < 1\}$, $\text{adh}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, xy \leq 1\}$.
$\text{Fr}(C) = \text{adh}(C) = C$ i $\text{int}(C) = \emptyset$.
c) El conjunt A és obert, el conjunt B ni obert ni tancat i el conjunt C és tancat i compacte.

6 a) Tots els punts de $\mathbb{R}^2$.
b) $\text{Dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
c) $\text{Dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

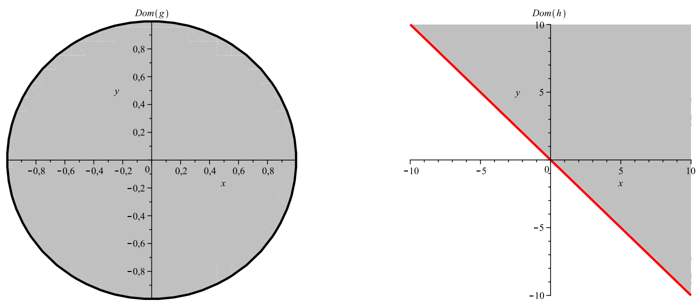


Figura 7.5: Conjunt $\text{Dom}(g)$ (esquerra) i conjunt $\text{Dom}(h)$ (dreta).

7 En la representació gràfica, cada corba de nivell en color diferent.

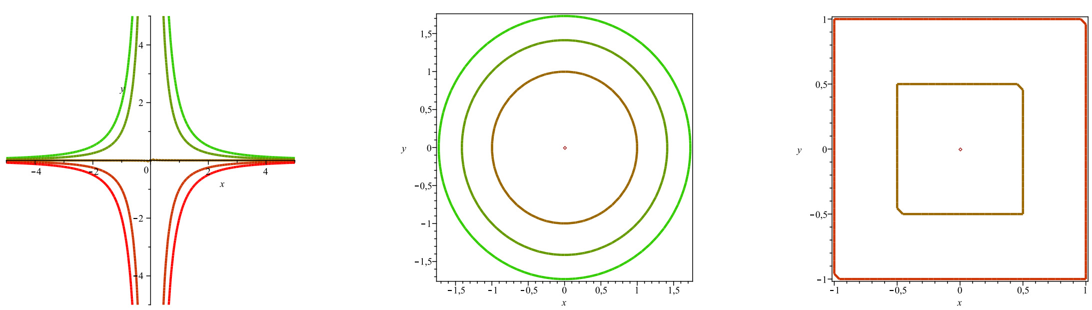


Figura 7.6: Conjunts $z = x^2y$ (esquerra), conjunts $z = x^2+y^2-1$ (mig) i conjunts $z = |x+y|+|x-y|$ (dreta).

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Capítol 8

Derivades. Vector Gradient.

8.1 Problemes

1 Calculeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

2 Donada $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P = (2,3)$ segons la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (3/5, 4/5)$.

3 Trobar la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ en el punt $M(1,1)$ en la direcció que forma un angle de $\pi/3$ amb la direcció positiva de l'eix OX.

4 Determineu els valors de a, b, c tals que la derivada direccional de la funció

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punt $(1,2,-1)$ tingui un valor màxim de 64 en una direcció paral.lela a l'eix OZ.

5 Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, en el punt $M = (1,2,5)$;

b) la superfície $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, en el punt $M = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6 Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ tals que el seu pla tangent sigui paral·lel al pla XY.

◇◇◇◇◇

5- a) $z = x^2 + y^2$ $M = (1,2,5)$

$f_x = 2x$ $f \in C^1$ (funcion polinomica, siempre continua i derivable)
$f_y = 2y$ $S \in$ Superficie $\equiv$ $5 = f(1,2)$ $1^2 + 2^2 = 5$ ✓

Plano tg: $z = f(a,b) + \nabla f(a,b)\,(x-a)\,(y-b)$ $\nabla f(a,b) = (2x, 2y)$
$z = 5 + (2,4)\,(x-1)\,(y-2)$ $\nabla f(1,2) = (2,4)$
$z = 2x + 4y - 5$
$5 = 2x + 4y - z$ ◻

Recta normal: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$ ◻

b) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $(1, 1, \pi/4)$ Dom f $\{(x,y) / x \neq 0\}$

$f \in C^1 (1,1)$ arctg es derivable $f(1,1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \pi/4$ rad
y/x derivable $- \{x = 0\}$

Plano tg: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -yx^{-2}, \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \right) = \nabla f(1,1) = (-1/2, 1/2)$

$= -\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{y}{\cancel{x^2}}, \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x}} \right)$

$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ $= 1/2x - 1/2y + z = \frac{\pi}{4}$
$= x - y + 2z = \pi/2$

Recta normal:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/2}{-2}$

ej: Plano tg y recta normal de $F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3$ $(-2, 1, -3)$

$F \in C^1$ polinomio $\nabla F = (x/2, 2y, 2z/9)$ Plano tg = $(-1, 2, -2/3)\,(x+2)\,(y-1)\,(z+3) = 0$
$\nabla F(-2,1,-3) = (-1, 2, -2/3)$ $-x - 2 + 2y - 2 - \frac{2}{3}z - 2 = 0$

Recta normal =

$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{3z-9}{-2}$

3- $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(1,1)$ en direccion que forma un α de $\pi/3$ con direccion + del eje ox

$D_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{v}$ $(2,-2) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 1 - \sqrt{3}$

$\vec{v} = (\cos \pi/3, \sin \pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$

$\sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}^2} = 1$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓

4- a, b, c / la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en $(1,2,-1)$
tenga valor max de 64 en una dirección paralela del eje oz
$D_v f(1,2,-1)$ valor max 64
Direccion max = $\alpha = 0$ y vale $\|\nabla f(1,2,-1)\| = 64$
$\widehat{\nabla f(1,2,-1)}$ direccion y sentido

$\nabla f(1,2,-1) <$ $\| \ \| = 64 \to \sqrt{\lambda^2} = 64 \to \lambda = \pm 64$
$=$ eje oz $= (0,0,1) \to \nabla f(0,0,\lambda)$

$\nabla f = (0,0,\pm 64)$ $\qquad \nabla f = \begin{cases} f_x = ay^2 + 3cz^2x^2 = 0 \\ f_y = 2axy + bz = 0 \\ f_z = by + 2cx^3z = \pm 64 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - 2c = \pm 64 \end{array} \to \begin{array}{l} c = \frac{-4}{3}a = \mp 8 \\ b = 4a = \pm 24 \\ 2(4a) + \frac{8}{3}a = \pm 64 \\ \frac{32}{3}a = \pm 64 \\ a = \pm 6 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} (6, 24, -8) \\ (-6, -24, 8) \end{array}$

$\nabla f(1,2,-1) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$

6- $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ Calcular puntos superficie $z = f(x,y)$ / Plano tg = Plano xy

$\pi: Ax + By + Cz = D$ si falta una variable es paralela a ella

$\pi': Ax + By = D \equiv \pi \parallel oz$

Si faltan 2 variables $\pi \parallel$ 2 variables

ej: $z = 4$ $\quad \pi \parallel oxy$

Plano tg $\to$ $0x + 0y + z = k$ $\qquad f \in C^1$ (polinomio)

$\downarrow f_x(a,b) \quad \searrow f_y(a,b)$

$\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y \\ f_y = 2 + x - 2y \end{array} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \to \begin{array}{l} x = 10/3 \\ y = 8/3 \end{array}$ $\qquad$ Pto $(10/3, 8/3, 28/3)$

8.2 Taller de problemes

7 Trobeu el gradient de les funcions següents:

a) $f(x,y,z) = \ln(z + \sin(y^2 - x))$ en el punt $(1,-1,1)$;

b) $f(x,y,z) = e^{3x+y}\sin(5z)$ en el punt $(0,0,\pi/6)$;

c) $f(x,y,z) = \displaystyle\int_x^{xy+z^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ en el punt $(\pi/2,1,0)$.

8 Trobar la derivada de la funció $z = x^2 - xy + y^2$ en el punt $M(1,1)$ en la direcció que forma un angle α amb la direcció positiva de l'eix OX. En quina direcció aquesta derivada:

a) assoleix el seu valor màxim?

b) assoleix el seu valor mínim?

c) és igual a 0?

9 Considereu la la funció $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$.

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = -2,-1,0,3$.

b) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

c) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ decreix més ràpidament en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

d) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ és constant en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

10 Calculeu la recta normal i el pla tangent a:

a) la superfície $z = \dfrac{2xy}{x^2+y}$ en el punt $(2,-2,-4)$.

b) la superfície $z = \sin x + 2\cos y$ en el punt $(\pi/2,0,3)$.

◇◇◇◇◇

7- Calcula el $\vec{\nabla} f|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

a) $f(x,y,z) = \ln[z + \sin(y^2 - x)]$ en el punt $(1,-1,1)$ $\qquad \vec{\nabla} f = (-1,-2,1)$

$$f_x = \frac{\cos(y^2-x) - 1}{z + \sin(y^2-x)}\Bigg|_P = \frac{-\cos(0)}{1 + \sin(0)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f_y = \frac{\cos(y^2-x)\, 2y}{z + \sin(y^2-x)}\Bigg|_P = \frac{1\cdot(-2)}{1} = -2$$

$$f_z = \frac{1}{z + \sin(y^2-x)}\Bigg|_P = 1$$

8- Derivada direccional $= \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$

$\hookrightarrow |\vec{\nabla} f| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

$\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ Max $\Longleftrightarrow \cos(\nabla f, v) = 1 \Longleftrightarrow \vec{\nabla} f \wedge \vec{v}$ misma dirección y sentido $(\vec{v} = \lambda \vec{\nabla} f)$ $\lambda > 0$ $\qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ Min $\Longleftrightarrow \cos(\nabla f, v) = -1 \Longleftrightarrow \vec{\nabla} f \wedge \vec{v}$ misma dirección y sentido opuesto $(\vec{v} = \beta \vec{\nabla} f)$ $\beta < 0$ $\qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$

$0 \Longleftrightarrow \cos(\nabla f, v) = 0 \Longleftrightarrow \vec{\nabla} f \wedge \vec{v} \perp$ $\qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \vee (-1,1) \vee (v_x, -v_x)$

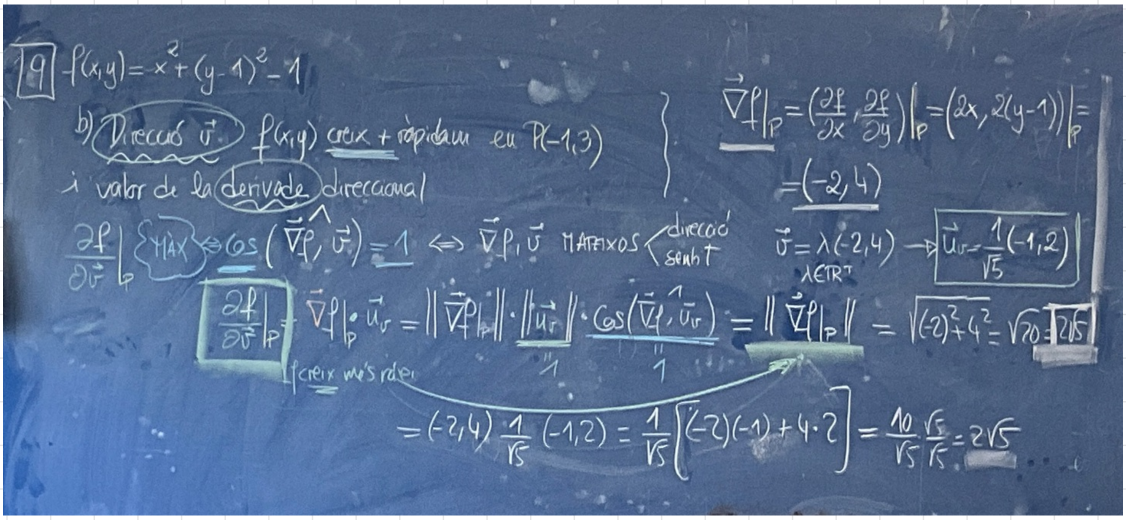
f constante

$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en $M = (1,1)$

$$\vec{\nabla} f = (2x - y,\ 2y - x)\Big|_M = (1,1)$$

$f_x = 2x - y = 1$

$f_y = 2y - x = 1$



8.3 A més hauríeu de fer

11 Determineu l'equació del pla tangent a la superfície d'equació $z = e^{x\cos y}$ en el punt $(-1, \pi/4, e^{-\sqrt{2}/2})$.

12 Una distribució de temperatures al pla ve donada per la funció

$$f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos 2x + 4\cos 3y\,.$$

Trobeu la direcció de l'increment més gran de temperatura i la del decreixement més gran en el punt $(\pi/3, \pi/3)$.

13 Quina és la diferència entre el valor del gradient de la funció

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

en el punt $M(1,2,2)$ i el valor del valor del gradient de la funció

$$g(x,y,z) = x + y + z + 0.001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

en el mateix punt?

14 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció amb derivades parcials contínues, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ i tal que $f(x,x) = 3$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Demostreu que la derivada de f en el punt $(0,0)$ en la direcció de la bisectriu del primer quadrant és zero.

b) Fent ús del resultat de l'apartat anterior, determineu la direcció per a la qual la derivada direccional de f en l'origen és màxima i el valor d'aquesta derivada.

15 Quina és la direcció en la qual $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ creix més ràpidament en el punt $(-1,1)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

16 Proveu que tots els plans tangents a la superfície $z = x\sin(x/y)$ passen per l'origen de coordenades.

◇◇◇◇◇

8.4 Solucions

1 $f'_x(x,y) = \cos x \, \sin y \, (\sin x)^{\sin y - 1}$, $\quad f'_y(x,y) = \cos y \, \ln(\sin x) \, (\sin x)^{\sin y}$

2 $\dfrac{36}{5}$.

3 $1 - \sqrt{3}$.

4 $(a,b,c) = (6, 24, -8)$ o $(a,b,c) = (-6, -24, 8)$.

5 a) $2x + 4y - z - 5 = 0$, $\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$.
b) $x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$, $\quad 2(x-1) = 2(1-y) = z - \dfrac{\pi}{4}$.

6 $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{28}{3}\right)$.

7 a) $(-1, -2, 1)$, $\quad$ b) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $\quad$ c) $(0, 1, 0)$.

8 a) $(1,1)$; b) $(-1,-1)$; c) $(1,-1)$ i $(-1,1)$.

9 (*Examen final 14/06/2011.*)

10 a) L'equació de la recta normal és $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+4}{-1}$ i l'equació del pla tangent és $z = 6x + 4y - 8$.
b) L'equació de la recta normal és $x = \pi/2$, $y = 0$ i l'equació del pla tangent és $z = 3$.

11 $z = e^{-\sqrt{2}/2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}/2}(x+1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}/2}\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

12 La direcció de l'increment més gran de temperatura és $(-3,-1)$ i la del decreixement més gran és $(3,1)$.

15 La direcció és $(-1,1)$ i la derivada val $\sqrt{2}$.

◇◇◇◇◇

Capítol 9

Fórmula de Taylor. Extrems relatius.

9.1 Problemes

1 Donada la funció $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$:

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 per a f en el punt $(0,0)$.

b) Utilitzant el polinomi obtingut, calculeu un valor aproximat per a $f(1/10, 1/10)$ i fiteu l'error.

2 Es demana,

a) Escriviu l'equació del pla tangent a la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per l'equació: $z = \sqrt[3]{x\,y}$, en el punt $P\,(1,\,1,\,1)$.

b) Calculeu aproximadament mitjançant un polinomi de Taylor de primer grau la quantitat $\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01}$. Calculeu l'error en aquesta aproximació, és a dir doneu una fita superior del residu en aquest càlcul.

3 Trobeu els extrems relatius de les funcions següents. En algun dels punts crítics, el determinant de la matriu hessiana és zero, i, per tant, cal determinar el caràcter del punt fent ús directament de les definicions de màxim, mínim o punt de sella.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27\,;$

b) $f(x,y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2\,;$

c) $f(x,y) = y^2 - x^3\,;$

d) $f(x,y) = x^2y^2\;(1-x-y)\,.$

4 Trobeu els valors de a i b per tal que la funció $f(x,y) = ax^3 + 3bxy^2 - 15a^2x - 12y + 5$ tingui un mínim local al punt $(2,1)$.

3- a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9yx + 27$

$f_x = 3x^2 - 9y = 0$
$f_y = 3y^2 - 9x = 0$

Resta $3x^2 - 3y^2 + 9x - 9y = 0 \to 3(x^2 - y^2) + 9(x-y) = 0$

$3(x+y)(x-y) + 9(x-y) = 0$

$3(x-y)[(x+y)+3] = 0$

$x = y$
$3x^2 - 9x = 0$
$x(3x-9) = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Puntos críticos
$\boxed{(0,0) \quad (3,3)}$

$y = -x - 3$
$3x^2 + 9x + 27 = 0 \quad \dots \quad \sqrt{\ } \ \cancel{\exists}$

$f_{xx} = 6x$
$f_{xy} = -9$
$f_{yy} = 6y$

$Hf = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$

(3,3) det = 243 > 0 → $\Delta_1 > 0$ → f tiene min local en (3,3)

(0,0) det = −81 → pto. de silla (0,0)

b) $f(x,y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2$

$f_x = 2(x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)\cdot(2x-2) = 0$
$f_y = 2(x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)\cdot(8y-8) = 0$

→ $(x^2 - 2x + 4y^2 - 8y) = 0^{*}$ → $\dfrac{(x-1)^2}{5} + \dfrac{(y-1)^2}{\frac{5}{4}} = 1$ elipse

→ $2x - 2 = 0 \to x = 1$
$8y - 8 = 0 \to y = 1$ $(1,1)$

$f_{xx} = 2(2x-2)^2 + 4(x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)$
$f_{xy} = 2(2x-2)(8y-8)$
$f_{yy} = 2(8y-8)^2 + 16(x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)$

$Hf/_{*} = \begin{pmatrix} 2(2x-2)^2 & 2(2x-2)(8y-8) \\ 2(2x-2)(8y-8) & 2(8y-8)^2 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = 0 = ?$

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -80 \end{pmatrix} \to \Delta_2 > 0 \to \Delta_1 < 0$ max local (1,1)

Estudio local: f(elipse) = 0
f(entorno elipse) ≥ 0
f tiene min relativos en todos los puntos de la elipse

c) $f(x,y) = y^2 - x^3$

$f_x = -3x^2 = 0$
$f_y = 2y = 0$ → (0,0)

$f_{xx} = -6x$
$f_{xy} = 0$
$f_{yy} = 2$

$Hf = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $Hf(0,0)$ $D_2 = 0$

Estudio local $f(0,0) = 0$

$f(\text{entorno}) = $ → $y=0$, $f(x,0)$ → $x>0$ $f>0$; $x<0$ $f<0$ Pto. silla

d) $f(x,y)$ $x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3$

$f_x = 2xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3 = 0$ → $xy^2(2 - 3x - 2y) = 0$
$f_y = 2yx^2 - 2yx^3 - 3y^2x^2 = 0$ → $x^2y(2 - 2x - 3y) = 0$

$xy = 0$ | $x=0$ v $y=0$

↓ $xy \neq 0$

$2 - 3x - 2y$ | 2) $4 - 6x - 4y = 0$
$2 - 2x - 3y$ | −3) $-6 + 6x + 9y = 0$

↓

$-2 + 5y = 0 \to y = 2/5$
$x = 2/5$

Pto. críticos $x = 0$
$y = 0$
$(2/5, 2/5)$

$f_{xx} = 2y^2 - 6xy^2 - 2y^3 = 0$
$f_{xy} = 4xy - 6x^2y - 6xy^2 = 0$
$f_{yy} = 2x^2 - 2x^3 - 6x^2y = 0$

$(2/5, 2/5)$

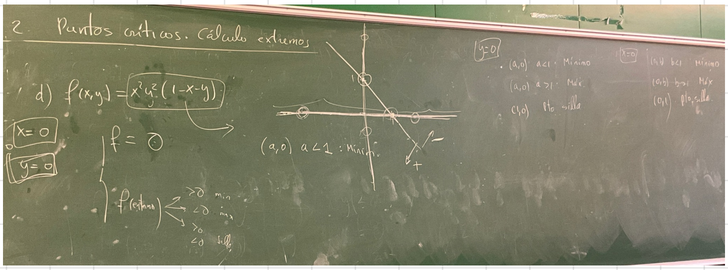
$Hf \begin{pmatrix} -\frac{24}{125} & -\frac{16}{125} \\ -\frac{16}{125} & -\frac{24}{125} \end{pmatrix} = D_2 > 0 \to \Delta_1 < 0$ max local

$$Hf(0,b) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \Delta_2 = 0$$

$$Hf(a,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \to \Delta_2 = 0$$

$x=0$ ó $y=0$ $\Big\}$ $f = 0$

f (entorno)



4- Calcula a,b para que $f(x,y) = ax^3 + 3bxy^2 - 15a^2x - 12y + 5$ tenga mínimo local $(2,1)$

$\vec{\nabla} f(2,1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3ax^2 + 3by^2 - 15a^2 \\ f_y = 6bxy - 12 \end{array}\right| \to \begin{array}{l} 12a + 3b - 15a^2 = 0 \to -15a^2 + 12 + 3 = 0 \\ 12b - 12 = 0 \to b = 1 \end{array}$$

$a = 1 \quad a = -1/5$

Δ_2 det $(Hf(2,1)) > 0$

$\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) > 0$

$f_{xx} = 6ax$

$f_{xy} = 6by$

$f_{yy} = 6bx$

$$Hf = \begin{vmatrix} 12a & 6b \\ 6b & 12b \end{vmatrix} = 144ab - 36b \xrightarrow{(1,1)} 144 - 36 > 0 \checkmark$$

$12 > 0 \checkmark$

min local $(2,1)$

9.2 Taller de problemes (I)

5 Trobeu les derivades parcials de primer i segon ordre de les funcions següents:

a) $x^4 + y^4 - 4x^2y^2$; b) $\ln(x^2 + y^2)$; c) $x\,y + \dfrac{x}{y}$; d) $\arctan \frac{x}{y}$;
e) $x \sin(x + y)$; f) $(x^2 + y^2)e^{x+y}$; g) $x^{\frac{y}{z}}$; h) $x\,y\,z\,e^{x+y+z}$.

6 Trobeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x, y) = xy^2 + \sin xy$ en el punt $(1, \pi/2)$.

7 Sigui $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x, y) = 1 + x^3 + y^2 + 2 \int_0^{3x} \sqrt{1 + t^2}\, dt + x \int_0^{y^2} e^{t^2/2}\, dt.$$

Calculeu el polinomi de Taylor de segon grau de f en $(0, 0)$.

8 Fent ús de polinomis de Taylor de segon grau per a funcions de dues variables, calculeu aproximadament:

a) $\sqrt{1.03 + 2.98}$; b) $\sqrt[3]{0.98 \times 1.02}$; c) $0.95^{2.01}$.

◇◇◇◇◇

9.3 Taller de problemes (II)

9 Comproveu que $(0, 0)$ és un punt de sella de la funció $f(x, y) = \left(x^2 + (y - 1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 2y\right)$.

10 Trobeu i classifiqueu els punts crítics de les funcions següents:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$;

b) $f(x, y) = \sin x\ \sin y$;

c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$;

d) $f(x, y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$;

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$;

f) $f(x, y) = x^3 - x^2y + 3y^2$;

g) $f(x, y) = xy^2\ (3 - x - y)$.

10 a) $f(x,y) = x^2+y^2+x+y+xy$

$f_x = 2x+1+y$ $\qquad \vec{\nabla} f = (2x+1+y,\ 2y+1+x)$

$f_y = 2y+1+x$

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \rightarrow \quad -3y-1=0 \leftrightarrow -3y=1 \leftrightarrow y=-\frac{1}{3}$$

$x+2(-\frac{1}{3})+1=0$

$x+\frac{1}{3}=0 \leftrightarrow x=-1/3$ $\qquad pc = (-1/3, -1/3)$

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = 1$

$f_{yy} = 2$

$Hf = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad 4-1=3>0$

$\hookrightarrow f_{x^2}>0$ min relativo

d) $f(x,y) = (x-1)^4+(x-y)^4$

$f_x = 4(x-1)^3+4(x-y)^3 \rightarrow 4(x-1)^3+4(x-y)^3=0$

$f_y = -4(x-y)^3 \qquad -4(x-y)^3=0$

$\hookrightarrow x=y \rightarrow 4(x-1)^3=0 \rightarrow x=1=y$ $\quad$ pto. $(1,1)$

$f_{xx} = 12(x-1)^2+12(x-y)^2$

$f_{xy} = -12(x-y)^2$

$f_{yy} = 12(x-y)^2$

$Hf(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow f_{x^2}=0 \rightarrow$ Estudio local $\quad f(1,1)=0$

$\underset{\text{cerca de } (1,1)}{f(x,y)} = (x-1)^4+(x-y)^4>0$ mínimo relativo

f) $f(x,y) = x^3-x^2y+3y^2$

$f_x = 3x^2-2xy \rightarrow \begin{cases} 3x^2-2xy=0 \\ -x^2+6y=0 \end{cases} \rightarrow x(3x-2y)=0$

- $x=0 \leftrightarrow y=0$ pto $(0,0)$
- $3x-2y=0$, $x=\frac{2}{3}y$

$f_y = -x^2+6y$

$f_{xx} = 6x-2y$

$f_{xy} = -2x$

$f_{yy} = 6$

$-(\frac{2}{3}y)^2+6y=0 \rightarrow -\frac{4}{9}y^2+6y=0$

$\frac{2}{9}y(2y+27)=0$

- $y=0 \leftrightarrow x=\frac{2}{3}y=0$
- $-2y+27=0$

$y=\frac{27}{2}$ $\quad x=\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{2}=\frac{54}{6}=9$ $\quad$ pto. $(9, 27/2)$

$Hf = \begin{pmatrix} 6x-2y & -2x \\ -2x & 6 \end{pmatrix} \rightarrow (0,0)$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \Delta_1=0$ Estudio local

$\hookrightarrow f(0,0)=0$

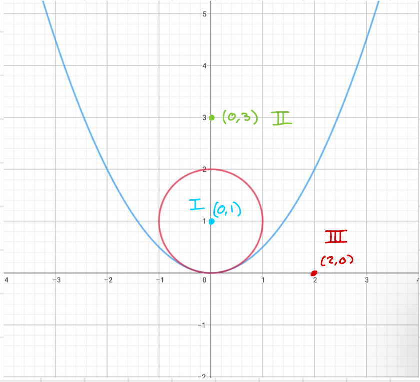
$f(x,y)\Big|_{y=0} = x^3$
- $x>0 \rightarrow f>0$
- $x<0 \rightarrow f<0$

pto. silla $(0,0)$

$\begin{vmatrix} 27 & -18 \\ -18 & 6 \end{vmatrix} = <0 \rightarrow$ pto. silla

Cuando no es facil de ver el estudio buscar $x=0 \vee y=0$

9- $f(x,y) = (x^2+(y-1)^2-1)(x^2-2y)$. $(0,0)$ pto. silla



Estudi local: $f(0,0)\ (0+1-1)(0) = 0$ Circunferencia $(0,1)$ $r=\sqrt{1}=1$

$f(x,y)\Big|_{pto} = 0 \iff x^2+(y-1)^2-1=0 \rightarrow x^2+(y-1)^2=1$

$x^2-2y=0 \rightarrow y=\frac{1}{2}x^2$ parabola $\cup$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}\ f(0,1) = (-1)(-2) = 2>0 \\ \mathrm{II}\ f(0,2) = (2^2-1)(-6) = -18<0 \end{array}\right\}\ \text{pto. silla}$$

12- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$

b) $f(0,0) = 0$

$f(x,y)\Big|_{\text{pto alrededor } (0,0)} \rightarrow$

$f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|>0$

$f(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|>0$

$f(x,x) = \sqrt{2x^2}-x^2 = \sqrt{2}\,|x|-x^2>0$ $\rightarrow$ $(0,0)$ mínimo relativo

$f(x,-x) = \sqrt{2}\,|x|+x^2>0$

11 Sigui $f(x,y) = e^{\lambda x+y^2} + \mu \sin(x^2+y^2)$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Determineu els valors dels paràmetres λ i μ sabent que f té en $(0,0)$ un extrem relatiu i que el polinomi de Taylor de segon grau de f a l'origen pren el valor 6 al punt $(1,2)$. Amb els resultats obtinguts, quin tipus d'extrem és el punt $(0,0)$ per a f?

12 Donada la funció $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$,

a) Trobeu els extrems relatius de f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Analitzant l'expressió de f, esbrineu si $(0,0)$ és el punt d'extrem relatiu.

◇◇◇◇◇

9.4 A més hauríeu de fer

13 Determineu el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 centrat a l'origen de les funcions següents:

a) $f(x,y) = e^{x+y}$; b) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$; c) $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$;

d) $f(x,y) = \sin(x\,y)$; e) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$; f) $f(x,y) = \frac{y}{1-x}$.

14 Trobeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de les funcions següents en el punt que s'indica:

a) $f(x,y) = \arctan y/x$ a $(1,1)$; b) $f(x,y) = \cos xy$ a $(0,0)$;

c) $f(x,y) = e^{xy}$ a $(0,0)$; d) $f(x,y) = x\sin y + y \sin x$ a $(0,0)$;

e) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ a $(0,0)$; f) $f(x,y) = e^{2x}\cos y$ a $(0,0)$;

15 Trobeu els extrems relatius de les funcions següents. En algun dels punts crítics, el determinant de la matriu hessiana és zero, i, per tant, cal determinar el caràcter del punt fent ús directament de les definicions de màxim, mínim o punt de sella.

a) $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$;

b) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$;

c) $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$;

d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)$, amb $a \neq 0$;

e) $f(x,y) = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2$;

f) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

h) $f(x,y) = 9x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 4y$;

i) $f(x,y) = (x+y-1)(x^4+y^4)$;

j) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$.

16 Trobeu les derivades parcials següents:

$$\text{a)}\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \text{si } u = x\ln(xy); \qquad \text{b)}\ \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}, \quad \text{si } u = x^3 \sin y + y^3 \sin x;$$

$$\text{c)}\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \text{si } u = e^{xyz}; \qquad \text{d)}\ \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}, \quad \text{si } u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q.$$

◇◇◇◇◇

9.5 Solucions

1 a) $P_2(x,y) = 2x + 3y - 2x^2 - 6xy - \dfrac{9}{2}y^2$.
b) Una cota superior és 0.05 i el valor aproximat per a $f(1/10, 1/10)$ és 0.38 .

2 (*Examen final 11/01/2011.*)

3 a) Mínim relatiu a $(3,3)$, i $(0,0)$ és punt sella.
b) Màxim relatiu a $(1,1)$ i mínims relatius en tots els punts de la corba $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y = 0$.
c) $(0,0)$ és punt sella.
d) Màxims relatius a $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ i als punts de les semirectes $x = 0,\ y > 1$ i $y = 0,\ x > 1$.
Mínims relatius als punts de les semirectes $x = 0,\ y < 1$ i $y = 0,\ x < 1$.
Els punts de sella són $(1,0)$ i $(0,1)$.

4 $a = 1$, $b = 1$.

6 $P_2(x,y) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + 1 + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 (x-1) + \pi\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \dfrac{\pi}{2}(x-1)\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

7 $P_2(x,y) = 1 + 6x + y^2$.

8 a) 2.00250 , b) 0.999867 , c) 0.902 .

10 a) Mínim relatiu a $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

b) Màxims relatius a $\left(\frac{\pi}{2}(2n+1), \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$ si $n+k$ és parell.
Mínims relatius a $\left(\frac{\pi}{2}(2n+1), \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$ si $n+k$ és senar.
Els punts de sella són $(n\pi, k\pi)$.
c) Màxim relatiu a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i mínim relatiu a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
d) Mínin relatiu a $(1,1)$.
e) Mínims relatius $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ i punt sella a $(0,0)$.
f) Els punts de sella són $(0,0)$ i $\left(9, \frac{27}{2}\right)$.
g) Màxims relatius a $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, i als punts de les semirectes $y=0,\ x<0$ i $y=0,\ x>3$.
Mínims relatius als punts del segment $y=0,\ 0<x<3$.
Els punts de sella són $(0,0)$, $(0,3)$ i $(3,0)$.

11 $\lambda = 0$, $\mu = 1/5$. Mínim relatiu.

12 a) No hi ha cap extrem relatiu, els punts $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ són punts de sella.

b) $(0,0)$ és mínim relatiu.

13 a) $P_2(x,y) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$,
b) $P_2(x,y) = xy$,
c) $P_1(x,y) = y$,
d) $P_2(x,y) = xy$,
e) $P_2(x,y) = x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}$,
f) $P_2(x,y) = y + xy$.

14 a) $P_2(x,y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$,
b) $P_1(x,y) = 1$,
c) $P_2(x,y) = 1 + xy$,
d) $P_2(x,y) = xy$,
e) $P_2(x,y) = xy,.$
f) $P_3(x,y) = 1 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}xy^2$.

◇◇◇◇◇

Capítol 10

Optimització de funcions de diverses variables.

10.1 Problemes

1 Estudieu els extrems de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ quan les variables (x,y) estan lligades per la condició
$$y + x^2 = 1.$$

2 Determineu els extrems condicionats de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x + 2y,\ \text{ si } x^2 + y^2 = 5;$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ \text{ si } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1\ , \\ x + y + z = 1\ . \end{cases}$

3 Calculeu els extrems absoluts que pren la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x - 8y + 50$ sobre el domini definit per la inequació $x^2 + y^2 - 4x - 2y \leq 20$.

4 Determineu els punts on la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ pren els valors màxim i mínim absoluts en el compacte $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

5 La temperatura en graus centígrads d'una placa en un punt qualsevol (x,y) s'obté a partir de la funció $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma tèrmica situada sobre els punts de la circumferència $x^2 + y^2 = 25$, es dispara quan la temperatura es superior a 180 graus o inferior a 20 graus. Es dispararà aquesta alarma?

6 Trobeu la distància mínima des de l'origen de coordenades a l'el·lipse definida per
$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 4\}.$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

1-

$f(x,y) = x^2 + y^2$
$y = 1 - x^2$

$y = 1 - x^2 \rightarrow \overbrace{x^2 + (1-x^2)^2}^{f(x,\,1-x^2)} \rightarrow \overbrace{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4}^{f(x)}$

$f(x) = x^4 - x^2 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0$ ⟨ $2x = 0 \rightarrow x = 0$; $2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{1/2}$

$f''(x) = 12x^2 - 2 = 0$
$f''(0) < 0$ max
$f''(\sqrt{1/2}) > 0$ min
$f''(-\sqrt{1/2}) > 0$ min $\rightarrow$ tiene mínimos relativos

$x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow f(x,y)$ tiene en $(0,1)$ un max condicionado por $y = 1 - x^2$

$x = \sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/2$
$x = -\sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/2$ $\rightarrow f(x,y)$ tiene en $(\sqrt{2}/2, 1/2) \wedge (-\sqrt{2}/2, 1/2)$ tiene 2 mínimos condicionados

2-

$f(x,y) = x + 2y$
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$

$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$

$L_x = 1 + 2\lambda x = 0$
$L_y = 2 + 2\lambda y = 0$
$L_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0$

$\rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$
$y = -\frac{1}{\lambda}$

$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \lambda^2 - 5 = 0$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0 \xrightarrow{\cdot 4\lambda^2} 1 + 4 - 20\lambda^2 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ ⟨ $1/2$: $x = -1$, $y = -2$; $-1/2$: $x = 1$, $y = 2$

$H(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$\exists$ 2 puntos críticos condicionados
$1/2\ (-1,-2) \wedge -1/2\ (1,2)$

$H(-1,-2,1/2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16 - 4 < 0$ min $(-1,-2)$ $\wedge$ $H(1,2,-1/2) =$ " $= 16 + 4 > 0$ max $(1,2)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Condición $= x + y + z - 1 = 0 \rightarrow$ lineal en $z \rightarrow z = 1 - x - y$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\rightarrow f$ optimizar $= f(x, y, 1-x-y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2$

Una Función con 2 variables $f(x,y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2$
Condición: $x^2 + y^2 - 1 = 0$
Como la condición no es lineal Lagrange

$L(x,y,\lambda) = \overbrace{x^2 + y^2 + (1-x-y)^2}^{f(x,y,z)} + \lambda\overbrace{(x^2 + y^2 - 1)}^{\text{condición}}$

$L_x = 2x - 2(1-x-y) + 2\lambda x = 0$
$L_y = 2y - 2(1-x-y) + 2\lambda y = 0$
$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\xrightarrow{1-2} 2x - 2y + 2\lambda x - 2\lambda y = 0$
$(x-y) + \lambda(x-y) = 0$
$(x-y)(1+\lambda) = 0$
$x = y \vee \lambda = -1$

Si $\lambda = -1 \rightarrow 2(1-x-y) = 0$
$y = 1 - x \xrightarrow{\text{3r eq.}} x^2 + (1-x)^2 - 1 = 0$
$x^2 + \cancel{1} - 2x + x^2 - \cancel{1} = 0$
$2x^2 - 2x = 0$
$2x(x-1) = 0$ ⟨ $x = 0 \wedge y = 1$; $x = 1 \wedge y = 0$

pto. $(0,1) \wedge (1,0)$

Si $x = y$: $2x^2 - 1 = 0$
$x = \pm\sqrt{1/2}$
$x = \sqrt{1/2} = y$; $x = -\sqrt{1/2} = y$

pto. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pto. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z = 1 - x - y \to$ pto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ $\quad$ 1- pto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$ $\quad f(x,y,z) = (d(x,y,z; 0,0,0))^2$

pto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad z = 1 + \sqrt{2}$ $\quad$ 2- pto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

pto $(0,1)$ $\quad z = 1 - 0 - 1 = 0$ $\quad$ 3- pto $(0,1,0)$

pto $(1,0)$ $\quad z = 0$ $\quad$ 4- pto $(1,0,0)$

imagenes de f:

1- $1 + (1-\sqrt{2})^2 = 4 - 2\sqrt{2}$

2- $1 + (1+\sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ max $\quad$ el max condicionado es el pto 2

3- 1
4- 1 $\Big\}$ min $\quad$ el min condicionado son los ptos. 3 y 4

5- $\quad T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$

$x^2 + y^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 25 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$L_x = 8x - 4y + 2\lambda x = 0 \xrightarrow{/2} 4x - 2y + \lambda x = 0$
$L_y = -4x + 2y + 2\lambda y = 0 \qquad -4x + 2y + 2\lambda y = 0$ $\Big|$ suma $\quad \lambda x + 2\lambda y = 0$
$\lambda(x + 2y) = 0$ $\quad \lambda = 0$ ó $x = -2y$
$L_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0$

Si $\lambda = 0$

$4x - 2y = 0 \to y = 2x$

$x^2 + (2x)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$\sqrt{5} \to y = 2\sqrt{5}$ $\quad (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

$-\sqrt{5} \to y = -2\sqrt{5}$ $\quad (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ $\quad$ pto. criticos

Si $x = -2y$

$(-2y)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}$

$\sqrt{5} \to x = -2\sqrt{5}$ $\quad (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$

$-\sqrt{5} \to x = 2\sqrt{5}$ $\quad (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ $\quad$ pto. criticos

$T(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 25 + 20 - 40 + 20 = 25$ $\quad$ min absoluto
$T(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 25$
$T(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 25 + 80 + 40 + 5 = 150$
$T(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = 150$ $\quad$ max absoluto

$\forall (x,y)$ de la circunferencia
$25 \le T(x,y) \le 150$
$20 < 25$ $\quad$ No salta la alarma
$150 < 180$

6- Hallar la distancia minima desde el origen a la elipse definida por

$E(x,y) \in \mathbb{R}^2 = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0$ $\quad d((0,0);(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2} \to f(x,y) = x^2 + y^2$

tienen los mismos puntos max y min pero valores diferentes

funcion a optimizar: $x^2 + y^2 \ge 0$
condicion: $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4)$$

$L_x = 2x + 10\lambda x - 6\lambda y = 0$
$L_y = 2y + 10\lambda y - 6\lambda x = 0$ $\Big|$ restando $\quad (x-y)(2 + 10\lambda + 6\lambda) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2+16\lambda) = 0$ $\quad x = x$ ó $\lambda = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$
$L_\lambda = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0$

Si $y = x \to 5x^2 + 5x^2 - 6x^2 = 4$

$4x^2 = 4 \to x = \pm 1$ $\begin{cases} 1 \to y = 1 & (1,1) \to \sqrt{2} \\ -1 \to y = -1 & (-1,-1) \to \sqrt{2} \end{cases}$ pto. criticos max

Si $\lambda = \frac{1}{8}$ 1ª eq. $2x - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y = 0$

$\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y = 0 \to y = -x$

3ra eq. $16x^2 = 4 \to x = \pm 1/2$ $\begin{cases} 1/2 \to y = -1/2 & (1/2, -1/2) \to \sqrt{1/2} \\ -1/2 \to y = 1/2 & (-1/2, 1/2) \to \sqrt{1/2} \end{cases}$ min

10.2 Taller de problemes

7 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^2 + y^2$,

a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq 1 - x^2 \,, \quad y \geq x - 1\right\}.$$

c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en el recinte $\mathcal{K}$.

d) Trieu els punts on f pren els valors màxim i mínim absoluts en $\mathcal{K}$ i digueu quins són els valors màxim i mími de f en $\mathcal{K}$.

8 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^4 + y^2$,

a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \,, \quad y \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

c) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de f en el recinte $\mathcal{K}$.

9 Trobeu els punts de la circumferència $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 16$ tals que la suma de les seves coordenades sigui màxima i mínima, respectivament.

10 Trobeu els punts de la corba intersecció de la superfície $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ i la superfície $x^2 + y^2 = 1$ que són més a prop a l'origen de coordenades.

11 Tres germans de 40, 45 i 50 anys respectivament han de repartir-se una herència de 20.000.000 euros. La llei de successions del país diu que els impostos a pagar per cada germà són proporcionals a la seva edat i al quadrat de la quantitat rebuda. Obteniu la part de l'herència que ha de rebre cada germà per tal que la quantitat conjunta pagada a hisenda pels tres germans sigui mínima.

◇◇◇◇◇

10.3 A més hauríeu de fer

12 Determineu els extrems condicionats de les funcions següents:

a) $f(x,y) = xy$, si $x + y = 1$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, si $x/2 + y/3 = 1$;

c) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

d) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$, si $x + y + z = 1$.

13 Siguin a, b paràmetres reals i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + az.$$

a) Trobeu la relació entre els paràmetres a i b que sigui una condició necessària per tal que el punt $(1,1,1)$ sigui extrem relatiu de f sobre l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

b) Si suposem que es compleix la condició anterior, estudieu per a quins valors de a i b el punt $(1,1,1)$ és un punt màxim relatiu, mínim relatiu, o no és un punt extrem.

14 Trobeu el màxim i el mínim de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ en el domini

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 100\}.$$

15 a) Sigui a un nombre real. Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de la funció

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + axy + \frac{1}{y}.$$

b) Sigui $a = 2$. Calculeu els extrems absoluts que pren f en el compacte de $\mathbb{R}^2$ definit per les inequacions: $x \geq 1/2,\ y \geq 1/2,\ x + y \leq 2$.

16 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = 4x + 3y + 1$

a) Sigui K un compacte qualsevol de $\mathbb{R}^2$. Justifiqueu que f admet extrems absoluts en K i que aquests s'assoleixen a la frontera de K.

b) Sigui $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\right\}$ amb $0 < r_1 < r_2$. Calculeu els extrems absoluts de f sobre aquest compacte K. (Si voleu, podeu usar el resultat de l'apartat anterior).

17 Amb un fil de longitud L volem construir un quadrat i un cercle. Trobeu-ne les dimensions per tal que l'àrea total sigui màxima, o bé sigui mínima.

15 - a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + axy + \frac{1}{y}$

$f =$ suma de
- $1/x \to$ Racional denom $x \to C^2$ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,y): y \in \mathbb{R}\}$
- $axy \to$ polinomica $\to C^2$ en $\mathbb{R}^2$
- $1/y \to$ Racional denom $y \to C^2$ en $\mathbb{R}^2 - \{(x,0): x \in \mathbb{R}\}$

Dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$

$f \in C^2$ en Dom f

a) $f_x = -\frac{1}{x^2} + ay = 0 \to y = \frac{1}{ax^2}$ si $a \neq 0$

$f_y = ax - \frac{1}{y^2} = 0$

$ax - a^2x^4 = 0$

$ax(1 - ax^3) = 0$
- $x = 0$ no Dom f
- $x = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \to y = \frac{1}{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}} \to \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}$ pto. crit. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}}, \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\right)$

$$Hf(x,y) \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & a \\ a & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \to$$

$$Hf(\text{pto. crit.}) = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a^7 \end{pmatrix}$$

$4a^8 - a^2 = \underset{\underset{0}{\vee}}{a^2}(4a^6 - 1)$

det $> 0 \Leftrightarrow 4a^6 > 1 \Leftrightarrow a^6 > \frac{1}{4}$

$|a| > \sqrt[6]{\frac{1}{4}}$

18 Trobeu el màxim i el mínim absolut de $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x + y)$ a la regió

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

19 Demostreu que la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = (ax^2 + by^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ amb $a > b > 0$ té extrems absoluts. Calculeu-los.

20 Trobeu el triangle de perímetre donat $2p$ que té àrea màxima. Recordeu, la fórmula que relaciona l'àrea S, el semiperímetre p i els costats del triangle $a,\ b,\ c$ és $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$.

21 De tots els paral·lelepípedes rectangles d'àrea total S, trobeu el de volum màxim i, de tots els de volum V, trobeu el d'àrea mínima.

◇◇◇◇◇

10.4 Solucions

1 Màxim condicionat a $(0,1)$. Mínim condicionats a $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2 a) Màxim condicionat a $(1,2)$. Mínim condicionat a $(-1,-2)$.
b) Màxim condicionat a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$. Mínims condicionats a $(1,0,0)$, i a $(0,1,0)$.

3 Màxim absolut a $(-2,-2)$ i val 98. Mínim absolut a $(6,4)$ i val -2.

4 Els màxims absoluts són a $(0,-3)$ i $(-3,0)$. Mínim absolut a $(-1,-1)$.

5 L'alarma no es dispara, el màxim absolut és 150 i el mínim absolut és 25.

6 (*Examen final 17/01/2013.*)

7 (*Examen final 17/01/2012.*)

8 (*Examen final 11/01/2011.*)

9 (*Examen final 14/06/2011.*)

11 Les tres parts per ordre d'edat de l'enunciat són $\frac{900}{121}$, $\frac{800}{121}$ i $\frac{720}{121}$ milions d'euros respectivament.

12 a) Màxim condicionat a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
b) Mímin condicionat a $\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{11}\right)$.
c) Màxim condicionat a $(1,-2,2)$. Mínim condicionat a $(-1,2,-2)$.
d) Mínim condicionat a $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

13 a) $a-b-2=0$.

14 Màxim absolut a $(-6,-8)$ i val 225. Mínim absolut a $(3,4)$ i val 0.

15 a) Si $a > 0$, màxim relatiu a $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$ i val $3\sqrt[3]{a}$.
Si $a > 0$, mínim relatiu a $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$ i val $3\sqrt[3]{a}$.
Si $a = 0$, no hi ha cap extrem relatiu. b) Mínims absoluts a $(1, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ i valen $\frac{7}{2}$. Màxim absolut a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i val $\frac{9}{2}$.

16 b) Màxim absolut a $\left(\dfrac{4}{5}r_2, \dfrac{3}{5}r_2\right)$ és $1 + 5r_2$.
Mínim absolut a $\left(-\dfrac{4}{5}r_2, -\dfrac{3}{5}r_2\right)$ és $1 - 5r_2$.

17 Per àrea total mínima el costat del quadrat ha de tenir longitud $\dfrac{L}{\pi + 4}$ i el radi de la circumferència ha de ser $\dfrac{L}{2(\pi + 4)}$.
Per àrea total màxima el costat del quadrat ha de tenir longitud 0 i el radi de la circumferència ha de ser $\dfrac{L}{2\pi}$.

18 Màxim absolut a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i val $6 \ln 2$. Mínims absoluts a $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$ i valen $\ln 2$.

19 Màxim absolut a $(\pm 1, 0)$ i val $\dfrac{a}{e}$.

20 El màxim és per al triangle equilàter de longitud de costat $\dfrac{2p}{3}$.

21 El paral·lelepípede rectangle d'àrea total S de volum màxim és el cub de costat $\sqrt{S/6}$.
El paral·lelepípede rectangle de volum V d'àrea mínima és el cub de costat $\sqrt[3]{V}$.

◇◇◇◇◇