Lògica en la Informàtica
Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. Deducció en Lògica Proposicional
4. ☞ Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre
6. Programació Lògica (Prolog)

Sumari

1. Exercici 7 [trobar interpretacions I]
2. Exercici 8 [cardinalitat d'un model de F]
3. Exercici 9 [trobar F que discrimina I's]
4. Exercici 10 [només predicats d'aritat zero]
5. Exercici 16 [demostra equivalències]
6. Exercici 17 [demostra NO-equivalències]
7. Exercici 18 [demostra NO-equivalència]

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c))$

$\forall x\ (f(x, c) \leq x\ \wedge\ x \leq f(x, c))$ això implica que: $\forall x\ f(x, c) = x$

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

1a I: f_I és la suma, i c_I és 0

2a I: f_I és el producte, i c_I és 1

3a I: $f_I(n, m) = n$, i c_I és qualsevol natural, per exemple el 7

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

$$\forall x\, \forall y\ \ (f(x, y) \leq f(y, x) \wedge f(y, x) \leq f(x, y))$$

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

Nota: això implica que $\forall x\, \forall y\; f(x, y) = f(y, x)$, ja que $n \leq m$ i $m \leq n \;\rightarrow\; n = m$. És a dir, f_I ha de ser commutativa.

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

En la 1a I, $f_I(n, m) = n + m$ (la suma) és commutativa
En la 2a I, $f_I(n, m) = n \cdot m$ (el producte) és commutativa
En la 3a I, $f_I(n, m) = n$ NO és commutativa. ok.

Una altra opció amb f_I no commutativa: $f_I(n, m) = n^m$ i $c_I = 1$.

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x\, \exists y\, p(x, y) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg p(x, y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Sigui I la interpretació tal que:

$D_I = \mathbb{Z}$ (els enters)

$p_I(n, m) = n < m$.

Aquesta I és un model.

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x \, \exists y \, p(x,y) \wedge \forall x \, \exists y \, \neg p(x,y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Un altre model:

$$D_I = \{a, b\}$$
$$p_I(a,a) = 1$$
$$p_I(a,b) = 0$$
$$p_I(b,a) = 0$$
$$p_I(b,b) = 1$$

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x \, \exists y \, p(x,y) \wedge \forall x \, \exists y \, \neg p(x,y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Si I és una interpretació, diem que el nombre d'elements d'I és $|D_I|$, el nombre d'elements de D_I. Així mateix, diem que I és un model finit quan D_I és finit, i parlem de la cardinalitat d'I per a referir-nos a la cardinalitat de D_I.

Quin és el mínim nombre d'elements que ha de tenir un model de F?

$D_I = \{a\}$
tant si definim $p_I(a,a) = 1$ com si definim $p_I(a,a) = 0$, la fórmula no es compleix! Per tant, no és possible amb 1 sol element en el domini, però sí amb 2.

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
I_2 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$$D_{I_1} = \mathbb{N} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \leq m)$$
$$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \leq m)$$

per a tot enter existeix un altre menor estricte
però: per a tot natural NO existeix un altre menor estricte
(perquè és fals per al zero)

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
I_2 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Sigui F la fórmula $\forall x \, \exists y \, \neg r(x, y)$. $[\neg r(x, y) = \neg(x \leq y) = x > y]$
Tenim que I_1 no és model de F i I_2 sí que és model de F.
I_1 no és model perquè si x és 0, llavors no existeix cap y tal que $\neg(0 \leq y)$, és a dir, tal que $0 > y$.
En canvi, en I_2, els enters, per a tota x sí que existeix una y tal que $x > y$.

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
I_2 té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \leq m)$$
$$D_{I_2} = \mathbb{Q} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \leq m)$$

per a tot parell d'elements x i y tals que $x > y$, existeix un z tal que $x > z \land z > y$ (es diu que els racionals són "densos")

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
I_2 té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Si F és la fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, (\underbrace{\neg r(x,y)}_{x>y} \to \exists z\, (\underbrace{\neg r(x,z)}_{x>z} \wedge \underbrace{\neg r(z,y)}_{z>y}))$$

llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. I_2 és model de F però I_1 no ho és.

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de I_1 com de I_2 són els números enters, per a
I_1 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
I_2 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

$$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n,m) = (n \bmod 2 = m \bmod 2)$$

"tenir la mateixa paritat"

$$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n,m) = (n \bmod 3 = m \bmod 3)$$

"tenir la mateixa "triaritat"???"

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de I_1 com de I_2 són els números enters, per a
I_1 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
I_2 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

F expressa que hi ha tres elements amb diferent paritat:
Si F és la fórmula: $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg r(x,y) \wedge \neg r(x,z) \wedge \neg r(y,z))$
llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. I_2 és model de F però I_1 no ho és.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Si només hi ha símbols de predicat de aritat zero (p,q,r,...) quines fórmules hi ha?
Sintaxi:
Els àtoms seran p,q,r,... sense termes, i, per tant, sense variables, i, per tant, les fórmules seran sense quantificadors.
Les fórmules seran combinacions de p,q,r, ... amb connectives $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
SÓN les fórmules de la lògica proposicional.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Semàntica:
Encara que hi hagués símbols de funció, aquests no sortiran en les fórmules, per la qual cosa la seva interpretació és irrellevant.
De la mateixa manera, D_I també és irrellevant, perquè no hi ha variables ni quantificadors en les fórmules.
Queda definir en I com s'interpreten els símbols de predicat (que són tots de aritat zero):

$p_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$q_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$r_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
etc.

En què es diferencia això d'una I en lògica proposicional, que era: $I : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$? En Res.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Conclusió: la LProp és un cas (molt, molt) particular de la LPO.

Exercici 16

16. (dificultat 2) Demostra alguna de les següents equivalències:

$$\neg\, \forall x\, F \quad\equiv\quad \exists x\, \neg F$$
$$\neg\, \exists x\, F \quad\equiv\quad \forall x\, \neg F$$
$$\forall x \forall y\, F \quad\equiv\quad \forall y \forall x\, F$$
$$\exists x \exists y\, F \quad\equiv\quad \exists y \exists x\, F$$

$$\forall x\, F \;\wedge\; \forall x\, G \quad\equiv\quad \forall x\, (F \wedge G)$$
$$\exists x\, F \;\vee\; \exists x\, G \quad\equiv\quad \exists x\, (F \vee G)$$

$$\forall x\, F \;\rightarrow\; \exists x\, G \quad\equiv\quad \exists x\, (F \rightarrow G)$$

$\forall x\, F \;\vee\; G \quad\equiv\quad \forall x\, (F \vee G)$, si x no es lliure en G

$\forall x\, F \;\wedge\; G \quad\equiv\quad \forall x\, (F \wedge G)$, si x no es lliure en G

$\exists x\, F \;\vee\; G \quad\equiv\quad \exists x\, (F \vee G)$, si x no es lliure en G

$\exists x\, F \;\wedge\; G \quad\equiv\quad \exists x\, (F \wedge G)$, si x no es lliure en G

Exercici 17

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules F, G):

$$\begin{aligned} \forall x\, F \vee \forall x\, G &\equiv \forall x\,(F \vee G) \\ \exists x\, F \wedge \exists x\, G &\equiv \exists x\,(F \wedge G) \end{aligned}$$

En tots dos casos, hi ha alguna de la dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Exercici 18

18. (dificultat 2) Demostra que les fórmules $\forall x\, \exists y\, F$ i $\exists y\, \forall x\, F$ no són lògicament equivalents en general. Hi ha alguna de les dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Definició de la Lògica de Primer Ordre

Per al proper dia de classe:

- Exercicis del capítol `p4.pdf`: 21, 22, 23.
- Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)