Lògica en la Informàtica
Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. Deducció en Lògica Proposicional
4. ☞ Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre
6. Programació Lògica (Prolog)

Sumari

Recordatori: definició d'una Lògica

Recordem:

Què és una lògica?

- sintaxi:	-	què és una fórmula F?
$+$		
- semàntica:	-a	què és una interpretació I?
	-b	quan una I SATISFÀ una F? $I \models F$?

Intuïtivament:

"Interpretació" $\equiv$ "situació de la vida real a modelar"

Una F "representa" aquelles I on se satisfà, es compleix.

Recordatori: definicions en qualsevol Lògica

Recordem:

Usem I per a denotar interpretacions i F, G per a fórmules.

En qualsevol lògica:

- I **és model** de F si I satisfà a F (es denota $I \models F$)
- F és **satisfactible** si F té algun model
- F és **insatisfactible** si F no té models
- F és **tautologia** si tota I és model de F
- G és **conseqüència lògica** de F si tot model de F satisfà G (es denota $F \models G$)
- F i G són **lògicament equivalents** si F i G tenen el mateixos models (es denota $F \equiv G$)

  Nota: Per definició tenim que $F \equiv G$ ssi $F \models G$ i $G \models F$.

Lògica de Primer Ordre vs. Lògica Proposicional

☞ Col·lecció d'apunts bàsics de lògica: `p4.pdf`

LPO: molt més poder expressiu que la LProp.
podem modelar moltes més coses de la vida real:
matemàtiques, verificació de programari, protocols, ...

LPO: deducció més costosa (en complexitat, decidibilitat)
que la LProp

Definició de la Lògica de Primer Ordre

☞ Col·lecció d'apunts bàsics de lògica: `p4.pdf`

LPO: Sintaxi:

símbols de variable: $\mathcal{X}$ notació: x,y,z (1)

(1) possiblement amb superíndexs o subíndexs

Definició de la Lògica de Primer Ordre

☞ Col·lecció d'apunts bàsics de lògica: `p4.pdf`

LPO: Sintaxi:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{símbols de variable:} & \mathcal{X}\\ \text{símbols de funció:} & \mathcal{F}\end{array}\right\}\ \text{termes}\\ \begin{array}{ll}\text{símbols de predicat:} & \mathcal{P}\quad \underline{\qquad\qquad}\end{array}\end{array}\right\}\ \text{atoms}$$

Fórmules: àtoms combinats amb connectives $\wedge$ $\vee$ $\neg$ i amb quantificadors $\forall$ $\exists$
(compte amb la notació "text" que també es fa servir aquí: "per a tot" és A, "existeix" és E, etc.)

Exemple de Definició de LPO

Exemple:

$\mathcal{F}$ és:

f d'aritat 2	f^2
g d'aritat 1	g^1
h d'aritat 1	h^1
a d'aritat 0	a^0
b d'aritat 0	b^0

$\mathcal{P}$ és:

p d'aritat 2	p^2
q d'aritat 1	q^1
r d'aritat 0	r^0

Exemples de termes: $a \quad b \quad g(a) \quad f(x,a)$

$f(f(a,b),x) \qquad f(g(a),g(g(f(a,x)))) \quad \ldots$

de fet, si només tinc un símbol unari ja puc fabricar infinits termes:

$x \quad h(x) \quad h(h(x)) \quad h(h(h(x))) \quad \ldots$

Exemples d'àtoms: $r \quad q(a) \quad q(f(a,b)) \quad q(h(h(x))) \quad p(a,h(x)) \quad \ldots$

Exemples de fórmules:

$$F = \forall x \, \exists y \, (p(x,h(y)) \lor q(f(x,y)))$$

$$F' = \forall x \, p(g(x),a) \lor \exists y \, q(f(y,y))$$

Definició de la Lògica de Primer Ordre

LPO: Semàntica:

Una I consta de tres parts:

D_I: "el domini" de I (un conjunt no buit)

f_I: per cada símbol de funció f d'aritat n,

una funció $f_I : \overbrace{D_I \times \cdots \times D_I}^{n \texttt{ args}} \to D_I$ "la interpretació de f en I"

p_I: per cada símbol de predicat p d'aritat n,

una funció $p_I : \overbrace{D_I \times \cdots \times D_I}^{n \texttt{ args}} \to \{0,1\}$ "la interpretació de p en I"

Intuïtivament, és com si hi hagués dos TIPUS: els Booleans i "els altres" (els elements de D_I).

F: prenen arguments de D_I i retornen D_I.

P: prenen arguments de D_I i retornen un Booleà.

PER AIXÒ NO TÉ SENTIT NIAR SÍMBOLS DE PREDICAT.

Exemple de Definició de LPO

Exemple (cont.):

$\mathcal{F}$ és:

f d'aritat 2	f^2
g d'aritat 1	g^1
h d'aritat 1	h^1
a d'aritat 0	a^0
b d'aritat 0	b^0

$\mathcal{P}$ és:

p d'aritat 2	p^2
q d'aritat 1	q^1
r d'aritat 0	r^0

Exemple de Definició en LPO

Exemple d'I:

$D_I = \{\circ, \$\}$

f_I: $D_I \times D_I \rightarrow D_I$

defineixo aquesta funció donant tots els casos:

$f_I(\$, \$) = \$$
$f_I(\$, \circ) = \circ$
$f_I(\circ, \$) = \$$
$f_I(\circ, \circ) = \$$

g_I: $D_I \rightarrow D_I$

$g_I(\$) = \circ$
$g_I(\circ) = \$$

h_I: $D_I \rightarrow D_I$

$h_I(\$) = \$$
$h_I(\circ) = \circ$

$a_I = \circ$

$b_I = \$$

Exemple de Definició en LPO

Exemple d'I (cont.):

$D_I = \{\circ, \$\}$

p_I: $D_I \times D_I \to \{0,1\}$
defineixo aquesta funció donant tots els casos:
$p_I(\$,\$) = 1$
$p_I(\$,\circ) = 0$
$p_I(\circ,\$) = 0$
$p_I(\circ,\circ) = 1$

q_I: $D_I \to \{0,1\}$
defineixo aquesta funció donant tots els casos:
$q_I(\$) = 1$
$q_I(\circ) = 0$

$r_I = 1$

Exemple de Definició en LPO

Tenim $I \models F$?

$$\forall x \, \exists y \, (p(x, h(y)) \vee q(f(x, y)))$$

$$\begin{aligned} p_I(\$, \$) &= 1 \\ p_I(\$, \circ) &= 0 \\ p_I(\circ, \$) &= 0 \\ p_I(\circ, \circ) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_I(\$) &= \$ \\ h_I(\circ) &= \circ \end{aligned}$$

com p_I s'interpreta com a igualtat, i la h_I és la funció identitat (que "no fa res"), tenim que $\forall x \, \exists y \, p(x, h(y))$ es compleix: per a tota x del domini hi ha una y que és igual:

si $x = \$$ triem que la y sigui també \$

si $x = \circ$ triem que la y sigui també o

ni tan sols cal mirar la part $q(f(x, y))$.

Tenim que $I \models F$.

Exemple de Definició en LPO

Un altre exemple d'interpretació:

$D_I = \mathbb{N}$ (els nombres naturals)

f_I d'aritat 2	la suma de naturals:	$f_I(n,m) = n+m$
g_I d'aritat 1	la funció "successor":	$g_I(n) = n+1$
h_I d'aritat 1	la funció "doble":	$h_I(n) = 2n$
a_I d'aritat 0	7	
b_I d'aritat 0	23	
p_I d'aritat 2	l'ordre estricte de naturals:	$p_I(n,m) = (n > m)$
q_I d'aritat 1	ens diu si és parell:	$q_I(n) = (n \bmod 2 = 0)$
r_I d'aritat 0	0	

Ara tenim $I \models F$?

$$\forall x\, \exists y\, (p(x, h(y)) \vee q(f(x,y)))$$

per a tota x existeix una y tal que $x > 2y$ o $x + y$ és parell ?
Això és cert, perquè per a tota x podem triar la y que sigui la mateixa x i llavors $x + y = x + x$ que és parell.
(no necessitem la primera meitat de l'or)

☞ veure p4.pdf

- Sintàxi
- Interpretació
- Satisfacció
  - Assignació
  - Avaluació de termes
  - Avaluació de fórmules
  - Noció de satisfacció
- Fórmules tancades
  - Aparicions lliures i lligades de variables
  - Fórmules tancades
  - Avaluació de fórmules tancades
  - Satisfacció de fórmules tancades

Exercici 5

5. (dificultat 1) Sigui F la fórmula

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x)).$$

Quines de les següents interpretacions són models de F?

a) $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(m,n) = 1$ si i només si $m \leq n$.

b) $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(m,n) = 1$ si i només si $n = m+1$.

c) $D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (això denota parts de $\mathbb{N}$, és a dir, el conjunt de tots els subconjunts de $\mathbb{N}$), i $p_I(A,B) = 1$ si i només si $A \subseteq B$.

En format "text":

```
Ex Ey Ez ( p(x, y) & p(z, y) & p(x, z) & -p(z, x) )
```

Exercici 5

5. (dificultat 1) Sigui F la fórmula

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x)).$$

a) $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(m,n) = 1$ si i només si $m \leq n$.

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x)) \quad \text{s'avalua com}$$

$$\begin{array}{cccc} x \leq y & z \leq y & x \leq z & z > x \\ 1 \quad 3 & 2 \quad 3 & 1 \quad 2 & 2 \quad 1 \end{array}$$

Sí, $I \models F$.

Exercici 5

5. (dificultat 1) Sigui F la fórmula

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x)).$$

b) $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(m,n) = 1$ si i només si $n = m+1$.

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x)) \quad \text{s'avalua com}$$

$$\underbrace{\underbrace{y=x+1 \quad y=z+1}_{x\,=\,z} \quad \underbrace{z=x+1}_{z\,=\,x+1}}_{\text{NO}} \quad x \neq z+1$$

NO, I no és model de F.

Exercici 5

5. (dificultat 1) Sigui F la fórmula

$$\exists x\,\exists y\,\exists z\,(p(x,y)\wedge p(z,y)\wedge p(x,z)\wedge\neg p(z,x)).$$

c) $D_I=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $p_I(A,B)=1$ si i només si $A\subseteq B$.

$$\exists x\,\exists y\,\exists z\,(\underbrace{p(x,y)}_{\substack{x\subseteq y\\ \{1\}\ \{1,2,3\}}}\wedge\underbrace{p(z,y)}_{\substack{z\subseteq y\\ \{1,2\}\ \{1,2,3\}}}\wedge\underbrace{p(x,z)}_{\substack{x\subseteq z\\ \{1\}\ \{1,2\}}}\wedge\underbrace{\neg\, p(z,x)}_{\substack{z\not\subseteq x\\ \{1,2\}\ \{1\}}})$$ s'avalua

Sí, $I\models F$.

Exercici 6

6. (dificultat 2) Expressa amb tres fórmules les propietats de reflexivitat, simetria i transitivitat d'un predicat binari p i demostra que cap de les tres fórmules és conseqüència lògica de (la conjunció de) les altres dues.

Una interpretació p_I d'un predicat binari p, és una funció $p_I : D_I \times D_I \to \{0, 1\}$. Ens adonem que en realitat p_I és el mateix que una relació binària sobre D_I:

p_I ens diu quines parelles d'elements de D_I donen 1 (estan en la relació).

Exercici 6

6. (dificultat 2) Expressa amb tres fórmules les propietats de reflexivitat, simetria i transitivitat d'un predicat binari p i demostra que cap de les tres fórmules és conseqüència lògica de (la conjunció de) les altres dues.

Recordem:

p és **reflexiu**		$p(e,e)$	per a tot e de S.
	FR: $\forall x\, p(x,x)$		
p és **simètric**	si $p(e,e')$	implica $p(e',e)$	per a tot e, e' de S.
	FS: $\forall x \forall y\, (p(x,y) \to p(y,x))$		
p és **transitiu**	si $p(e,e')$ i $p(e',e'')$	implica $p(e,e'')$	per a tot e, e', e'' de S.
	FT: $\forall x \forall y \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \to p(x,z))$		

Exercici 6

1r cas: FR no és conseqüència lògica de $FS \wedge FT$.

Sigui I la interpretació on $D_I = \{*\}$ i $p_I(*,*) = 0$.
Llavors tenim que I no és model de FR.
Però I sí que és model de FS:

$$\forall x \forall y\, (p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \quad \equiv \quad \forall x \forall y\, (\neg p(x,y) \vee p(y,x))$$

i I també és model de FT:

$$\forall x \forall y \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \quad \equiv \quad \forall x \forall y \forall z\, (\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z))$$

Per tant, tenim que FR no és conseqüència lògica de $FS \wedge FT$.

Exercici 6

2n cas: FS no és conseqüència lògica de $FR \wedge FT$.

Sigui I la interpretació on $D_I = \{a, b\}$

$p_I(a, a) = 1$ (per reflexivitat)
$p_I(a, b) = 1$ per a incomplir la simetria, juntament amb la línia següent
$p_I(b, a) = 0$ per a incomplir la simetria, juntament amb la línia anterior
$p_I(b, b) = 1$ (per reflexivitat).

Tenim que I no és model de FS, però sí de FR i de FT.

Per tant, tenim que FS no és conseqüència lògica de $FR \wedge FT$.

3r cas: FT no és conseqüència lògica de $FR \wedge FS$.

Sigui I la interpretació on $D_I = \{a, b, c\}$

Imposem, per aquest ordre:

$$\begin{aligned} FR &: \quad \text{per reflexivitat} \\ \neg FT &: \quad \text{per a incomplir la transitivitat} \\ FS &: \quad \text{per simetria} \end{aligned}$$

Exercici 6

3r cas: FT no és conseqüència lògica de $FR \wedge FS$.

Sigui I la interpretació on $D_I = \{a, b, c\}$

	FR	$\neg FT$	FS
$p_I(a,a) =$	1		
$p_I(a,b) =$		1	
$p_I(a,c) =$		0	
$p_I(b,a) =$			1
$p_I(b,b) =$	1		
$p_I(b,c) =$		1	
$p_I(c,a) =$			0
$p_I(c,b) =$			1
$p_I(c,c) =$	1		

Tenim que I no és model de FT, però sí de FR i de FS.

Per tant, tenim que FT no és conseqüència lògica de $FR \wedge FS$.

Exercicis del capítol `p4.pdf` per al proper dia:

☞ 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 21 en endavant.

Lògica en la Informàtica
Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. Deducció en Lògica Proposicional
4. ☞ Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre
6. Programació Lògica (Prolog)

Sumari

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\,(p(f(x,c),x) \wedge p(x, f(x,c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\,\forall y\,(p(f(x,y), f(y,x)) \wedge p(f(y,x), f(x,y)))$$

$\forall x\,(p(f(x,c),x) \wedge p(x, f(x,c))$

$\forall x\ (f(x,c) \leq x\ \wedge\ x \leq f(x,c))$ això implica que: $\forall x\ f(x,c) = x$

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\,(p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\,\forall y\,(p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

1a I: f_I és la suma, i c_I és 0

2a I: f_I és el producte, i c_I és 1

3a I: $f_I(n, m) = n$, i c_I és qualsevol natural, per exemple el 7

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

$$\forall x\, \forall y\ \ (f(x, y) \leq f(y, x) \wedge f(y, x) \leq f(x, y))$$

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\,(p(f(x,c),x) \wedge p(x, f(x,c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\,\forall y\,(p(f(x,y), f(y,x)) \wedge p(f(y,x), f(x,y)))$$

Nota: això implica que $\forall x\,\forall y\; f(x,y) = f(y,x)$, ja que $n \leq m$ i $m \leq n \;\rightarrow\; n = m$. És a dir, f_I ha de ser commutativa.

Exercici 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació I tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a f i c que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c)))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

En la 1a I, $f_I(n, m) = n + m$ (la suma) és commutativa
En la 2a I, $f_I(n, m) = n \cdot m$ (el producte) és commutativa
En la 3a I, $f_I(n, m) = n$ NO és commutativa. ok.

Una altra opció amb f_I no commutativa: $f_I(n, m) = n^m$ i $c_I = 1$.

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x\, \exists y\, p(x, y) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg p(x, y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Sigui I la interpretació tal que:

$D_I = \mathbb{Z}$ (els enters)

$p_I(n, m) = n < m$.

Aquesta I és un model.

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x \, \exists y \, p(x, y) \; \wedge \; \forall x \, \exists y \, \neg p(x, y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Un altre model:

$$D_I = \{a, b\}$$
$$p_I(a, a) = 1$$
$$p_I(a, b) = 0$$
$$p_I(b, a) = 0$$
$$p_I(b, b) = 1$$

Exercici 8

8. (dificultat 2) Sigui F la fórmula
$\forall x\, \exists y\, p(x, y) \;\wedge\; \forall x\, \exists y\, \neg p(x, y)$. F és satisfactible? Demostra-ho.

Si I és una interpretació, diem que el nombre d'elements d'I és $|D_I|$, el nombre d'elements de D_I. Així mateix, diem que I és un model finit quan D_I és finit, i parlem de la cardinalitat d'I per a referir-nos a la cardinalitat de D_I.

Quin és el mínim nombre d'elements que ha de tenir un model de F?

$D_I = \{a\}$
tant si definim $p_I(a, a) = 1$ com si definim $p_I(a, a) = 0$, la fórmula no es compleix! Per tant, no és possible amb 1 sol element en el domini, però sí amb 2.

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
I_2 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$$D_{I_1} = \mathbb{N} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \leq m)$$
$$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \leq m)$$

per a tot enter existeix un altre menor estricte
però: per a tot natural NO existeix un altre menor estricte
(perquè és fals per al zero)

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
I_2 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Sigui F la fórmula $\forall x \, \exists y \, \neg r(x, y)$. $[\neg r(x, y) = \neg(x \leq y) = x > y]$
Tenim que I_1 no és model de F i I_2 sí que és model de F.
I_1 no és model perquè si x és 0, llavors no existeix cap y tal que $\neg(0 \leq y)$, és a dir, tal que $0 > y$.
En canvi, en I_2, els enters, per a tota x sí que existeix una y tal que $x > y$.

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
I_2 té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \leq m)$
$D_{I_2} = \mathbb{Q} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \leq m)$
per a tot parell d'elements x i y tals que $x > y$, existeix un z tal que $x > z \wedge z > y$ (es diu que els racionals són "densos")

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
I_1 té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
I_2 té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Si F és la fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, (\neg \underbrace{r(x,y)}_{x>y} \rightarrow \exists z\, (\neg \underbrace{r(x,z)}_{x>z} \wedge \neg \underbrace{r(z,y)}_{z>y}))$$

llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. I_2 és model de F però I_1 no ho és.

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de I_1 com de I_2 són els números enters, per a
I_1 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
I_2 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

$$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \bmod 2 = m \bmod 2)$$
"tenir la mateixa paritat"

$$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \bmod 3 = m \bmod 3)$$
"tenir la mateixa "triaritat"???"

Exercici 9

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions I_1 i I_2 següents. Per a cada cas, dona una fórmula F que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de I_1 com de I_2 són els números enters, per a
I_1 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
I_2 el predicat r s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

F expressa que hi ha tres elements amb diferent paritat:
Si F és la fórmula: $\exists x \, \exists y \, \exists z \, (\neg r(x,y) \wedge \neg r(x,z) \wedge \neg r(y,z))$
llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. I_2 és model de F però I_1 no ho és.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Si només hi ha símbols de predicat de aritat zero (p,q,r,...)
quines fórmules hi ha?
Sintaxi:
Els àtoms seran p,q,r,...sense termes, i, per tant, sense variables, i, per tant, les fórmules seran sense quantificadors.
Les fórmules seran combinacions de p,q,r, ...amb connectives $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
SÓN les fórmules de la lògica proposicional.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Semàntica:
Encara que hi hagués símbols de funció, aquests no sortiran en les fórmules, per la qual cosa la seva interpretació és irrellevant.
De la mateixa manera, D_I també és irrellevant, perquè no hi ha variables ni quantificadors en les fórmules.
Queda definir en I com s'interpreten els símbols de predicat (que són tots de aritat zero):

$p_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$q_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$r_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
etc.

En què es diferencia això d'una I en lògica proposicional, que era: $I : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$? En Res.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Conclusió: la LProp és un cas (molt, molt) particular de la LPO.

Exercici 16

16. (dificultat 2) Demostra alguna de les següents equivalències:

$$
\begin{array}{lcll}
\neg\, \forall x\, F & \equiv & \exists x\, \neg F & \\
\neg\, \exists x\, F & \equiv & \forall x\, \neg F & \\
\forall x \forall y\, F & \equiv & \forall y \forall x\, F & \\
\exists x \exists y\, F & \equiv & \exists y \exists x\, F & \\
 & & & \\
\forall x\, F \ \wedge\ \forall x\, G & \equiv & \forall x\, (F \wedge G) & \\
\exists x\, F \ \vee\ \exists x\, G & \equiv & \exists x\, (F \vee G) & \\
 & & & \\
\forall x\, F \ \rightarrow\ \exists x\, G & \equiv & \exists x\, (F \rightarrow G) & \\
 & & & \\
\forall x\, F \ \vee\ G & \equiv & \forall x\, (F \vee G)\,, & \text{si } x \text{ no es lliure en } G \\
\forall x\, F \ \wedge\ G & \equiv & \forall x\, (F \wedge G)\,, & \text{si } x \text{ no es lliure en } G \\
\exists x\, F \ \vee\ G & \equiv & \exists x\, (F \vee G)\,, & \text{si } x \text{ no es lliure en } G \\
\exists x\, F \ \wedge\ G & \equiv & \exists x\, (F \wedge G)\,, & \text{si } x \text{ no es lliure en } G
\end{array}
$$

Exercici 17

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules F, G):

$$\begin{aligned} \forall x\, F \vee \forall x\, G &\equiv \forall x\,(F \vee G) \\ \exists x\, F \wedge \exists x\, G &\equiv \exists x\,(F \wedge G) \end{aligned}$$

En tots dos casos, hi ha alguna de la dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Exercici 18

18. (dificultat 2) Demostra que les fórmules $\forall x \, \exists y \, F$ i $\exists y \, \forall x \, F$ no són lògicament equivalents en general. Hi ha alguna de les dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Per al proper dia de classe:

- ☞ Exercicis del capítol `p4.pdf`: 21, 22, 23.
- ☞ Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)

Lògica en la Informàtica
Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

Sumari

Una fórmula F “EXPRESSA” coses:
les propietats dels seus models.

Continguts: ☞ `p4.pdf`

- Exercicis: 21, 22, 23
  - 21 Expressar límit inferior de la mida dels models
  - 22 Expressar mida infinita del models
  - 23 Existència de models de mida superior
- Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)
- Exercicis de LPOI: 24, 26, 27, 28, 32

Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula F_3 tal que tot model de F_3 tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a n qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari p, i a més expressa que hi ha parells d'elements e_i i e_j en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Comencem així. Sigui F la fórmula:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, p(x,x) & \quad\text{(reflexivitat)} \\ \quad\wedge & \\ \exists x\, \exists y\, \neg p(x,y) & \end{array}$$

Qualsevol model I de F tindrà almenys DOS elements:

$$\begin{array}{ll} D_I = \{e_1, e_2\} & \\ p_I(e_1, e_1) = 1 & \quad\text{(PER REFLEXIVITAT)} \\ p_I(e_1, e_2) = 0 & \\ p_I(e_2, e_1) = 0 & \\ p_I(e_2, e_2) = 1 & \quad\text{(PER REFLEXIVITAT)} \end{array}$$

Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula F_3 tal que tot model de F_3 tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a n qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari p, i a més expressa que hi ha parells d'elements e_i i e_j en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Comencem així. Sigui F la fórmula:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, p(x,x) & \text{(reflexivitat)} \\ \quad\wedge & \\ \exists x\, \exists y\, \neg p(x,y) & \end{array}$$

Perquè si hi hagués només un:

$$D_I = \{e1\}$$

tindríem

$$p_I(e_1, e_1) = 1 \qquad \text{(PER REFLEXIVITAT)}$$

i no es compliria la part $\exists x\, \exists y\, \neg p(x,y)$.

Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula F_3 tal que tot model de F_3 tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a n qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari p, i a més expressa que hi ha parells d'elements e_i i e_j en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Ho podem generalitzar a tres o més elements, així:

Sigui F la formula:

$$\forall x\, p(x, x) \qquad \text{(reflexivitat)}$$
$$\wedge$$
$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg p(x, y) \wedge \neg p(x, z) \wedge \neg p(y, z))$$

Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula F_3 tal que tot model de F_3 tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a n qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari p, i a més expressa que hi ha parells d'elements e_i i e_j en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

I en general per a mínim n elements en el domini:

$$\forall x\, p(x,x) \qquad \text{(reflexivitat)}$$

$$\wedge$$

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n\, (\neg p(x_1,x_2) \wedge \neg p(x_1,x_3) \wedge \cdots \wedge \neg p(x_{n-1},x_n))$$

(una fórmula de mida quadràtica)

Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Definició: un **ordre estricte** és una relacion binària irreflexiva i transitiva.

Usem un símbol binari p que té aquestes dues propietats.
Sigui F la fórmula:

$$\forall x\, \neg p(x,x) \qquad \text{(irreflexivitat)}$$

$$\wedge$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)). \qquad \text{(transitivitat)}$$

equivalentment: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z))$

Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Sigui F la fórmula:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, \neg p(x,x) & \text{(irreflexivitat)} \\ \quad\wedge & \\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)). & \text{(transitivitat)} \end{array}$$

En qualsevol model I de F, tenim que p_I és una relacion d'ordre estricte sobre D_I.

Això fa que necessitem que D_I sigui infinit en qualsevol model I de F? No, perquè tindríem el model de F:

$D_I = \{a\}$
$p_I(a,a) = 0$

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Per això afegim: $\forall x \, \exists y \; p(x, y)$ a la nostra F:

$$\begin{array}{ll} \forall x \, \neg p(x,x) & \text{(irreflexivitat)} \\ \quad \wedge & \\ \forall x \, \forall y \, \forall z \, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)) & \text{(transitivitat)} \\ \quad \wedge & \\ \forall x \, \exists y \; p(x,y) & \text{(``existència de successors'')} \end{array}$$

Per què aquesta F només té models infinits?

➤ Reducció a l'absurd.

Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit I, amb:

$D_I = \{e_1 \ldots e_k\}$

Per la part $\forall x \, \exists y \; p(x, y)$, necessito que $p_I(e_1, e) = 1$ per a algun element "e" de D_I. Diguem-li e_2 a aquest element e.

També necessito $p_I(e_2, e) = 1$ per a algun element "e" de D_I. No pot ser e_2, ni tampoc e_1: tindriem $p_I(e_1, e_2)$ i $p_I(e_2, e_1)$ i per transitivitat tindríem $p_I(e_1, e_1)$ que contradiu la irreflexivitat. Per tant, el successor de e_2 ha de ser un element al qual podem anomenar e_3.

Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit I, amb:
$D_I = \{e_1 \ldots e_k\}$
També necessito
$p_I(e_3, e) = 1$ per a algun element "e" de D_I. Per les mateixes raons, no pot ser e_3 ni e_2, ni tampoc e_1.

Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula F tal que si $I \models F$ llavors D_I té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit I, amb:
$D_I = \{e_1 \ldots e_k\}$

Una vegada hem entès això, (per inducció) podem demostrar (no ho farem aquí) que no podem introduir "cicles" en la relacion p_I, del tipus:

$$p_I(e_1, e_2) \wedge p_I(e_2, e_3) \wedge \cdots \wedge p_I(e_n, e_1)$$

La qual cosa ens porta a una contradicció, perquè... qui serà el successor de e_k?
Ningú!

Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb n elements, també té models amb m elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Això és una altra manera de dir que NO podem expressar amb una fórmula F, que els models de F tindran com a màxim 2 elements, o com a màxim k elements, per a alguna k.

Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb n elements, també té models amb m elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Exemple de com "clonar" un element "a" de D_I: tinc p de aritat 2, i tinc la interpretació I amb:

$$D_I = \{a, b\}$$

$$p_I(a, a) = 1$$
$$p_I(a, b) = 0$$
$$p_I(b, a) = 1$$
$$p_I(b, b) = 0$$

Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb n elements, també té models amb m elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Sigui F qualsevol formula tal que $I \models F$.

Clonar l'element a, afegint el seu clon a' obtenint una I' de manera que $I' \models F$:

$D_{I'} = \{a, b, a'\}$

$$
\begin{array}{lcl}
p_{I'}(a,a) & = & 1 \\
p_{I'}(a,b) & = & 0 \\
p_{I'}(a,a') & = & \quad 1 \longleftarrow \text{amb } a',\ p_{I'} \text{ es comporta igual que amb } a \\
p_{I'}(b,a) & = & 1 \\
p_{I'}(b,b) & = & 0 \\
p_{I'}(b,a') & = & \\
p_{I'}(a',a) & = & \\
p_{I'}(a',b) & = & \\
p_{I'}(a',a') & = &
\end{array}
$$

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb n elements, també té models amb m elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Sigui F qualsevol formula tal que $I \models F$.

Clonar l'element a, afegint el seu clon a' obtenint una I' de manera que $I' \models F$:

$$D_{I'} = \{a, b, a'\}$$

$$\begin{array}{lcll}
p_{I'}(a,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(a,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(a,a') & = & & 1 \\
p_{I'}(b,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(b,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(b,a') & = & & 1 \\
p_{I'}(a',a) & = & & 1 \\
p_{I'}(a',b) & = & & 0 \\
p_{I'}(a',a') & = & & 1
\end{array}$$

F pot ser per exemple:

$$\forall x \, \exists y \, (p(x,y) \vee p(y,x))$$

Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)

- En els exercicis 21 i 22 vam veure que en LPO podem expressar que hi ha ALMENYS k elementos en el domini.
- Però en l'exercici 23, veiem que en LPO NO podem expressar que hi ha COM A MOLT k elements en el domini.
- Això és el que ens motiva a introduir una lògica més expressiva, la LPOI.

Expressivitat d'una lògica: quines situacions de la vida real podem descriure o distingir?

Per exemple, en LProp $\mathcal{P} = \{plou, fa\_sol, esta\_ennuvolat\}$ cada I "modela" una sitacion de la vida real: per exemple, NO *plou*, NO *fa_sol* i SÍ *esta_ennuvolat*. Una F el que fa és distingir un subconjunt de les I's: els MODELS de F.

Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)

Expressivitat d'una lògica: quines situacions de la vida real podem descriure o distingir?

En LPO el mateix, però les interpretacions són molt més complexes: quin domini hi ha, com s'interpreten els símbols.

> Amb una F podem distingir les I's que tenen almenys 2 elements en el seu D_I. O infinits elements.
>
> Però NO podem expressar que hi ha com a màxim 2 (o k) elements (exercici 23).

Això ens motiva a introduir una altra lògica que estén la LPO, que és la LPOI, que sí que permet expressar aquest tipus de coses.

Què és la LPOI?

Sintaxi:	F:	és com LPO, però hi ha un simbolo de predicat "predefinit" binari eq^2
Semantica:	I:	és com LPO, però eq_I sempre serà "ser el mateix element del domini"

$eq_I(e_1, e_1) = 1$ per a tot element e_1 de D_I

$eq_I(e_1, e_2) = 0$ si e_1 i e_2 són elements diferents de D_I

$I \models F \quad (eval_I(F))$ com LPO.

Exercicis de LPOI

- Exercici 24 Expressar límit superior de la mida dels models
- Exercici 26 Expressar mida exacta dels models
- Exercici 27 Monoide. Exemples de monoides
- Exercici 28 Grup. Exemples de grups
- Exercici 32 Fórmula que discrimina dues interpretacions

Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que per a tot model I de F:

a) hi ha com a màxim 1 element en el domini d'I

b) hi ha com a màxim 2 elements en el domini d'I

c) hi ha com a màxim n elements en el domini d'I, per a una n donada

d) hi ha exactament n elements en el domini d'I, per a una n donada

Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que per a tot model I de F:

a) hi ha com a màxim 1 element en el domini d'I

Tres maneres alternatives de fer-ho:

$\forall x \, \forall y \; eq(x,y)$	amb l'altra notació:	$\forall x \, \forall y \;\; x = y$
$\forall x \; eq(x,a)$		$\forall x \;\; x = a$
$\exists x \, \forall y \; eq(x,y)$		$\exists x \, \forall y \;\; x = y$

Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que per a tot model I de F:

b) hi ha com a màxim 2 elements en el domini d'I

Tres maneres alternatives de fer-ho:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ (eq(x, y) \lor eq(x, z) \lor eq(y, z))$$

$$\forall x\ (eq(x, a) \lor eq(x, b))$$

$$\exists x\, \exists y\, \forall z\ (eq(x, z) \lor eq(y, z))$$

Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que per a tot model I de F:

c) hi ha com a màxim n elements en el domini d'I, per a una n donada

Tres maneres alternatives de fer-ho:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{n+1} \left(\bigvee_{1\leq i<j\leq n+1} eq(x_i, x_j)\right)$$

(una fórmula de mida quadràtica)

$$\forall x\ (eq(x, a_1) \vee \cdots \vee eq(x, a_n))$$

(una fórmula de mida lineal)

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall y\ (eq(y, x_1) \vee \cdots \vee eq(y, x_n))$$

(una fórmula de mida lineal)

Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que per a tot model I de F:

d) hi ha exactament n elements en el domini d'I, per a una n donada

$$(\forall x\ (eq(x, a_1) \vee \cdots \vee eq(x, a_n)))\qquad \text{(màxim } n\text{)}$$

$$\wedge$$

$$(\textstyle\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg eq(a_i, a_j))$$

(com a mínim n: una formula de mida quadràtica)

$$\neg eq(a_1, a_2) \wedge \neg eq(a_1, a_3) \wedge \cdots \wedge \neg eq(a_{n-1}, a_n)$$

Exercici 26

26. (dificultat 2)

a) Sigui p un símbol de predicat unari. Escriu una fórmula F de LPOI que expressi que hi ha un únic element que compleix p. (en mates a vegades s'escriu $\exists! x\, p(x)$). Això vol dir: que expressi que per a tot model I de F hi ha un únic element a en D_I amb $p_I(a) = 1$.

$$\exists x\ (p(x) \wedge \forall y\, (\neg eq(x, y) \to \neg p(y)))$$

Una altra manera, amb una constant a:

$$p(a) \wedge \forall x\, (\neg eq(a, x) \to \neg p(x))$$

Exercici 26

26. (dificultat 2)

    b) Escriu una altra F expressant que hi ha exactament 2.

    $$p(a) \wedge p(b) \wedge \neg eq(a, b) \wedge \forall x \, (\neg eq(a, x) \wedge \neg eq(b, x) \rightarrow \neg p(x)))$$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\;(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \qquad [\,\cdot \text{ es associatiu}\,]$$
$$\land$$
$$\forall x\;\;x\cdot e = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per la dreta}\,]$$
$$\land$$
$$\forall x\;\;e\cdot x = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}\,]$$

on $\cdot$ és un símbol de funció binària i e és un símbol de constant. Observa que hem usat notació infix (com fem amb el símbol $=$ per a la igualtat). Amb la notació habitual (i amb f en comptes de $\cdot$) la fórmula $\forall x\,\forall y\,\forall z\;\;(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ s'escriuria
$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\;f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$.

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\;(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \qquad [\,\cdot \text{ es associatiu}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\;\; x\cdot e = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per la dreta}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\;\; e\cdot x = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}\,]$$

Notació: $eq(x,y)$ $\quad x = y$

Notació: $\cdot(x,y)$ $\quad x\cdot y$ $\quad$ símbol de funció binari.

En notació prefix la associativitat seria:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\;\cdot(\cdot(x,y),z) = \cdot(x,\cdot(y,z))$$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\cdot \text{ es associatiu}]$$
$$\wedge$$
$$\forall x \;\; x \cdot e = x \qquad [\, e \text{ és l'element neutre per la dreta}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x \;\; e \cdot x = x \qquad [\, e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}\,]$$

Exemples de monoides:

$D_I = \mathbb{N}$ els naturals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

i tots aquests amb $\times, 1$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\cdot \text{ es associatiu}]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\ \ x \cdot e = x \qquad [e \text{ és l'element neutre per la dreta}]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\ \ e \cdot x = x \qquad [e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}]$$

c)

$D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ els conjunts de naturals

$\cdot_I = \cap$ intersecció

$e_I = \mathbb{N}$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\,\cdot \text{ es associatiu}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\ \ x \cdot e = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per la dreta}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\ \ e \cdot x = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}\,]$$

d)

Els strings amb concatenació i l'string buit ($\lambda =$ "lambda")

D_I = cadenes de 0s i 1s

$\cdot_I$ = concatenació $\quad (S1 \,@\, S2) \,@\, S3 = S1 \,@\, (S2 \,@\, S3)$

on @ és la concatenació

$e_I = \lambda$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x\,\forall y\,\forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [$\cdot$ es associatiu]

$\wedge$

$\forall x\ \ x \cdot e = x$ [e és l'element neutre per la dreta]

$\wedge$

$\forall x\ \ e \cdot x = x$ [e és l'element neutre per l'esquerra]

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$
$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$
$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [$\cdot$ es associatiu]

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$
$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$
$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

s'haurien de fer els 8 casos

α	α	α	
α	α	β	
α	β	α	$\leftarrow$ (1)
α	β	β	
β	α	α	
β	α	β	
β	β	α	
β	β	β	

(1) com a exemple,
comprobarem aquest cas

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x \, \forall y \, \forall z \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [$\cdot$ es associatiu]

f)

$$D_I = \{\alpha, \beta\}$$
$$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$$
$$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha \cdot \beta}_{\beta} \cdot \alpha}_{\beta} = \underbrace{\alpha \cdot \underbrace{\beta \cdot \alpha}_{\beta}}_{\beta}$$

Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x \;\; x \cdot e = x$ [e és l'element neutre per la dreta]

$\forall x \;\; e \cdot x = x$ [e és l'element neutre per l'esquerra]

f)

$$\begin{aligned} D_I &= \{\alpha, \beta\} \\ \cdot_I(\alpha, \alpha) &= \alpha \\ \cdot_I(\alpha, \beta) &= \beta \\ \cdot_I(\beta, \alpha) &= \beta \\ \cdot_I(\beta, \beta) &= \alpha \end{aligned}$$

$e_I = \alpha$

s'han de comprovar els casos:

$$\begin{aligned} \cdot_I(\alpha, e_I) &= \alpha \\ \cdot_I(\beta, e_I) &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot_I(e_I, \alpha) &= \alpha \\ \cdot_I(e_I, \beta) &= \beta \end{aligned}$$

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

Quines de les interpretacions anteriors eren grups?

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

Una altra manera de definir els grups és fent explícita l'operació unària invers i:

$$\forall x\, (x \cdot i(x) = e \wedge i(x) \cdot x = e)$$

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

Exemples de grups:

$D_I = \mathbb{N}$ els naturals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$ NO és grup, perquè no hi ha invers

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

I tots aquests amb $\times$, 1 ?

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters

$\cdot_I = \times$

$e_I = 1$

NO és grup, perquè no hi ha invers

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\; (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = \times$
$e_I = 1$
$i_I(n) = 1/n$

SÍ és grup si traiem el zero del domini: $D_I = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\ (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = \times$
$e_I = 1$
$i_I(n) = 1/n$

SÍ és grup si traiem el zero del domini: $D_I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

c)

$D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ els conjunts de naturals
$\cdot_I = \cap$ la intersecció
$e_I = \mathbb{N}$

NO és grup. NO hi ha invers.
Perquè fos grup, necessitaríem que per a tot conjunt de naturals x hagués un altre, $i(x)$, tal que $x \cap i(x) = \mathbb{N}$.
I això no existeix.

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

d)

D_I = cadenes de 0s i 1s

$\cdot_I$ = concatenació $\qquad (S1 \mathbin{@} S2) \mathbin{@} S3 = S1 \mathbin{@} (S2 \mathbin{@} S3)$

on @ és la concatenació

$e_I = \lambda$ $\qquad$ (lambda, la cadena buida)

NO és grup perquè no hi ha invers

NO és grup commutatiu

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\ (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

f)

$$D_I = \{\alpha, \beta\}$$
$$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$$
$$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$$

$$e_I = \alpha$$

$$i_I(\alpha) = \alpha \qquad \alpha \cdot i_I(\alpha) = i_I(\alpha) \cdot \alpha = e_I = \alpha$$
$$i_I(\beta) = \beta \qquad \beta \cdot i_I(\beta) = i_I(\beta) \cdot \beta = e_I = \alpha$$

SÍ és grup amb aquesta interpretació de l'invers

SI és grup commutatiu

Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "y és l'invers de x".

Un altre possible exemple:

$D_I = \mathbb{N}$

$._I(n, m) = mcd(n, m)$

Això és associatiu, perquè
$mcd(x, mcd(y, z)) = mcd(mcd(x, y), z)$.
Però no hi ha element neutre, per tant no és monoide.

Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula F de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que F és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

a) (dificultat 2) Conjunt de símbols de funció: $\{f^2\}$,
I_1 té com a domini els naturals $\mathbb{N}$ i f s'interpreta com el producte
I_2 té com a domini $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i f s'interpreta com la intersecció

Si F és la fórmula $\forall x\, f(x,x) = x$ llavors
$I_1 \not\models F$ però $I_2 \models F$

Si F és la fórmula $\neg \forall x\, f(x,x) = x$ llavors
$I_1 \models F$ però $I_2 \not\models F$

Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula F de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que F és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

b) (dificultat 2) Conjunt de símbols de funció: $\{f^1\}$,
I_1 té domini els naturals $\mathbb{N}$
I_2 té domini els enters $\mathbb{Z}$
En tots dos casos el símbol f s'interpreta com la funció "següent", és a dir, $f_I(n) = n+1$.

Si F és la fórmula $\forall x\, \exists y\; f(y) = x$ llavors
$I_1 \not\models F$ però $I_2 \models F$

Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula F de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que F és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

c) (dificultat 4) $\{f^2, g^2\}$,
I_1 té domini els reals $\mathbb{R}$
I_2 té domini els racionals $\mathbb{Q}$
En tots dos casos f i g s'interpreten com la suma i el producte respectivament.
Ajuda: fabrica el dos i expressa que arrel de dos existeix.

$\exists x \forall y \; g(x,y) = y$ (això expressa que x és el 1, i per això $f(x,x)$ serà 2)

Afegim alguna cosa i tenim:

Si F és la fórmula $\exists x \exists z \, (\forall y \, g(x,y) = y \land g(z,z) = f(x,x))$
llavors $I_1 \models F$ però $I_2 \not\models F$

Definició de la Lògica de Primer Ordre

Per al proper dia de classe:

- Comença a estudiar el capítol 5: Deducció en LPO.

  ☞ `p5.pdf`

Lògica en la Informàtica
Deducció en Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

Sumari

1. Decidibilitat en Lògica de Primer Ordre
   - Quins problemes són decidibles en LPO (o LPOI) i quins no?

2. Tema 5: Deducció en LPO
   - Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE
   - Resolució en LPO

Definició de la Lògica de Primer Ordre

Quins problemes són decidibles en LPO (o LPOI) i quins no?

- Considerem problemes Booleans = problemes de decisió = problemes amb resposta si/no.

Definició

Un problema és DECIDIBLE si:
existeix algun procediment que sempre contesta correctament, en temps finit (és a dir, acaba).

Dins dels problemes decidibles, distingim classes de complexitat (en temps): logarítmic, lineal, quadràtic, polinòmic, exponencial, NP-complet, ...

Dins dels problemes INdecidibles, distingim altres classes: semi-decidibles, co-semi-decidibles, ...

Definició de la Lògica de Primer Ordre

Quins problemes són decidibles en LPO (o LPOI) i quins no?

En el context de la lògica, dos problemes importants són:

1: evaluació d'una formula: donades I i F, tenim $I \models F$?

2: SAT: donada una F, existeix alguna I tal que $I \models F$?

	avaluació	SAT
LProp:	lineal	NP-complet
LPO:	indecidible	indecidible

SAT en LPO és *co-semi-decidible*: existeix algun procediment que,

- si la resposta és NO (és a dir, F és insat), llavors contesta correctament "NO" en temps finit
- si la resposta és SI (és a dir, F és sat), o contesta correctament "SI" o no acaba

Quins problemes són decidibles en LPO (o LPOI) i quins no?

En general:

Un problema és *semi-decidible* si existeix algun procediment que,

- si la resposta és SI, llavors contesta correctament en temps finit
- si la resposta és NO, o contesta correctament "NO" o no acaba

Un problema és *CO-semi-decidible* si existeix algun procediment que,

- si la resposta és NO, llavors contesta correctament en temps finit
- si la resposta és SI, o contesta correctament "SI" o no acaba

Avaluació en LPO amb domini **finit** (és a dir, la I donada té domini finit) sí que és *decidible*. Per què?

Exemple d'avaluació en LPO amb domini finit:

Sigui la I següent:

$$D_I = \{a, b\}$$
$$p_I(a, a) = 1$$
$$p_I(a, b) = 1$$
$$p_I(b, a) = 1$$
$$p_I(b, b) = 0$$

Sigui la F següent:

$$\forall x\, \exists y\; p(x, y)$$

$$\forall x_1\, \exists y_1\, \forall x_2\, \exists y_2 \cdots \forall x_n\, \exists y_n\; F$$

decidible però pot ser exponencial.

Avaluació en LPO amb domini **INfinit** és *INdecidible* en general. Per què?

El halting problem (el problema de la parada):
- donat un programa P, (o el que és el mateix, una màquina de Turing), P acaba?

Aquest problema es va demostrar que era indecidible.

A partir de aqui, es van demostrar indecidibles altres problemes, mitjançant reduccions entre problemes.
Per exemple, si pots reduir el "halting problem" a "SAT en LPO" (fer-ho mitjançant SAT en LPO),... llavors SAT en LPO també ha de ser indecidible!

Avaluació en LPO amb domini **INfinit** és *INdecidible* en general. Per què?

El problema "Arrell": donat un polinomi com a $x^3y^2 + 3x^4 + \cdots = 0$, té solucions ("arrells") enteres?

(trobar arrells de polinomis sobre diverses variables de grau arbitrari i amb productes entre variables).

Aquest problema es va demostrar que era indecidible. Es diu Hilbert's tenth problem.

Avaluació en LPO amb domini **INfinit** és *INdecidible* en general. Per què?

Podem reduir "Arrell" a l'avaluació en LPO amb domini infinit (fer "Arrell" mitjançant avaluació en LPO amb domini infinit): Sigui I la interpretació amb $D_I = \mathbb{Z}$ (els enters) on $\{f^2, g^2\}$ s'interpreten com a suma i producte.

$$F = \exists x \exists y \; \exists z \, ((\forall y \, f(z,y) = y) \wedge f(g(\underbrace{g(x,g(x,x))}_{x^3}, \underbrace{g(y,y)}_{y^2}), \underbrace{f(f(g(g(x,x),g(x,x)), g(g(x,x),g(x,x))), g(g(x,x),g(x,x)))}_{+ \quad x^4+x^4+x^4}, \underbrace{\ldots)}_{+\cdots=0} = z)$$

Tenim $I \models F$ ssi $x^3y^2 + 3x^4 + \cdots = 0$ té arrells senceres.

Avaluació en LPO amb domini **INfinit** és *INdecidible* en general. Per què?

Reduir "Arrell" al problema d'avaluació en LPO amb domini infinit: Si em donen un polinomi P, puc construir una fórmula F_P, tal que si I és la interpretació: $D_I = \mathbb{Z}$ (els enters) on $\{f^2, g^2\}$ s'interpreten com a suma i producte tenim $I \models F_P$ ssi P té arrells senceres.

Tema 5: Deducció en LPO

En L.Prop. teníem diversos mètodes per a SAT: $p \vee q \vee \neg r$

- El millor mètode per a SAT estava basat en un algorisme de backtracking amb propagació, etc., que explora el conjunt de possibles models (totes les interpretacions).
  En LPO aquest mètode no existeix.
  No hi ha manera de "enumerar" totes les I's.
- Però en L.Prop. vam veure un altre, basat en resolució, amb el teorema:

  un cjto de clausulas S és insat ssi $\square \in Res(S)$.

  En LPO, l'únic mètode per a SAT que estudiarem és el basat en resolució.

Una clàusula en LPO és una disjunció de literals, com en L.Prop, però en LPO els literals ja no són símbols de predicat o símbols de predicat negats, sinó que són ÀTOMS, o ÀTOMS NEGATS.

Poden contenir variables, que TOTES s'entenen que estan universalment quantificades:

$\forall x_1 \cdots \forall x_m \; L_1 \vee \cdots \vee L_n$ però normalment els $\forall x_1 \cdots \forall x_m$ no els escrivim.

Un exemple de Prolog (`Neboda`, `Tia`, `Mare`):

`tia(N,T) :- mare(N,M), germana(M,T).`

$\texttt{tia(N,T)} \leftarrow \texttt{mare(N,M)} \wedge \texttt{germana(M,T)}$

$\texttt{tia(N,T)} \vee \neg(\texttt{mare(N,M)} \wedge \texttt{germana(M,T)})$

$\texttt{tia(N,T)} \vee \neg\texttt{mare(N,M)} \vee \neg\texttt{germana(M,T)}$ és una clàusula de Horn de LPO (i no escrivim els "per a tot" $\forall \texttt{N} \forall \texttt{T} \forall \texttt{M}$)

Un literal és un àtom $p(t_1, \ldots, t_n)$ o un àtom negat $\neg p(t_1, \ldots, t_n)$.

Per a què volem SAT en LPO?

Per al mateix que en L.Prop, per a les aplicacions pràctiques, i tenim les propietats:

F SAT ?			
F insat ?			
F Taut ?	ssi	$\neg F$ insat	$\rightarrow$ (1)
$F \models G$?	ssi	$F \wedge \neg G$ insat	
$F \equiv G$?	ssi	$F \wedge \neg G \ \vee \ G \wedge \neg F$ insat	

(1) Taut en LPO és *semi-decidible* (pq és equivalent a un problema de INsat)

Per a poder fer SAT en LPO mitjançant resolució:

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE

(com passava amb la transformació de Tseitin en L.Prop)

"Forma clausal" = conjunt (conjunció, un AND) de clàusules.

Equisatisfactible: Si una formula F té el cjto de clàusules S com a forma clausal, tenim que: F sat ssi S sat.

Per a poder fer SAT en LPO mitjançant resolució:

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE

(com passava amb la transformació de Tseitin en L.Prop)

1. Moviment de les negacions cap a dins
2. Eliminació de conflictes de nom de variable
3. [Opcional] Moviment de quantificadors cap a dins mentre sigui possible
4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemización
5. Moviment de quantificadors universals cap a fora
6. Aplicar distributivitat

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

1. Moviment de les negacions cap a dins:

   $\neg(F \wedge G) \;\Rightarrow\; \neg F \vee \neg G$

   $\neg(F \vee G) \;\Rightarrow\; \neg F \wedge \neg G$

   $\neg\neg F \;\Rightarrow\; F$

   $\neg \exists x\, F \;\Rightarrow\; \forall x \neg F$

   $\neg \forall x\, F \;\Rightarrow\; \exists x \neg F$

2. Eliminació de conflictes de nom de variable:

   per exemple: $\forall x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \implies \forall x\, p(x) \wedge \exists x'\, q(x')$

3. [Opcional; és només per eficiència] Moviment de quantificadors cap a dins mentre sigui possible:

   per exemple: $\forall x\, (p(a) \wedge q(x)) \implies p(a) \wedge \forall x\, q(x)$

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemització: (és l'únic pas dels 6 que NO preserva l'equivalència logica; però sí la equisatisfactibilitat)

   2 exemples:

   1. $\forall x \, \exists y \; p(\, x, y \,) \;\xrightarrow{sk}\; \forall x \; p(\, x, f_y(x) \,)$ on f_y és un símbol de funció nou "fresc"
   2. $\exists y \, \forall x \; p(\, x, y \,) \;\xrightarrow{sk}\; \forall x \; p(\, x, \; c_y \;)$ on c_y és un símbol de funció nou "fresc" (en aquest cas, una cte)

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemització: (és l'únic pas dels 6 que NO preserva l'equivalència logica; però sí la equisatisfactibilitat)

   Recordem $\forall x\, \exists y\; p(x,y) \not\equiv \exists y\, \forall x\; p(x,y)$:

   1. $\forall x\, \exists y\; p(x,y)$
   2. $\exists y\, \forall x\; p(x,y)$

   Si tenim la interpretació I tal que:

   $D_I = \{a, b\}$
   $p_I(a,a) = 0$
   $p_I(a,b) = 1$
   $p_I(b,a) = 1$
   $p_I(b,b) = 0$

   tenim que $I \models \forall x\, \exists y\; p(x,y)$,
   però $I \not\models \exists y\, \forall x\; p(x,y)$.

   Intuïtivament, tenim que $\exists y\, \forall x\; p(x,y) \models \forall x\, \exists y\; p(x,y)$.

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemització:

La Skolemización NO dona una fórmula lògicament equivalent:

tenim $\forall x\, \exists y\; p(x, y) \xrightarrow{sk} \forall x\; p(x, f_y(x))$

donem una I tal que:

- $I \models \forall x\, \exists y\; p(x, y)$
- $I \not\models \forall x\; p(x, f_y(x))$

$D_I = \{a, b\}$

$p_I(a, a) = 0$ $\quad$ $f_{y_I}(a) = a$

$p_I(a, b) = 1$ $\quad$ $f_{y_I}(b) = a$

$p_I(b, a) = 1$

$p_I(b, b) = 0$

això és model de $\forall x\, \exists y\; p(x, y)$ però NO és model de $\forall x\; p(x, f_y(x))$.

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemització:

La Skolemización NO dona una fórmula lògicament equivalent:

tenim $\forall x\, \exists y\; p(x, y) \xrightarrow{sk} \forall x\; p(x, f_y(x))$

donem una I tal que:

- $I \models \forall x\, \exists y\; p(x, y)$
- $I \not\models \forall x\; p(x, f_y(x))$

$D_I = \{a, b\}$

$p_I(a, a) = 0 \qquad f_{y_I}(a) = b$
$p_I(a, b) = 1 \qquad f_{y_I}(b) = a$
$p_I(b, a) = 1$
$p_I(b, b) = 0$

En canvi, si interpreto f_y així (és a dir, "bé", com ho feia l'existeix en $\forall x\, \exists y\; p(x, y)$), llavors f_{y_I} "tria" el valor adequat perquè I SÍ QUE sigui model de $\forall x\, p(x, f_y(x))$.

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

4. Eliminació de quantificadors existencials o Skolemització:

La Skolemización NO dona una fórmula lògicament equivalent

En general:

Si $F \xrightarrow{sk} F'$ llavors donat un model de F puc construir un model de F', i viceversa: F i F' són **equisatisfactibles**.

Transformació a forma clausal EQUISATISFACTIBLE:

5. Moviment de quantificadors universals cap a fora

   Per exemple:

   $$F \wedge \forall x\, G \implies \forall x\, (F \wedge G)$$

6. Distributivitat amb: $(F \wedge G) \vee H \Rightarrow (F \vee H) \wedge (G \vee H)$

   (això pot fer créixer la fórmula exponencialment, perquè la part H es duplica; hi ha mètodes similars a Tseitin per a evitar aquest problema).

Resolució en LPO

- Resolució en L.Proposicional
- Regla de resolució en LPO
- No terminació de la resolució en LPO

Deducció en Lògica de Primer Ordre

Recordem: Resolució en L.Proposicional:

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D}$$

Teorema

$$S \text{ insat ssi } \Box \in Res(S)$$

Aquest teorema també és cert en LPO (bé, “gaire bé cert”; veure més endavant)

Recordem: Resolució en L.Proposicional:

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D}$$

Teorema

$$S \text{ insat ssi } \square \in Res(S)$$

$S_0 = S$

$S_1 = S_0 \cup Res_1(S_0)$ ($Res_1(S_0)$ = el que puc obtenir en 1 pas de resolució a partir de S_0)

$S_2 = S_1 \cup Res_1(S_1)$ ($Res_1(S_1)$ = el que puc obtenir en 1 pas de resolució a partir de S_1)

... ...

$Res(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$

Resolució en LPO

$$\frac{A \vee C \qquad\qquad \neg B \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$

A,B són àtoms
si $\sigma = mgu(A, B)$
(*most general unifier*)

Exemple: x, y són vars a, b són ctes:

$$\frac{p(a, x) \vee q(x) \qquad \neg p(y, b) \vee r(y)}{(\, q(x) \vee r(y)\,)\sigma}$$

si $\sigma = \{x = b, y = a\}$
$q(b) \vee r(a)$

$$\frac{p(a, b) \vee q(b) \qquad \neg p(a, b) \vee r(a)}{q(b) \vee r(a)}$$

En LPO, la resolució pot no acabar:

$$\frac{p(a) \qquad \neg p(x) \vee p(f(x))}{p(f(a))} \qquad mgu(\, p(a), p(x)\,) = \{x{=}a\}$$

$$\frac{p(f(a)) \qquad \neg p(x) \vee p(f(x))}{p(f(f(a)))} \qquad mgu(\, p(f(a)), p(x)\,) = \{x{=}f(a)\}$$

1. $p(a)$
2. $\neg p(x) \vee p(f(x))$

---

3. $p(f(a))$ — puc obtenir, amb $mgu(p(a), p(x)) = \{x{=}a\}$:
4. $p(f(f(a)))$ — 3. amb la 2. amb $mgu(\, p(f(a)), p(x)\,) = \{x{=}f(a)\}$:
5. $p(f(f(f(a))))$ — 4. amb la 2. amb $mgu(\, p(f(f(a))), p(x)\,) = \{x{=}f(f(a))\}$:
6. $\ldots$

Deducció en Lògica de Primer Ordre

En LPO, la resolució pot no acabar:

$$\frac{p(a) \qquad \neg p(x) \vee p(f(x))}{p(f(a))} \qquad mgu(\, p(a), p(x)\,) = \{x = a\}$$

$$\frac{p(f(a)) \qquad \neg p(x) \vee p(f(x))}{p(f(f(a)))} \qquad mgu(\, p(f(a)), p(x)\,) = \{x = f(a)\}$$

El mateix exemple, de forma més “natural”:

1. $nat(0)$
2. $\neg nat(x) \vee nat(succ(x))$

En LPO, la resolució pot no acabar:

Un altre exemple de no-terminació, sense símbol de funció:

1. $\neg p(x, y) \vee \neg p(y, z) \vee p(x, z)$

1. $\neg p(x, y) \ \vee \ \neg p(y, z) \ \vee \ \underline{p(x, z)}$

$\underline{\neg p(x', y')} \vee \neg p(y', z') \vee p(x', z')$

el *mgu* és $\{x' = x, y' = z\}$ i obtenim:

2. $\neg p(x, y) \vee \neg p(y, z) \vee \neg p(z, z') \vee p(x, z')$
(una mena de "transitivitat de 4")

... etc

Per al proper dia de classe:

- Unificació
- Veure el capítol 5 dels apunts, i els exercicis.

  ☞ `p5.pdf`

Lògica en la Informàtica
Deducció en Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

Sumari

Unificació. Algorisme d'unificació

Unificació

- una "substitució" σ és un conjunt de parells variable-terme: $\{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$
- "aplicar una substitució": si σ és $\{x = f(a), y = b\}$ i t és el terme (o àtom) $g(f(x), y))$ llavors $t\sigma$ és $g(f(f(a)), b)$
- dos termes s i t són "unificables" si existeix una σ tal que $s\sigma = t\sigma$

- σ és l' "unificador més general" (*most general unifier, mgu*) de dos termes s i t si:
  - $s\sigma = t\sigma$ (σ és unificador)
  - i a més és l'unificador més general:
    per a tot σ', si tenim que $s\sigma' = t\sigma'$ llavors hi ha un σ'' tal que σ' és $\sigma\sigma''$

Unificació

Per exemple: unificar $f(x, y)$ amb $f(a, z)$
el *mgu* $\sigma = \{x{=}a, y{=}z\}$

Un altre unificador σ' pot ser $\sigma' = \{x{=}a, y{=}a, z{=}a\}$
però no és el més general. És un cas particular del *mgu* σ.

Existeix $\sigma'' = \{y{=}a, z{=}a\}$
i tinc que $\sigma' = \sigma\sigma''$.

Algorisme d'unificació:

Jo vull unificar dos termes s i t (o dos àtoms s i t, a l'efecte d'unificació és el mateix).

Escriurem el problema d'unificació com a conjunts d'igualtats $\{s = t\}$:

0.	$E \cup \{t = t\}$	$\Longrightarrow$	E
1.	$E \cup \{f(\ldots) = g(\ldots)\}$	$\Longrightarrow$	fallo
			si $f \neq g$ (no són unificables!)
2.	$E \cup \{f(s_1 \ldots s_n) = f(t_1 \ldots t_n)\}$	$\Longrightarrow$	$E \cup \{s_1 = t_1 \ldots s_n = t_n\}$
3.	$E \cup \{x = t\}$	$\Longrightarrow$	fallo
			si x apareix en t, i
			x no ÉS t (per ex. $x = f(x)$)
4.	$E \cup \{x = t\}$	$\Longrightarrow$	$E\{x = t\} \cup \{x = t\}$
			si x NO apareix en t, i
			a més x SI apareix en E

Algorisme d'unificació:

Exemple:

$$\{f(x, g(x, a)) = f(h(b), z)\} \xRightarrow{2}$$

$$\{\underbrace{x = h(b)}_{x=t},\ \underbrace{z = g(x, a)}_{E}\} \xRightarrow{4} \{x = h(b),\ z = g(h(b), a)\}$$

això és el *mgu*!

podria tornar a aplicar la regla 4, però no faria res (per això exigim que x SÍ QUE aparegui en E).
El que hem de pensar:

- aquestes regles acaben? (o necessitem alguna cosa més perquè acabin?)
- donen lloc al *mgu* del problema inicial?

Petit exemple de recapitulació

Exemple:

Vull saber si $F \models G$ en LPO. Aqui F i G són fórmules qualssevol.
Què faig?

$F \models G$	ssi
la fórmula $F \wedge \neg G$ és insat	ssi
$S = \mathit{forma\_clausal}(F \wedge \neg G)$ és insat	ssi (*gairebé*)
la clàusula buida $\Box$ està en $\mathit{Res}(S)$	(puc obtenir $\Box$ mitjançant resolució a partir del conjunt de clàusules S)

Petit exemple de recapitulació

Exemple:

Vull saber si $F \models G$ en LPO. Aqui F i G són fórmules qualssevol.
Què faig?

$$S_0 = S$$
$$S_1 = S_0 \cup Res_1(S_0)$$
$$\ldots$$
$$Res(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

Un detall important!! $Res(S)$ NO és exactament la clausura sota **només resolució**!!
Cal una regla deductiva addicional: la **factorització**.
Veurem per què:

Exemple de recapitulació

Un exemple. Un conjunt S de dues clàusules:

$$\{\, p(x) \vee p(y),\ \ \neg p(z) \vee \neg p(z')\, \}$$

S és SAT o INSAT? Suposem que S és SAT.

Llavors hi hauria un model I amb almenys un element en el seu domini D_I (els dominis sempre són no-buits).

Diguem-li "e" a aquest element: $D_I = \{e, \ldots\}$

Com pot ser $p_I(e)$? cert o fals?

- per la primera clàusula $\forall x\, \forall y\, (p(x) \vee p(y))$ en el cas on $x = y = e$, necessito que $p_I(e) = 1$
- per la segona clàusula (cas on $z = z' = e$) necessito que $p_I(e) = 0$

Contradicció! No existeix cap model!! Per tant, S és INSAT.

Exemple de recapitulació

Com que S és INSAT, mitjançant resolució hauríem de poder obtenir $\Box$ a partir de S.

$$\{\, p(x) \vee p(y),\ \ \neg p(z) \vee \neg p(z') \,\}$$

Però no és possible obtenir $\Box$!!

Puc fer, per exemple, aquesta resolució:

$$\frac{p(x) \vee p(y) \qquad \neg p(z) \vee \neg p(z')}{p(y) \vee \neg p(z')} \qquad mgu(p(x), p(z)) = \{x = z\}$$

En les clàusules de S, els literals no comparteixen variables.

L'única cosa que puc obtenir mitjançant resolució són altres clàusules on els literals tampoc comparteixen variables.

I per això, en aquest exemple, sempre continuaré obtenint clàusules de dos literals!

I mai sortirà la clàusula buida $\Box$!!

Exemple de recapitulació

Aquest exemple demostra que la resolució per si sola NO és refutacionalment completa!!

Si només considerem resolució, NO és veritat que

S insat SSI $\Box \in Res(S)$.

Què és el que falta?

Fem el mateix "tipus" d'exemple en L.proposicional:

$$\boxed{\begin{array}{r} p \vee q \\ p \vee \neg q \\ \neg p \vee q \\ \neg p \vee \neg q \end{array}}$$

INSAT. Per resolució:

$$\cfrac{\cfrac{p \vee q \qquad p \vee \neg q}{\begin{array}{c} p \vee p \\ p \end{array}} \qquad \cfrac{\neg p \vee q \qquad \neg p \vee \neg q}{\begin{array}{c} \neg p \vee \neg p \\ \neg p \end{array}} \longleftarrow (*)}{\Box}$$

(*) aquest pas d'eliminar literals repetits l'hem de simular (estendre) en LPO!!

Regla deductiva de Factorització

Factorització

La Regla deductiva de Factorització en LPO és la que fa això. És la següent:

$$\frac{A \vee B \vee C}{(A \vee C)\,\sigma}$$

on A i B átoms (literals POSITIUS),
i C és la resta de la clàusula
$\sigma = mgu(A, B)$

Per exemple:

$$\frac{\overbrace{p(a,x)}^{A} \vee \overbrace{p(y,b)}^{B} \vee \overbrace{q(x,y) \vee \cdots}^{C}}{\begin{array}{c}(\, p(a,x) \vee q(x,y) \vee \cdots)\,\sigma \\ p(a,b) \vee q(b,a) \vee \cdots\end{array}}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= mgu(p(a,x), p(y,b)) \\ &= \{x = b, y = a\}\end{aligned}$$

Regla deductiva de Factorització

En què es basa això?

Si tinc:	$\forall x\, \forall y$	$p(a,x) \vee p(y,b) \vee q(x,y)$
en particular, tinc:		$p(a,b) \vee p(a,b) \vee q(b,a)$
		(és a dir, el mateix on $x=b$, $y=a$)

i sobre això puc eliminar literals repetits com en L.Prop:

$$p(a,b) \vee q(b,a)$$

Regla deductiva de Factorització

Tornem a l'exemple del conjunt S de dues clàusules:

1. $\{\, p(x) \vee p(y),$
2. $\neg p(z) \vee \neg p(z') \,\}$

Puc aplicar factorització a la clàusula 1.! :

3. $\dfrac{p(x) \vee p(y)}{p(x)}$ $\qquad \sigma = mgu(p(x), p(y)) = \{y = x\}$ (aqui la part C és buida)
4. $\neg p(z')$ $\qquad$ per resolució entre 2. i 3.: $\sigma = mgu(p(z), p(x)) = \{x = z\}$
5. $\Box$ $\qquad$ per resolució entre 3. i 4.: $\sigma = mgu(p(z'), p(x)) = \{x = z'\}$

El teorema que SÍ QUE és veritat en LPO:

$$S \text{ insat SSI } \Box \in ResFact(S)$$

Calculem $ResFact(S)$ per nivells:

$$S_0 = S$$
$$S_{i+1} = S_i \cup Res_1(S_i) \cup Fact_1(S_i)$$

$$ResFact(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

Completitud refutacional en LPO

Última observació: Què passa si S és (un conjunt de clàusules de) Horn?

1. La regla de factorització no s'aplica a clàusules de Horn.
2. Si S és de Horn, fent resolució només obtinc clàusules de Horn.

Si S és Horn, llavors:

S insat SSI $\square \in Res(S)$

(Si S és Horn no necessito factorització!!!,
perquè mai tindré ocasió d'aplicar-la!)

Comentaris sobre el tema 6

- Programació lògica

  Llegeix els apunts del tema 6. ☞ `p6.pdf`

  - un programa Prolog és un conjunt de clausulas de Horn de LPO
  - executar un programa Prolog és fer resolució (amb una estratègia determinada, no és exactament per nivells $S_0, S_1, S_2, \ldots$)

- Mira els exercicis d'examen on es fa això. Per exemple, l'exercici 6 de l'examen final de 2017 tardor.

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:
   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
   (b) "Els dracs verds poden volar"
   (c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:

   (d) "Tots els dracs verds són feliços"

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:
   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
   (b) "Els dracs verds poden volar"
   (c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:
   (d) "Tots els dracs verds són feliços"

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{esfeliç}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és feliç”} \\
\mathit{fillde}(x, y) & \equiv & \text{“un fill de } x \text{ és } y\text{”} \\
\mathit{esverd}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és verd”} \\
\mathit{vola}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ pot volar”}
\end{array}
$$

- Necessitem un predicat unari $\mathit{esdrac}(x)$???
  Funcionaria, però NO cal, podem assumir
  que tots l'elements del domini són dracs.

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

$$\begin{array}{lcl} esfeli\c{c}(x) & \equiv & \text{"}x \text{ és feliç"} \\ fillde(x,y) & \equiv & \text{"un fill de } x \text{ és } y\text{"} \\ esverd(x) & \equiv & \text{"}x \text{ és verd"} \\ vola(x) & \equiv & \text{"}x \text{ pot volar"} \end{array}$$

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(a) $\forall x\ (\quad \ldots \quad \rightarrow esfeli\c{c}(x)\ )$

on $\ldots$ ha de dir que tots els fills de x poden volar:

$\forall y\ (\ fillde(x,y) \rightarrow\ vola(y)\ )$

I ens queda:

(a) $\forall x\ (\ \forall y\ (\ fillde(x,y) \rightarrow vola(y)\ )\ \rightarrow\ esfeli\c{c}(x)\ )$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(b) "Els dracs verds poden volar"

$$\begin{array}{lcl} esfeliç(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és feliç”} \\ fillde(x,y) & \equiv & \text{“un fill de } x \text{ és } y\text{”} \\ esverd(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és verd”} \\ vola(x) & \equiv & \text{“}x \text{ pot volar”} \end{array}$$

(b) "Els dracs verds poden volar"

(b) $\forall x\ (esverd(x) \rightarrow vola(x)\ )$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{esfeliç}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és feliç”} \\
\mathit{fillde}(x,y) & \equiv & \text{“un fill de } x \text{ és } y\text{”} \\
\mathit{esverd}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és verd”} \\
\mathit{vola}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ pot volar”}
\end{array}
$$

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) $\forall x \; (\quad \ldots \quad \rightarrow \mathit{esverd}(x) \;)$

on $\ldots$ ha de dir que x és fill de almenys un drac verd:

$\exists y \; (\mathit{fillde}(y,x) \land \mathit{esverd}(y) \;)$

I ens queda:

(c) $\forall x \; (\; \exists y \; (\mathit{fillde}(y,x) \land \mathit{esverd}(y) \;) \; \rightarrow \; \mathit{esverd}(x) \;)$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

La conjunció de (a), (b) i (c) implica (d)		SSI
$(a) \land (b) \land (c) \models (d)$		SSI
$(a) \land (b) \land (c) \land \neg(d)$ INSAT		SSI
$S = \texttt{formaclausal}(\,(a) \land (b) \land (c) \land \neg(d)\,)$	INSAT	SSI
$\square \in ResFact(S)$		

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(d) "Tots els dracs verds són feliços"

$(\neg d)$ "No tots els dracs verds són feliços"

$$
\begin{array}{ll}
(\neg d) & \neg \forall x\, (\ \ \mathit{verd}(x) \rightarrow \mathit{esfeliç}(x)\,) \\
 & \neg \forall x\, (\neg \mathit{verd}(x) \vee \mathit{esfeliç}(x)\,) \\
 & \exists x\, (\ \ \mathit{verd}(x) \wedge \neg \mathit{esfeliç}(x)\,)
\end{array}
$$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(*a*) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(*a*) $\forall x\ (\ \forall y\ (\ \mathit{fillde}(x,y) \to \mathit{vola}(y)\ )\ \to\ \mathit{esfeliç}(x)\ )$

$\forall x\ (\ \forall y\ (\ \mathit{fillde}(x,y) \to \mathit{vola}(y)\ ) \to \mathit{esfeliç}(x)\ )$

- eliminem les $\to$

$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ \mathit{fillde}(x,y) \to \mathit{vola}(y)\ ) \vee \mathit{esfeliç}(x)\ )$
$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ \neg\mathit{fillde}(x,y) \vee \mathit{vola}(y)\ ) \vee \mathit{esfeliç}(x)\ )$

- moure les $\neg$

$\forall x\ (\ \exists y\ \neg(\ \neg\mathit{fillde}(x,y) \vee \mathit{vola}(y)\ ) \vee \mathit{esfeliç}(x)\ )$

- moure les $\neg$ (de Morgan)

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ \mathit{fillde}(x,y) \wedge \neg\mathit{vola}(y)\ ) \vee \mathit{esfeliç}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(*a*) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(*a*) [*cont.*] $\forall x\,(\,\exists y\,(\,\mathit{fillde}(x,y) \wedge \neg\,\mathit{vola}(y)\,)\ \vee\ \mathit{esfeliç}(x)\,)$

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ \mathit{fillde}(x,y)\ \wedge\ \neg\,\mathit{vola}(y)\ )\ \vee\ \mathit{esfeliç}(x)\ )$

➤ Skolemizar (eliminar el $\exists$)

$\forall x\ (\ (\ \mathit{fillde}(x, f_y(x))\ \wedge\ \neg\,\mathit{vola}(f_y(x))\ )\ \vee\ \mathit{esfeliç}(x)\ )$

➤ distributivitat $(F \wedge G) \vee H) \Rightarrow (F \vee H) \wedge (G \vee H)$

$$\forall x\ (\ (\ \mathit{fillde}(x, f_y(x))\ \vee\ \mathit{esfeliç}(x)\ )\ \wedge$$
$$(\ \neg\,\mathit{vola}(f_y(x))\ \vee\ \mathit{esfeliç}(x)\ )$$

Això ens done dues clàusules:

(*a*1) $\mathit{fillde}(x, f_y(x)) \vee \mathit{esfeliç}(x)$

(*a*2) $\neg\,\mathit{vola}(f_y(x)) \vee \mathit{esfeliç}(x)$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

$(\neg d)$ "No tots els dracs verds són feliços"

$(\neg d)$ $\exists x\,(\,esverd(x) \wedge \neg\, esfeliç(x)\,)$

$$\exists x \quad (\quad esverd(x) \quad \wedge \quad \neg\, esfeliç(x) \quad)$$

Per al proper dia de classe:

- Recorda la lliçó de l'examen parcial.
  Per a estudiar teoria de LI:
  - repassa els materials del que hem estudiat, i
  - FÉS ELS EXÀMENS PENJATS, començant pels últims, cap als anteriors, treballant sempre primer l'enunciat SENSE resoldre, i després l'examen resolt.
- Continueu fent els exercicis del tema 5. Pròxima classe els farem, i també els d'examen que em proposeu!!!

Lògica en la Informàtica
Deducció en Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

Temari

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. Deducció en Lògica Proposicional
4. Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre
6. ☞ Programació Lògica (Prolog)

Sumari

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:
   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
   (b) "Els dracs verds poden volar"
   (c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:

   (d) "Tots els dracs verds són feliços"

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

   (b) "Els dracs verds poden volar"

   (c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:

   (d) "Tots els dracs verds són feliços"

$\mathit{esfeliç}(x)$	$\equiv$	"x és feliç"
$\mathit{fillde}(x, y)$	$\equiv$	"un fill de x és y"
$\mathit{esverd}(x)$	$\equiv$	"x és verd"
$\mathit{vola}(x)$	$\equiv$	"x pot volar"

- Necessitem un predicat unari $\mathit{esdrac}(x)$???

  Funcionaria, però NO cal, podem assumir que tots l'elements del domini són dracs.

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

$$
\begin{array}{lcl}
\textit{esfeliç}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és feliç”} \\
\textit{fillde}(x,y) & \equiv & \text{“un fill de } x \text{ és } y\text{”} \\
\textit{esverd}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ és verd”} \\
\textit{vola}(x) & \equiv & \text{“}x \text{ pot volar”}
\end{array}
$$

   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

   (a) $\forall x\,(\quad \ldots \quad \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\,)$

   on $\ldots$ ha de dir que tots els fills de x poden volar:

   $\forall y\,(\,\textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\,)$

   I ens queda:

   (a) $\forall x\,(\,\forall y\,(\,\textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\,) \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\,)$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(b) "Els dracs verds poden volar"

$$\begin{array}{lcl} \mathit{esfeliç}(x) & \equiv & \text{"}x\text{ és feliç"} \\ \mathit{fillde}(x, y) & \equiv & \text{"un fill de }x\text{ és }y\text{"} \\ \mathit{esverd}(x) & \equiv & \text{"}x\text{ és verd"} \\ \mathit{vola}(x) & \equiv & \text{"}x\text{ pot volar"} \end{array}$$

(b) "Els dracs verds poden volar"

(b) $\forall x\ (\mathit{esverd}(x) \rightarrow \mathit{vola}(x)\ )$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{esfeliç}(x) & \equiv & \text{“}x\text{ és feliç”} \\
\mathit{fillde}(x,y) & \equiv & \text{“un fill de }x\text{ és }y\text{”} \\
\mathit{esverd}(x) & \equiv & \text{“}x\text{ és verd”} \\
\mathit{vola}(x) & \equiv & \text{“}x\text{ pot volar”}
\end{array}
$$

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) $\forall x\ (\quad \ldots \quad \rightarrow \mathit{esverd}(x)\ )$

on $\ldots$ ha de dir que x és fill de almenys un drac verd:

$\exists\, y\ (\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ )$

I ens queda:

(c) $\forall x\ (\ \exists y\ (\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ ) \ \rightarrow\ \mathit{esverd}(x)\ )$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

La conjunció de (a), (b) i (c) implica (d)	SSI
$(a) \wedge (b) \wedge (c) \quad \models \quad (d)$	SSI
$(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge \neg(d)$ INSAT	SSI
$S = \texttt{formaclausal}(\,(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge \neg(d)\,)$ INSAT	SSI
$\square \in \mathit{ResFact}(S)$	

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(d) "Tots els dracs verds són feliços"

$(\neg d)$ "No tots els dracs verds són feliços"

$$
\begin{array}{lllllll}
(\neg d) & \neg\,\forall x\,(& \mathit{verd}(x) & \rightarrow & & \mathit{esfeli\c{c}}(x)\,) \\
 & \neg\,\forall x\,(& \neg\,\mathit{verd}(x) & \vee & & \mathit{esfeli\c{c}}(x)\,) \\
 & \exists\, x\,(& \mathit{verd}(x) & \wedge & \neg & \mathit{esfeli\c{c}}(x)\,)
\end{array}
$$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(*a*) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(*a*) $\forall x\ (\ \forall y\ (\ fillde(x,y) \rightarrow vola(y)\ )\ \rightarrow\ esfeliç(x)\ )$

$$\forall x\ (\ \forall y\ (\ fillde(x,y) \rightarrow vola(y)\ ) \rightarrow esfeliç(x)\ )$$

- eliminem les $\rightarrow$

$$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ fillde(x,y) \rightarrow vola(y)\ ) \vee esfeliç(x)\ )$$
$$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ \neg fillde(x,y) \vee vola(y)\ ) \vee esfeliç(x)\ )$$

- moure les $\neg$

$$\forall x\ (\ \exists y\ \neg(\ \neg fillde(x,y) \vee vola(y)\ ) \vee esfeliç(x)\ )$$

- moure les $\neg$ (de Morgan)

$$\forall x\ (\ \exists y\ (\ fillde(x,y) \wedge \neg vola(y)\ ) \vee esfeliç(x)\ )$$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(*a*) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(*a*) [*cont.*] $\forall x\,(\,\exists y\,(\,fillde(x,y) \wedge \neg\, vola(y)\,)\ \vee\ esfeliç(x)\,)$

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ fillde(x,y)\ \wedge\ \neg\, vola(y)\ )\ \vee\ esfeliç(x)\ )$

➤ Skolemizar (eliminar el $\exists$)

$\forall x\ (\ (\ fillde(x,f_y(x))\ \wedge\ \neg\, vola(f_y(x))\ )\ \vee\ esfeliç(x)\ )$

➤ distributivitat $(F \wedge G) \vee H) \Rightarrow (F \vee H) \wedge (G \vee H)$

$\forall x\ (\ (\ fillde(x,f_y(x))\ \vee\ esfeliç(x)\ )\ \wedge$
$(\ \neg\, vola(f_y(x))\ \vee\ esfeliç(x)\ )$

Això ens done dues clàusules:

(*a*1) $fillde(x,f_y(x)) \vee esfeliç(x)$

(*a*2) $\neg\, vola(f_y(x)) \vee esfeliç(x)$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(b) "Els dracs verds poden volar"

$(b)\ \forall x\ (esverd(x) \rightarrow vola(x)\ )$

$\forall x \quad (\quad esverd(x) \quad \rightarrow \quad vola(x) \quad)$

- eliminem qles $\rightarrow$

$\forall x \quad (\quad \neg\, esverd(x) \quad \vee \quad vola(x) \quad)$

Això ens done una clàusula:

$(b)\ \neg\, esverd(x) \vee vola(x)$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) $\forall x\ (\ \exists y\ (\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ )\ \rightarrow\ \mathit{esverd}(x)\ )$

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ )\ \rightarrow\ \mathit{esverd}(x)\ )$

- eliminem les $\rightarrow$

$\forall x\ (\ \neg\exists y\ (\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ )\ \vee\ \mathit{esverd}(x)\ )$

- moure les $\neg$

$\forall x\ (\ \forall y\ \neg(\ \mathit{fillde}(y,x) \wedge \mathit{esverd}(y)\ )\ \vee\ \mathit{esverd}(x)\ )$

- moure les $\neg$ amb de Morgan

$\forall x\ (\ \forall y\ (\ \neg\mathit{fillde}(y,x) \vee \neg\mathit{esverd}(y)\ )\ \vee\ \mathit{esverd}(x)\ )$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) [cont.] $\forall x\,(\,\forall y\,(\,\neg fillde(y,x) \vee \neg\, esverd(y)\,)\,\vee esverd(x)\,)$

$$\forall x \quad (\quad \forall y \quad (\quad \neg fillde(y,x) \quad \vee \quad \neg\, esverd(y) \quad) \quad \vee \quad esverd(x) \quad)$$

$$\forall x \qquad \forall y \quad (\quad \neg fillde(y,x) \quad \vee \quad \neg\, esverd(y) \qquad \vee \quad esverd(x) \quad)$$

Això ens done una clàusula:

(c) $\neg\, fillde(y,x) \vee \neg\, esverd(y) \vee esverd(x)$

és com:

```
esverd(x)  :-  fillde(y,x), esverd(y).
esverd(x)  ←   fillde(y,x) ∧ esverd(y)
```

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

$(\neg d)$ "No tots els dracs verds són feliços"

$(\neg d)$ $\exists x\ (\ esverd(x) \wedge \neg\ esfeliç(x)\ )$

$$\exists x \quad (\quad esverd(x) \quad \wedge \quad \neg\ esfeliç(x) \quad)$$

- Skolem

$$esverd(c_x) \quad \wedge \quad \neg\ esfeliç(c_x)$$

Això ens done dues clàusules:

$(\neg d1)$ $esverd(c_x)$

$(\neg d2)$ $\neg\ esfeliç(c_x)$

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Juntem totes les clàusules:

$$
\begin{array}{rl}
(a1) & \mathit{fillde}(x, f_y(x)) \lor \mathit{esfeliç}(x) \\
(a2) & \neg\, \mathit{vola}(f_y(x)) \lor \mathit{esfeliç}(x) \\
(b) & \neg\, \mathit{esverd}(x) \lor \mathit{vola}(x) \\
(c) & \neg\, \mathit{fillde}(y, x) \lor \neg\, \mathit{esverd}(y) \lor \mathit{esverd}(x) \\
(\neg d1) & \mathit{esverd}(c_x) \\
(\neg d2) & \neg\, \mathit{esfeliç}(c_x)
\end{array}
$$

Hem de fer resolució (i factorització, degut a que no és de Horn), i intentar obtenir $\square$:

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

$a1.$	$fillde(x, f_y(x)) \vee esfeliç(x)$
$a2.$	$\neg vola(f_y(x)) \vee esfeliç(x)$
$b.$	$\neg esverd(x) \vee vola(x)$
$c.$	$\neg fillde(y, x) \vee \neg esverd(y) \vee esverd(x)$
$\neg d1.$	$esverd(c_x)$
$\neg d2.$	$\neg esfeliç(c_x)$

		amb:	*mgu*:	
1.	$vola(c_x)$	res $d1$. amb b.	$\{x = c_x\}$	$\leftarrow$ (∗)
2.	$fillde(c_x, f_y(c_x))$	res $d2$. amb $a1$.	$\{x = c_x\}$	
3.	$\neg esverd(c_x) \vee esverd(f_y(c_x))$	res 2. amb c.	$\{y = c_x, x = f_y(c_x)\}$	
4.	$esverd(f_y(c_x))$	res 3. amb $\neg d1$.	$\{\}$	
5.	$\neg vola(f_y(c_x))$	res $a2$. amb $\neg d2$.	$\{x = c_x\}$	
6.	$\neg esverd(f_y(c_x))$	res 5. amb b.	$\{x = f_y(c_x)\}$	
7.	$\square$	res 4. amb 6.	$\{\}$	

(∗): Al final aquesta clàusula 1. no la fem servir per res!

Exercici 7

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

$a1.$	$\mathit{fillde}(x, f_y(x)) \vee \mathit{esfeliç}(x)$
$a2.$	$\neg \mathit{vola}(f_y(x)) \vee \mathit{esfeliç}(x)$
$b.$	$\neg \mathit{esverd}(x) \vee \mathit{vola}(x)$
$c.$	$\neg \mathit{fillde}(y, x) \vee \neg \mathit{esverd}(y) \vee \mathit{esverd}(x)$
$\neg d1.$	$\mathit{esverd}(c_x)$
$\neg d2.$	$\neg \mathit{esfeliç}(c_x)$

Nota:

Hi ha altres formes d'obtenir $\square$.

6) Consider the following Prolog program and its well-known behaviour:

```
animals([dog,lion,elephant]).
bigger(lion,cat).
faster(lion,cat).
better(X,Y):- animals(L), member(X,L), bigger(X,Y), faster(X,Y).

    ?- better(U,V).
    U = lion
    V = cat
```

In Prolog, a list like `[dog,lion,elephant]` is in fact represented as a term `f(dog,f(lion,f(elephant,emptylist)))`.

Therefore, we assume that the program also contains the standard clauses for `member` like this:

```
member( E, f(E,_) ).
member( E, f(_,L) ):- member(E,L).
```

6) Consider the following Prolog program and its well-known behaviour:

```
animals([dog,lion,elephant]).
bigger(lion,cat).
faster(lion,cat).
better(X,Y):- animals(L), member(X,L), bigger(X,Y), faster(X,Y).

member( E, f(E,_) ).
member( E, f(_,L) ):- member(E,L).
```

Express the program as a set of first-order clauses P and prove that $\exists u \exists v \; better(u,v)$ is a logical consequence of P. Which values did the variables u and v get (by unification) in your proof? **Only write the steps and values. No explanations.**

Examen final de 2017 tardor. Exercici 6

```
better(X,Y):- animals(L), member(X,L), bigger(X,Y), faster(X,Y).
```

$$better(X, Y) \leftarrow animals(L) \wedge member(X, L) \wedge bigger(X, Y) \wedge faster(X, Y)$$

$$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$$

$$better(X, Y) \vee \neg(animals(L) \wedge member(X, L) \wedge bigger(X, Y) \wedge faster(X, Y))$$

$$better(X, Y) \vee \neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$$

Examen final de 2017 tardor. Exercici 6

Les clàusulas de P són les següents:

1. $animals(f(dog, f(lion, f(elephant, emptylist))))$
2. $bigger(lion, cat)$
3. $faster(lion, cat)$
4. $better(X, Y) \vee \neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$
5. $member(E, f(E, \_))$
6. $member(E, f(\_, L)) \vee \neg member(E, L)$

La negació de $\exists u \exists v\, better(u, v)$ és:

$\neg\exists u \exists v\, better(u, v)$
$\forall u \neg\exists v\, better(u, v)$
$\forall u \forall v \neg better(u, v)$

que en forma clausal (ometent els $\forall u \forall v$) és:

7. $\neg better(u, v)$

Resolució en LPO:

$$\frac{A \vee C \qquad\qquad \neg B \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$

A, B són àtoms
si $\sigma = mgu(A, B)$
(*most general unifier*)

He d'obtenir la clàusula buida $\Box$ mitjançant resolució a partir d'aquestes 7 clàusules.

1. $animals(f(dog, f(lion, f(elephant, emptylist))))$
2. $bigger(lion, cat)$
3. $faster(lion, cat)$
4. $better(X, Y) \vee \neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$
5. $member(E, f(E, \_))$
6. $member(E, f(\_, L)) \vee \neg member(E, L)$
7. $\neg better(u, v)$

Examen final de 2017 tardor. Exercici 6

1. $animals(f(dog, f(lion, f(elephant, emptylist))))$
2. $bigger(lion, cat)$
3. $faster(lion, cat)$
4. $better(X, Y) \vee \neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$
5. $member(E, f(E, \_))$
6. $member(E, f(\_, L)) \vee \neg member(E, L)$
7. $\neg better(u, v)$

	res entre	**mgu**	
	4+7	$\{u = X, v = Y\}$	obtenim:
8.	$\neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$		
	1+8	$\{L = f(dog, f(lion, f(elephant, emptylist)))\}$	obtenim:
9.	$\neg member(X, f(dog, f(lion, \ldots) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$		
	6+9	$\{E = X, L = f(lion, f(elephant, emptylist))\}$	obtenim:
10.	$\neg member(X, f(lion, \ldots)) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$		
	5+10	$\{X = lion, E = lion, \_ = f(elephant, emptylist)\}$	obtenim:
11.	$\neg bigger(lion, Y) \vee \neg faster(lion, Y)$		
	2+11	$\{Y = cat\}$	obtenim:
12.	$\neg faster(lion, cat)$		
	3+12	$\{\ \}$	obtenim:
13.	$\square$		

...

7. $\neg better(u, v)$

	res entre	**mgu**	
	4+7	$\{u = X, v = Y\}$	obtenim:
8. $\neg animals(L) \vee \neg member(X, L) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$			
	1+8	$\{L = f(dog, f(lion, f(elephant, emptylist)))\}$	obtenim:
9. $\neg member(X, f(dog, f(lion, \ldots) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$			
	6+9	$\{E = X, L = f(lion, f(elephant, emptylist))\}$	obtenim:
10. $\neg member(X, f(lion, \ldots)) \vee \neg bigger(X, Y) \vee \neg faster(X, Y)$			
	5+10	$\{X = lion, E = lion, \_ = f(elephant, emptylist)\}$	obtenim:
11. $\neg bigger(lion, Y) \vee \neg faster(lion, Y)$			
	2+11	$\{Y = cat\}$	obtenim:
12. $\neg faster(lion, cat)$			
	3+12	$\{ \}$	obtenim:
13. $\square$			

$u = X = lion$

$v = Y = cat$

Hem vist que no sols hem demostrat que $P \models \exists u \exists v \; better(u, v)$, sinó que fins i tot hem calculat dos valors concrets d'u i v.

4) (3 points) For 4a and 4b, just write the simplest and cleanest possible formula F. Use no more predicate or function symbols than just p. Give no explanations.

4a) Write a satisfiable first-order formula F, using only a *binary* predicate p, such that all models I of F have an infinite domain D_I.

4b) Write a satisfiable formula F of first-order logic with equality, using only a *unary* predicate p, such that F expresses that there is a single element satisfying p, that is, all models I of F have a single (unique) element e in its domain D_I such that $p_I(e) = 1$.

4a) Write a satisfiable first-order formula F, using only a *binary* predicate p, such that all models I of F have an infinite domain D_I.

Resposta:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, \neg p(x,x) & \text{(irreflexivitat)} \\ \quad \wedge & \\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)\,) & \text{(transitivitat)} \\ \quad \wedge & \\ \forall x\, \exists\, y\; p(x,y) & \text{(``existència de successors'')} \end{array}$$

4b) Write a satisfiable formula F of first-order logic with equality, using only a *unary* predicate p, such that F expresses that there is a single element satisfying p, that is, all models I of F have a single (unique) element e in its domain D_I such that $p_I(e) = 1$.

Resposta:

$$\exists x \,(\quad p(x) \quad \wedge \quad \forall y\,(\neg eq(x,y) \rightarrow \neg p(y))\quad)$$

5) (3 points) Let F be the first-order formula
$\exists x \forall y \exists z \; (\; p(z, y) \land \neg p(x, y) \;)$.

5a) Give a model I of F with $D_I = \{a, b, c\}$.

5b) Is it true that $F \models \forall x \; p(x, x)$?

5c) Is there any model of F with a single-element domain?

5) (3 points) Let F be the first-order formula
$\exists x \forall y \exists z\ (\ p(z, y) \wedge \neg p(x, y)\ )$.

5a) Give a model I of F with $D_I = \{a, b, c\}$.

Solució:

$$
\begin{aligned}
&D_I = \{a, b, c\} \\
&p_I(a, a) = 0 \\
&p_I(a, b) = 0 \\
&p_I(a, c) = 0 \\
&p_I(b, a) = 1 \\
&p_I(b, b) = 1 \\
&p_I(b, c) = 1 \\
&p_I(c, a) = \text{no importa} \\
&p_I(c, b) = \text{no importa} \\
&p_I(c, c) = \text{no importa}
\end{aligned}
$$

5) (3 points) Let F be the first-order formula
$\exists x \forall y \exists z\ (\ p(z,y) \wedge \neg p(x,y)\ )$.

5b) Is it true that $F \models \forall x\ p(x,x)$?

Solució:

No. perquè existeix una I tal que I és model de F, és a dir $I \models F$, però I no és model de $\forall x\, p(x,x)$.
I aquesta I és la de l'apartat **5a)**.

5) (3 points) Let F be the first-order formula
$\exists x \forall y \exists z\ (\ p(z,y) \wedge \neg p(x,y)\ )$.

5c) Is there any model of F with a single-element domain?

Solució:

No. Si tinguéssim $D_I = \{e\}$, hauríem de definir
$p_I(e,e) = 1$
o bé
$p_I(e,e) = 0$

En tots dos casos, si $x = e$, $y = e$, i $z = e$, no es compleix
$p_I(e,e) \wedge \neg p_I(e,e)$

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

A: All people that have electric cars are ecologists.

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

C: A person is an ecologist if his/her mother is an ecologist.

D: Mary is John's grandmother.

E: Mary has an electric car.

F: John is an ecologist.

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

A: All people that have electric cars are ecologists.

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

C: A person is an ecologist if his/her mother is an ecologist.

D: Mary is John's grandmother.

E: Mary has an electric car.

F: John is an ecologist.

Resposta (predicats):

$$\begin{array}{lcl} hasEcar(x) & \equiv & \text{"}x \text{ has an electric car"} \\ isEcologist(x) & \equiv & \text{"}x \text{ is an ecologist"} \\ mother(x,y) & \equiv & \text{"}y \text{ is the mother of x"} \\ grandma(x,y) & \equiv & \text{"}y \text{ is the grandmother of x"} \end{array}$$

Per al proper dia de classe:

- Per a estudiar teoria de LI:
  - repassa els materials del que hem estudiat, i
  - FÉS ELS EXÀMENS PENJATS, començant pels últims, cap als anteriors, treballant sempre primer l'enunciat SENSE resoldre, i després l'examen resolt.
- Continueu fent els exercicis del tema 5. Pròxima classe els farem, i també els d'examen que em proposeu!!!

Lògica en la Informàtica
Deducció en Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

A: All people that have electric cars are ecologists.

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

C: A person is an ecologist if his/her mother is an ecologist.

D: Mary is John's grandmother.

E: Mary has an electric car.

F: John is an ecologist.

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

A: All people that have electric cars are ecologists.
B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.
C: A person is an ecologist if his/her mother is an ecologist.
D: Mary is John's grandmother.
E: Mary has an electric car.
F: John is an ecologist.

Resposta (predicats):

$$\begin{array}{lcl} hasEcar(x) & \equiv & \text{"}x \text{ has an electric car"} \\ isEcologist(x) & \equiv & \text{"}x \text{ is an ecologist"} \\ mother(x,y) & \equiv & \text{"}y \text{ is the mother of x"} \\ grandma(x,y) & \equiv & \text{"}y \text{ is the grandmother of x"} \end{array}$$

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

A: All people that have electric cars are ecologists.

$$\begin{array}{lcl} hasEcar(x) & \equiv & \text{“}x \text{ has an electric car”} \\ isEcologist(x) & \equiv & \text{“}x \text{ is an ecologist”} \\ mother(x,y) & \equiv & \text{“}y \text{ is the mother of x”} \\ grandma(x,y) & \equiv & \text{“}y \text{ is the grandmother of x”} \end{array}$$

A: $\forall x\, (hasEcar(x) \to isEcologist(x)\,)$

A $\neg hasEcar(x) \vee isEcologist(x)$

Examen final de 2020 tardor. Exercici 6

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

$hasEcar(x)$	$\equiv$	"x has an electric car"
$isEcologist(x)$	$\equiv$	"x is an ecologist"
$mother(x, y)$	$\equiv$	"y is the mother of x"
$grandma(x, y)$	$\equiv$	"y is the grandmother of x"

NO és correcte:

$$\forall x \ \left(\exists y \left(grandma(x, y) \rightarrow \exists z \left(mother(x, z) \wedge mother(z, y)\right) \right) \right)$$
$$\forall x \ \left(\exists y \left(\neg grandma(x, y) \vee \exists z \left(mother(x, z) \wedge mother(z, y)\right) \right) \right)$$

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

NO és correcte:

$\forall x \; (\exists y \, (\neg grandma(x,y) \vee \exists z \, (mother(x,z) \wedge mother(z,y)) \;) \;)$

Aquesta formalització del llenguatge natural no és adecuada:
si tenim una situació I amb persones $D_I = \{p1, p2, avia\}$ i on l'àvia de $p1$ es $avia$: $grandma_I(p1, avia) = 1$
i on tota la resta és fals (ningú és mare de ningú, etc.) llavors I satisfà la fórmula, perquè $\forall x \, \exists y \, \neg grandma(x,y)$. De fet, amb aquesta formalització no és possible obtenir la clàusula buida.

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

B: If someone has a grandmother, then that someone has a mother whose mother is that grandmother.

El que sí és correcte és:

$\forall x \forall y\ (\ grandma(x,y) \rightarrow \exists z\ (\ mother(x,z) \wedge mother(z,y)\ )\ )$

- Elim. $\rightarrow$

$\forall x \forall y\ (\ \neg grandma(x,y) \vee \exists z\ (mother(x,z) \wedge mother(z,y)\ )\ )$

- Skolem:

$$\forall x \forall y\ (\ \neg grandma(x,y) \vee (\ mother(x, f_z(x,y)) \wedge mother(f_z(x,y),y)\ )\ \ )$$

- Distrib:

B1 $\neg grandma(x,y) \vee mother(x, f_z(x,y))$

B2 $\neg grandma(x,y) \vee mother(f_z(x,y), y))$

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

C: A person is an ecologist if his/her mother is an ecologist.

$$\begin{array}{lcl} hasEcar(x) & \equiv & \text{“}x \text{ has an electric car”} \\ isEcologist(x) & \equiv & \text{“}x \text{ is an ecologist”} \\ mother(x,y) & \equiv & \text{“}y \text{ is the mother of x”} \\ grandma(x,y) & \equiv & \text{“}y \text{ is the grandmother of x”} \end{array}$$

C: $\forall x\, (\ \exists y\, (\, mother(x,y) \wedge isEcologist(y)\,) \rightarrow isEcologist(x)\,)$

$\forall x\, (\neg \exists y\, (\, mother(x,y) \wedge isEcologist(y)\,) \vee isEcologist(x)\,)$

$\forall x\, (\ \forall y\, \neg (\, mother(x,y) \wedge isEcologist(y)\,) \vee isEcologist(x)\,)$

$\forall x\, (\ \forall y\, (\neg mother(x,y) \vee \neg isEcologist(y)\,) \vee isEcologist(x)\,)$

C $\neg mother(x,y) \vee \neg isEcologist(y) \vee isEcologist(x)$

6) (4 points) Formalize and prove by resolution that sentence F is a logical consequence of the first five:

$$\begin{array}{lcl} hasEcar(x) & \equiv & \text{“}x\text{ has an electric car”} \\ isEcologist(x) & \equiv & \text{“}x\text{ is an ecologist”} \\ mother(x,y) & \equiv & \text{“}y\text{ is the mother of x”} \\ grandma(x,y) & \equiv & \text{“}y\text{ is the grandmother of x”} \end{array}$$

D: Mary is John's grandmother.

D $grandma(john, mary)$

E: Mary has an electric car.

E $hasEcar(mary)$

F: John is an ecologist.
¬ F: John is not an ecologist.

¬ F $\neg\, isEcologist(john)$

Examen final de 2020 tardor. Exercici 6

Volem demostrar que $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \models F$.

I això passa ssi $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge \neg F$ és insatisfactible.

A	$\neg hasEcar(x) \vee isEcologist(x)$
B1	$\neg grandma(x,y) \vee mother(x, f_z(x,y))$
B2	$\neg grandma(x,y) \vee mother(f_z(x,y), y))$
C	$\neg mother(x,y) \vee \neg isEcologist(y) \vee isEcologist(x)$
D	$grandma(john, mary)$
E	$hasEcar(mary)$
¬F	$\neg isEcologist(john)$

He d'obtenir la $\square$ mitjançant resolució a partir d'aquestes 7 clàusules.

Examen final de 2020 tardor. Exercici 6

A	$\neg hasEcar(x) \vee isEcologist(x)$
B1	$\neg grandma(x, y) \vee mother(x, f_z(x, y))$
B2	$\neg grandma(x, y) \vee mother(f_z(x, y), y))$
C	$\neg mother(x, y) \vee \neg isEcologist(y) \vee isEcologist(x)$
D	$grandma(john, mary)$
E	$hasEcar(mary)$
$\neg$F	$\neg isEcologist(john)$

	res entre	**mgu**	
	E+A	$\{x = mary\}$	obtenim:
1.	$isEcologist(mary)$		
	D+B1	$\{x = john, y = mary\}$	obtenim:
2.	$mother(john, f_z(john, mary))$		
	D+B2	$\{x = john, y = mary\}$	obtenim:
3.	$mother(f_z(john, mary), mary)$		
	2+C	$\{x = john, y = f_z(john, mary)\}$	obtenim:
4.	$\neg isEcologist(f_z(john, mary)) \vee isEcologist(john)$		
	4+$\neg$F	$\{\ \}$	obtenim:
5.	$\neg isEcologist(f_z(john, mary))$		

Examen final de 2020 tardor. Exercici 6

A	$\neg hasEcar(x) \lor isEcologist(x)$
B1	$\neg grandma(x,y) \lor mother(x, f_z(x,y))$
B2	$\neg grandma(x,y) \lor mother(f_z(x,y), y)$
C	$\neg mother(x,y) \lor \neg isEcologist(y) \lor isEcologist(x)$
D	$grandma(john, mary)$
E	$hasEcar(mary)$
¬F	$\neg isEcologist(john)$

res entre **mgu**

1. $isEcologist(mary)$
2. $mother(john, f_z(john, mary))$
3. $mother(f_z(john, mary), mary)$
4. $\neg isEcologist(f_z(john, mary)) \lor isEcologist(john)$
5. $\neg isEcologist(f_z(john, mary))$

3+C $\{x = f_z(john, mary), y = mary\}$ obtenim:

6. $\neg isEcologist(mary) \lor isEcologist(f_z(john, mary))$

6+5 $\{ \quad \}$ obtenim:

7. $\neg isEcologist(mary)$

1+7 $\{ \}$ obtenim:

8. $\square$

Per a estudiar teoria de LI:

- repassa els materials que hem estudiat.
- FÉS ELS EXÀMENS PENJATS, començant pels últims, cap als anteriors, treballant sempre primer l'enunciat SENSE resoldre, i després l'examen resolt.
- continua fent els exercicis del tema 5.