Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

composició d'aplicacions lineals
inversa d'una aplicació lineal

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

7.3 Composició d'aplicacions lineals

E, F, G espais vectorials sobre $\mathbb{K}$

Proposició

Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació composició $g \circ f : E \to G$ també és lineal

Proposició

Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és

Si les bases d'E, F i G són B, W i V respectivament, tenim:

1. $M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g) M_W^B(f)$

2. $M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$\boxed{f, g \text{ lineals} \Rightarrow g\circ f \text{ lineal}}$

Demostració :

1) $\forall u, v \in E$:

$$(g\circ f)(u+v) = g(f(u+v)) \overset{f \text{ lineal}}{=} g(f(u)+f(v)) \overset{g \text{ lineal}}{=} g(f(u)) + g(f(v)) =$$
$$= (g\circ f)(u) + (g\circ f)(v)$$

2) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$(g\circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) \overset{f \text{ lineal}}{=} g(\lambda f(u)) \overset{g \text{ lineal}}{=} \lambda g(f(u)) = \lambda (g\circ f)(u)$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

f isomorfisme $\Rightarrow$ f bijectiva $\Rightarrow$
$\exists f^{-1}$ aplicació inversa, $f^{-1}: F \to E$ i és bijectiva

A més: $\boxed{f \text{ lineal} \Rightarrow f^{-1} \text{ lineal}}$

Demostració :

1) $\forall v', v'' \in F$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists u' \in E,\ f(u') = v' \\ \exists u'' \in E,\ f(u'') = v'' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(u'+u'') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u') + f(u'') = v'+v''}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(v'+v'') = u'+u'' = f^{-1}(v') + f^{-1}(v'')$$

2) $\forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\exists u \in E, f(u) = v \Rightarrow f(\lambda u) \overset{f \text{ lineal}}{=} \lambda f(u) = \lambda v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(\lambda v)} = \lambda u = \lambda \boxed{f^{-1}(v)}$$

① Matriu associada a la composició:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ B & M_W^B(f) & W & M_V^W(g) & V \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M_V^B(g\circ f) \\ \parallel \\ M_V^W(g)\cdot M_W^B(f) \end{array}}$$

ja que:

$u \in E$:
$$\underbrace{M_V^W(g)\cdot \underbrace{M_W^B(f)\,(u)_B}_{(f(u))_W}}_{(g(f(u)))_V} = \big((g\circ f)(u)\big)_V$$

② Matriu associada a la inversa :

si f és bijectiva,
$\dim E = \dim F = n$
$\exists f^{-1}$ i és apl. lineal
aleshores :

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{E} \arrow[r, "f"', "M_W^B(f)"'] & \underset{W}{F} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M_B^W(f^{-1}) \\ \parallel \\ \left(M_W^B(f)\right)^{-1} \end{array}}$$

$f^{-1} \circ f = Id_E$:

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{E} \arrow[r, "f", "M_W^B(f)"'] \arrow[rr, bend right, "Id_E"'] & \underset{W}{F} \arrow[r, "f^{-1}", "M_B^W(f^{-1})"'] & \underset{B}{E} \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} B = \{b_1, \dots, b_n\} \text{ base d'}E, \\ Id(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0\, b_2 + \dots + 0\, b_n \\ Id(b_2) = b_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + \dots + 0\, b_n \\ \vdots \\ Id(b_n) = b_n = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 1 \cdot b_n \end{array}\right\}$

$I_n = M_B^B(Id_E)$

$\parallel \leftarrow$ ①

$\underbrace{M_B^W(f^{-1})}_{\text{inversa de } M_W^B(f)} \cdot M_W^B(f)$

EXEMPLES

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

Calculeu la matriu associada a $g\circ f$ i la imatge d'un vector genèric $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per $g\circ f$.

Calculem la matriu associada a f i a g en les bases canòniques:

$$M^{C_3}_{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M^{C_3}_{C_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriu associada a $g\circ f$ en bases canòniques és el producte:

$$M^{C_3}_{C_2}(g\circ f) = M^{C_3}_{C_2}(g)\, M^{C_3}_{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

Observem que s'obté el mateix resultat si ho calculem directament a partir de la definició de f i g:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+z)+2(-x+2y)+(y-3z) \\ 2(x+y+z)-(y-3z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

2) Calculeu nucli i imatge de $g\circ f$. És $g\circ f$ injectiva o exhaustiva, o bijectiva? :

$$f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$$

$$g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

Calcularem nucli i imatge, i comprovarem si és injectiva, exhaustiva, bijectiva a partir de la matriu associada a $g\circ f$.

Utilitzarem les bases :

$P_2(\mathbb{R})$: $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, base : $C_P = \{1, x, x^2\}$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, base : $C_M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{R}^2$: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, base : $C_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_P}{P_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{C_M}{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$$\underset{\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{M^{C_P}_{C_2}(g\circ f)}} = M^{C_P}_{C_M}(g) \cdot M^{C_M}_{C_2}(f)$$

- $M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (exemple 3 de la classe de l'1/12)

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $M^{C_M}_{C_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{M^{C_P}_{C_2}(g\circ f)}_{M} = M^{C_M}_{C_2}(g) \cdot M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant $(g\circ f)(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b-c \end{pmatrix}$, ja que: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b-c \end{pmatrix}$

Nucli i imatge:

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Im}(g\circ f) = 2 \\ \dim \operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim P_2(\mathbb{R}) - 2 = 3-2 = 1 \end{cases}$$

base $\operatorname{Im}(g\circ f)$:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im}(g\circ f) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \dim \operatorname{Im}(g\circ f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im}(g\circ f) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{qualsevol base de } \mathbb{R}^2 \text{ és base d'}\operatorname{Im}(g\circ f)$$

p.e. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ és una base d'$\operatorname{Im}(g\circ f)$

base $\operatorname{Ker}(g\circ f)$: resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients la matriu associada a $g\circ f$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{3^a := 3^a - 2^a}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$$

solució: $\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ on $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ són coordenades en base C_p

és a dir, una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\{1-2x-x^2\}$

Injectiva, exhaustiva, bijectiva?

$$g\circ f : \underset{3}{P_2(\mathbb{R})} \longrightarrow \underset{2}{\mathbb{R}^2} \qquad \text{dim.:}$$

$$\operatorname{rang} M(g\circ f) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \left\langle \begin{array}{l} \neq \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ NO inj.} \\ = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ exh.} \end{array} \right\rangle f \text{ NO bij.}$$

3) Considerem l'aplicació lineal $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ 2b-3c \end{pmatrix}$$

Comproveu que és isomorfisme i calculeu la matriu associada a f^{-1} en bases canòniques. Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculem la matriu associada a f en les bases canòniques:

$C_p = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$f(1) = f(1\cdot 1 + 0x + 0x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = f(0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = f(0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M = M_{C_3}^{C_p}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } M = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow f$ apl. lineal bijectiva, o sigui, un isomorfisme.

Matriu associada a f^{-1} en bases canòniques, C_3 i C_p:

$$f^{-1}: \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{C_p}{P_2(\mathbb{R})}$$

$$M_{C_p}^{C_3}(f^{-1}) = \left(M_{C_3}^{C_p}(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculem $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$M_{C_p}^{C_3}(f^{-1})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{en base } C_p}$$

Per tant, $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = x - x^2$

$\left(\text{Observem que } f(x-x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(x-x^2)_{C_p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

4) a) Matriu associada a $Id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \right\}$ a l'espai de sortida i $C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ a l'espai d'arribada.

b) Quines són les coordenades en base C del vector u tq. $(u)_B = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$?

a) $Id : E \longrightarrow E$

bases: B $\quad$ C

$M_C^B(Id)$: $Id\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $Id\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $Id\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

coordenades en base C ! $\rightsquigarrow$

$$\Rightarrow M_C^B(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_C^B(Id)\,(u)_B = (u)_C$$

$Id(u) = u$

b) $$M_C^B(Id) \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}}_{(u)_B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\8\\-1\end{pmatrix}}_{(Id(u))_C \,=\, (u)_C}$$

$$\Rightarrow (u)_C = \begin{pmatrix}5\\8\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M_C^B(Id) \text{ és la matriu de canvi de base de } B \text{ a } C, \; P_C^B : \\ M_C^B(Id) = P_C^B \end{array}}$$