# 8. Diagonalització

Per què matrius diagonals?

A més de la interpretació en diferents problemes (estadístics, geomètrics, grafs, ...) el producte de matrius diagonals és més senzill:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2543} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{2543} = \begin{pmatrix} 6^{2543} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2543} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2543} \end{pmatrix}$$

En general:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' & & & \\ & \lambda_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1' & & & \\ & \lambda_2\lambda_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{K} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\exists$ B base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal ?

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ i $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

aleshores :

$$\begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_1) = \lambda_1 b_1 \\ f(b_2) = \lambda_2 b_2 \\ f(b_3) = \lambda_3 b_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Plantegem el sistema: $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre $\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

És a dir, per a trobar tots els vectors $u \in \mathbb{R}^3$ tq. $f(u) = \lambda u$, per a algun valor de $\lambda \in \mathbb{R}$: resolem el sistema d'equacions lineals homogeni següent en funció dels valors de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- sempre té la solució trivial $x = y = z = 0$
- té solució no trivial $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A < 3 = \#$ incògnites $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det A = 0$:

  calculem per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det A = 0$:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 4 - (4-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 6$$

- Si $\lambda = 2$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

equivalent a:

$$(1 \;\; 1 \;\; 1):$$

$rg() = 1$, $3-1 = 2$ graus de llibertat

Solució: $z = -x-y$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{f(u) = 2u \iff u \in E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

- Si $\lambda=6$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

equivalent a:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$rg(\,)=2$, $3-2=1$ grau de llibertat

Solució: $\begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$

$$E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{f(u) = 6u \iff u \in E_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Base formada per vectors $u$ tq. $f(u) = \lambda u$ :

base formada per vectors de $E_2 \cup E_6 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \cup < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$

p.e.:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base d'$\mathbb{R}^3$ ja que

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \dots = 3$$

i la matriu associada a $f$ en base $B$ és:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ja que: $\begin{cases} f(u_1) = 2 \cdot u_1 = 2 \cdot u_1 + 0\, u_2 + 0\, u_3 \\ f(u_2) = 2 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \\ f(u_3) = 6\, u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 6 u_3 \end{cases}$

Relació entre $M_C^C(f)$ i $M_B^B(f)$ :

$M_B^B(f) = \underbrace{(P_C^B)^{-1}}_{P_B^C} \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B$, on $P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2020}$ :

Hem vist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

Observem que:

$$M^{2020} = \left(PDP^{-1}\right)^{2020} = (PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}D\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1})\cdots(PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1}) = P\,D^{2020}\,P^{-1}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2020} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{2020} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{2020}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{2020} & & \\ & 2^{2020} & \\ & & 6^{2020} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3\cdot 2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020}+6^{2020}) \\ \frac{1}{2}(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{2}(2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{2}(-2^{2020}+6^{2020}) \\ \frac{1}{4}(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac{1}{4}(3\cdot 2^{2020}+6^{2020}) \end{pmatrix}$$

# El problema de la diagonalització

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme. Hi ha alguna base $B$ d'$E$ en què la matriu $M_B(f)$ sigui senzilla? Més concretament, diagonal?

**Def**
Un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** si existeix alguna base $B$ d'$E$ tal que $M_B(f)$ sigui diagonal.

Obs. Suposem que la matriu $M_B(f)$ no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme $f$ diagonalitza en una altra base $B'$. Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$$

és diagonal.
Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu $P$ invertible tal que $P^{-1} M_B(f) P$ sigui diagonal.

**Def.:**

Una matriu $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tq. $P^{-1}MP$ és diagonal

és a dir:

$M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que té $M$ per matriu associada en base canònica és diagonalitzable.

Observem que si la matriu associada a $f$ en base $B$ és diagonal, aleshores:

$$f: \underset{B}{E} \longrightarrow \underset{B}{E}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\underbrace{M_B^B(f)}_{M_B(f)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(b_1) & f(b_2) & & f(b_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$f(b_1) = \lambda_1 b_1$$
$$f(b_2) = \lambda_2 b_2$$
$$\vdots$$
$$f(b_n) = \lambda_n b_n$$

# Valors i vectors propis

**Def**

L'escalar $\lambda$ és un **valor propi** de l'endomorfisme $f$ si existeix algun vector $v \neq \mathbf{0}_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Tots els vectors $v \neq \mathbf{0}_E$ que compleixen $f(v) = \lambda v$ s'anomenen **vectors propis de valor propi** $\lambda$.

**Teorema**

L'endomorfisme $f : E \to E$ diagonalitza si i només si hi ha alguna base d'$E$ formada per vectors propis.

$$f(v) = \lambda v$$

$$\Updownarrow$$

$$M\,(v)_B = \lambda\,(v)_B$$

$$M\,(v_B) = \lambda \cdot I_n\,(v)_B$$

$$\underbrace{(M - \lambda I_n)(v_B) = 0}_{\text{sistema d'equacions lineals homogeni}}$$

que té solució no trivial

$\iff \det(M - \lambda \cdot I_n) = 0$

$\iff \lambda$ és solució de l'equació

$$\det(M - x \cdot I_n) = 0$$

# Càlcul dels valors propis

Sigui $M$ la matriu associada a $f : E \to E$ en una base $B$

**Def**

El **polinomi característic** de l'endomorfisme $f$ és

$$p_f(x) = \det(M - xI_n)$$

**Teorema**

Els valors propis d'$f$ són les arrels del polinomi característic

La **multiplicitat algebraica** d'un valor propi $\lambda$ és la multiplicitat de $\lambda$ com a arrel de $p_f(x)$ i es denota $m_\lambda$

L'equació $p_f(x) = 0$ s'anomena **equació característica**

**Teorema**

El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada $M$

**Exemple:**

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+1)^3 (x-5)$

aleshores les arrels són:

$2$, de multiplicitat $2$

$-1$, de multiplicitat $3$

$5$, de multiplicitat $1$

ULL! Cal agrupar tots els factors de la forma $(x-\lambda)$ per tal de calcular la multiplicitat algebraica de $\lambda$.

P.e:

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+5)^3 (2-x)(x-5)$

aleshores:

$$p_f(x) = -(x-2)^2 (x+5)^3 (x-2)(x-5) =$$
$$= -(x-2)^3 (x+5)^3 (x-5)$$

aleshores les arrels són:

$2$ de multiplicitat $3$

$-5$ de multiplicitat $3$

$5$ de multiplicitat $1$

# Espais de vectors propis

Sigui ara $\lambda$ un valor propi de l'endomorfisme $f : E \to E$
L'**espai propi** del valor propi $\lambda$ és el conjunt

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}$$

$$= \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$$

## Propietats

- $E_\lambda$ és un subespai vectorial d'$E$
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \underbrace{m_\lambda}_{\text{multiplicitat algebraica de } \lambda}$

La dimensió d'$E_\lambda$ s'anomena **multiplicitat geomètrica** de $\lambda$

$E_\lambda$ és un subespai vectorial d'$E$.

Demostració

$E_\lambda = \{u : f(u) = \lambda u\} = \{u : f(u) - \lambda u = 0_E\} =$

$= \{$solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $M - \lambda I\}$

$\Rightarrow$ és subespai d'$E$

Directament amb la definició de subespai:

- $E_\lambda \neq \emptyset$ : ja que $0_E \in E_\lambda$ per ser $f(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E$

- $u, v \in E_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} u+v \in E_\lambda$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$f(u) = \lambda u,\ f(v) = \lambda v \Rightarrow f(u+v) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(v) \underset{u,v \in E_\lambda}{=} \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$

- $u \in E_\lambda,\ \alpha \in \mathbb{K} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha u \in E_\lambda$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$f(u) = \lambda u \Rightarrow f(\alpha u) \underset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(u) \underset{u \in E_\lambda}{=} \alpha \lambda u = \lambda(\alpha u)$

Per tant $E_\lambda$ és subespai d'$E$

# Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme d'un espai vectorial $E$ de dimensió $n$.

**Teorema**

L'endomorfisme $f$ és diagonalitzable si i només si té $n$ valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

**Corol·lari**

Si $f$ té $n$ valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.

↘

És el mateix que:

L'endomorfisme $f$ és diagonalitzable si es compleixen les dues condicions següents:

(1) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1:

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, diferents dos a dos

(2) $\forall \lambda_i$, $1 \leq i \leq r$, es compleix:

$$\dim E_{\lambda_i} = m_i$$

<u>OBS:</u> Si $M$ és la matriu associada a $f$ en una base qualsevol,

$$p_f(x) = \det (M - x \cdot I_n)$$

$$\dim E_{\lambda_i} = n - rg(\underset{\uparrow}{M} - \lambda_i I_n)$$

matriu associada a $f$ en una base qualsevol.

# Algorisme de diagonalització

Per a decidir si l'endomorfisme $f : E \to E$ és diagonalitzable, podem seguir els passos següents:

(1) Trobem la matriu associada a $f$ en una base qualsevol i calculem el polinomi característic $p_f(x)$.

(2) Trobem els valors propis i les seves multiplicitats resolent $p_f(x) = 0$.

(3) Si les multiplicitats dels valors propis sumen menys de $\dim(E)$, l'endomorfisme no diagonalitza. Altrament anem a (4).

(4) Per a cada valor propi $\lambda$, trobem l'espai propi $E_\lambda$ i la seva dimensió $\dim(E_\lambda)$.

(5) Si per a tot $\lambda$ es compleix $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$, l'endomorfisme diagonalitza. Altrament no diagonalitza.

Si l'endomorfisme diagonalitza, per trobar una base en què diagonalitzi només cal prendre la unió de les bases dels espais $E_\lambda$.