1. Introducció als llenguatges formals

Teoria de la Computació

FIB

Antoni Lozano

Q1 2024–2025

Introducció als llenguatges formals

1. Conceptes bàsics
2. Llenguatges formals

Introducció als llenguatges formals

1. Conceptes bàsics
2. Llenguatges formals

Mots

Definicions bàsiques

- Un *alfabet* és un conjunt finit no buit.
- Un *símbol* és un element d'un alfabet.
- Un *mot* sobre un alfabet és una seqüència finita formada amb símbols pertanyents a l'alfabet

Exemples

- $\Sigma = \{0, 1\}$ és l'alfabet binari.
  0, 1, 01, 101, 1010000 són mots sobre Σ.
- $\Lambda = \{a, b, c, \ldots, z\}$ és l'alfabet llatí.
  suro, *alb*, *abracadabra*, *zzzzzzz* són mots sobre Λ.

Mots

Definicions bàsiques

- Un *alfabet* és un conjunt finit no buit.
- Un *símbol* és un element d'un alfabet.
- Un *mot* sobre un alfabet és una seqüència finita formada amb símbols pertanyents a l'alfabet

Exemples

- $\Sigma = \{0, 1\}$ és l'alfabet binari.
  0, 1, 01, 101, 1010000 són mots sobre Σ.
- $\Lambda = \{a, b, c, \ldots, z\}$ és l'alfabet llatí.
  suro, *alb*, *abracadabra*, *zzzzzzz* són mots sobre Λ.

Mida d'un mot

Definicions

- *Mida.* El nombre de símbols d'un mot.
  La mida d'un mot x es representa amb $|x|$.
  - $|abracadabra| = 11$
- *Nombre d'aparicions d'un símbol en un mot*.
  Es representa amb $|x|_a$ el nombre d'aparicions del símbol a en el mot x.
  - $|abracadabra|_a = 5$
  - $|abracadabra|_b = 2$
  - $|abracadabra|_c = 1$.

Propietat

Per a tot mot x sobre un alfabet Σ i per a tot símbol $a \in \Sigma$:

$$|x| = \sum_{a \in \Sigma} |x|_a.$$

Mida d'un mot

Definicions

- *Mida.* El nombre de símbols d'un mot.
  La mida d'un mot x es representa amb $|x|$.
  - $|abracadabra| = 11$
- *Nombre d'aparicions d'un símbol en un mot*.
  Es representa amb $|x|_a$ el nombre d'aparicions del símbol a en el mot x.
  - $|abracadabra|_a = 5$
  - $|abracadabra|_b = 2$
  - $|abracadabra|_c = 1$.

Propietat

Per a tot mot x sobre un alfabet Σ i per a tot símbol $a \in \Sigma$:

$$|x| = \sum_{a \in \Sigma} |x|_a.$$

Concatenació

Definició

- La *concatenació* de dos mots x i y sobre un alfabet Σ és un mot sobre Σ que es representa amb xy i consisteix en els símbols de x seguits dels símbols de y.

Exemple

- Sigui $x = abra$
- Sigui $y = cadabra$
- Llavors, $xy = abracadabra$

Propietat

- $|xy| = |x| + |y|$

Concatenació

Definició

- La *concatenació* de dos mots x i y sobre un alfabet Σ és un mot sobre Σ que es representa amb xy i consisteix en els símbols de x seguits dels símbols de y.

Exemple

- Sigui $x = abra$
- Sigui $y = cadabra$
- Llavors, $xy = abracadabra$

Propietat

- $|xy| = |x| + |y|$

Concatenació

Definició

- La *concatenació* de dos mots x i y sobre un alfabet Σ és un mot sobre Σ que es representa amb xy i consisteix en els símbols de x seguits dels símbols de y.

Exemple

- Sigui $x = abra$
- Sigui $y = cadabra$
- Llavors, $xy = abracadabra$

Propietat

- $|xy| = |x| + |y|$

Concatenació

Definició

L'element neutre per la concatenació és el mot buit, de mida 0, que es representa amb λ (a RACSO amb l'espai blanc, a [S] amb ϵ).

Propietat

- $\lambda x = x\lambda = x$.

Concatenació

Definició

L'element neutre per la concatenació és el mot buit, de mida 0, que es representa amb λ (a RACSO amb l'espai blanc, a [S] amb ϵ).

Propietat

- $\lambda x = x\lambda = x$.

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Revessament

Definició

- Donat un mot x sobre Σ, el *revessat* de x es defineix com:

$$x^R = \begin{cases} \lambda, & \text{si } x = \lambda \\ y^R c, & \text{si } x = cy \text{ on } c \in \Sigma. \end{cases}$$

Exemples

- $\lambda^R = \lambda$
- $(abaa)^R = aaba$
- $(malaialam)^R = malaialam$

Terminologia

Diem que un mot x és *palíndrom* si $x = x^R$.

Revessament

Definició

- Donat un mot x sobre Σ, el *revessat* de x es defineix com:

$$x^R = \begin{cases} \lambda, & \text{si } x = \lambda \\ y^R c, & \text{si } x = cy \text{ on } c \in \Sigma. \end{cases}$$

Exemples

- $\lambda^R = \lambda$
- $(abaa)^R = aaba$
- $(malaialam)^R = malaialam$

Terminologia

Diem que un mot x és *palíndrom* si $x = x^R$.

Revessament

Definició

- Donat un mot x sobre Σ, el *revessat* de x es defineix com:

$$x^R = \begin{cases} \lambda, & \text{si } x = \lambda \\ y^R c, & \text{si } x = cy \text{ on } c \in \Sigma. \end{cases}$$

Exemples

- $\lambda^R = \lambda$
- $(abaa)^R = aaba$
- $(malaialam)^R = malaialam$

Terminologia

Diem que un mot x és *palíndrom* si $x = x^R$.

Submots

Definicions

- Un mot y és *submot* d'un mot x si existeixen dos mots z_1, z_2 tals que $x = z_1 y z_2$.
- Quan $z_1 = \lambda$, es diu que y és un *prefix* de x,
- Quan $z_2 = \lambda$, es diu que y és un *sufix* de x.

Exemple

El mot *ab* és submot de *abracadabra* amb

- $z_1 = abracad$ i $z_2 = ra$, o bé
- $z_1 = \lambda$ i $z_2 = racadabra$

Submots

Definicions

- Un mot y és *submot* d'un mot x si existeixen dos mots z_1, z_2 tals que $x = z_1 y z_2$.
- Quan $z_1 = \lambda$, es diu que y és un *prefix* de x,
- Quan $z_2 = \lambda$, es diu que y és un *sufix* de x.

Exemple

El mot *ab* és submot de *abracadabra* amb

- $z_1 = abracad$ i $z_2 = ra$, o bé
- $z_1 = \lambda$ i $z_2 = racadabra$

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra* per mides, prefix, sufix, prefix i sufix

- 0: λ
- 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- 10 *abracadabr*, *bracadabra*
- 11: *abracadabra*

Submots

Definició

Un submot , prefix o sufix d'un mot x és propi si no coincideix ni amb λ ni amb x.

Exemple: prefixos propis de *abracadabra*

a, *ab*, *abr*, *abra*, *abrac*, *abraca*, *abracad*, *abracada*, *abracadab*, *abracadabr*

Submots

Definició

Un submot , prefix o sufix d'un mot x és propi si no coincideix ni amb λ ni amb x.

Exemple: prefixos propis de *abracadabra*

a, *ab*, *abr*, *abra*, *abrac*, *abraca*, *abracad*, *abracada*, *abracadab*, *abracadabr*

Ordenació canònica

Definició

L'ordenació canònica dels mots és l'ordenació per mida creixent, primer, i lexicogràfica, després. En el cas de l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ és:

$$\lambda \prec 0 \prec 1 \prec 00 \prec 01 \prec 10 \prec 11 \prec 000 \prec 001 \prec 010 \prec \dots$$

Definició

Donat un alfabet Σ, es defineix Σ^* com el conjunt de tots els mots que es poden formar amb alfabet Σ, és a dir

$$\Sigma^* = \{\, s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge s_i \in \Sigma \text{ per a tot } i \text{ t.q. } 1 \leq i \leq k\}.$$

Qüestió

Siguin $\Gamma = \{0\}$ i $\Delta = \{0, 1, 2\}$. Quants mots de mida k pertanyen a Γ^* i a Δ^*?

Ordenació canònica

Definició

L'ordenació canònica dels mots és l'ordenació per mida creixent, primer, i lexicogràfica, després. En el cas de l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ és:

$$\lambda \prec 0 \prec 1 \prec 00 \prec 01 \prec 10 \prec 11 \prec 000 \prec 001 \prec 010 \prec \dots$$

Definició

Donat un alfabet Σ, es defineix Σ^* com el conjunt de tots els mots que es poden formar amb alfabet Σ, és a dir

$$\Sigma^* = \{\ s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge s_i \in \Sigma \text{ per a tot } i \text{ t.q. } 1 \leq i \leq k\}.$$

Qüestió

Siguin $\Gamma = \{0\}$ i $\Delta = \{0, 1, 2\}$. Quants mots de mida k pertanyen a Γ^* i a Δ^*?

Ordenació canònica

Definició

L'ordenació canònica dels mots és l'ordenació per mida creixent, primer, i lexicogràfica, després. En el cas de l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ és:

$$\lambda \prec 0 \prec 1 \prec 00 \prec 01 \prec 10 \prec 11 \prec 000 \prec 001 \prec 010 \prec \dots$$

Definició

Donat un alfabet Σ, es defineix Σ^* com el conjunt de tots els mots que es poden formar amb alfabet Σ, és a dir

$$\Sigma^* = \{\, s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N} \land s_i \in \Sigma \text{ per a tot } i \text{ t.q. } 1 \leq i \leq k\}.$$

Qüestió

Siguin $\Gamma = \{0\}$ i $\Delta = \{0, 1, 2\}$. Quants mots de mida k pertanyen a Γ^* i a Δ^*?

Introducció als llenguatges formals

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \dots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a,b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a,b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \dots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a,b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemples

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$
- $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, \dots\}$

Qüestió

Digueu quins dels conjunts anteriors són finits i quins infinits.

Exercici

Donat l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, considereu els conjunts següents sobre Σ i representeu-los amb un diagrama de Venn i amb un graf dirigit (on els vèrtexs són els conjunts i els arcs indiquen inclusió):

- $A = \{\lambda\}$
- $B = \{x \in \Sigma^* \mid |x|_0 = |x|_1\}$
- $C = \{x \in \Sigma^* \mid |x|_0 \geq |x|_1\}$
- $D = \{x \in \Sigma^* \mid |x|_0 \leq |x|_1\}$
- $E = \{\ 0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- $F = \{\ 0^i 1^j \mid 0 \leq i \leq j\}$
- $G = \{\ 0^i 1^j \mid i \geq j \geq 0\}$

Llenguatges

Exemple: Paraulògic

El joc del Paraulògic demana trobar totes les paraules que es poden fer amb 7 lletres, on una és obligatòria. Un *tuti* és una paraula que conté les 7 lletres. Si un tuti conté cada lletra exactament un cop, se'n diu *perfecte*.

Per exemple, amb el joc de lletres s+emprtu (la essa és l'obligatòria), tenim les solucions sempre, temps o presumpte (que és un tuti).

Podem formalitzar les definicions fent servir la teoria de llenguatges. Sigui $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$, $\Gamma = \{e, m, p, r, s, t, u\}$ i $D \subseteq \Sigma^*$ el conjunt de totes les entrades d'un diccionari en català (per exemple, el DIEC2, referència del Paraulògic). Aleshores:

- $\text{SOLUCIONS}_{\Gamma,s} = \{w \in D \mid w \in \Gamma^* \ \wedge \ |w|_s \geq 1\}$
- $\text{TUTIS}_\Gamma = \{w \in D \mid w \in \Gamma^* \ \wedge \ \forall a \in \Gamma \ \ |w|_a \geq 1\}$
- Un mot w és un tuti perfecte si $w \in \text{TUTIS}_\Gamma$ i $|w| = 7$.

Llenguatges

Exemple: Paraulògic

El joc del Paraulògic demana trobar totes les paraules que es poden fer amb 7 lletres, on una és obligatòria. Un *tuti* és una paraula que conté les 7 lletres. Si un tuti conté cada lletra exactament un cop, se'n diu *perfecte*.

Per exemple, amb el joc de lletres s+emprtu (la essa és l'obligatòria), tenim les solucions sempre, temps o presumpte (que és un tuti).

Podem formalitzar les definicions fent servir la teoria de llenguatges. Sigui $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$, $\Gamma = \{e, m, p, r, s, t, u\}$ i $D \subseteq \Sigma^*$ el conjunt de totes les entrades d'un diccionari en català (per exemple, el DIEC2, referència del Paraulògic). Aleshores:

- $\text{SOLUCIONS}_{\Gamma,s} = \{w \in D \mid w \in \Gamma^* \ \wedge \ |w|_s \geq 1\}$
- $\text{TUTIS}_{\Gamma} = \{w \in D \mid w \in \Gamma^* \ \wedge \ \forall a \in \Gamma \ \ |w|_a \geq 1\}$
- Un mot w és un tuti perfecte si $w \in \text{TUTIS}_{\Gamma}$ i $|w| = 7$.

Llenguatges

Operacions de llenguatges

Donats dos llenguatges $A, B \subseteq \Sigma^*$, definim

- el complementari de A com $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$
- la concatenació de A amb B com

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

- l'exponenciació de A com $A^k = A^{k-1} \cdot A$ si $k > 0$ i $A^0 = \{\lambda\}$
- la intersecció, la reunió i el producte cartesià com en els conjunts
- l'estrella de Kleene de A com $A^* = \bigcup_{k \geq 0} A^k$
- el tancament positiu de A com $A^+ = \bigcup_{k > 0} A^k$

Llenguatges

Exemple: producte cartesià i concatenació

Considerem dos llenguatges sobre alfabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$A = \{\lambda, a, aa\}, \quad B = \{a, b, ab\}.$$

Aleshores, el producte cartesià és

$$A \times B = \{(\lambda, a), (\lambda, b), (\lambda, ab), (a, a), (a, b), (a, ab), (aa, a), (aa, b), (aa, ab)\}$$

mentre que la concatenació és

$$A \cdot B = \{a, aa, aaa, ab, aab, aaab, b\}.$$

Per tant $|A \times B| = 9$ i $|A \cdot B| = 7$.