# Lògica en la Informàtica
# Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

# Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

## Temari

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. Deducció en Lògica Proposicional
4. ☞ Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre
6. Programació Lògica (Prolog)

# Sumari

# Definició de la Lògica de Primer Ordre

Una fórmula $F$ "EXPRESSA" coses:
les propietats dels seus models.

Continguts: ☞ `p4.pdf`

- Exercicis: 21, 22, 23
  - 21 Expressar límit inferior de la mida dels models
  - 22 Expressar mida infinita del models
  - 23 Existència de models de mida superior
- Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)
- Exercicis de LPOI: 24, 26, 27, 28, 32

# Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula $F_3$ tal que tot model de $F_3$ tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a $n$ qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari $p$, i a més expressa que hi ha parells d'elements $e_i$ i $e_j$ en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Comencem així. Sigui $F$ la fórmula:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, p(x,x) & \text{(reflexivitat)} \\ \quad \wedge & \\ \exists x\, \exists y\, \neg p(x,y) & \end{array}$$

Qualsevol model $I$ de $F$ tindrà almenys DOS elements:

$$\begin{array}{ll} D_I = \{e_1, e_2\} & \\ p_I(e_1, e_1) = 1 & \text{(PER REFLEXIVITAT)} \\ p_I(e_1, e_2) = 0 & \\ p_I(e_2, e_1) = 0 & \\ p_I(e_2, e_2) = 1 & \text{(PER REFLEXIVITAT)} \end{array}$$

21. (dificultat 3) Dona una fórmula $F_3$ tal que tot model de $F_3$ tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a $n$ qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari $p$, i a més expressa que hi ha parells d'elements $e_i$ i $e_j$ en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Comencem així. Sigui $F$ la fórmula:

$$\forall x\, p(x,x) \qquad \text{(reflexivitat)}$$
$$\wedge$$
$$\exists x\, \exists y\, \neg p(x,y)$$

Perquè si hi hagués només un:

$$D_I = \{e1\}$$

tindríem

$$p_I(e_1, e_1) = 1 \qquad \text{(PER REFLEXIVITAT)}$$

i no es compliria la part $\exists x\, \exists y\, \neg p(x,y)$.

# Exercici 21

21. (dificultat 3) Dona una fórmula $F_3$ tal que tot model de $F_3$ tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a $n$ qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari $p$, i a més expressa que hi ha parells d'elements $e_i$ i $e_j$ en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

Ho podem generalitzar a tres o més elements, així:

Sigui F la formula:

$$\forall x\, p(x,x) \qquad \text{(reflexivitat)}$$
$$\wedge$$
$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg p(x,y) \wedge \neg p(x,z) \wedge \neg p(y,z))$$

21. (dificultat 3) Dona una fórmula $F_3$ tal que tot model de $F_3$ tingui almenys 3 elements. Generalitza-ho a $n$ qualsevol.
Ajuda: defineix la propietat reflexiva d'un símbol de predicat binari $p$, i a més expressa que hi ha parells d'elements $e_i$ i $e_j$ en el domini tals que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

I en general per a mínim $n$ elements en el domini:

$$\forall x\, p(x, x) \qquad \text{(reflexivitat)}$$

$$\wedge$$

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n\, (\neg p(x_1, x_2) \wedge \neg p(x_1, x_3) \wedge \cdots \wedge \neg p(x_{n-1}, x_n))$$

(una fórmula de mida quadràtica)

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació “ser estrictament menor que” i expressa (entre altres coses) que “no hi ha màxim” tal com ocorre en els naturals.

Definició: un **ordre estricte** és una relacion binària irreflexiva i transitiva.

Usem un símbol binari $p$ que té aquestes dues propietats.
Sigui $F$ la fórmula:

$$\forall x\, \neg p(x,x) \qquad \text{(irreflexivitat)}$$
$$\wedge$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)). \qquad \text{(transitivitat)}$$

equivalentment: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z))$

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Sigui $F$ la fórmula:

$$\forall x \, \neg p(x,x) \qquad \text{(irreflexivitat)}$$
$$\wedge$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)). \qquad \text{(transitivitat)}$$

En qualsevol model $I$ de $F$, tenim que $p_I$ és una relacion d'ordre estricte sobre $D_I$.

Això fa que necessitem que $D_I$ sigui infinit en qualsevol model $I$ de $F$? No, perquè tindríem el model de $F$:

$$D_I = \{a\}$$
$$p_I(a,a) = 0$$

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Per això afegim: $\forall x\, \exists y\ p(x,y)$ a la nostra $F$:

$$\forall x\, \neg p(x,x) \qquad \text{(irreflexivitat)}$$
$$\land$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x,y) \land p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \qquad \text{(transitivitat)}$$
$$\land$$
$$\forall x\, \exists y\ p(x,y) \qquad \text{(“existència de successors”)}$$

Per què aquesta $F$ només té models infinits?

- Reducció a l'absurd.

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit $I$, amb:
$D_I = \{e_1 \dots e_k\}$
Per la part $\forall x \, \exists y \; p(x, y)$, necessito que $p_I(e_1, e) = 1$ per a algun element "$e$" de $D_I$. Diguem-li $e_2$ a aquest element $e$.

També necessito
$p_I(e_2, e) = 1$ per a algun element "$e$" de $D_I$. No pot ser $e_2$, ni tampoc $e_1$: tindriem $p_I(e_1, e_2)$ i $p_I(e_2, e_1)$ i per transitivitat tindríem $p_I(e_1, e_1)$ que contradiu la irreflexivitat. Per tant, el successor de $e_2$ ha de ser un element al qual podem anomenar $e_3$.

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit $I$, amb:

$D_I = \{e_1 \ldots e_k\}$

També necessito

$p_I(e_3, e) = 1$ per a algun element "$e$" de $D_I$. Per les mateixes raons, no pot ser $e_3$ ni $e_2$, ni tampoc $e_1$.

# Exercici 22

22. (dificultat 5) Escriu una fórmula $F$ tal que si $I \models F$ llavors $D_I$ té infinits elements. Ajuda: pensa en la relació "ser estrictament menor que" i expressa (entre altres coses) que "no hi ha màxim" tal com ocorre en els naturals.

Suposem que existís un model finit $I$, amb:
$D_I = \{e_1 \ldots e_k\}$

Una vegada hem entès això, (per inducció) podem demostrar (no ho farem aquí) que no podem introduir "cicles" en la relacion $p_I$, del tipus:

$$p_I(e_1, e_2) \wedge p_I(e_2, e_3) \wedge \cdots \wedge p_I(e_n, e_1)$$

La qual cosa ens porta a una contradicció, perquè... qui serà el successor de $e_k$?
Ningú!

# Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb $n$ elements, també té models amb $m$ elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Això és una altra manera de dir que NO podem expressar amb una fórmula $F$, que els models de $F$ tindran com a màxim 2 elements, o com a màxim $k$ elements, per a alguna $k$.

# Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb $n$ elements, també té models amb $m$ elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Exemple de com "clonar" un element "$a$" de $D_I$: tinc $p$ de aritat 2, i tinc la interpretació $I$ amb:

$$D_I = \{a, b\}$$

$$p_I(a, a) = 1$$
$$p_I(a, b) = 0$$
$$p_I(b, a) = 1$$
$$p_I(b, b) = 0$$

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb $n$ elements, també té models amb $m$ elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Sigui $F$ qualsevol formula tal que $I \models F$.

Clonar l'element $a$, afegint el seu clon $a'$ obtenint una $I'$ de manera que $I' \models F$:

$$D_{I'} = \{a, b, a'\}$$

$$\begin{array}{lcll}
p_{I'}(a,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(a,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(a,a') & = & \quad 1 & \longleftarrow \text{amb } a',\ p_{I'} \text{ es comporta igual que amb } a \\
p_{I'}(b,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(b,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(b,a') & = & & \\
p_{I'}(a',a) & = & & \\
p_{I'}(a',b) & = & & \\
p_{I'}(a',a') & = & &
\end{array}$$

# Exercici 23

23. (dificultat 5) Demostra que si una fórmula té models amb $n$ elements, també té models amb $m$ elements per a qualsevol $m \geq n$ i fins i tot models infinits.

Sigui $F$ qualsevol formula tal que $I \models F$.

Clonar l'element $a$, afegint el seu clon $a'$ obtenint una $I'$ de manera que $I' \models F$:

$$D_{I'} = \{a, b, a'\}$$

$$\begin{array}{lcll}
p_{I'}(a,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(a,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(a,a') & = & & 1 \\
p_{I'}(b,a) & = & 1 & \\
p_{I'}(b,b) & = & 0 & \\
p_{I'}(b,a') & = & & 1 \\
p_{I'}(a',a) & = & & 1 \\
p_{I'}(a',b) & = & & 0 \\
p_{I'}(a',a') & = & & 1
\end{array}$$

$F$ pot ser per exemple:

$$\forall x\, \exists y\, (p(x,y) \vee p(y,x))$$

# Lògica de Primer Ordre amb Igualtat (LPOI)

- En els exercicis 21 i 22 vam veure que en LPO podem expressar que hi ha ALMENYS $k$ elementos en el domini.
- Però en l'exercici 23, veiem que en LPO NO podem expressar que hi ha COM A MOLT $k$ elements en el domini.
- Això és el que ens motiva a introduir una lògica més expressiva, la LPOI.

Expressivitat d'una lògica: quines situacions de la vida real podem descriure o distingir?

Per exemple, en LProp $\mathcal{P} = \{plou, fa\_sol, esta\_ennuvolat\}$ cada $I$ "modela" una sitacion de la vida real: per exemple, NO *plou*, NO *fa_sol* i SÍ *esta_ennuvolat*. Una $F$ el que fa és distingir un subconjunt de les $I$'s: els MODELS de $F$.

Expressivitat d'una lògica: quines situacions de la vida real podem descriure o distingir?

En LPO el mateix, però les interpretacions són molt més complexes: quin domini hi ha, com s'interpreten els símbols.

> Amb una $F$ podem distingir les $I$'s que tenen almenys 2 elements en el seu $D_I$. O infinits elements.
>
> Però NO podem expressar que hi ha com a màxim 2 (o $k$) elements (exercici 23).

Això ens motiva a introduir una altra lògica que estén la LPO, que és la LPOI, que sí que permet expressar aquest tipus de coses.

Què és la LPOI?

Sintaxi: $F$: és com LPO, però hi ha un simbolo de predicat "predefinit" binari $eq^2$

Semantica: $I$: és com LPO, però $eq_I$ sempre serà "ser el mateix element del domini"

$eq_I(e_1, e_1) = 1$ per a tot element $e_1$ de $D_I$

$eq_I(e_1, e_2) = 0$ si $e_1$ i $e_2$ són elements diferents de $D_I$

$I \models F$ $(eval_I(F))$ com LPO.

## Exercicis de LPOI

- Exercici 24 Expressar límit superior de la mida dels models
- Exercici 26 Expressar mida exacta dels models
- Exercici 27 Monoide. Exemples de monoides
- Exercici 28 Grup. Exemples de grups
- Exercici 32 Fórmula que discrimina dues interpretacions

# Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que per a tot model $I$ de $F$:

a) hi ha com a màxim 1 element en el domini d'$I$
b) hi ha com a màxim 2 elements en el domini d'$I$
c) hi ha com a màxim $n$ elements en el domini d'$I$, per a una $n$ donada
d) hi ha exactament $n$ elements en el domini d'$I$, per a una $n$ donada

# Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que per a tot model $I$ de $F$:

a) hi ha com a màxim 1 element en el domini d'$I$

Tres maneres alternatives de fer-ho:

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x\, \forall y\; eq(x, y)$ | amb l'altra notació: | $\forall x\, \forall y\;\, x = y$ |
| $\forall x\; eq(x, a)$ | | $\forall x\;\, x = a$ |
| $\exists x\, \forall y\; eq(x, y)$ | | $\exists x\, \forall y\;\, x = y$ |

# Exercici 24

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que per a tot model $I$ de $F$:

b) hi ha com a màxim 2 elements en el domini d'$I$

Tres maneres alternatives de fer-ho:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\; (eq(x, y) \vee eq(x, z) \vee eq(y, z))$$

$$\forall x\; (eq(x, a) \vee eq(x, b))$$

$$\exists x\, \exists y\, \forall z\; (eq(x, z) \vee eq(y, z))$$

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que per a tot model $I$ de $F$:

c) hi ha com a màxim $n$ elements en el domini d'$I$, per a una $n$ donada

Tres maneres alternatives de fer-ho:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{n+1} \left(\bigvee_{1\le i<j\le n+1} eq(x_i, x_j)\right)$$
(una fórmula de mida quadràtica)

$$\forall x \; (eq(x, a_1) \vee \cdots \vee eq(x, a_n))$$
(una fórmula de mida lineal)

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall y \; (eq(y, x_1) \vee \cdots \vee eq(y, x_n))$$
(una fórmula de mida lineal)

24. (dificultat 2) Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que per a tot model $I$ de $F$:

d) hi ha exactament $n$ elements en el domini d'$I$, per a una $n$ donada

$(\,\forall x\ (eq(x, a_1) \vee \cdots \vee eq(x, a_n))\,)$ (màxim $n$)

$\wedge$

$(\,\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg eq(a_i, a_j)\,)$

(com a mínim $n$: una formula de mida quadràtica)

$$\neg eq(a_1, a_2) \wedge \neg eq(a_1, a_3) \wedge \cdots \wedge \neg eq(a_{n-1}, a_n)$$

# Exercici 26

26. (dificultat 2)

a) Sigui $p$ un símbol de predicat unari. Escriu una fórmula $F$ de LPOI que expressi que hi ha un únic element que compleix $p$. (en mates a vegades s'escriu $\exists! x\, p(x)$). Això vol dir: que expressi que per a tot model $I$ de $F$ hi ha un únic element $a$ en $D_I$ amb $p_I(a) = 1$.

$\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (\neg eq(x, y) \to \neg p(y)))$

Una altra manera, amb una constant $a$:

$p(a) \wedge \forall x\, (\neg eq(a, x) \to \neg p(x))$

# Exercici 26

26. (dificultat 2)

    b) Escriu una altra $F$ expressant que hi ha exactament 2.

    $p(a) \wedge p(b) \wedge \neg eq(a,b) \wedge \forall x\,(\neg eq(a,x) \wedge \neg eq(b,x) \rightarrow \neg p(x)))$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\; (x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\,\cdot \text{ es associatiu}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\;\; x \cdot e = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per la dreta}\,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x\;\; e \cdot x = x \qquad [\,e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}\,]$$

on $\cdot$ és un símbol de funció binària i $e$ és un símbol de constant. Observa que hem usat notació infix (com fem amb el símbol $=$ per a la igualtat). Amb la notació habitual (i amb $f$ en comptes de $\cdot$) la fórmula $\forall x\,\forall y\,\forall z\;\, (x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ s'escriuria
$\forall x\,\forall y\,\forall z\;\; f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$ .

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [$\cdot$ es associatiu]

$\wedge$

$\forall x\ \ x \cdot e = x$ [$e$ és l'element neutre per la dreta]

$\wedge$

$\forall x\ \ e \cdot x = x$ [$e$ és l'element neutre per l'esquerra]

Notació: $eq(x, y)$ $\quad x = y$

Notació: $\cdot(x, y)$ $\quad x \cdot y$ $\quad$ símbol de funció binari.

En notació prefix la associativitat seria:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ \cdot(\cdot(x, y), z) = \cdot(x, \cdot(y, z))$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\cdot \text{ es associatiu}]$$

$$\wedge$$

$$\forall x\ \ x \cdot e = x \qquad [e \text{ és l'element neutre per la dreta}]$$

$$\wedge$$

$$\forall x\ \ e \cdot x = x \qquad [e \text{ és l'element neutre per l'esquerra}]$$

Exemples de monoides:

$D_I = \mathbb{N}$ els naturals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$

i tots aquests amb $\times, 1$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad [\cdot \text{ es associatiu}]$$
$$\wedge$$
$$\forall x \;\; x \cdot e = x \qquad [\, e \text{ és l'element neutre per la dreta} \,]$$
$$\wedge$$
$$\forall x \;\; e \cdot x = x \qquad [\, e \text{ és l'element neutre per l'esquerra} \,]$$

c)

$D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ els conjunts de naturals

$\cdot_I = \cap$ intersecció

$e_I = \mathbb{N}$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x \, \forall y \, \forall z \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [ $\cdot$ es associatiu ]

$\wedge$

$\forall x \;\; x \cdot e = x$ [ $e$ és l'element neutre per la dreta ]

$\wedge$

$\forall x \;\; e \cdot x = x$ [ $e$ és l'element neutre per l'esquerra ]

d)

Els strings amb concatenació i l'string buit ($\lambda =$ "lambda")

$D_I =$ cadenes de 0s i 1s

$\cdot_I =$ concatenació $\quad (S1 @ S2) @ S3 = S1 @ (S2 @ S3)$

on @ és la concatenació

$e_I = \lambda$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [ $\cdot$ es associatiu ]

$\wedge$

$\forall x\ \ x \cdot e = x$ [ $e$ és l'element neutre per la dreta ]

$\wedge$

$\forall x\ \ e \cdot x = x$ [ $e$ és l'element neutre per l'esquerra ]

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$
$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$
$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [$\cdot$ es associatiu]

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$
$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$
$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

s'haurien de fer els 8 casos

$\alpha \quad \alpha \quad \alpha$
$\alpha \quad \alpha \quad \beta$
$\alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \leftarrow \quad (1)$
$\alpha \quad \beta \quad \beta$
$\beta \quad \alpha \quad \alpha$
$\beta \quad \alpha \quad \beta$
$\beta \quad \beta \quad \alpha$
$\beta \quad \beta \quad \beta$

(1) com a exemple,
comprobarem aquest cas

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:
$\forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [ $\cdot$ es associatiu ]

f)

$$D_I = \{\alpha, \beta\}$$
$$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$$
$$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$$
$$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha \cdot \beta}_{\beta} \cdot \alpha}_{\beta} = \underbrace{\alpha \cdot \underbrace{\beta \cdot \alpha}_{\beta}}_{\beta}$$

# Exercici 27

27. (dificultat 2) Un *monoide* és un model de la següent fórmula:

$\forall x \;\; x \cdot e = x$ [ *e* és l'element neutre per la dreta ]

$\forall x \;\; e \cdot x = x$ [ *e* és l'element neutre per l'esquerra ]

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$

$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$

$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$

$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$

$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

$e_I = \alpha$

s'han de comprovar els casos:

$\cdot_I(\alpha, e_I) = \alpha$

$\cdot_I(\beta, e_I) = \beta$

$\cdot_I(e_I, \alpha) = \alpha$

$\cdot_I(e_I, \beta) = \beta$

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \land y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

Quines de les interpretacions anteriors eren grups?

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\,\exists y\,(x \cdot y = e \land y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

Una altra manera de definir els grups és fent explícita l'operació unària invers $i$:

$$\forall x\,(x \cdot i(x) = e \land i(x) \cdot x = e)$$

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \land y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

Exemples de grups:

$D_I = \mathbb{N}$ els naturals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$ NO és grup, perquè no hi ha invers

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = +$
$e_I = 0$
$i_I = -n$ SÍ és grup

I tots aquests amb $\times$, 1 ?

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

$D_I = \mathbb{Z}$ els enters

$\cdot_I = \times$

$e_I = 1$

NO és grup, perquè no hi ha invers

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

$D_I = \mathbb{Q}$ els racionals
$\cdot_I = \times$
$e_I = 1$
$i_I(n) = 1/n$

SÍ és grup si traiem el zero del domini: $D_I = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\; (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

$D_I = \mathbb{R}$ els reals
$\cdot_I = \times$
$e_I = 1$
$i_I(n) = 1/n$

SÍ és grup si traiem el zero del domini: $D_I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\ (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

c)

$D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ els conjunts de naturals
$\cdot_I = \cap$ la intersecció
$e_I = \mathbb{N}$

NO és grup. NO hi ha invers.
Perquè fos grup, necessitaríem que per a tot conjunt de naturals $x$ hagués un altre, $i(x)$, tal que $x \cap i(x) = \mathbb{N}$.
I això no existeix.

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x \, \exists y \, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

d)

$D_I$ = cadenes de 0s i 1s

$\cdot_I$ = concatenació $\quad (S1 \,@\, S2) \,@\, S3 = S1 \,@\, (S2 \,@\, S3)$
on @ és la concatenació

$e_I = \lambda$ $\quad$ (lambda, la cadena buida)

NO és grup perquè no hi ha invers

NO és grup commutatiu

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

f)

$D_I = \{\alpha, \beta\}$
$\cdot_I(\alpha, \alpha) = \alpha$
$\cdot_I(\alpha, \beta) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \alpha) = \beta$
$\cdot_I(\beta, \beta) = \alpha$

$e_I = \alpha$

$i_I(\alpha) = \alpha \qquad \alpha \cdot i_I(\alpha) = i_I(\alpha) \cdot \alpha = e_I = \alpha$
$i_I(\beta) = \beta \qquad \beta \cdot i_I(\beta) = i_I(\beta) \cdot \beta = e_I = \alpha$

SÍ és grup amb aquesta interpretació de l'invers
SI és grup commutatiu

# Exercici 28

28. (dificultat 2) un *grup* és un monoide que a més satisfà:

$$\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$$

i diu que "$y$ és l'invers de $x$".

Un altre possible exemple:

$$D_I = \mathbb{N}$$
$$\cdot_I(n, m) = mcd(n, m)$$

Això és associatiu, perquè
$mcd(x, mcd(y, z)) = mcd(mcd(x, y), z)$.
Però no hi ha element neutre, per tant no és monoide.

# Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula $F$ de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que $F$ és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

a) (dificultat 2) Conjunt de símbols de funció: $\{f^2\}$,
$I_1$ té com a domini els naturals $\mathbb{N}$ i $f$ s'interpreta com el producte
$I_2$ té com a domini $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $f$ s'interpreta com la intersecció

Si $F$ és la fórmula $\forall x\, f(x,x)=x$ llavors
$I_1 \not\models F$ però $I_2 \models F$

Si $F$ és la fórmula $\neg \forall x\, f(x,x)=x$ llavors
$I_1 \models F$ però $I_2 \not\models F$

# Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula $F$ de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que $F$ és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

b) (dificultat 2) Conjunt de símbols de funció: $\{f^1\}$,
$I_1$ té domini els naturals $\mathbb{N}$
$I_2$ té domini els enters $\mathbb{Z}$
En tots dos casos el símbol $f$ s'interpreta com la funció "següent", és a dir, $f_I(n) = n + 1$.

Si $F$ és la fórmula $\forall x \exists y\, f(y) = x$ llavors
$I_1 \not\models F$ però $I_2 \models F$

# Exercici 32

32. Per als conjunts de símbols i parells d'interpretacions següents, escriu una fórmula $F$ de LPOI sobre el vocabulari (els símbols) donat, tal que $F$ és certa en una d'elles i falsa en l'altra.

c) (dificultat 4) $\{f^2, g^2\}$,
$I_1$ té domini els reals $\mathbb{R}$
$I_2$ té domini els racionals $\mathbb{Q}$
En tots dos casos $f$ i $g$ s'interpreten com la suma i el producte respectivament.
Ajuda: fabrica el dos i expressa que arrel de dos existeix.

$\exists x \forall y\ g(x,y) = y$ (això expressa que $x$ és el 1, i per això $f(x,x)$ serà 2)

Afegim alguna cosa i tenim:

Si $F$ és la fórmula $\exists x \exists z\, (\forall y\, g(x,y) = y \wedge g(z,z) = f(x,x))$
llavors $I_1 \models F$ però $I_2 \not\models F$

# Definició de la Lògica de Primer Ordre

**Per al proper dia de classe:**

- Comença a estudiar el capítol 5: Deducció en LPO.

  ☞ `p5.pdf`