Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

- Combinacions lineals de $u_1, \dots, u_r \in E$:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \quad , \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$$

- Subespai generat per $u_1, \dots, u_r$:

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K} \}$$

- Si $v \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ aleshores

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}, \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$$

però en general $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ no són únics

p.e:

$$(5,-1,-4) = \begin{cases} 3 \cdot (1,-1,0) + 2 \cdot (0,1,-1) + 2 \cdot (1,0,-1) \\ 4 \cdot (1,-1,0) + 3 \cdot (0,1,-1) + 1 \cdot (1,0,-1) \end{cases}$$

6.4 Independència lineal

Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \dots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \dots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)

Exemples:

- El vector $\mathbf{0}_E$ és linealment dependent
- Donat un vector $u \neq \mathbf{0}_E$, el vector u és linealment independent
- Si u és un vector qualsevol i λ és un escalar, $\{u, \lambda u\}$ és LD

- $\{0_E\}$ és L.D. : $\underset{\neq 0}{1} \cdot 0_E = 0_E$

- $\{u\}$ és L.I. si $u \neq 0_E$: $\alpha \cdot u = 0_E \underset{u \neq 0_E}{\Rightarrow} \alpha = 0$

- $\{u, \lambda u\}$ és L.D. : $(-\lambda) u + \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \lambda u = 0_E$

Exemples:

(1) $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C. Det. $\Leftrightarrow$ $rg\,A = 3$ (= # incog.)

L.D. $\Leftrightarrow$ S.C. Indet $\Leftrightarrow$ $rg\,A < 3$ (= # incog.)

on $$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$rg\,A = 2 < 3 \Rightarrow$ L.D.

(2) $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C.Det. $\Leftrightarrow$ $rg\,A = 3$ (= # incog.)

L.D. $\Leftrightarrow$ S.C.Indet. $\Leftrightarrow$ $rg\,A < 3$ (= # incog.)

on $$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$rg\,A = 3 \Rightarrow$ S.C.D : només té la solució trivial $x=y=z=0$

$\Rightarrow$ són L.I.

③ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ l.i.? $\quad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} x = y = z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z & y+z \\ y+z & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z = 0 \\ y+z = 0 \\ y+z = 0 \\ x+z = 0 \end{array}\right\} \text{sist. homog.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} A = 2 < 3 = \#$incog. $\Rightarrow$ té sol. no trivial $\Rightarrow$ L.D

④ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ l.i.? $\quad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} x = y = z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z & y+z \\ y+z & -x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+2z = 0 \\ y+z = 0 \\ y+z = 0 \\ -x+z = 0 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} A = 3 = \#$incòg. $\Rightarrow$ L.I.

5. $\boxed{\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}\ \text{l.i.}\ ?}$ $\qquad P_2(\mathbb{R})$

$$\alpha\cdot 1+\beta(1+x)+\gamma\cdot(1+x+x^2)=0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)x+\gamma x^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0\\ \beta+\gamma&=0\\ \gamma&=0\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \operatorname{rg}A=3=\#\,\text{incog.}$$

Sist. eq. lin. homog. α,β,γ. $\qquad \Longrightarrow$ L.I.

6. $\boxed{\{1+x,\ 1-x,\ x+x^2,\ x^2-x\}\ \text{l.i.}\ ?}$ $\qquad P_2(\mathbb{R})$

$$\alpha(1+x)+\beta(1-x)+\gamma(x+x^2)+\delta(x^2-x)=0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)x+(\gamma+\delta)x^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=0\\ \alpha-\beta+\gamma-\delta&=0\\ \gamma+\delta&=0\end{aligned}\right\}:\ A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-2&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}A=3<4=\#$ incògnites

$\Rightarrow$ té solució no trivial $\Longrightarrow$ L.D.

Exemples:

- $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ L.I}}$

$$\underbrace{x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z = 0$$

- En general, a $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ són L.I.}}$$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ L.I.}}$

$$\underbrace{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

- En general, a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ són L.I.}}$$

(cjt. de $m\times n$ matrius amb exactament un 1 a cada lloc)

- $P_3(\mathbb{R})$: $\boxed{\{1, x, x^2, x^3\} \text{ L.I.}}$

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

- En general, a $P_d(\mathbb{R})$,

$\boxed{\{1, x, x^2, \ldots, x^d\} \text{ són L.I.}}$

En general, per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és
  - compatible determinat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LI
  - compatible indeterminat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LD

Per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents seguim els passos següents:

(1) formem una matriu A amb els vectors donats, posant-los per columnes

(2) calculem el rang r d'A

(3)
- si $r = k$, aleshores els k vectors són LI
- si $r < k$, aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu A, aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que corresponent a les columnes del menor d'A més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

$$\boxed{u_1, u_2, \ldots, u_k \text{ L.I.} \Leftrightarrow rg(u_1, \ldots, u_k) = k}$$

Propietats

Sigui $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E

(1) ▶ Si $\mathbf{0}_E$ és a S, llavors $u_1, \dots, u_k$ són LD

(2) ▶ Si $u_1, \dots, u_k$ són LI, llavors $\mathbf{0}_E$ no és a S

(3) ▶ Si $u_1, \dots, u_k$ són LI, tot subconjunt de S és LI

(4) ▶ Si $u_1, \dots, u_k$ són LD, tot conjunt que conté S és LD

▶ $\{0_E\}$ L.D. ; $\{v\}$ L.I. si $v \neq 0_E$

▶ $\{v, \lambda v\}$ L.D.

(1), (2) són equivalents:

$$\begin{cases} 0_E \in S \Rightarrow S \text{ L.D} & (1) \\ S \text{ L.I.} \Rightarrow 0_E \notin S & (2) \end{cases}$$

dem. de (1):

$$0_E \in S \Rightarrow \underset{\substack{\neq \\ 1}}{1} \cdot 0_E + \sum_{u \in S - \{0_E\}} 0 \cdot u = 0_E$$

$\Rightarrow S$ L.D.

(3), (4) són equivalents: $S' \subseteq S \subseteq E$

$$\begin{cases} S \text{ L.I.} \Rightarrow S' \text{ L.I} & (3) \\ S' \text{ L.D.} \Rightarrow S \text{ L.D.} & (4) \end{cases}$$

dem. de (4):

$S' = \{u_1, \dots, u_r\}$

$S = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_k\}$

S' L.D. $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_r$ amb $\alpha_i \neq 0$ tq.

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \underbrace{\alpha_i}_{\neq 0} u_i + \dots + \alpha_r u_r = 0_E$$

$$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \underbrace{\alpha_i}_{\neq 0} u_i + \dots + \alpha_r u_r + \underbrace{0\, u_{r+1} + \dots + 0\, u_k}_{= 0_E} = 0_E$$

$\Rightarrow S$ L.D.

Caracteritzacions

1

Teorema

Un conjunt de vectors S és LD si, i només si, hi ha un vector v a S que és combinació lineal de la resta de vectors de S

2

Corol·lari

Sigui $v \in E$. Si $u_1, \ldots, u_k$ són LI, aleshores $v, u_1, \ldots, u_k$ són LI si, i només si, $v \notin \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

1 **Teorema.** E $\mathbb{K}$-e.v., $S=\{u_1,\dots,u_k\}\subseteq E$

$$\boxed{S \text{ és L.D.} \Leftrightarrow \exists u\in S \text{ tq. } u \text{ és C.L. de } S-\{u\}}$$

$\Leftarrow$) Suposem que u_i és C.L. de $S-\{u_i\}=\{u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_k\}$:
aleshores, existeixen escalars $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_k$ tq.

$$u_i=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_ku_k$$

per tant:

$$\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\underbrace{(-1)}_{\neq 0}u_i+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_ku_k=0_E$$

és a dir, $S=\{u_1,\dots,u_k\}$ és L.D.

$\Rightarrow$) Suposem que $S=\{u_1,\dots,u_k\}$ és L.D.
aleshores, existeixen escalars $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ no tots nuls tq.

$$\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k=0_E$$

Suposem que, p.e., $\alpha_i\neq 0$. Aleshores:

$$u_i=\left(-\alpha_1/\alpha_i\right)u_1+\dots+\left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)u_{i-1}+\left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)u_{i+1}+\dots+\left(\frac{-\alpha_k}{\alpha_i}\right)u_k$$

Per tant, u_i és C.L. de $\{u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots u_k\}=S-\{u_i\}$

Observació: S L.D. $\not\Rightarrow$ $\forall u\in S$, u és C.L. de $S-\{u\}$

Exemple:

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$

- S és L.D.: $\underbrace{(-2)}_{\neq 0}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

  però: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ NO és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

Propietat $u_1, u_2, \dots, u_k \in E$,

$$\boxed{\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle \Leftrightarrow u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle}$$

demo

$\Rightarrow)$ $u_1 \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$

$\Leftarrow)$ suposem $u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$,
veurem que $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle$:
Demostrem les dues inclusions:

$\supseteq)$ $v \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tq $v = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k =$
$= 0 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$\Rightarrow v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$

(observeu que per a demostrar aquesta inclusió no és necessària la hipòtesi "$u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$")

$\subseteq)$ $v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tq. $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$\Rightarrow v = \alpha_1 (\beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k) + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \beta_2, \dots, \beta_k$ tq.
$u_1 = \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k$

on $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow v = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) u_2 + \dots + (\alpha_1 \beta_k + \alpha_k) u_k \in$
$\in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$

(2) Propietat $u_1, \dots, u_k, u_{k+1} \in E$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } u_1, \dots, u_k \text{ són L.I., aleshores} \\ u_1, \dots, u_k, u_{k+1} \text{ són L.I.} \iff u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle\end{array}}$$

demo:

$\Rightarrow$) Suposem que $u_{k+1} \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$,
aleshores $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ són L.D.
pel Teorema (1), CONTR.!

$\Leftarrow$) Veurem que si $u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, aleshores

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0_E$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in K$
$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$

en efecte:

si $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0_E$, aleshores:

- $\alpha_{k+1} = 0$, ja que si $\alpha_{k+1} \neq 0$, tindríem que $u_{k+1} = \left(-\alpha_1/\alpha_{k+1}\right) u_1 + \dots + \left(-\alpha_k/\alpha_{k+1}\right) u_k \in$ $\in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, CONTRAD.!
- per tant, $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0_E$, d'on deduïm que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ per ser $u_1, \dots, u_k$ L.I

és a dir, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$
com volíem demostrar.

OBSERVACIÓ

el resultat anterior el podem enunciar:

Si $u_1, \dots, u_k$ són L.I., aleshores

$v, u_1, \dots, u_k$ són L.I. $\Leftrightarrow$ $v \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

$v, u_1, \dots, u_k$ són L.D. $\Leftrightarrow$ $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

MÈTODE PER TROBAR EL MÀXIM # DE VECTORS L.I D'UN CONJUNT DE VECTORS DE $\mathbb{R}^n$

- Posem els vectors per columnes $\rightsquigarrow A = (u_1, \dots, u_k)$

- B matriu reduïda equivalent a A per files
  - el conjunt S de vectors de les columnes dels pivots són L.I.
  - a la resta de columnes tenim els coeficients del vector corresponent com a C.L. dels vectors de S

P.e.: $\{u_1, \dots, u_6\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim \dots \sim}_{\text{transf. elementals files}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$
- $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ són L.I.
- $u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$
- $u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5$