Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals → definició, exemples, primeres propietats
   matriu associada, exemples de matriu associada
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, direm que f és un **endomorfisme**

Exemples

1 ▶ Aplicació trivial. $f : E \to F$ on $f(u) = 0_F$, $u \in E$, és lineal

2 ▶ Aplicació identitat. $I_E : E \to E$ on $I_E(u) = u$, $u \in E$, és lineal

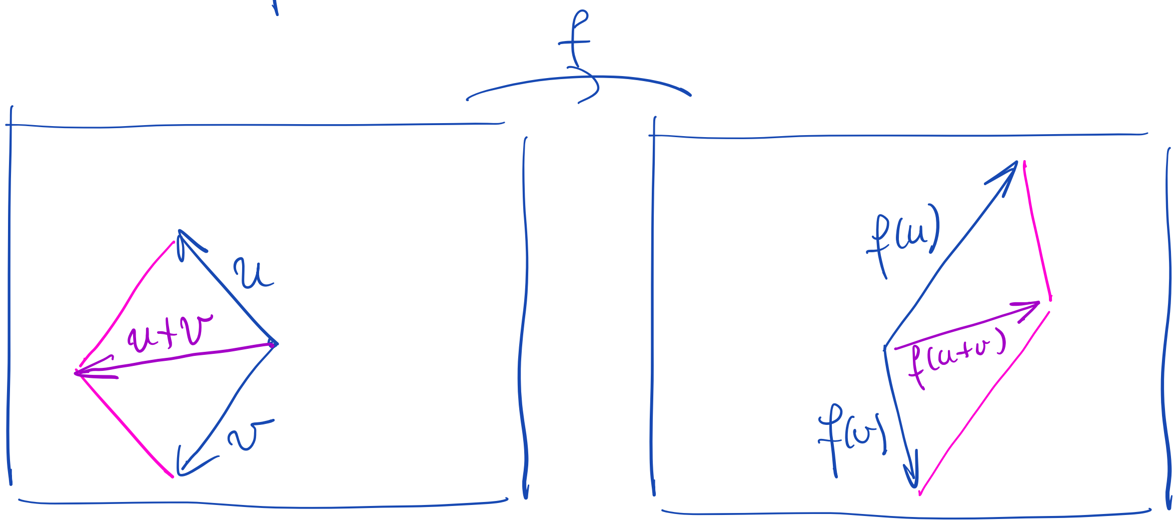
3 ▶ L'aplicació següent no és lineal

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$$

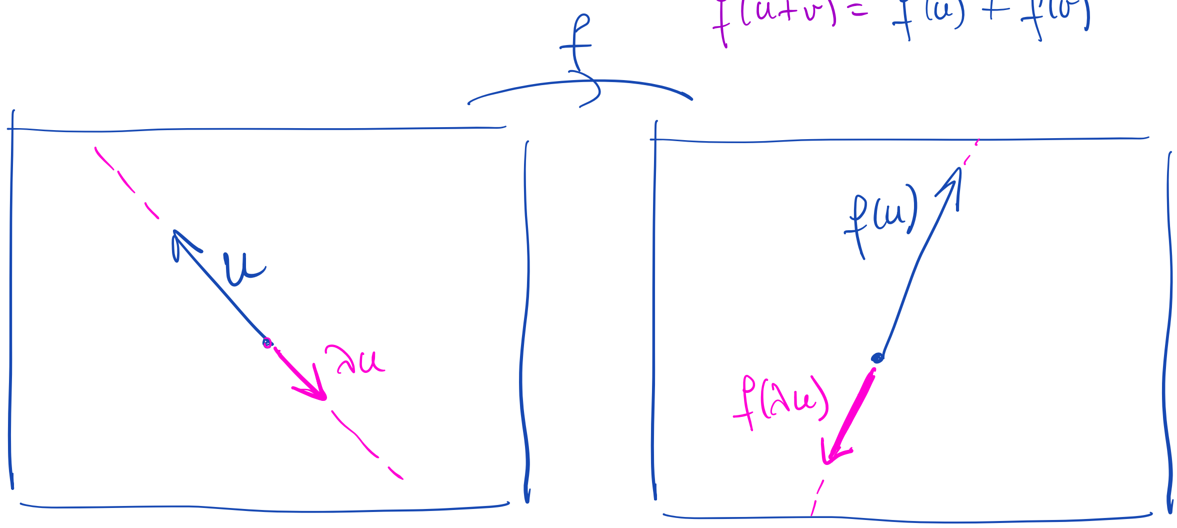
4 ▶ L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

5 ▶ $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tq. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és lineal

P.e. $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal:



$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$



$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

① $f: E \to F$ t.q. $f(u) = 0_F, \ \forall u \in E$, és lineal :

(1) $u, v \in E$ $\qquad f(\underbrace{u+v}_{=0_F}) \overset{?}{=} f(u) + f(v)$

$$0_F = 0_F + 0_F \quad \text{cert!}$$

(2) $\left.\begin{array}{l} u \in E \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\}$ $\qquad f(\underbrace{\lambda u}_{=0_F}) \overset{?}{=} \lambda f(u)$

$$0_F = \lambda \cdot 0_F \quad \text{cert!}$$

② $I_E: E \to E$ t.q. $I_E(u) = u, \ \forall u \in E$ és lineal :

(1) $I_E(u+v) \overset{?}{=} I_E(u) + I(v)$

$$u+v = u + v \quad \text{cert!}$$

(2) $I_E(\lambda u) \overset{?}{=} \lambda \cdot I_E(u)$

$$\lambda u = \lambda \cdot u \quad \text{cert!}$$

③ $f: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$

NO és lineal :

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - x \quad , \quad f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$$

però :

$$2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x^2 - 2x$$

$$\neq$$

$$f\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$$

4) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

$f(1,1) = (1,2)$, $f(2,2) = (16,4)$

però:

$$f((1,1)+(1,1)) = f(2,2) = (16,4)$$
$$\neq$$
$$f(1,1) + f(1,1) = (1,2) + (1,2) = (2,4)$$

5) $\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ tq. } f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és lineal:}}$

Si denotem $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ aleshores:

(1) $\forall X, X' \in \mathbb{K}^n$:

$$\boxed{f(X+X')} = A(X+X') = AX + AX' = \boxed{f(X) + f(X')}$$

(2) $\forall X \in \mathbb{K}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{f(\lambda X)} = A(\lambda X) = \lambda (AX) = \boxed{\lambda f(X)}$$

⑥ $\boxed{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tq. } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix} \text{ es lineal?}}$

- $$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+2y' \\ -3x'+y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+x'+2(y+y') \\ -3(x+x')+(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+x'+2y' \\ -3x+y-3x'+y' \end{pmatrix} \quad \text{cert!}$$

- $$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \lambda \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y \\ -3\lambda x + \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y \\ -3\lambda x + \lambda y \end{pmatrix} \quad \text{cert!}$$

Per tant, f és una aplicació lineal

OBSERVACIÓ: Veiem que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es pot definir:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, amb l'exemple/propietat ⑤ podem deduir directament que és lineal.

Propietats

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores

1 - $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
2 - $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in E$
3 - si S és un subespai d'E, $f(S)$ és un subespai d'F
4 - si S' és un subespai d'F, $f^{-1}(S')$ és un subespai d'E

Proposició $f : E \to F$ apl. lineal.

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Aleshores f està unívocament determinada per $f(b_1), \ldots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d'E: $u \in E$

si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, aleshores $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$

Corol·lari

5 Si $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ és un subespai d'E, aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_k) \rangle$$

① $f(0_E)=0_F$, si f és una aplicació lineal:

Demostració: $f(0_E)=f(0\cdot 0_E)=0\cdot f(0_E)=0_F$

Aquesta propietat és útil per a demostrar que algunes aplicacions no són lineals:

$$\boxed{f(0_E)\neq 0_F \Rightarrow \text{NO és lineal}}$$

P.e: són lineals les aplicacions següents?

(a) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tq. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x-y\\3z+1\\x-z\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{NO és lineal}$$

(b) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tq. $f(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+b+c & 2(a+1)\\ b+3c & c-a\end{pmatrix}$

$$f(0)=f(0+0x+0x^2)=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{NO és lineal}$$

② $f(-u)=-f(u)$, si f és lineal:

Demostració: $f(-u)=f((-1)\cdot u)=-1\cdot f(u)=-f(u)$

③ Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S subespai d'E $\Rightarrow f(S)$ és subespai d'F ?

(1) $f(S) \neq \emptyset$?

S subespai d'E $\Rightarrow 0_E \in S \Rightarrow \underbrace{f(0_E)}_{0_F} \in f(S)$ cert!

$\Rightarrow f(S) \neq \emptyset$

(2) $v, v' \in f(S) \stackrel{?}{\Rightarrow} v+v' \in f(S)$

$\Downarrow$

$v \in f(S) \Rightarrow v = f(u),\ u \in S$
$v' \in f(S) \Rightarrow v' = f(u'),\ u' \in S$ $\Rightarrow u+u' \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{v+v' = f(u) + f(u') \underset{\uparrow f \text{ lineal}}{=} f(\underbrace{u+u'}_{\in S}) \in f(S)}$ cert!

(3) $\alpha \in \mathbb{K},\ v \in f(S) \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha v \in f(S)$

$\Downarrow$

$v = f(u),\ u \in S$ i $\alpha u \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha v = \alpha f(u) \underset{\uparrow f \text{ lineal}}{=} f(\underbrace{\alpha u}_{\in S}) \in f(S)}$ cert!

④ Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S' subespai d'$F \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(S')}_{\{u \in E \,:\, f(u) \in S'\}}$ és subespai d'E ?

(1) $f^{-1}(S') \neq \emptyset$?

$0_F \in S'$ i $f(0_E) = 0_F \in S' \Rightarrow 0_E \in f^{-1}(S')$

$\Rightarrow f^{-1}(S') \neq \emptyset$ cert!

(2) $\underbrace{u, u' \in f^{-1}(S')}_{f(u) \in S',\ f(u') \in S'}$? $\Rightarrow \underbrace{u + u' \in f^{-1}(S')}_{f(u+u') \in S'}$

S' subespai $\Downarrow$ $\Uparrow$

$f(u) + f(u') \in S' \Rightarrow f(u+u') \overset{\uparrow}{=} f(u) + f(u') \in S'$ Cert!

f lineal

(3) $\underbrace{\alpha \in \mathbb{K},\ u \in f^{-1}(S')}_{\alpha \in \mathbb{K},\ f(u) \in S'}$? $\Rightarrow \underbrace{\alpha u \in f^{-1}(S')}_{f(\alpha u) \in S'}$

S' subespai $\Downarrow$ $\Uparrow$

$\alpha f(u) \in S' \Rightarrow f(\alpha u) \overset{\uparrow}{=} \alpha f(u) \in S'$ cert!

f lineal

5 Si $S=\langle v_1,\dots,v_k\rangle=\{\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k : \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{K}\}$

aleshores:

$$
\begin{aligned}
\boxed{f(S)} &= \{f(u) : u\in S\} = \\
&= \{f(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k) : \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{K}\} \\
&= \{\alpha_1 f(v_1)+\dots+\alpha_k f(v_k) : \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{K}\} \\
&= \boxed{\langle f(v_1),\dots,f(v_k)\rangle}
\end{aligned}
$$

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E, W una base de F i m la dimensió de F

$f : E \longrightarrow F$ aplicació lineal

La **matriu associada a f en les bases B i W** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base B expressades en coordenades en la base W. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \ldots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f)u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

Justificació :

$u \in E$, $\quad B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E :

$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, per a escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\Downarrow$$

$$f(u) = f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n)$$

$$\Downarrow$$

$$(f(u))_W = (\alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n))_W = \alpha_1 (f(b_1))_W + \dots + \alpha_n (f(b_n))_W$$

$$(f(u))_W = \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (f(b_1))_W & \cdots & (f(b_n))_W \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{M^B_W(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{(u)_B}$$

$$\boxed{M^B_W(f) \in \mathcal{M}_{\underset{\dim F}{m} \times \underset{\dim E}{n}}(\mathbb{K})}$$

- Si $\underset{B_1}{f : E} \longrightarrow \underset{B_2}{E}$ és un endomorfisme i $\dim E = n$

  aleshores $M^{B_1}_{B_2}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si f és un endomorfisme, normalment s'utilitza la mateixa base a l'espai de sortida i al d'arribada, o sigui $B_1 = B_2 = B$.

Exemple 1.

$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z\\2x-z\end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$C_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $C_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z\\2x-z\end{pmatrix}$$

b) $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$, ja que:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$$

c) $$f^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(M \,\middle|\, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -4 & -3\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3/4\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\1/4\end{matrix}\right) \sim \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 3/4\end{matrix}}_{rg M = 2}\,\middle|\,\begin{matrix}1/2\\1/4\end{matrix}\right)}_{rg M' = 2}$$

S.C.I. ja que $rg M = rg M' = 2 < 3 = \#\text{incògnites}$

Solució:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2\,z \\ 1/4 - 3/4\,z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \; z \in \mathbb{R}$$

Per tant:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple 2.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y+2z \\ y-3z \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en base canònica $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ Ja que:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Exemple ③.

$f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$B = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b) Calculeu $f(1+x+2x^2)$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

d) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

---

a) $M_W^B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, ja que $\begin{cases} \dim P_2(\mathbb{R}) = 3 \\ \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 \end{cases}$

Calculem les imatges dels polinomis de B:

$$f(1) = f(1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = f(0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) = f(0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_W^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $f(1+x+2x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ja que:

$$M_W^B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{(1+x+2x^2)_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(f(1+x+2x^2))_W}$$

c) $f^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \emptyset$ ja que:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \left\{a+bx+cx^2 : \; M\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)_W} \right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad rg M = 3 < 4 = rg M' \Rightarrow S.I.$$

$rgM = 3$

$rgM' = 4$

d) $f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \,?$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \left\{a+bx+cx^2 : \; M\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right)_W} \right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

M

M'

$rg M = rg M' = 3 = \#$ incògnites

$\Rightarrow$ S.C.D.

Solució: $\begin{cases} a = 2\\ b = 1\\ c = 5\end{cases}$

$$\Rightarrow f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \{2 + x + 5x^2\}$$