

그네타기의 동역학적 분석과 과학영재교육

배 세 벽

머리말

“영재 교육”(gifted education)이라는 주제가 최근 들어 교육에서 주요 관심사 중의 하나로 부각되기 시작하였으며, 영재교육진흥법 및 그 시행령이 제정되면서 국가적인 차원에서 우리나라의 인적 자원에 대한 보다 체계적인 지원이 진행되고 있다. 렌줄리(Renzulli, 1998)에 의하면, “영재”는 세 가지 요소인 (i) 평균이상의 (지적인) 능력(above average ability), (ii) 과제 집착력(task commitment), (iii) 창의성(creativity)을 갖추고 있는 사람이라고 정의된다. 특히, 여러 분야(예를 들면, 예술 분야)가 있을 수 있겠지만 과학 분야에서 두드러지게 재능을 보이는 영재를 “과학 영재”라고 할 수 있겠다. 고등학생을 대상으로 하는 과학영재교육은 2002년 부산과학고등학교(“한국과학영재학교”로 교명이 변경됨)가 과학영재학교로 지정되면서 보다 집중적으로 지원을 받게 되었다. 과학영재학교가 2003년부터 신입생을 받기 시작하면서, “연구를 통한 교육, 교육을 통한 연구”를 기본 모토로 하는 “R&E (Research and Education) 프로그램”^[1,2]이 본격적으로 실행되었다. R&E 프로그램은, mentor-mentee 형태로 한 팀을 구성하여 약 1년 동안 공동연구를 수행하는 탐구형 사교육 프로그램으로서, 과학영재들의 자기 주도적(self-directed) 연구 역량 강화에 초점을 맞추고 있다. R&E 프로그램에서 mentor는 과학영재 학생들의 연구를 사교육 형태로 지도하는 전문가이며, 이공계 분야의 대학 교수, 연구소 연구원 등이 가능하다. 또한, mentor는 학생의 연구 지도를 도울 수 있는 co-mentor나 조교를 둘 수도 있다. 한편, 과학영재학생(곧, mentee임)들은 3-4명 정도의 한 팀을 이루어 연구주제를 제안한 mentor의 지도를 받는다. 1-2학년 학생들만 R&E 프로그램에 참여하는데, 2학년 학생들의 경우 대학 일반물리 수준의 과목(예를 들면, 일반생물)을 수강하며, 학생들의 능력이나 선호도에 따라 보다 어려운 과목인 고전역학 등의 과목을 이수하기도 한다.

지금까지 많은 대학 교수 및 연구원 등이 R&E 프로그램에 지

저자약력

배세벽 교수는 서울대학교 물리학과를 졸업하고, 한국과학기술원(KAIST)에서 석·박사 학위(임자물리이론)를 취득하였으며, KAIST의 과학영재교육 연구원에서 조교수를 거쳐 부교수로 재직 중이다. (sbae@kaist.ac.kr)

원하여 과학영재들을 교육해 왔으며, 필자도 R&E 프로그램을 통해 과학영재들을 지도할 수 있었다. 필자가 제안한 주제는 그네 타기를 고전 역학적으로 분석하는 것이었다. “그네”(swing)는 우리가 놀이터와 같은 곳에서 쉽게 접할 수 있는 친근한 놀이기구이기 때문에, 학생들의 흥미를 유발할 수 있을 것으로 보인다. 그렇지만 “앉았다 일어서는 동작”(이하 “pumping”이라고 부르겠음)이 어떻게 그네의 각 진동(angular oscillation)을 증폭시키는지에 대해서는 충분히 이해되지 않은 측면이 있다. 예를 들면, (i) “그네의 줄에 평행한 방향으로의 pumping은 그네의 진동 방향(angular direction)에 수직이므로, 그네의 각을 증가시킬 수 없다”라든가와 (ii) “그네와 사람이 하나의 계를 이루기 때문에 internal force인 pumping은 그네의 진동을 증가시킬 수 없다”와 같은 오개념(misconception)을 들 수 있다. 그러므로 그네는 친근함으로 인해 흥미를 유발시킬 수 있을 뿐만 아니라 이해가 부족한 부분이 있기 때문에, 보다 자세하게 물리학적으로 분석할 필요가 있을 것이다. 이러한 맥락에서 필자는 한국과학영재학교 학생들을 위한 R&E 프로그램의 과제를 수행하였고, 참여 학생과의 공동 연구 및 필자의 강의 내용을 사용한 후속 연구를 통해 물리학 교육 관련 국제학술지인 European Journal of Physics에 3편의 논문을 게재하였다. 이제부터는 이 논문들에 기초하여 그네라는 흥미로운 물리계의 운동에 대한 동역학적 분석을 제시하려고 한다. 주요 논의는, (i) 등가성을 이용한 pumping의 특성(곧, “pumping은 외력으로 작용하는가?”)에서 시작하여, (ii) 그네의 최저점의 불안정성(곧, “어린 아이가 혼자 힘으로 그네를 탈 수 있는가?”)을 다룬 뒤, (iii) 효율적인 그네타기 방법(곧, “통상적인 그네타기가 효율적인 방법인가?”)으로 끝난다. 한편, 그네의 운동을 다루기 위해서는 대학 수준의 고전역학 내용의 일부가 필요하지만, R&E 프로그램이 약 1년 동안 지속되므로 적절한 기간의 교육을 통해서 학생들이 습득할 수 있었다. 앞에서 말한 것처럼, 한국과학영재학교에서는 물리학

참고문헌

- [1] 김종득 외, 과학영재학교 R&E 지원 사업 최종보고서 (KAIST 과학영재교육연구원, 2005).
- [2] R&E 프로그램 사이버지원센터 (<http://rne.kaist.ac.kr>, 2006).

에 관심이 많은 과학영재들은 대학 일반물리, 고전 역학 등의 과목을 이수하고 있다. 따라서 본 내용은 대학 고전역학 수준의 강의에서 참고 자료로 활용될 수 있을 것으로 보인다.

그네 타는 사람의 “앉고 일어서는 동작”(pumping)의 역학적 특성^[3]

앞에서 그네의 pumping과 관련된 두 가지 오개념을 제시하였다. 여기서는 pumping이 그네 타기에 어떠한 역할(예를 들면, 그네에 “외력”(external force)으로 작용함)을 하는지에 대해 “등가성”(equivalence)의 관점에서 살펴보고자 한다.^[3]

그네를 타는 사람의 몸은 복잡한 구조와 운동 방식을 가지고 있기 때문에, 운동 방정식을 완벽하게 세우기가 어려울 뿐만 아니라 설사 세웠다고 하더라도 해를 구하거나 분석하는 작업은 쉽지 않을 것이다. 따라서 그네타기의 핵심 사항을 유지하는 범위 내에서 적절하게 단순화하는 “모형화”(modeling)가 필요하다. 모형화를 위한 힌트는 다음과 같은 실제 그네타기를 관찰함으로써 찾을 수 있다: 아이들은 앉았다 일어서는 동작을 반복함으로써(곧, 자신의 몸의 질량 중심을 그네의 줄을 따라 움직임으로써) 그네의 각도를 증가시킨다. 이것은 그림 1(a)에서와 같이 줄의 길이 $l(t)$ 가 시간 t 에 따라 변하는 진자의 운동으로 근사할 수 있다. 다시 말해, 사람의 몸은 질량 m 인 입자로, 앉고 일어서는 동작은 진자 길이의 변화로 대체시킨 것이다. 이렇게 단순화된 모형을 보다 현실적으로 만들기 위해 $\vec{F}_{\text{air}} = -\gamma_{\text{air}} \vec{v}$ 형태의 공기에 의한 저항력을 포함시키면, 그네의 각 θ 는 다음 운동 방정식을 만족한다.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\dot{l}}{l} + \frac{\gamma_{\text{air}}}{m} \right) \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

또한, 그네는 그림 1(a)의 회전축 O 로부터 마찰력을 추가적으로 받을 수 있으므로, 이 마찰력은 $\frac{\gamma_{\text{axis}}}{m} \dot{\theta}$ 의 형태로 식 (1)에 기여한다고 가정한다. 따라서 앞으로는 식 (1)의 γ_{air} 대신 보다 일반화된 감쇠 상수 $\gamma (= \gamma_{\text{air}} + \gamma_{\text{axis}})$ 를 사용하겠다. 위 (1)식에 의하면, 각 $\theta(t)$ 의 운동은 그네 길이 $l(t)$ 의 운동과 연결되어 있어서 pumping에 의해서 그네 진동의 증폭(곧, 역학적 에너지의 증가)을 예상할 수 있다. 이 예상은 뒤에서 다룰 “공진”(parametric resonance) 관련 내용과 “효율적인 그네타기 방법”에 의해 정당화될 수 있다. 따라서 이것은 앞의 첫 번째 오개념인 “pumping의 방향과 그네 진동 방향의 직교함으로 인한 $\theta(t)$ 와 $l(t)$ 사이의 역학적 decoupling”의 부적당함을 암시한다고 할 수 있다.

이제, 사람의 앉고 일어서는 동작(곧, pumping)이 그네에 추가적인 “외력”(external force)으로 작용한다는 것을 살펴보

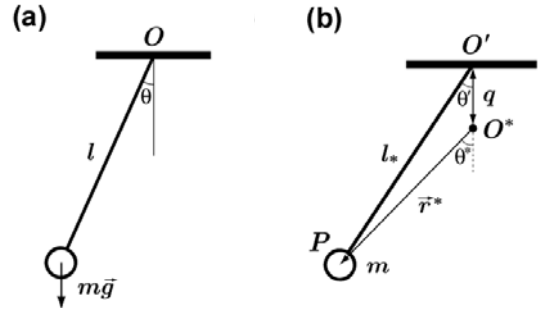


그림 1. (a) 줄의 길이가 변하는 진자를 이용한 그네의 모형화. (b) 길이가 l_* 로 일정한 진자의 회전축 O' 을 고정점 O^* 에 대해 상하로 진동시킴.

겠다. 먼저, pumping $l(t)$ 의 역할을 정성적으로 살펴보자. 우리의 관찰에 의하면, pumping에 의해 그네의 진폭이 증가한다(다시 말해, 그네의 역학적 에너지가 증가한다). 일-에너지 정리의 관점에서 볼 때 역학적 에너지의 증가는 여분의 외력의 존재를 의미하기 때문에 pumping이 그네에 하나의 “외력”처럼 작용한다고 보는 것이 자연스럽다. 이러한 정성적인 논의를 보다 정량화하기 위해 “등가성”(equivalence)이라는 새로운 관점에서 접근하겠다. (참고로, “유사성”(similarity)으로도 불릴 수 있는 등가성의 한 예로 아인슈타인의 일반상대론의 등가 원리를 들 수 있다. 주의할 것은 등가성은 “동일성”(equality)을 반드시 의미하는 것은 아니라는 것이다.) 방정식의 수준에서 pumping과 외력 사이의 등가성을 발견하기 위해, 그림 1(a)의 그네의 운동을 살펴보자. 입자 m 은 회전축 O 에 대해 가까워지기도 하고 멀어지기도 한다. 이러한 운동은 그림 1(b)에서 “외부 존재”(external agent)가 회전축 O' 을 상하로 진동시킬 때 고정점 O^* 와 입자 P 사이의 거리 변화와 유사하다고 기대할 수 있다. 그림 1(b)에서는 외부 존재에 의한 외력의 발생이 분명하므로, 그림 1(a)와의 등가성(곧, 그림 1(b)의 운동 방정식을 구해서 그네의 방정식 (1)과의 “방정식의 형식(form)에서의 유사성”)을 증명한다면 pumping이 외력이라고 볼 수 있을 것이다. 문제를 단순화시켜서 다루기 위해, 마찰력은 작용하지 않는다(곧, $\gamma = 0$)고 가정하겠다. 그림 1(b)의 회전축 O' 이 $q(t) = a \cos \Omega t$ 형태로 진동할 때, $|a| \ll l_*$ 및 $|\theta^*| \ll 1$ 영역에서 그림 1(b)의 각 θ^* (곧, $\overrightarrow{O^*P}$ 와 중력의 사이 각)는 다음 방정식을 만족한다.

$$\ddot{\theta}^* + \left(\frac{2a}{l_*} \Omega \sin \Omega t \right) \dot{\theta}^* + \frac{g}{l_*} \theta^* = 0 \quad (2)$$

한편, 그림 1(a)의 pumping이 $l(t) = l_0 - \alpha \cos \omega_p t$ ($l_0 \gg |\alpha|$)일 경우, 식 (1)은 근사적으로 다음과 같이 나타난다.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\alpha}{l_0} \omega_p \sin \omega_p t \right) \dot{\theta} + \frac{g}{l_0} \left(1 + \frac{\alpha}{l_0} \cos \omega_p t \right) \theta = 0 \quad (3)$$

참고문헌

[3] S. Bae, Eur. J. Phys. **27**, 291–298 (2006).

O^* 에 대한 식 (2)와 O 에 대한 식 (3)을 비교해 보면, 다음과 같은 대응은 두 방정식의 유사성(공, 등가성)을 보여준다는 것을 알 수 있다.

$$\text{그림 1(a)의 그네 : } \left\{ \begin{array}{l} \theta \leftrightarrow \theta^* \\ l_0 \leftrightarrow l_* \\ \omega_p \leftrightarrow \Omega \\ \alpha \leftrightarrow a \end{array} \right\} : \text{그림 1(b)의 진자}$$

그러므로 그림 1(a)의 pumping이 그림 1(b)의 외력에 대응된다고 할 수 있기 때문에, 그네에서 앓고 일어나는 동작을 “외력”으로 보는 것이 자연스럽다.

위에서 그네 타기의 pumping은 그네에 작용하는 외력이라고 보였다. 그런데 그네는 진동자(non-linear oscillator)이므로, 강제 단진동(forced harmonic oscillation)과의 유비를 통해 그네에서도 “공진 현상”(parametric resonance)이 나타남을 예상할 수 있다. 그네의 방정식 (1)을 $|\theta(t)| \ll 1$ 및 $\gamma = 0$ 인 영역에 대해 다뤄보자. $\kappa = |\alpha|/l_0$ ($\ll 1$)에 대한 $\theta(t)$ 의 Taylor 전개

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\theta}_n(t) \kappa^n \quad (4)$$

의 계수 $\tilde{\theta}_0(t)$ 와 $\tilde{\theta}_1(t)$ 의 운동 방정식을 구해보면, 1차 항의 계수 $\tilde{\theta}_1$ 이

$$\omega_p = 2\omega_0 \quad (\omega_0 = \sqrt{g/l_0}) \quad (5)$$

에서 공진을 일으킴을 알 수 있다. 이것은 그네가 1회 왕복하는 동안 앓았다 일어나는 동작을 2회 반복할 때(이것은 일상적인 그네타기 방식과 같다), 에너지 유입이 극대화 되어서 그네가 가장 많이 증폭된다는 것을 의미한다.

그네의 최저점의 안정성 분석^[4]

앞에서 $\omega_p = 2\omega_0$ 라는 진동수로 그네를 타면, 공진에 의해 그네의 진폭을 쉽게 증가시킬 수 있다고 하였다. 여기서는 이러한 resonant pumping을 할 때 “어린 아이라도 다른 사람의 도움 없이 혼자 힘으로 최저점(공, $\theta = 0$)에서부터 그네의 진폭을 증가시킬 수 있다”는 실제 현상을 살펴보겠다.^[4] 이 주제는 카오스 이론에서 사용하는 “고정점의 불안정성”(공, 고정점에 충분히 가까운 점에서 출발한 궤도가 충분히 긴 시간이 지나도 고정점으로 가까워지지 않는다)이라는 개념으로 표현될 수 있을 것 같다.

최저점 $\theta = 0$ 의 불안정성 여부를 알아볼 것이므로, $|\theta(t)| \ll 1$ 인 영역에서 해의 “장기적인 운동”(long-term behavior)을 관찰하면 될 것이다. 그런데, 만약 식 (4)와 같은 Taylor 전개를 통해 해를 구했을 때 우리의 주요 관심사인 장기 예측을 제대로 할 수 있을까? 줄의 길이가 일정한 경우, 그네 방정식 (1)은 감쇄 진동자(damped harmonic oscillator)가 되어서, 해의 진폭이 시

간에 대해 지수 함수적으로 감소한다는 것은 잘 알려져 있다. 식 (4)와 같은 Taylor 전개를 이용하면, 앞에서 언급한 공진 현상으로 인해 1차 항의 계수의 진폭은 시간 t 의 1차 함수 형태로 증가하여, 결국 근사해가 장기 예측에 별로 도움을 주지 못하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 새로운 방법을 시도해왔다.

Pumping이 $l(t) = l_0 - \frac{\epsilon}{2} \cos(2\omega_0 t)$ ($l_0 \gg |\epsilon|$)이고 감쇄 항이 $\gamma/m = \Gamma\lambda$ ($\lambda = \epsilon/l_0$) 형태로 될 때, 해 $\theta(t)$ 는 다음과 같은 형태(공, two-timing expansion)로 전개될 수 있다고 가정하자.

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\tau, T) \lambda^n \quad (6)$$

여기서 주의할 것은 식 (4)와 달리 계수 $\theta_n(\tau, T)$ 가 두 변수 τ ($=t$)와 T ($=\lambda t$)의 함수라는 것이며, 이로 인해 Taylor 전개에서 발생한 공진 문제를 해결할 수 있다. 식 (6)을 그네 방정식 (1)에 대입하면, 단진동 방정식을 만족하는 θ_0 는 $\theta_0(\tau, T) = \Theta(T) \sin[\omega_0 \tau + \phi(T)]$ 가 된다. 이 해를 θ_1 이 만족하는 방정식에 대입하면, 진동수 ω_0 인 θ_1 -진동자에 작용하는 “힘” \mathbb{F} 을 얻을 수 있다. 그런데 힘 \mathbb{F} 가 진동수 ω_0 인 성분(공, $\sin \omega_0 \tau$ 나 $\cos \omega_0 \tau$ 에 비례하는 항)을 가지고 있으면, Taylor 전개에서와 같이 공진을 일으켜서 시간 τ 가 충분히 큰 영역에서 근사가 제대로 작동하지 않게 된다. Taylor 전개를 이용할 때에는 이 공진 현상을 없앨 수 없었지만, two-timing 전개에서는 진폭 Θ 와 위상 ϕ 가 더 이상 상수가 아니라 T 의 함수이므로 진동수 ω_0 인 성분을 없앨 수 있다. 이러한 “공진 회피 조건”(resonance-avoidance condition)으로부터 Θ 와 ϕ 의 방정식

$$\Theta' = \left(\frac{3}{8} \omega_0 \sin[2\phi(T)] - \frac{\Gamma}{2} \right) \Theta(T) \quad (7)$$

$$\phi' = \frac{3}{8} \omega_0 \cos[2\phi(T)] \quad (8)$$

을 얻을 수 있다. 최저점에서의 초기 조건 $\Theta(0) \simeq 0$ 과 $\phi(0) \simeq 0$ 에서 ϕ 가 Θ 보다 훨씬 큰 속력을 가지므로 $\phi(T)$ 에 $T \rightarrow \infty$ 일 때의 값(공, $\pi/4$)을 대입하는 근사를 사용하면, θ_0 의 진폭은

$$\Theta(t) \simeq \Theta(0) \exp(\eta_s t) \quad (\eta_s = \frac{3\epsilon\omega_0}{8l_0} - \frac{\gamma}{2m}) \quad (9)$$

가 된다. 그림 2에 의하면 two-timing 전개를 이용해서 구한 진폭 $\Theta(t)$ 가 그네 방정식 (1)의 수치 계산(numerical calculation)을 통해 구한 해 $\theta(t)$ 의 진폭을 비교적 잘 근사하므로, 이 전개의 타당함을 쉽게 알 수 있다. (두 그래프에서 차이 나는 부분은 $\phi(T)$ 대신에 $\phi(\infty)$ 를 사용하는 근사 때문에 발생할 수 있다.) 또한, 줄의 길이 변화가 없을 때 그네는 감쇄 진동자로 근사되는데, 식 (9)가 잘 알려진 결과인 진폭이 $\exp(-\gamma t/2m)$ 에 비례

참고문헌

[4] S. Bae, Eur. J. Phys. **26**, 791–801 (2005).

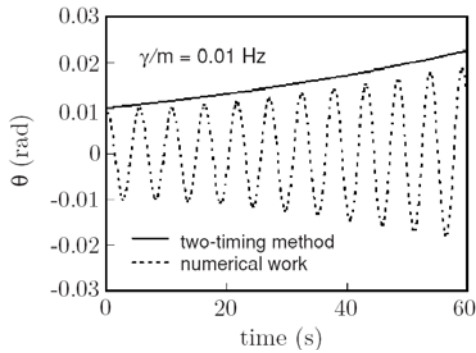


그림 2. Two-timing 전개로 구한 진폭 $\theta(t)$ 와 그네 방정식의 수치 계산으로 구한 해 $\theta(t)$.

한다는 것을 보여준다는 점에서도 지지될 수 있다. 식 (9)로부터, stability index η_s 의 부호가 최저점의 불안정성을 결정한다는 것을 알 수 있다. 마찰이 없는 경우에는 η_s 가 항상 양수이므로 최저점은 불안정하다. 이 때, η_s 가 진폭 $\epsilon/2$ 에 비례하므로, 앞으로 일어설 때의 높이 차이가 클수록 최저점은 더 불안정하게 된다—다시 말해, 진폭이 클수록 그네에 유입되는 에너지가 많아져서 증폭이 보다 잘 일어나게 된다.

앞에서 말한 “어린 아이라도 혼자 힘으로 그네를 탈 수 있는가?”라는 문제를 다루기 위해 η_s 의 부호를 개략적으로 구해 보겠다. 어린 아이를 반지름 R 인 구(sphere)로 근사하면 Stokes' law에 의해 감쇄 상수는 $\gamma = 6\pi\mu R$ (μ : 공기의 viscosity)을 만족한다. 질량 $m \sim 25\text{ kg}$, 반지름 $R \sim 0.5\text{ m}$, $\mu = 1.73 \times 10^{-5}\text{ Nsm}^{-2}$, $l_0 = 7.15\text{ m}$, $\epsilon = 0.3\text{ m}$ 인 영역에 대해,

$$\eta_s \simeq 0.02\text{ Hz (곧, 양수임)} \quad (10)$$

가 된다(단, 여기서는 회전축에 의한 마찰은 무시하였다). 따라서 그네의 최저점 $\theta = 0$ 은 역학적으로 불안정하므로, 어린 아이라도 혼자 힘으로 그네의 진폭을 증가시킬 수 있다는 관찰 결과를 설명할 수 있다.

효율적인 그네타기 방법^[5]

앞에서, 삼각함수 형태의 pumping은 η_s 에 $\frac{3}{8} \times \frac{\epsilon\omega_0}{l_0}$ 만큼 기여한다고 보였다. 그런데, 마찰이 없는 상황에서 내려갈 때 앉고 올라갈 때 서는 step-function 형태의 pumping은 $\frac{3}{2\pi} \times \frac{\epsilon\omega_0}{l_0}$ 만큼 기여한다.^[6] 비록 식 (9)가 각이 매우 작은 경우에 구한 결과이기는 하지만, 두 pumping의 기여의 차이는 동일한 시간이 흘렀을 때 그네의 진폭에서의 차이로 나타난다고 예상할 수 있다. 다른 식으로 표현하면, 그네타기 방식의 차이는 (최저점에서 출발하여) 주어진 각도에 도달하는데 소요되는 시간 T 의 차이로 나타난다고 할 수 있다. 여기서

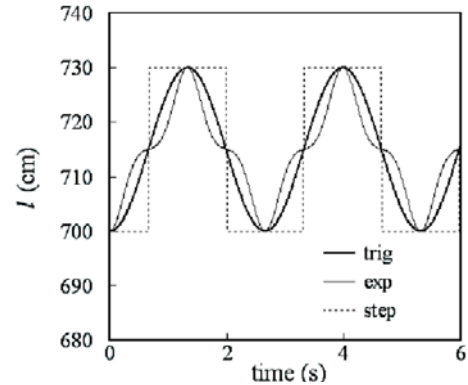


그림 3. Pumping의 세 가지 방식($l_0 = 7.15\text{ m}$, $\epsilon = 0.3\text{ m}$).

는 동일한 각도에로의 도달시간 T 를 척도로 하여 세 가지 pumping 방식의 효율성에 대해 살펴보고자 한다.^[5] 또한, 이 내용은 평소에 사용하는 그네 타기와 관련될 수 있다. 어린 아이들이 그네를 타는 것을 관찰해 보면, (i) 한쪽 최고점에서 최저점으로 내려올 때에는 앉아 있다가, (ii) 이 최저점에서 반대쪽 최고점으로 올라갈 때에는 서 있는 자세를 유지하고, (iii) 다시 내려올 때에는 앞의 두 과정을 차례대로 반복한다는 것을 알 수 있다. 그네를 타는 방법이 여러 가지가 있을 수 있는데, 왜 이러한 형태(곧, step-function 형태의 pumping)로 아이들이 그네를 탈까? 이러한 그네타기 방식에는 어떠한 물리적 의미가 숨어 있는지 여기서 알아보려고 한다.

그림 3에 제시된 세 종류의 그네타기 방식(곧, trigonometric (trig), exponential (exp), step pumpings)에 대해, 그네가 작은 초기 각(≈ 0)에서 출발하여 보다 큰 최종 각에 도달하는데 소요되는 시간 T 를 살펴보자. 이 소요시간은 pumping의 효율성의 척도로 사용된다. (이것을 응용하여, 최단 시간에 목표 각에 도달하는 사람이 우승자가 되는 “그네타기 경기”를 개최할 수도 있겠다.) 논의의 단순함을 위해 마찰력은 없다(곧, $\gamma = 0$)고 가정한다. 그림 4에는, 최종 각 22° , 45° , 90° 에로의 도달 소요시간 T 의 pumping 진동수 ω 에 대한 의존성이 나타나 있다. 단, 이때의 step pumping의 위상(phase)은 0이며, 최고점에서 최저점으로 내려올 때 앉아 있는 경우(곧, 통상적인 그네타기 방식)에 해당한다. 그림 4에 의하면, pumping 방식이나 최종 각과 무관하게 $\omega = 2\omega_0$ 근방에서 소요 시간이 최소가 된다. 이 결과는 식 (5)의 parametric resonance의 조건과 일치하는데, 공진에 의해 에너지 전달이 최대가 됨으로 인해 그네 진폭이 가장 많이 증가하여, 주어진 최종 각에 가장 빨리 도달한다(곧, 소요 시간이 최소가 된다고 볼 수 있다. 또한, 통상적인 그네타기에 해당하는 step pumping이 다른 두 pumping에 비해 소요시간의

참고문헌

- [5] S. Bae and Y.-H. Kang, Eur. J. Phys. **27**, 75–86 (2006).
- [6] S. M. Curry, Am. J. Phys. **44**, 924–926 (1976).

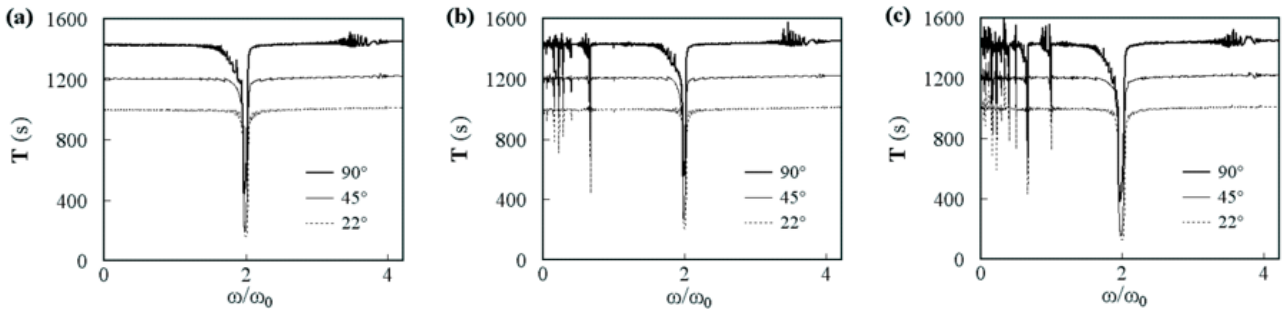


그림 4. 소요 시간 T 와 진동수 ω 의 관계($\epsilon = 0.3$ m, 최종 각 $=22^\circ, 45^\circ, 90^\circ$). (a) trigonometric pumping, (b) exponential pumping, (c) step pumping.

최소 값 T_m 에 있어서 더 작은 값을 가지므로 보다 효율적인 방법이라고 할 수 있겠다. $\omega = 2\omega_0$ 근방에서 T 가 매우 급격하게 변하므로 소요시간이 최소가 되도록 하는 진동수를 구하는 경우에 주의가 필요하며, 이 진동수의 정확한 값을 아는 것은 위의 “그네타기 경기”에서 우승하는 데에 매우 중요할 수 있다. 추가적인 수치 계산을 통해 각 pumping 별로 위상(phase)을 변화시켜 가면서 T_m 을 구해 보았고, step pumping이 제일 작은 값을 준다는 결과를 얻었다. 그림 5(a)에 의하면, 최종 각이 충분히 커도 최소 소요시간 T_m 은 pumping의 위상이 0 근방일 때 나타나므로, 통상적인 그네타기 방식이 효율적임을 알 수 있다. 진폭 $\epsilon/2$ 의 변화에 대해서도 step pumping의 T_m 이 제일 작게 나왔으며, 앞의 η_s 로부터 예상할 수 있듯이 진폭이 커짐에 따라 소요시간이 감소한다(그림 5(b) 참조). 이것은 몸의 질량 중심을 줄을 따라 많이 움직일수록 빨리 증폭할 수 있다는 것을 뜻한다. 정리하면, 올라갈 때 일어서고 내려올 때 가능한 한 많이 앉는 step

pumping이 소요시간이 최소가 되게 하는 optimal pumping이라고 할 수 있다. 이것은 그네라는 비선형계를 효율적으로 통제하는 것(곧, optimal control)에 해당한다. 그런데 통상적인 그네타기 방식이 optimal pumping과 유사하므로, 우리는 부지중(不知中)에 도달 소요시간을 줄이는 데에 효율적인 그네타기 방법을 사용해 왔다고 할 수 있겠다.

맺음말

지금까지 과학영재교육의 일환으로 진행되고 있는 R&E (Research and Education) 프로그램에서 필자가 지도한 주제였던 그네타기의 동역학적 분석에 대해 살펴보았다. 고등학생 과학영재를 “연구를 통한 교육, 교육을 통한 연구” 형태로 약 1년 동안 지도하기 위해 적절한 연구 주제를 찾을 필요가 있었으며, 주제의 흥미로움 및 관련 오개념으로 인한 연구의 필요성을 이유로 하여 그네타기를 연구 주제로 선택하였다. 그네라는 물리계를 수학적으로 다루기 위해, 먼저 길이가 변하는 진자를 사용하여 그네의 모형(model)을 구성하였고, 이 모형이 현실에 보다 가깝도록 하기 위해 마찰력을 포함시켰다. 이 모형에 대해 다음 내용들을 살펴보았다: 첫째, 앉고 일어서는 동작(곧, pumping)은 어떤 진자의 축을 상하로 흔드는 외력과 동가(equivalent)이며, 그네의 진폭(또는 역학적 에너지)을 변화시킬 수 있다. 외력이 그네라는 진동자에 작용하는 상황이므로, parametric resonance를 예상할 수 있으며 단진동과는 달리 $\omega_p = 2\omega_0$ 근방에서 공진이 발생한다. 둘째, 통상적인 상황에서 그네의 최저점($\theta = 0$)은 역학적으로 불안정하므로, 어린아이라도 다른 사람의 도움 없이 혼자 힘으로 그네 진폭을 키울 수 있다. 마지막으로, 내려올 때 앉고 올라갈 때 일어서는 step pumping이 그네의 진폭을 가장 빨리 증가시키는 optimal pumping으로 여겨질 수 있다. 그런데 이 방법이 미분 방정식도 모르는 어린아이조차 알고 있는 통상적인 그네타기 방식과 유사하다는 것은 주목할 만한 일이라고 할 수 있겠다. 한편, 그네타기와 관련된 내용은 대학 고전역학 수준의 강의에서 참고 자료로 활용될 수 있을 것으로 보인다.

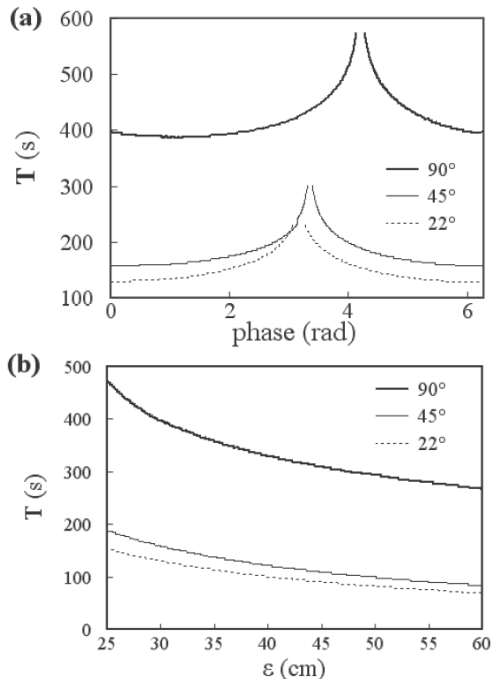


그림 5. Step pumping의 경우, (a) $\epsilon = 0.3$ m일 때 소요시간과 위상의 관계, (b) 소요시간과 진폭 $\epsilon/2$ 의 관계.