



BÀI 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ĐỊNH THỨC

§2: Định Thức

2.1 Mở đầu

- Xét hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Theo phương pháp Cramer ta có công thức nghiệm sau:

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}, (D \neq 0)$$

“Định thức” cấp 2

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}; D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}; D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

§2: Định Thức

Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Ta có thể định nghĩa: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ?$

§2: Định Thức

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ? \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = ?$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = ?$$

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D};$$

$$z = \frac{D_z}{D}, \quad (D \neq 0)$$

§2: Định Thức

■ Định thức cấp 2:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

■ Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 5.3 = -3.$$

§2: Định Thức

■ Định thức cấp 3: (Quy tắc hình sao)

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

§2: Định Thức

■ Ví dụ: Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -108$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = [2.4.(-2) + 1.0.3 + 5.(-1).6] - [5.4.3 + 2.0.6 + 1.(-1).(-2)]$$

$$= [-16 + 0 - 30] - [60 + 0 + 2] = -108$$

§2: Định Thức

■ Bài tập: Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -55$$

§2: Định Thức

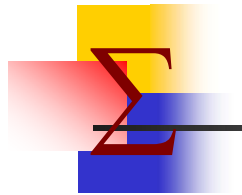
■ Ví dụ: Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 5) - (3 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5) \\
 = (24 + 6 + 30) - (36 + 24 + 5) = 60 - 65 = -5$$

§2: Định Thức

■ Bài tập: Tính

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = [3.(-2).7 + 6.1.0 + 4.5.(-1)] \\ - [4.(-2).6 + 7.1.5 + 3.0.(-1)] \\ = -62 + 13 = -49$$



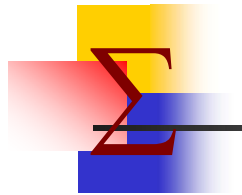
§2: Định Thức

2.2 Định nghĩa

2.2.1 Đ/n1: Cho ma trận $A=[a_{ij}]$ vuông cấp n . Phần phụ đại số của a_{ij} , kí hiệu là A_{ij} , được xác định như sau

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

trong đó M_{ij} là ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i , cột j .



§2: Định Thức

■ **Ví dụ:** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11}) = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tính

$$A_{21} =$$

$$A_{23} =$$

$$A_{33} =$$

§2: Định Thức

2.2.2 Đ/n 2.

Cho ma trận vuông cấp n $A = [a_{ij}]$

Định thức của A là một số được kí hiệu là $\det A$,
hay

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n=1$ thì $|[a_{11}]| = a_{11}$.

§2: Định Thức

- Nếu $n=1$ thì $||[a_{11}]\| = a_{11}$.
- Nếu $n>1$ thì

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & * & & \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

(khai triển theo hàng 1)

- Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n .

§2: Định Thức

■ **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{i=1}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 1 \cdot (-6) + 4 \cdot (-3) + (-3) \cdot 36$$

$$= -126$$

§2: Định Thức

2.3. Tính chất của định thức

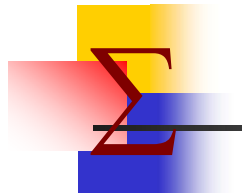
(i) $\det A^t = \det A$.

Hq: Một mệnh đề về định thức nếu đã đúng cho hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

Do đó, trong các tính chất sau đây ta chỉ phát biểu cho “hàng”.

■ **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$



§2: Định Thức

(ii) Nếu đổi chỗ hai hàng bất kì của định thức thì định thức đổi dấu

■ Ví dụ:

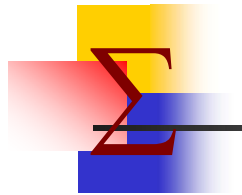
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ x & y & z \end{vmatrix} \stackrel{h1 \leftrightarrow h3}{=} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ * & * & * \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

§2: Định Thức

Hq. Khi tính định thức ta có thể khai triển theo hàng và cột bất kì.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{j=4}{=} a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$= 0 \cdot A_{14} + 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{34} + (-2)(-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 86$$



§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{i=4}{=} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 6(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

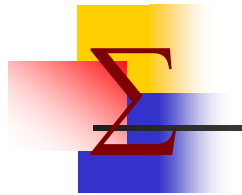
$$= (24 - 5) - 6(-3 - 26)$$

$$= 19 + 174 = 193$$

§2: Định Thức

- **Bài Tập:** Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 102$$



§2: Định Thức

(iii) Nếu các phần tử của một hàng nào đó của định thức có dạng tổng của 2 số hạng thì ta có thể viết định thức thành tổng của 2 định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

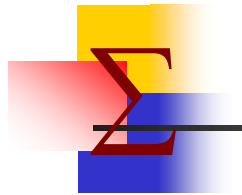
(các phần tử còn lại giữ nguyên)



§2: Định Thức

■ Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a+b & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & d \end{vmatrix}$$



§2: Định Thức

(iv) Nếu nhân một hàng nào đó của định thức với một số λ thì được định thức mới bằng λ lần định thức cũ.

Hq: (1) Nếu các phần tử của một hàng có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số đó ra ngoài dấu định thức.

$$(2) \det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \lambda \in \mathbb{R}.$$

■ **Ví dụ:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; 2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^2 \det(A).$$

§2: Định Thức

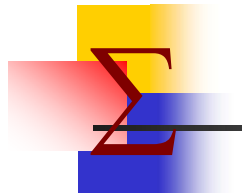
(3) Nếu A có một hàng bằng không thì định thức của nó bằng không.

(4) Nếu A có hai hàng bằng nhau hay tỉ lệ với nhau thì định thức của nó bằng không.

■ Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$\det(A) = \det(B) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = -\det(A).$$



§2: Định Thức

(v) Nếu thêm vào một hàng của định thức bội λ của hàng khác thì định thức không đổi.

■ Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix} \xrightarrow{h2+(-4)h1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

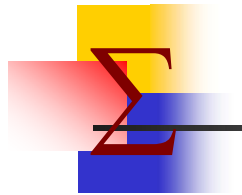
§2: Định Thức

(vi) Định thức của ma trận chéo bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

■ Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{i=1}{=} a_{11} A_{11} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{i=1}{=} 2 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 1$$

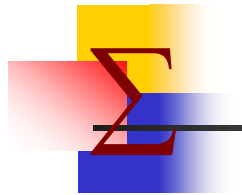


§2: Định Thức

- Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

■ Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.3.2.5 = 30$$



§2: Định Thức

(vii) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n . Khi đó

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Cho 2 ma trận

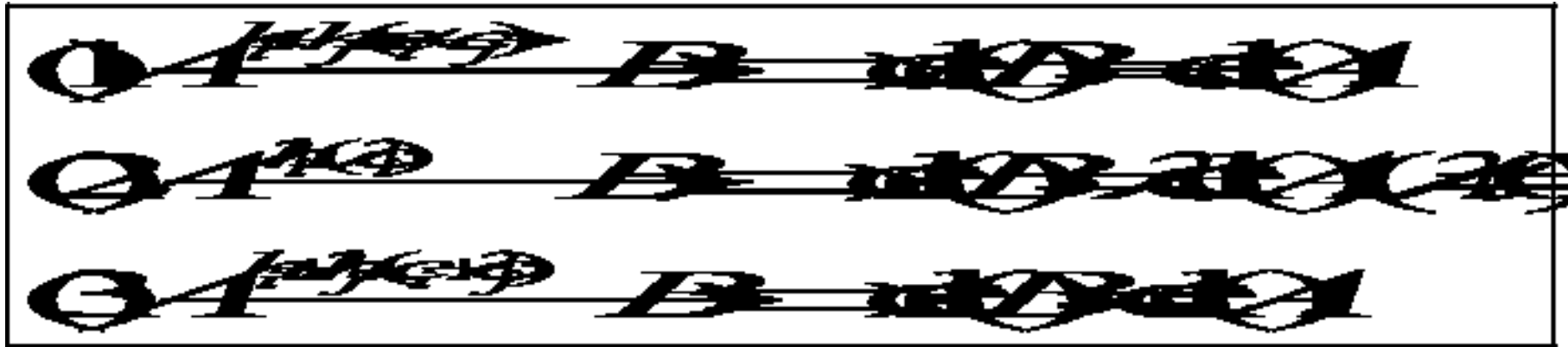
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 8 & 31 \\ 9 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5; \det(B) = -3$$

$$\det(AB) = -15 = 5 \cdot (-3) = \det(A) \cdot \det(B)$$

§2: Định Thức

2.4 Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp



§2: Định Thức

■ Ví dụ 1: Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{h_2 - 2h_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} h_3 + h_1 \\ = \\ h_4 - 3h_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{j=1} = a_{11} A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

§2: Định Thức

■ Ví dụ 2: Tính định thức

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 + 2h_1 \\ h_4 - 4h_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 58$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ 3:** Tính định thức cấp n sau

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \stackrel{h_2 - h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

- Tiếp tục hàng 3 trừ hàng 1, hàng 4 trừ hàng 1, ...

§2: Định Thức

■ Ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$