

BỘ MÔN DUYỆT
Chủ nhiệm Bộ môn

BÀI GIẢNG CHI TIẾT
(Dùng cho 75 tiết giảng)

Thay mặt nhóm
môn học

Học phần: GIẢI TÍCH II

Nhóm môn học: Giải tích

Bộ môn: Toán

Tô Văn Ban

Khoa: Công nghệ Thông tin

Tô Văn Ban

Chủ biên: PGS S Tô Văn Ban

Thành viên: TS Tạ Ngọc Ánh

TS Hy Đức Mạnh

ThS Nguyễn Văn Hồng

ThS Nguyễn Hồng Nam

ThS Bùi Văn Định

Thông tin về nhóm môn học

TT	Họ tên giáo viên	Học hàm	Học vị
1	Tô Văn Ban	PGS	TS
2	Nguyễn Xuân Viên	PGS	TS
3	Nguyễn Đức Nụ	Giảng viên chính	TS
4	Vũ Thanh Hà	Giảng viên chính	TS
5	Tạ Ngọc Ánh	Giảng viên	TS
6	Bùi Văn Định	Giảng viên	ThS
7	Bùi Hoàng Yến	Giảng viên	ThS
8	Nguyễn Thị Thanh Hà	Giảng viên chính	ThS
9	Nguyễn Văn Hồng	Giảng viên	ThS
10	Nguyễn Thu Hương	Giảng viên	ThS
11	Đào Trọng Quyết	Giảng viên	ThS
12	Nguyễn Hồng Nam	Giảng viên	ThS

Địa điểm làm việc: Bộ Môn Toán, P1408, Nhà A1 (Gần đường HQ Việt)

Điện thoại, email: 069 515 330, bomontoan_hvktqs@yahoo.com

Bài giảng 1: Hàm số nhiều biến số

Chương, mục: 1

Tiết thứ: 1- 5

Tuần thứ: 1

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm sơ lược về Học phần, các quy định chung, các chính sách của giáo viên, các địa chỉ và thông tin cần thiết, bầu lớp trưởng Học phần.
- Nắm được các khái niệm căn bản về các loại tập mở, đóng, miền trong \mathbb{R}^n . Một số kết quả căn bản về giới hạn, liên tục của hàm nhiều biến, tương đồng với những khái niệm này ở hàm 1 biến.

- Nắm được khái niệm và thuần thực tính đạo hàm riêng, vi phân của hàm nhiều biến.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Giới thiệu về môn học và các quy định

Chương 1: Hàm số nhiều biến số

§1.1 Giới hạn – Liên tục

§1.2 Đạo hàm – Vi phân

Giới thiệu học phần GIẢI TÍCH II (15 phút)

- Để thấy bản chất của hiện tượng cũng như mở rộng khả năng đi vào cuộc sống của toán học chúng ta cần nghiên cứu giải tích trong phạm vi nhiều biến.

- Với hàm nhiều biến, nhiều khái niệm và kết quả với hàm một biến không còn bảo toàn mà có những biến thể tinh vi, uyển chuyển và hứa hẹn những ứng dụng vô cùng rộng lớn. GTII - một sự tiếp tục Giải tích I - hướng chủ yếu vào phép tính vi phân, phép tính tích phân của hàm nhiều biến.

- Chúng ta sẽ thấy rất nhiều ví dụ, bài tập liên quan đến thực tiễn cho thấy mảng ứng dụng vô tiền khoáng hậu của lý thuyết, đảm bảo sự trường tồn của toán học.

- Các khái niệm, định lý, tính chất ... thường được phát biểu bằng lời và kết hợp với công thức...

Chính sách riêng

Mỗi lần lên bảng chữa bài tập đúng được ghi nhận, cộng vào điểm quá trình 0.5 điểm. Chữa bài tập sai không bị trừ điểm.

Sự hiện diện trên lớp: Không đi học ≥ 5 buổi sẽ không được thi.

Tài liệu tham khảo

TT	Tên tài liệu	Tác giả	Nxb	Năm xb
1	Giáo trình Giải tích II	Tô Văn Ban	Nxb Giáo dục	2012
2	Giải tích II & III	Trần Bình	KH và KT	2007
3	Toán học cao cấp (T3-2)	Nguyễn Đình Trí và ...	Giáo dục	2007
4	Bài tập Giải sẵn giải tích 2, 3	Trần Bình	KH và KT	2007
5	Calculus: A	R. Adams	Addison Wesley	1991

	Complete Course			
6	Calculus (Early Transcendentals),	Jon Rogawski	W.H.Freeman and Co.	2007

Đề Bài tập về nhà GTII (trong tài liệu [1])

Ví dụ: Tự đọc; Bài tập: Chữa trên lớp

CHƯƠNG I					
Bổ trợ:	3(b);	4(a, b, d);	5(a);	8(c,d);	10(a); 12(b);
	15;	18(b);	21(b);	22;	23(a); 24(a);
	30(a);	34(c, g);	35(d, e);	37(a);	39(c); 41(a, e).
Chính:	6(a, b, c, d, e);	13(b, c);	24(c);	26(d);	33; 34(f);
	35(i, j, k, l);	36(e, f, g, h, i, j, k);	37(c, d, e, f);	40(d, e, f);	
	VD 1.17;	VD 1.26A;	VD 1.27;	VD 1.28;	
	VD 1.29 (i, ii);	VD 1.30;	VD 1.37;	VD 1.39	
CHƯƠNG II					
Bổ trợ:	1(b, d);	2(b, c);	3(b);	4(a, b);	5(a, c, d); 6(b);
	7(d, c);	8(a);	9(d, f);	10(c);	15; 17;
	19(b);	20(a, c);	24;	27(a).	
Chính:	1(e);	5(f);	6(a);	7(e, f);	8(b, d); 9(g); 10(f, g, h);
	14(c, d);	19(c);	20(f);	21(c, d);	22(b, c, e); 23(a, b).
	VD 2.11;	VD 2.13;	VD2.25 ;	VD 2.26;	VD 2.27;
	VD 2.33;	VD 2.34;	VD2.37 ;	VD 2.40	
CHƯƠNG III					
Bổ trợ:	1(d,e),	2,	4.	5(a) ,	11, 14(a), 15(a, c), 17(a),
	18(d),	19(a, d),	22(a, e),	26(c),	27(a); 29(a, b), 30.
Chính:	7;	8;	14(c);	16(c, d);	22(d); 24(c, d, e, f, h); 25.
	VD3.16 ;	VD3.23 ;	VD3.23 ;	VD3.25 ;	VD3. 26 ; VD3.27 ;
	VD3.28 ;	VD3. 29 ;	VD3.31 ;	VD3.32 ;	VD 3.33; VD3.34 .
CHƯƠNG IV					
Bổ trợ:	2(a);	3(a)	8;	10(e);	12(b); 15(b,c); 18(b);
	20(a);	21(d);	23(a);	24(b, e);	26(a, b, d); 28(a, b); 31(c).
Chính:	3(b);	10(b, c, d, e);	12(e, f, g);	13(b);	15(f, g); 18(c, d);
	19(a, b, c, d, e);	24(e);	26(f, h, i, j);	27(c, d,e);	
	28(d, e, f, g);	30(d, e, f);	31(b);	32;	33(a, b, c).
	VD 4. 34;	VD 4.35 ;	VD 4.36;	VD 4.48;	VD 4.49;
	VD 4.50;	VD 4.51 ;	VD 4.52;	VD 4.53;	VD 4.54((i), (ii)).

CẤU TRÚC ĐỀ THI, CÁCH THỨC CHO ĐIỂM

Câu số	Về phần	Số điểm
1	Lý thuyết	2.0
2	Chương 1: Hàm số nhiều biến số	2.0
3	Chương 2: Tích phân bội	2.0
4	Chương III: Tích phân đường, tích phân mặt	2.0
5	Chương 4: phương trình vi phân	2.0
Điểm bài thi		10đ

Điểm quá trình	10đ
Điểm chuyên cần	10đ
Tổng điểm = điểm chuyên cần x 10% + điểm quá trình x 20% + điểm bài thi x 70%	10đ

Hình thức thi: Thi viết

Bầu lớp trưởng lớp học phần. Kết quả:

Số điện thoại giáo viên:

Địa chỉ Email cần:

Webside cần:

Danh sách SV (Ít nhất 7 cột kiểm tra sĩ số)

Chương 1: HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§ 1.1. GIỚI HẠN - LIÊN TỤC

1.1.1. Tập hợp trong \mathbb{R}^n

a. Không gian \mathbb{R}^n

Xét V là tập hợp các bộ n số thực có thứ tự $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. (Hiện thời ta viết đậm các phần tử của V).

Trong V đưa vào phép cộng và phép nhân với vô hướng:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), x_i, y_i \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Khi đó V trở thành *không gian véc tơ* trên \mathbb{R} ; phần tử của V gọi là *véc tơ*, đôi khi gọi là điểm.

* **Tích vô hướng.** Tích vô hướng của hai véc tơ \mathbf{x} và \mathbf{y} là một số thực, ký hiệu là $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, (có tài liệu viết là $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$) xác định bởi:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

* **Không gian Euclide \mathbb{R}^n .** Không gian véc tơ V có trang bị tích vô hướng vừa nêu gọi là *không gian Euclide* n chiều, ký hiệu là \mathbb{R}^n .

Tích vô hướng nêu trên có các tính chất thông thường đã biết ở phổ thông.

Khi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ ta nói hai véc tơ \mathbf{x} và \mathbf{y} là *trực giao* với nhau, và viết $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

* **Khoảng cách.** Khoảng cách giữa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ và $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ký hiệu bởi $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, xác định theo công thức

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \quad (1.1)$$

Khoảng cách này còn gọi là khoảng cách Euclide, có các tính chất sau đây:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad : \quad \text{tính đối xứng}$$

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$: tính xác định dương

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$: bất đẳng thức tam giác

Trong \mathbb{R}^2 , điểm hay được ký hiệu là (x, y) , trong \mathbb{R}^3 là (x, y, z) .

Đồng nhất điểm M với bộ số (x, y, z) là toạ độ của nó trong một hệ toạ độ trục chuẩn; thay cho điểm M , ta viết (x, y, z) hay đầy đủ hơn $M(x, y, z)$. Khoảng cách (1.1) chính là khoảng cách thông thường.

Trong \mathbb{R}^2 : Điểm M có thể đồng nhất với toạ độ (x, y) của nó; thay cho điểm M ta viết (x, y) , hay đầy đủ hơn $M(x, y)$.

Trong phần còn lại của chương này các kết quả được trình bày chủ yếu trong \mathbb{R}^2 . Nhiều kết quả tương tự còn đúng cho \mathbb{R}^n .

b. Phân loại tập hợp trong \mathbb{R}^n

• *Lân cận.* Cho $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$; ε -lân cận của điểm \mathbf{a} (còn gọi là hình cầu mở tâm \mathbf{a} , bán kính ε), kí hiệu $U_\varepsilon(\mathbf{a})$, là tập hợp xác định bởi:

$$U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$

Điểm \mathbf{a} được gọi là *điểm trong* của tập hợp $E \subset \mathbb{R}^2$ nếu E chứa một hình cầu mở nào đó tâm \mathbf{a} : $\exists U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset E, (\varepsilon > 0)$. Đồng thời, tập E gọi là một *lân cận* của điểm \mathbf{a} .

• *Tập mở.* Tập hợp E được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm của E đều là điểm trong của nó.

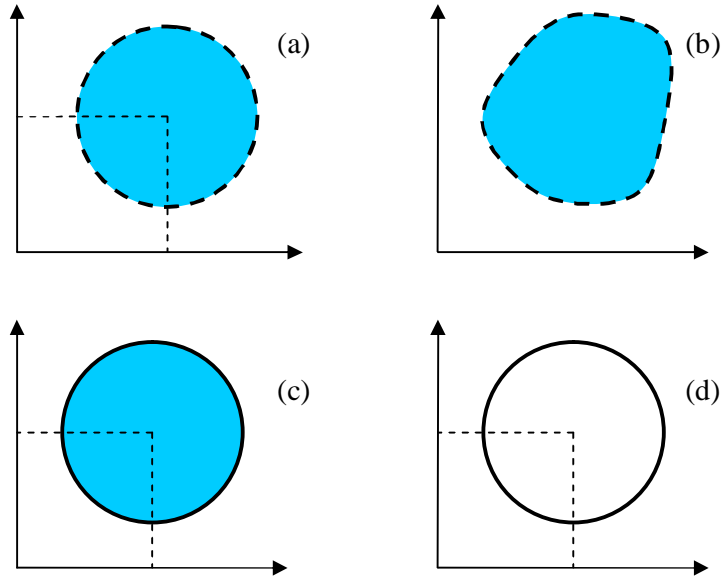
Dễ nhận thấy rằng, tập hợp $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ là tập mở.

• *Điểm biên.* Điểm \mathbf{x} gọi là *điểm biên* của E nếu trong một ε -lân cận bất kì của \mathbf{x} đều chứa ít nhất một điểm thuộc E và một điểm không thuộc E . Tập các điểm biên của E kí hiệu là $\partial(E)$, gọi là biên của E .

Rõ ràng, điểm trong của E nằm trong E ; điểm biên của E có thể thuộc E , có thể không thuộc E .

• *Tập đóng.* E được gọi là *tập đóng* nếu nó chứa mọi điểm biên của nó:

$$E \text{ đóng} \Leftrightarrow E = E \cup \partial(E).$$



Hình 1.1. (a) Hình cầu mở, (b) tập mở, (c) hình cầu đóng, (d) mặt cầu (tập đóng) trong \mathbb{R}^2

Chẳng hạn, các tập sau đây là đóng (xem Hình 1.1):

- + Hình cầu đóng tâm a , bán kính ε .
- + Mặt cầu đóng tâm a , bán kính ε .

• **Tập bị chặn.** Tập E được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hình cầu mở nào đó chứa nó.

- $\Leftrightarrow \exists$ hình cầu đóng nào đó chứa nó
- $\Leftrightarrow \exists$ hình cầu đóng tâm O chứa nó

• **Tập compact.** Tập đóng và bị chặn được gọi là *tập compact*.

• **Miền.** Mỗi tập mở là một *miền mở*.

Miền mở cùng với biên của nó gọi là *miền đóng*.

Miền mở, miền đóng gọi chung là *miền*.

Miền mà từ 2 điểm bất kỳ của nó có thể nối với nhau bởi một đường gãy khúc nằm hoàn toàn trong miền gọi là *miền liên thông*.

Sau đây, khi đã quen, ta không còn phải viết **chữ đậm** cho phần tử của \mathbb{R}^n nữa.

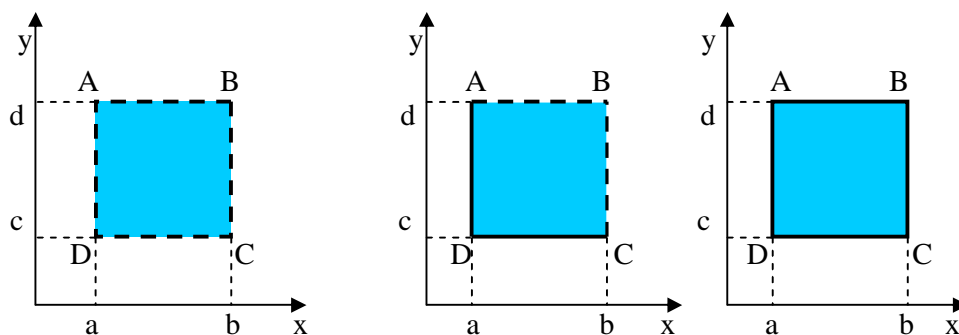
Ví dụ 1.1. Cho các tập hợp sau đây trong \mathbb{R}^2 (xem Hình 1.2):

$D_1 = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$: tập hợp mở (Không chứa biên)

$D_2 = \{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\}$: Không mở, không đóng

$D_3 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$: tập hợp đóng (chứa biên)

Người ta còn dùng ký hiệu tích Descartes để chỉ các hình chữ nhật đó: D_1 được ký hiệu bởi $(a, b) \times (c, d)$, ..., D_3 bởi $[a, b] \times [c, d]$. #



Hình 1.2. Hình chữ nhật trong \mathbb{R}^2

1.1.2. Hàm nhiều biến số

a. Định nghĩa. Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

được gọi là hàm số trên D .

D : tập xác định, f : hàm số; x : biến số (hay đối số).

Lưu ý rằng biến số có n thành phần, mỗi thành phần xem như một biến độc lập (cho nên hàm số trên \mathbb{R}^n hay được gọi là hàm nhiều biến).

b. Các phương pháp biểu diễn hàm số (✳)

Biểu diễn bằng biểu thức giải tích.

Biểu diễn bằng đồ thị

Sử dụng các đường (đồng) mức

Bảng dữ liệu.

1.1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến

a. Giới hạn của dãy điểm

Ta nói dãy điểm $\{u_n\} = \{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ hội tụ đến $u_0 = (x_0, y_0)$ nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_0) = 0. \quad (1.2)$$

Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, hay đơn giản $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ hoặc $u_n \rightarrow u_0$ (khi $n \rightarrow \infty$).

Giới hạn của dãy điểm tương đương với giới hạn của từng tọa độ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0. \quad (1.3)$$

* **Điểm giới hạn (điểm tụ).** Điểm a được gọi là **điểm giới hạn** của tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu có một dãy $\{u_n\}$ các phần tử khác a của D hội tụ đến a .

b. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa. Cho hàm số $f(u)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $a = (x_0, y_0)$ là một điểm giới hạn của D . Ta nói hàm $f(u)$ có **giới hạn** $\ell \in \mathbb{R}$ khi u dần đến a nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ sao cho } u \in D, 0 < d(u, u_0) < \delta \Rightarrow |f(u) - \ell| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Khi đó ta viết $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = \ell$ hay $f(u) \rightarrow \ell$ khi $u \rightarrow a$.

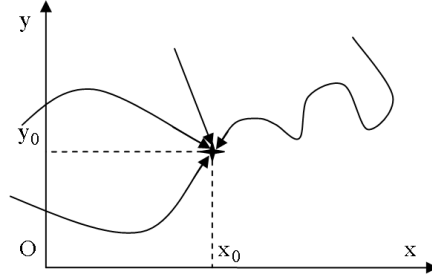
Để đầy đủ, ta còn viết

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad (\text{hay } f(x,y) \rightarrow \ell \text{ khi } (x,y) \rightarrow (x_0,y_0)) \quad (1.5)$$

Định lý 1.1. Hàm $f(u)$ có giới hạn ℓ khi u dần đến a khi và chỉ khi

$$\forall \{u_n\} \subset D; u_n \neq a; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell. \quad (1.6)$$

Hệ quả. Nếu $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = \ell$ thì với $u = (x,y)$ dần đến $a = (x_0, y_0)$ theo một đường cong tùy ý trong D , $f(u)$ dần đến ℓ .



Hình 1.5. Điểm dần đến (x_0, y_0) theo những đường khác nhau

Lưu ý. Các kết quả thông thường đối với giới hạn của hàm 1 biến như giới hạn của tổng, hiệu, định lý kẹp... vẫn còn đúng cho giới hạn của hàm nhiều biến.

Ví dụ 1.4. Tìm giới hạn

$$\text{i) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad \text{ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Giải. i) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \sin 1.$$

ii) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$. Ta có

$$0 \leq |f(x,y)| \leq x^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad (\text{khi } (x,y) \rightarrow (0,0)).$$

$$\text{Theo định lí kẹp, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|(x,y)| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Định nghĩa giới hạn vô hạn tương tự như với hàm một biến.

$$\text{Chẳng hạn } \frac{y}{x^2} \rightarrow +\infty \text{ khi } (x,y) \rightarrow (0,3);$$

$$\frac{e^{-x^2} + 1}{y^2 + z^2} \rightarrow +\infty \text{ khi } (x,y,z) \rightarrow (0,0,0). \quad \#$$

1.1.4. Sự liên tục của hàm số

Cho hàm số $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, trong đó D là tập tùy ý của \mathbb{R}^2 và $(x_0, y_0) \in D$ là điểm giới hạn của D . Ta nói $f(x,y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nếu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0). \quad (1.7)$$

Giả sử $a = (x_0, y_0) \in D$, $u = (x,y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

$$\text{Đặt } \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Khi đó hàm số $f(u)$ liên tục tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f = 0. \quad (1.8)$$

* Hàm $f(x,y)$ được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$.

Lưu ý. Các định lý về tổng, hiệu, tích, thương, lũy thừa, hợp hàm của các hàm liên tục, định nghĩa hàm sơ cấp và tính liên tục của chúng, các khái niệm và kết quả về sự liên tục đều đối với hàm một biến gần như vẫn còn bảo toàn cho trường hợp hàm nhiều biến. Chẳng hạn

Định lý 1.2. Hàm $f(x,y)$ liên tục trên tập đóng, giới nội D thì bị chặn trên đó và đạt được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất: $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ để

$$f(x_1, y_1) = m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y); \quad f(x_2, y_2) = M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y).$$

Định lý 1.3. Hàm $f(x,y)$ liên tục trên tập đóng, giới nội thì liên tục đều trên đó, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được số δ sao cho với $(x, y), (x', y') \in D$ mà $d((x, y), (x', y')) \leq \delta$ thì $|f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$.

Ví dụ 1.5. Cho hàm số $u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Rõ ràng hàm liên tục tại mỗi điểm $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ (vì là thương hai hàm liên tục, mẫu khác 0).

Tại $(x_0, y_0) = (0, 0)$, theo bất đẳng thức Cauchy.

$$0 \leq |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{2^\alpha (x^2 + y^2)} = \frac{(x^2 + y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha}.$$

Trường hợp 1: $\alpha > 1$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha} [d(u, 0)]^{(\alpha-1)/2} = 0 = f(0, 0).$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$.

Trường hợp 2: $\alpha \leq 1$. Xét $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ theo đường $y = x$.

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}} \rightarrow \infty (\neq 0) \text{ khi } x \rightarrow 0. \text{ Vậy } f(x,y) \text{ không}$$

liên tục tại $(0,0)$.

#

§ 1.2. ĐẠO HÀM - VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

Định nghĩa. Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$, lấy điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$. Cố định $y = y_0$ thì $f(x, y_0)$ là hàm một biến x . Nếu hàm này có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng* của hàm

$z = f(x, y)$ theo biến x (biến thứ nhất) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, kí hiệu bởi một trong các cách sau:

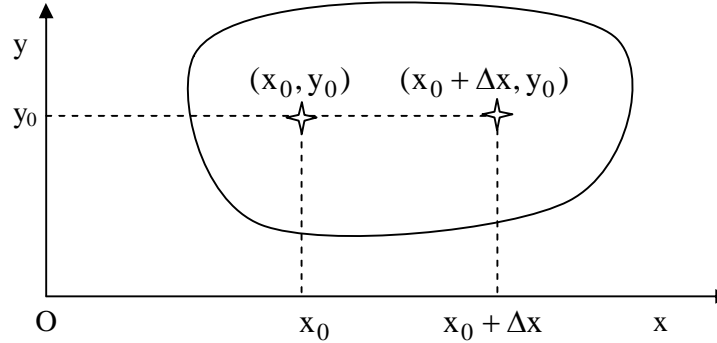
$$z'_x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0), \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Như vậy, cho Δx đủ nhỏ sao cho $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Đặt:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

gọi là *số gia riêng* của hàm số $z = f(x, y)$ đối với biến x tại (x_0, y_0) . Khi đó

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$



Hình 1.6. Cách lập số gia riêng của hàm số

Đạo hàm riêng theo biến y tại (x_0, y_0) , kí hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \text{ hay } \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

$n \geq 3$: định nghĩa tương tự.

Quy tắc. Khi tính đạo hàm riêng theo biến nào đó, ta chỉ việc coi các biến khác không đổi, rồi lấy đạo hàm theo biến đó như lấy đạo hàm với hàm một biến.

Ví dụ 1.7. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$\text{i. } z = x^y, (x > 0). \quad \text{ii. } z = \arctan \frac{x}{y}, (y \neq 0).$$

$$\text{Giải. i. } \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

$$\text{ii. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}. \quad \#$$

1.2.2. Vi phân của hàm nhiều biến

Định nghĩa

• Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong tập mở D . Trong D lấy các điểm (x_0, y_0) , $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Biểu thức

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

được gọi là *số gia toàn phần* của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) .

Nếu số gia Δf có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad (1.9)$$

trong đó A, B là những hằng số không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$ (chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0)), $\alpha = \alpha(x, y) \rightarrow 0, \beta = \beta(x, y) \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0$ và $\Delta y \rightarrow 0$ thì ta nói:

+ Hàm số $f(x, y)$ *khả vi* tại (x_0, y_0) ;

+ Biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ gọi là *vi phân toàn phần* của hàm z tại (x_0, y_0) (ứng với số gia $\Delta x, \Delta y$ của đối số x, y tương ứng), kí hiệu là $dz(x_0, y_0)$ hay $df(x_0, y_0)$.

Như vậy, $dz(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$.

* Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là *khả vi trên D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của D .

Tính chất. Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó.

CM: $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \rightarrow 0$ khi $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Vậy hàm liên tục tại (x_0, y_0) . □

Định lý 1.5. Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$.

(i) (Điều kiện cần để hàm khả vi). Nếu $f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0) thì tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$. Các hằng số A, B trong định nghĩa vi phân cho bởi $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$; nói cách khác,

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

(ii) (Điều kiện đủ để hàm khả vi). Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại lân cận của điểm (x_0, y_0) thì khả vi tại đó và

$$dz(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (1.10)$$

Chứng minh

(i) Từ giả thiết, $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Xét $y = y_0 = \text{const}$ thì $\Delta y = 0$ và $\Delta f = \Delta_x f = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Do đó:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha\Delta x}{\Delta x} = A.$$

Tương tự, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

(ii) Với $\Delta x, \Delta y$ đủ nhỏ thì

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức số gia giới nội cho hàm một biến dẫn đến

$$\Delta f = f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta y$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1; 0 < \theta_2 < 1$.

Vì f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) nên

$$\Delta f = [f'_x(x_0, y_0) + \alpha] \Delta x + [f'_y(x_0, y_0) + \beta] \Delta y$$

trong đó $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

$$\text{Vậy } \Delta f = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \beta \Delta y \quad (\text{đpcm}). \quad \square$$

Chú ý. Giống như trường hợp một biến, nếu x, y là biến độc lập thì $dx = \Delta x; dy = \Delta y$. Từ đó,

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy.$$

Hệ quả. Nếu $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục trong tập mở D thì

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy. \quad (1.11)$$

Ví dụ 1.8. Xét sự khả vi và tính vi phân $dz(x, y), dz(0, 1)$ (nếu có) của các hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, là những hàm liên tục trên \mathbb{R}^2 .

Vậy hàm số là khả vi trên \mathbb{R}^2 và $dz = 3[(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy]$.

$$dz(0, 1) = -3dx + 3dy = 3(-dx + dy). \quad \#$$

Chú ý. Đối với hàm nhiều biến, sự tồn tại các đạo hàm riêng chưa đảm bảo để hàm số khả vi. Xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.9. (tài liệu [1]) $\#$

Ứng dụng vi phân để tính gần đúng. Nếu đặt

$$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y \quad (\text{hay } \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0),$$

từ định nghĩa vi phân ta có

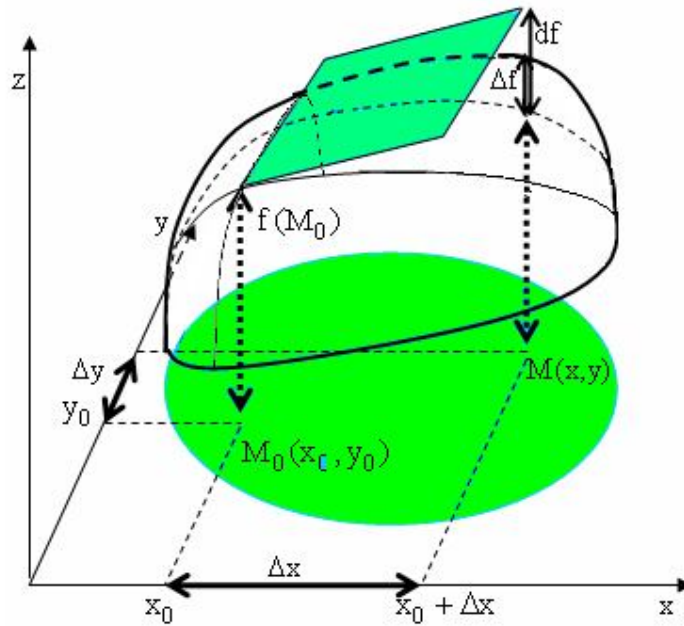
$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \\ &\approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = df(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dẫn đến công thức xấp xỉ

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &= (f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Công thức này cho phép tính giá trị gần đúng của hàm số dùng vi phân.

Về phải là biểu thức tuyến tính của các biến x, y nên công thức cũng có tên là *xấp xỉ tuyến tính* của hàm f tại lân cận điểm (x_0, y_0) .



Hình 1.7. Ý nghĩa hình học của vi phân

Giống như trường hợp một biến, khi áp dụng công thức (1.12) để tính giá trị xấp xỉ của biểu thức A nào đó chúng ta phải:

- + Xác định dạng hàm f ,
- + Xác định điểm (x_0, y_0) , ở đó dễ tính (hoặc có sẵn) $f(x_0, y_0)$, các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$,
- + Xác định các số gia $\Delta x, \Delta y$; các số gia này phải đủ bé.

Ví dụ 1.10. Tính xấp xỉ $A = \arctan \frac{1,02}{0,95}$.

Các bạn hãy trả lời câu hỏi “giả như?” $\Rightarrow (x_0, y_0)$

Giá trị lẻ thứ nhất $\rightarrow x$
 Giá trị lẻ thứ hai $\rightarrow y$ } \Rightarrow Dạng hàm $f(x, y)$

Giải. Xét hàm số $z = \arctan \frac{y}{x}$ tại lân cận điểm $(1, 1)$.

$$z'_x(1, 1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} \Big|_{(1, 1)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Big|_{(1, 1)} = -\frac{1}{2},$$

$$z'_y(1, 1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \Big|_{(1, 1)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{(1, 1)} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $A = z(1 - 0,05; 1 + 0,02) \approx z(1, 1) + (-1/2)(-0,05) + (1/2)(0,02)$

$$= \frac{\pi}{4} + 0,035 \approx 0,785 + 0,035 = 0,820. \text{ (Giá trị đúng } A = 0,8209). \quad \#$$

Công thức (1.12) được áp dụng hiệu quả để tính sai số của đại lượng đo.

b) Thảo luận	- Về tập mở, đóng, biên, bị chặn, compact, liên thông, miền mở, miền đóng, miền. - Sự giống, khác nhau của hàm 1 biến, nhiều biến.
c) Tự học	- Định nghĩa giới hạn hàm số, - Định nghĩa liên tục, liên tục đều - Định nghĩa vi phân theo biến x.
d) Bài tập chuẩn bị tối thiểu	Bài 6, (Chương I)
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Chú ý: Bài tập về nhà cho cả chương

CHƯƠNG I

Bổ trợ: 3(b); 4(a, b, d); 5(a); 8(c,d); 10(a); 12(b);
15; 18(b); 21(b); 22; 23(a); 24(a);
30(a); 34(c, g); 35(d, e); 37(a); 39(c); 41(a, e).

Chính: 6(a, b, c, d, e); 13(b, c); 24(c); 26(d); 33; 34(f);
35(i, j, k, l); 36(e, f, g, h, i, j, k); 37(c, d, e, f); 40(d, e, f);
VD 1.17; VD 1.26A; VD 1.27; VD 1.28;
VD 1.29 (i, ii); VD 1.30; VD 1.37; VD 1.39

Bài giảng 2: Hàm số nhiều biến số (tiếp)

Chương, mục: 1

Tiết thứ: 6-10

Tuần thứ: 2

Mục đích, yêu cầu:

- Kiểm tra kiến thức, rèn luyện kỹ năng tính Giới hạn và xét tính liên tục
- Nắm được khái niệm và biết cách tính ĐH hàm hợp, đạo hàm hàm ẩn, đạo hàm theo hướng, ý nghĩa ĐH theo hướng.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chữa bài tập phần Giới hạn – Liên tục

§1.2 Đạo hàm – Vi phân

ĐS 6. a) Continuous , discontinuous, C; b) D; c) C; d) D; e) C.

§ 1.2. ĐẠO HÀM - VI PHÂN

1.2.3. Đạo hàm riêng của hàm hợp

$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), (x, y) \in D.$

Tính chất. Hợp của các hàm liên tục là hàm liên tục.

Định lý 1.6. Giả sử hàm $f(u, v)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong

Δ , các hàm $u(x, y), v(x, y)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục trong

D. Khi đó trong D tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ và

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Để tiện kí hiệu, ta không phân biệt f và F khi tính đạo hàm riêng, vậy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Xem CM trong [1].

Chú ý. i) Trường hợp $z = f(u(x, y))$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df(u(x,y))}{du} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df(u(x,y))}{du} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \quad (1.14)$$

ii) Trường hợp $z = f(x, y)$, $y = y(x) \Rightarrow z = f(x, y(x))$ (hàm một biến) thì

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (1.15)$$

iii) Trường hợp $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t) \Rightarrow z = f(x(t), y(t))$ thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (1.16)$$

iii) Trường hợp $z = f(u, v, w)$ thì $f = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$. Lúc đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

iv) Cho phép đổi biến $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ biến mỗi điểm $(x, y) \in D$ thành điểm

$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \Delta$, ma trận

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận Jacobi của phép đổi biến $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Định thức của ma trận J gọi là định thức Jacobi hay Jacobian của phép đổi biến, ký hiệu là $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Nhận xét ký hiệu: Các biến tham gia ở tử: Chỉ hàm số

Các biến tham gia ở mẫu: Chỉ đối số

Ví dụ 1.12. Tính đạo hàm của hàm số hợp

i) $z = \ln(u^2 + v^2)$ với $u = xy$, $v = x/y$; ii) $z = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$.

Giải. i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{y} = \dots = \frac{2}{x};$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v^2} x + \frac{2v}{u^2 + v^2} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \dots = \frac{2(y^4 - 1)}{y(y^4 + 1)}.$$

ii) Thực ra, khi đạo hàm ta không cần viết ra các hàm trung gian u, v, w, \dots , nên viết trực tiếp theo các biến cuối cùng $x, y, z \dots$ #

Sự bất biến dạng của vi phân

Xét $z = f(u, v)$, u, v là hai biến độc lập. Khi đó

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (*)$$

Vẫn xét $z = f(u, v)$ nhưng với u, v là biến phụ thuộc:

$$u = u(x, y), v = v(x, y).$$

$\Rightarrow z = f(u(x, y), v(x, y))$. Áp dụng (*):

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Từ chỗ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \dots$, thay vào được

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \end{aligned} \quad (**)$$

Như vậy công thức (**) cùng dạng với (*).

Ta nói: Vi phân cấp một bất biến dạng (có cùng dạng (*) dù là biến độc lập hay biến phụ thuộc).

Áp dụng.

Nếu $u = u(x, y), v = v(x, y)$ là các hàm khả vi thì

$$\begin{aligned} d(u \pm v) &= du \pm dv; & d(uv) &= u dv \pm v du; \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2}; & df(u) &= f'(u) du. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Các công thức này đúng cho u, v là biến độc lập nên đúng cho u, v là biến phụ thuộc.

Ví dụ 1.13. Tính vi phân của các hàm số sau

$$\text{i) } z = \arcsin \frac{y^2}{x}; \quad \text{ii) } z = \arctan(xy^2).$$

Giải.

$$\text{i) } dz = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{x}\right)^2}} d\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - y^4}} \frac{2xy dy - y^2 dx}{x^2} = \frac{y(-y dx + 2x dy)}{|x| \sqrt{x^2 - y^4}}.$$

$$\text{ii) } dz = \frac{1}{1+(xy^2)^2} d(xy^2) = \frac{1}{1+x^2y^4} (y^2 dx + 2xy dy).$$

1.2.4. Đạo hàm hàm số ẩn

a. Khái niệm (*). Cho trước một hệ thức giữa hai biến x và y :

$$F(x, y) = 0. \quad (1.20)$$

Nếu với mọi giá trị x_0 trong một khoảng nào đó, có một (hoặc một số) giá trị y_0 sao cho

$$F(x_0, y_0) = 0$$

thì ta nói rằng hệ thức (1.20) xác định một (hoặc một số) *hàm ẩn* y theo x : $y = y(x)$ trong khoảng ấy.

Vậy hàm số $y = f(x)$ được xác định một cách ẩn bởi hệ thức (1.20) nếu khi thế $y = f(x)$ vào (1.20), ta được đồng nhất thức: $f(x, y(x)) = 0$.

$$\text{Ví dụ. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \Rightarrow y = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ và } y = -\frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$x \in (-a, a)$. Ta nói hệ thức $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ xác định 2 hàm ẩn trong khoảng $(-a, a)$.

Không phải lúc nào cũng tìm được biểu thức tường minh. Chẳng hạn, ta không thể giải x qua y hay y qua x từ biểu thức $x^y = y^x + 1$ ($x, y > 0$), mặc dầu tồn tại mối quan hệ hàm (ẩn) từ ràng buộc này.

Hàm ẩn vừa nói từ 1 ràng buộc, ràng buộc có 2 biến.

Mở rộng: Từ 1 (2, 3...) ràng buộc, các ràng buộc có nhiều biến. Chẳng hạn

* Hệ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Nếu từ đây có thể giải ra được một (hoặc một số) cặp hàm

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \end{cases} \quad (1.23)$$

xác định trong một miền $G \subset \mathbb{R}^2$ nào đó, sao cho khi thay vào (1.22) ta nhận được những đồng nhất thức, thì ta nói (1.22) xác định một (hoặc một số) cặp hàm ẩn u, v của 3 biến x, y, z .

Nói chung, khi n biến độc lập được liên kết với nhau bởi m ràng buộc ($0 < m < n$), thì có nhiều nhất m biến trong chúng là hàm của các biến còn lại.

b. Cách tính đạo hàm hàm ẩn

Định lý 1.7. Định lý tồn tại và khả vi của hàm ẩn: Xem [1]

Giả sử các điều kiện của Định lý 1.7 thỏa mãn, thay $y = f(x)$ vào (1.20) thì $F(x, y(x)) = 0$ với mọi x đủ gần x_0 . Lấy đạo hàm 2 vế theo x :

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))},$$

hay viết gọn:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad \boxed{\text{CÁCH NHỚ!}} \quad (1.24)$$

Định lý 1.8. Cho $F(x,y,z)$ là hàm ba biến xác định trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in G$ sao cho $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Giả sử rằng hàm F liên tục và có các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục tại lân cận (x_0, y_0, z_0) . Hơn nữa, giả sử rằng $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại hàm ẩn $z = z(x, y)$ tại một lân cận của (x_0, y_0) , liên tục, khả vi liên tục tại lân cận (x_0, y_0) và $z(x_0, y_0) = z_0$.

Để tính các đạo hàm riêng của $z(x, y)$, ta thay $z = z(x, y)$ vào (1.21):

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \text{ với mọi } (x, y) \text{ trong lân cận } (x_0, y_0).$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x , rồi theo biến y ta được

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Do $F'_z \neq 0$, điều này dẫn đến

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad \boxed{\text{CÁCH NHỚ!}} \quad (1.25)$$

Ví dụ 1.14. Tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $F(x, y, z) = e^z + xy + x^2 + z^3 - 1 = 0$.

$$\text{Giải. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y + 2x}{e^z + 3z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x}{e^z + 3z}. \quad \#$$

1.2.5. Đạo hàm theo hướng - Gradient

Bổ đề. $\vec{\ell}$ là véc tơ đơn vị $\Leftrightarrow \vec{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,

(α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi $\vec{\ell}$ với các tia Ox, Oy, Oz)

Định nghĩa. Cho hàm $u(x, y, z)$ xác định trong tập mở $D \subset \mathbb{R}^3$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, $\vec{\ell} = (a, b, c)$ là véc tơ đơn vị. Nếu hàm một biến

$$F(t) = u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

có đạo hàm tại $t=0$ thì $F'(0)$ được gọi là *đạo hàm theo hướng* $\vec{\ell}$ của hàm $u(x, y, z)$ tại M_0 , kí hiệu là $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{\ell}}$ (hay $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}}$).

Bây giờ lấy $\vec{\ell} = \vec{i} = (1, 0, 0)$ là véc tơ đơn vị của trục Ox thì $F(t) = u(x_0 + t, y_0, z_0)$, $F'(0) = u'_x(x_0, y_0, z_0)$. Vậy:

Đạo hàm theo hướng \vec{i} bằng đạo hàm riêng theo biến x: $\frac{\partial u}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Tương tự, $\frac{\partial u}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

* Lưu ý rằng $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow M \rightarrow M_0$ theo hướng $\vec{\ell}$. Vậy, đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ biểu thị tốc độ biến thiên của hàm số theo hướng đó.

Định nghĩa. Nếu $\vec{\ell}$ không là véc tơ đơn vị ($|\vec{\ell}| \neq 1$), gọi $\vec{\ell}_0 = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}$ là véc tơ đơn vị của $\vec{\ell}$; đặt $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}_0}$.

Chúng ta có thể tự hiểu đạo hàm theo hướng trong \mathbb{R}^2 .

Định lý 1.10. Nếu hàm số $u = u(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại đó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{\ell}$ và

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.29)$$

trong đó α, β, γ là góc tạo bởi $\vec{\ell}$ với các trục Ox, Oy, Oz.

Chứng minh. Vì $u(x, y, z)$ khả vi tại M_0 nên

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(0)}{t} &= \frac{1}{t} [u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)] \\ &= \frac{1}{t} [u'_x(M_0) t \cos \alpha + u'_y(M_0) t \cos \beta + u'_z(M_0) t \cos \gamma \\ &\quad + P t \cos \alpha + Q t \cos \beta + R t \cos \gamma] \end{aligned}$$

trong đó $P, Q, R \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow 0$.

Qua giới hạn khi $t \rightarrow 0$ ta được đpcm. □

Hệ quả. $\frac{\partial u}{\partial (-\vec{\ell})} = -\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$.

*** Gradient**

Định nghĩa. Gradient của hàm u tại M_0 là véc tơ, ký hiệu bởi $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)$, xác định như sau

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right) \quad (1.30)$$

(Giả sử các ĐHR tồn tại)

Như vậy: $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k}$.

Hệ quả. Cho $u(x, y, z)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} &= \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{\ell}; \\ \text{(ii)} \quad -\left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| &\leq \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} \leq \left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right|. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Chứng minh. $\vec{\ell} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, (i) trực tiếp suy ra từ (1.29).

Ta nhận được (ii) từ chỗ

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{\ell} = \left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| \left| \vec{\ell} \right| \cos \left(\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0), \vec{\ell} \right). \quad \square$$

Hệ quả. Cho u là hàm khả vi tại M_0 . Giá trị cực đại của đạo hàm theo hướng $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}}$ là

$$\left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2},$$

xảy ra khi $\vec{\ell}$ cùng chiều với $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)$.

$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)$ là hướng mà theo đó, tại M_0 hàm số biến thiên nhanh nhất:

+ Theo hướng $\overrightarrow{\text{grad}} u$: Hàm tăng nhanh nhất;

+ Theo hướng $-\overrightarrow{\text{grad}} u$: Hàm giảm nhanh nhất.

Nếu $u(x, y, z)$ là nhiệt độ của chất điểm $M(x, y, z)$ thì:

Khi di chuyển theo hướng $\overrightarrow{\text{grad}} u$, chất điểm đến chỗ ấm hơn nhanh nhất;

Theo hướng ngược lại, sẽ đến chỗ lạnh hơn nhanh nhất.

Ví dụ 1.15. Cho hàm số $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$; tính $\overrightarrow{\text{grad}} u$ và $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ tại $M_0(1, 2, -1)$ biết $\vec{\ell}$ là véc tơ đơn vị của $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1 = (2, 0, 1)$.

$$\text{Giải.} \quad \begin{cases} u'_x = 3x^2 + 3yz \\ u'_y = 3y^2 + 3zx \\ u'_z = 3z^2 + 3xy \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} u = 3(x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy).$$

$$+ \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = 3(-1, 3, 3).$$

$$+ \overrightarrow{M_0M_1} = (1, -2, 2) \Rightarrow \vec{\ell} = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\left| \overrightarrow{M_0M_1} \right|} = \frac{(1, -2, 2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = \vec{\ell} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = 3 \left[-1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 3 \cdot \frac{2}{3} \right] = -1.$$

$$\text{Suy ra } \left| \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} \right| \leq \left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| \left| \vec{\ell} \right| = \left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| = 3\sqrt{19}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{\ell} = \pm \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)$.

#

Chữa bài tập (1 tiết) 13(b, c); 24(c); 26(d); 33

b) Thảo luận	<ul style="list-style-type: none"> - Sự giống, khác nhau của $\Delta x \leftrightarrow dx$; $\Delta y \leftrightarrow dy$ - Nhắc lại các công thức vi phân hàm ẩn - Đưa ra 1 hàm mà bạn thích, tính $\overline{\text{grad}}$ tại điểm tổng quát, tại điểm đặc biệt
c) Tự học	- Chuẩn bị cho bài mới: Đạo hàm, vi phân cấp cao, CT Taylor.
d) Bài tập chuẩn bị tối thiểu	Các bài tập còn lại
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 3: Hàm số nhiều biến số (tiếp)

Chương, mục: 1

Tiết thứ: 11-15

Tuần thứ: 3

Mục đích, yêu cầu:

- Kiểm tra kiến thức, rèn luyện kỹ năng tính đạo hàm riêng, vi phân, đạo hàm hàm ẩn, đạo hàm theo hướng.
- Nắm được ĐL Schwarz về đối thứ tự lấy ĐH khi tính ĐH riêng cấp cao
- Thuần thục tính vi phân cấp 2 của hàm 2, 3 biến.
- Nắm được QT tìm cực trị của hàm 2, 3 biến. Xử lý trong trường hợp đặc biệt
- Nắm chắc phương pháp nhân tử Lagrange để tìm CT điều kiện
- Tìm được GTLN, GTNN của một số hàm đơn giản

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chữa bài tập phần Đạo hàm – Vi phân

§1.2 Đạo hàm – Vi phân

§1.3 Cực trị

§1.4 Giá trị LN, NN

§ 1.2. ĐẠO HÀM - VI PHÂN

1.2.6. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa. Giả sử $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ tồn tại trong tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Như vậy, các đạo hàm riêng cấp một là những hàm số.

Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một, nếu tồn tại, gọi là *đạo hàm riêng cấp hai*. Có 4 đạo hàm riêng cấp hai:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).\end{aligned}$$

Cứ thế ta định nghĩa cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn.

Ví dụ 1.16. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $z = x^2 \ln(x + y)$.

$$z'_x = 2x \ln(x+y) + \frac{x^2}{x+y}, \quad z'_y = \frac{x^2}{x+y}.$$

$$z''_{xx} = 2 \ln(x+y) + \frac{3x^2}{(x+y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{x(x-2y)}{(x+y)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}. \quad \#$$

Định lý 1.11 (Schwarz). Nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) tồn tại các đạo hàm riêng hỗn hợp $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại (x_0, y_0) thì chúng bằng nhau tại (x_0, y_0) :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (1.32)$$

Như vậy, với các điều kiện của định lý, đạo hàm riêng hỗn hợp không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm. Định lý còn đúng cho trường hợp số biến $n \geq 3$ cũng như cấp các đạo hàm riêng hỗn hợp ≥ 3 .

Vì phân cấp cao. Giả sử ta đã tính được vi phân cấp một $df = f'_x dx + f'_y dy$.

Vi phân của df - khi coi dx, dy là những hằng số - nếu tồn tại, được gọi là *vi phân cấp hai* của z , kí hiệu d^2f :

$$d^2f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy). \quad (1.33)$$

Cứ như vậy, ta định nghĩa vi phân cấp cao hơn

Công thức tính. Khi x, y là những biến độc lập, các số gia $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ không phụ thuộc vào x, y . Giả sử tồn tại d^2f thì

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{xx} (dx)^2 + (f''_{yx} + f''_{xy}) dx dy + f''_{yy} (dy)^2. \end{aligned}$$

Giả sử f''_{xy}, f''_{yx} liên tục, khi đó chúng bằng nhau. Vậy

$$d^2f = f''_{xx} (dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2. \quad (1.34)$$

Công thức tương tự

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f \quad (1.35)$$

Tương tự

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f. \quad (1.36)$$

Xảy ra công thức tương tự cho hàm nhiều biến hơn,

$$\begin{aligned} d^2f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Nếu x, y không là biến độc lập thì giống trường hợp một biến, bất biến dạng không còn đối với vi phân cấp cao.

Ví dụ 1.17. Cho z là hàm của x, y xác định từ $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$. Tính dz, d^2z .

Giải. Có thể tính các đạo hàm riêng rồi thay vào công thức tính vi phân. Song cách sau đơn giản hơn. Giả sử $yz > 0$, vi phân 2 vế phương trình đã cho, dùng (1.19) thu được:

$$\begin{aligned}\frac{zdx - xdz}{z^2} &= \frac{y}{z} \left(\frac{ydz - zdy}{y^2} \right) \\ \Leftrightarrow yzdx - x y dz &= yzdz - z^2 dy = 0 \\ \Rightarrow dz &= \frac{z(ydx + zdy)}{y(x + z)} \quad (yz > 0; x \neq -z) \quad (*)\end{aligned}$$

Vi phân hai vế (*) rồi rút gọn dẫn đến:

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x + z)^3}. \quad \#$$

1.2.7. Công thức Taylor

Định lý 1.12. Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n+1$ trong một ε -lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Giả sử $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng thuộc ε -lân cận đó. Khi đó xảy ra đẳng thức

$$\begin{aligned}f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + d^1f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \\ &\quad (0 < \theta < 1).\end{aligned} \quad (1.37)$$

Khi dùng lũy thừa trung, ta có thể viết lại (1.37) dưới dạng

$$\begin{aligned}f(M) &= f(M_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(M_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(M_1) \\ &\quad (M_1 \text{ thuộc đoạn } M_0M_1).\end{aligned} \quad (1.38)$$

hay viết phần dư dạng Peano:

$$\begin{aligned}f(M) &= f(M_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(M_0) \\ &+ \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)^n\end{aligned} \quad (1.39)$$

với $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Đặc biệt, với $n = 1$ ta được công thức số gia giới nội cho hàm nhiều biến

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\partial f(M_1)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M_1)}{\partial y} \Delta y \quad (1.40)$$

M_1 là điểm trên đoạn thẳng MM_0 .

Chứng minh. (Xem [1])

§ 1.3. CỰC TRỊ

1.3.1. Cực trị địa phương của hàm nhiều biến

Định nghĩa. $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm trong của D . Giả sử U là một lân cận đủ nhỏ của M_0 .

* $\forall M \in U$ mà $f(M) \geq f(M_0)$ thì:

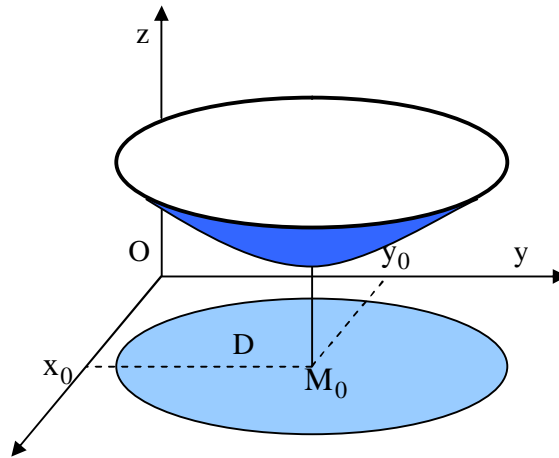
M_0 gọi là *điểm cực tiểu* của hàm $f(x, y)$;

Hàm $f(x, y)$ được gọi là *đạt cực tiểu* tại M_0 ,

$f(M_0)$ gọi là *giá trị cực tiểu*.

* Tương tự với cực đại.

Điểm cực tiểu, cực đại gọi chung là *điểm cực trị*; giá trị cực đại, giá trị cực tiểu gọi chung là *cực trị*.



Hình 1.8. Cực trị địa phương của hàm 2 biến

Ví dụ 1.18. Xét cực trị hàm số $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 7$.

G. $z = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 2 \geq 2$. Dấu bằng đạt được $\Leftrightarrow x = -1, y = 2$. Vậy $(-1, 2)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho, $z_{CT} = z(-1, 2) = 2$. #

Định lý 1.13 (Điều kiện cần của cực trị). Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$, và tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$. Khi đó

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \quad (1.41)$$

Chú ý. * Điều ngược lại không đúng. Cụ thể là: Có thể tại (x_0, y_0) , cả hai đạo hàm riêng triệt tiêu ($f'_x = f'_y = 0$), nhưng hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0) .

* Ta chỉ việc tìm cực trị tại những điểm tại đó:

$+\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$: điểm dừng $+ \text{Hoặc } \exists \text{ ít nhất một trong các đạo hàm riêng}$	} <i>điểm tới hạn</i> (nghỉ ngơi CT).
--	---------------------------------------

Định lý 1.14 (*Điều kiện đủ của cực trị*). Cho D là một tập mở của \mathbb{R}^2 . Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm dừng $(x_0, y_0) \in D$. Coi vi phân cấp hai

$$d^2f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} dy^2$$

là dạng toàn phương của các biến dx, dy .

i) Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu tại M_0 .

ii) Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại tại M_0 .

iii) Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ đổi dấu thì M_0 không là điểm cực trị.

Lưu ý. Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ suy biến (tồn tại dx, dy không đồng thời bằng 0 để $d^2f(x_0, y_0, z_0) = 0$) thì chưa có kết luận.

Chứng minh (⚙️). (Xem tài liệu [1])

Nhận xét. Đặt

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta = B^2 - AC. \quad (1.42)$$

Ma trận của dạng toàn phương $d^2f(x_0, y_0)$ là $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$.

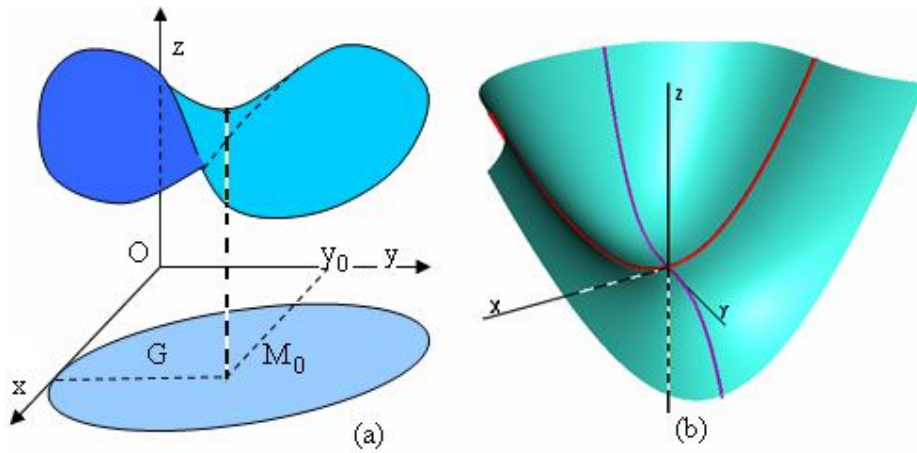
Từ Đại số tuyến tính ta biết rằng dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó dương; xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính đổi dấu, định thức con chính thứ nhất âm. Từ đó

Định lý 1.14'. Giả sử xảy ra các giả thiết của Định lý 1.14. Khi đó

i) Nếu $\Delta < 0$; $A > 0$ ($\Leftrightarrow C > 0$) thì f đạt cực tiểu tại M_0 .

ii) Nếu $\Delta < 0$; $A < 0$ ($\Leftrightarrow C > 0$) thì f đạt cực đại tại M_0 .

iii) Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 không là điểm cực trị.



Hình 1.9. Điểm yên ngựa

Lưu ý. Khi $\Delta = 0$, chưa có kết luận: Hàm f có thể đạt, cũng có thể không đạt cực trị tại M_0 .

Để tiện lợi, người ta gọi điểm M_0 ở trường hợp iii) là *điểm yên ngựa* (saddle point) (xem Hình 1.9a, b), dù rằng thực ra tình huống như ở Hình 1.9a mới đáng gọi là như thế.

Tổng quát cho trường hợp số biến lớn hơn 2.

Định lý 1.15. Cho D là một tập mở trong \mathbb{R}^3 . Giả sử hàm $z = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm dừng $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, tại đó

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0. \quad (1.43)$$

Xét dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz

$$d^2f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f(x_0, y_0, z_0).$$

Khi đó,

Nếu $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ xác định dương thì (x_0, y_0, z_0) là điểm cực tiểu;

Nếu $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ xác định âm thì (x_0, y_0, z_0) là điểm cực đại;

Nếu $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ không xác định thì (x_0, y_0, z_0) không là điểm cực trị.

Ví dụ 1.19. Xét cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\text{Giải. } \begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0(0, 0) \\ M_1(1, 1) \end{cases} \text{ là các điểm dừng.}$$

$$z''_{xx} = 6x; \quad z''_{xy} = -3; \quad z''_{yy} = 6y.$$

+ Tại M_0 : $A = 0; \quad B = -3; \quad C = 0 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$: Không đạt cực trị.

+ Tại M_1 : $A = 6$; $B = -3$; $C = 6 \Rightarrow \Delta = 9 - 36 = -25 < 0$.

Vậy M_1 là điểm cực tiểu của z (z đạt cực tiểu tại M_1), $z_{CT} = z(1,1) = 5$. #

Ví dụ 1.20. Tìm cực trị của hàm số $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ($x, y, z > 0$).

Giải. Điểm dừng của hàm số xác định từ hệ

$$\begin{cases} u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \text{ (điểm dừng duy nhất).} \\ u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, u''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, u''_{xz} = 0, u''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, u''_{yz} = -\frac{2z}{y^2}, u''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$$

Tính các đạo hàm riêng cấp hai này tại M , dẫn đến

$$d^2u(M) = 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz.$$

Đây là dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz . Ma trận của dạng toàn

phương này là $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Xét các định thức con chính của nó,

$$A_1 = 4 > 0, A_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, A_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Vậy A là ma trận xác định dương, từ đó $d^2u(M)$ xác định dương.

(Để chứng tỏ tính xác định dương của $d^2u(M)$ ta còn có thể dùng cách sơ cấp hơn sau đây :

$$\begin{aligned} d^2u(M) &= 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz \\ &= 4(dx^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{4}dy^2) + 2(dy^2 - 2dydz + dz^2) + 4dz^2 \\ &= 4\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + 2(dy - dz)^2 + 4dz^2 > 0. \end{aligned}$$

Vì vậy hàm u đạt cực tiểu tại M , $u_{CT} = u(M) = 4$. #

1.3.2. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Nếu $f(M) \leq f(M_0)$, $\forall M \in D$, giá trị $A = f(M_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* (GTLN) - hay *cực đại toàn cục* - của hàm f trên D .

Tương tự, ta định nghĩa *giá trị nhỏ nhất* (GTNN) - hay *cực tiểu toàn cục*.

Khi đã tìm được các điểm cực trị (địa phương), ta cần làm thêm các lí luận phụ để kiểm tra xem đây có phải là điểm cực trị toàn cục hay không.

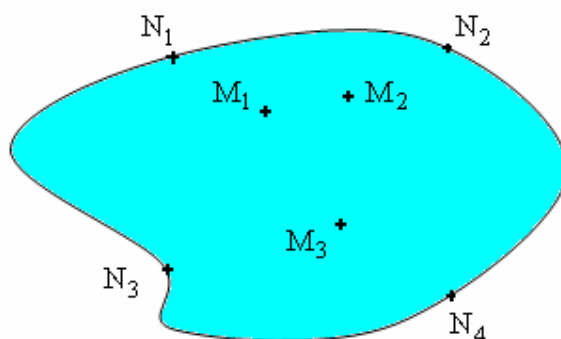
Trường hợp 1: miền đóng, giới nội

Chúng ta biết rằng, nếu hàm f liên tục trên miền đóng, giới nội D thì đạt GTLN - GTNN trên đó.

Vậy nếu GTLN (GTNN) đạt tại một điểm trong của D thì điểm trong đó phải là điểm tới hạn. Cũng có thể GTLN-GTNN đạt được trên biên. Dẫn đến quy tắc sau.

Quy tắc (Tìm GTLN - GTNN trên miền đóng, giới nội)

- Tìm những điểm tới hạn bên trong của D : M_1, \dots, M_k ;
- Tìm những điểm tới hạn trên biên của D : N_1, \dots, N_ℓ
- Tính giá trị hàm số tại các điểm này: $f(M_1); \dots; f(M_k); f(N_1); \dots; f(N_\ell)$;
- Kết luận: GTLN - GTNN của hàm là Max, Min các giá trị nhận được.



Hình 1.10. Các điểm tới hạn bên trong và trên biên của miền đóng, giới nội

Trường hợp 2: miền không giới nội

Các nhận xét sau là có ích trong một số trường hợp:

+ $\exists (x_0, y_0) : \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} z(x, y) = +\infty$: Hàm số không đạt GTLN;

+ $\exists (x_0, y_0) : \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} z(x, y) = -\infty$: Hàm số không đạt GTNN.

(Chỉ cần $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ theo một đường cong (L) nào đó).

+ $z(x, y)$ liên tục trên \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) là điểm dừng duy nhất,

$z(x, y) \rightarrow +\infty$ khi $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$: (x_0, y_0) là điểm cực tiểu.

Ví dụ 1.21. Tìm GTLN - GTNN của hàm số

$$z = x^2y + xy^2 - 3xy \text{ trong miền } D = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Giải.

$$\begin{cases} z'_x = 2xy + y^2 - 3y = 0 \\ z'_y = x^2 + 2xy - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(1,1), M_2(0,0), M_3(3,0), M_4(0,3).$$

Tuy nhiên chỉ có điểm $M_1(1,1)$ là điểm trong của D , $z(1,1) = -1$.

$$* y = 0, x \in [0, 2] \Rightarrow z = 0.$$

$$* y = 2, x \in [0, 2] \Rightarrow z = 2x^2 - 2x, z' = 4x - 2;$$

$$z' = 0 \text{ tại } x = \frac{1}{2}, z\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, z(2) = 4, z(0) = 0.$$

Vai trò x, y như nhau, so sánh mọi giá trị đã tính, ta thấy:

$$\text{Max } z = \text{Max}\{-1, 0, 4\} = 4, \text{ đạt được tại } (2, 2).$$

$$\text{Min } z = \text{Min}\{-1, 0, 4\} = -1, \text{ đạt được tại } (1, 1).$$

#

Ví dụ 1.22. Chứng tỏ rằng hàm số

$$f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^4$$

có một điểm dừng duy nhất, cũng là điểm cực tiểu địa phương, nhưng hàm số không đạt được giá trị nhỏ nhất.

Giải. Hệ $f'_x = f'_y = 0 \Rightarrow x = y = 0$, vậy $(0, 0)$ là điểm dừng duy nhất.

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^2(1 + y)^3 + y^4 \geq 0, \forall x \text{ và } \forall y \geq -1.$$

Vậy $(0, 0)$ là điểm cực tiểu địa phương.

$$\text{Mặt khác, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left[\left(\frac{1}{x} + 1 \right)^3 + \frac{1}{x} \right] = -\infty$$

nên f không có GTNN. Rõ ràng hàm f cũng không có GTLN.

#

1.3.3. Cực trị có điều kiện

Bài toán 1. Tìm cực trị của hàm $u = f(x, y, z)$ với điều kiện $F(x, y, z) = 0$.

Cách 1. Từ điều kiện $F(x, y, z) = 0$ giải ra $z = z(x, y)$, thế vào hàm đã cho ta được $u = f(x, y, z(x, y))$: Bài toán cực trị với hàm hai biến đã biết.

Phải lưu ý giá trị hàm thu được trên biên của tập xác định (mới).

Ví dụ 1.23. Tìm cực trị của hàm số $z = -6x + 2xy^2 + 1$ với điều kiện $x + 2y^2 = 2$.

Giải. Từ điều kiện nhận thì $2y^2 = 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$.

$$z = -6x + x(2 - x) + 1 = -x^2 - 4x + 1.$$

$$z' = -2x - 4, z' = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

x	$-\infty$	-2	2
z'		$+$	0
z	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow -11$
y	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{2}$	0

Như vậy cực đại điều kiện là 5, đạt được tại $(-2, \pm\sqrt{2})$;

Cực tiểu điều kiện là -11, đạt được tại $(2, 0)$.

Cách 2 (Phương pháp nhân tử Lagrange)

i) Lập hàm Lagrange $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$.

ii) Ta tìm các điểm dừng (thông thường) của hàm 4 biến này.

$$\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_z = \Phi'_\lambda = 0 \text{ hay}$$

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda F'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda F'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda F'_z(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

iii) Từ đây ta tính được λ_i và $N_i(x_i, y_i, z_i)$. Các điểm $N_i(x_i, y_i, z_i)$ gọi là các điểm nghi ngờ cực trị điều kiện.

iv) Coi λ cố định, lập hàm 3 biến x, y, z

$$\Phi_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z). \quad (1.45)$$

Tính vi phân cấp hai của hàm này:

$$d^2\Phi_\lambda(x, y, z) = d^2f(x, y, z) + \lambda d^2F(x, y, z). \quad (1.46)$$

v) Thay $\lambda = \lambda_i$, $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ và dx, dy, dz thỏa mãn điều kiện

$$dF(N_i) = F'_x(N_i)dx + F'_y(N_i)dy + F'_z(N_i)dz = 0. \quad (1.47)$$

vào biểu thức của $d^2\Phi_\lambda(x, y, z)$ ở (1.46) ta được $d^2\Phi_{\lambda_i}(N_i)$, là một dạng toàn phương của 2 trong 3 biến dx, dy, dz .

vi) Kết luận:

* $d^2\Phi_{\lambda_i}(N_i) > 0 \Rightarrow N_i(x_i, y_i, z_i)$ là điểm cực tiểu điều kiện.

* $d^2\Phi_{\lambda_i}(N_i) < 0 \Rightarrow N_i(x_i, y_i, z_i)$ là điểm cực đại điều kiện.

* $d^2\Phi_{\lambda_i}(N_i)$ không xác định $\Rightarrow N_i(x_i, y_i, z_i)$ không là điểm CTĐK.

* Khi cần tìm GTLN-GTNN điều kiện, nếu tập $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ là compact (đóng và giới nội), không cần thực hiện bước iv - vi, chỉ cần so sánh giá trị của hàm $f(x, y, z)$ tại các điểm nghi ngờ cực trị điều kiện $N_i(x_i, y_i, z_i)$.

Bài toán 2. Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $F(x, y) = 0$.

Tương tự BT 1, (một chút thay đổi về ký hiệu).

Các bài toán trên được tổng quát sang trường hợp có nhiều biến hơn, và (hoặc) có nhiều ràng buộc hơn.

Bài toán 3. Tìm cực trị của hàm $u = f(x, y, z)$ với hai ràng buộc

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0 \\ H(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

ta tiến hành tương tự Bài toán 1, cụ thể như sau.

i) Lập hàm Lagrange của 5 biến

$$\Phi(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z). \quad (1.49)$$

ii) Tìm điểm dừng của hàm Φ thỏa mãn $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_z = \Phi'_\lambda = \Phi'_\mu = 0$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda F'_x(x, y, z) + \mu G'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda F'_y(x, y, z) + \mu G'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda F'_z(x, y, z) + \mu G'_z(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

iii) Giải ra λ_i, μ_i và các điểm nghi ngờ cực trị điều kiện $N_i(x_i, y_i, z_i)$.

iv) Coi λ, μ cố định, lập hàm ba biến x, y, z

$$\Phi_{\lambda\mu}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z).$$

Tính vi phân cấp hai của hàm này

$$d^2\Phi_{\lambda\mu}(x, y, z) = d^2f(x, y, z) + \lambda d^2F(x, y, z) + \mu d^2G(x, y, z) \quad (1.51)$$

v) Thay $\lambda = \lambda_i, \mu = \mu_i; (x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$, và dx, dy, dz thỏa mãn:

$$\begin{cases} dF(N_i) = F'_x(N_i)dx + F'_y(N_i)dy + F'_z(N_i)dz = 0 \\ dG(N_i) = G'_x(N_i)dx + G'_y(N_i)dy + G'_z(N_i)dz = 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

vào biểu thức của $d^2\Phi_{\lambda\mu}(x, y, z)$ ở (1.51) ta được $d^2\Phi_{\lambda_i\mu_i}(N_i)$ là dạng toàn phương của một trong 3 biến dx, dy, dz .

vi) Kết luận tương tự như đã làm ở Bài toán 1.

Ví dụ 1.24. Tìm cực trị điều kiện của các hàm số với điều kiện chỉ ra ở bên

$$\text{i) } z = x + y, \quad x^2 + y^2 = 1;$$

$$\text{ii) } u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c).$$

Giải. i) Đặt $\Phi(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \Phi'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \Phi'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\lambda^2 = 1/2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1/\sqrt{2}, \lambda_2 = -1/\sqrt{2}$, điểm dừng điều kiện tương

ứng là $(x_1, y_1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ và $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Đặt $\Phi_\lambda(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2)$.

$$d\Phi_\lambda(x, y) = \dots; \quad d^2\Phi_\lambda(x, y) = \lambda(dx^2 + dy^2).$$

$$dx, dy: d(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow xdx + ydy = 0.$$

$$* \text{ Với } \lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, (x_1, y_1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$dx, dy: -\frac{1}{\sqrt{2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2}}dy = 0 \Leftrightarrow dy = -dx.$$

$$d^2\Phi_{\lambda_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx^2 + dy^2) = \sqrt{2}dx^2 > 0 \quad (dx \neq 0).$$

Vậy $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ là cực tiểu điều kiện (CTĐK), $z_{CTĐK} = z(x_1, y_1) = -\sqrt{2}$.

* Với $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, làm tương tự trên, $(x_2, y_2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ là điểm cực đại điều kiện và $z(x_2, y_2) = \sqrt{2}$.

Nếu chỉ cần tìm GTLN - GTNN điều kiện, vì đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là đóng và giới nội nên sau khi tìm được các giá trị $\lambda_{1,2}, (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ta thực hiện như sau:

$$f(x_1, y_1) = \sqrt{2}, f(x_2, y_2) = -\sqrt{2},$$

$$GTLN \text{ ĐK} = \text{Max}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

$$GTNN \text{ ĐK} = \text{Min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

ii) Đặt $\Phi(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$.

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x + 2\lambda x / a^2 = 0 \\ \Phi'_y = 2y + 2\lambda y / b^2 = 0 \\ \Phi'_z = 2z + 2\lambda z / c^2 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Từ 3 phương trình đầu ta được $\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -a^2 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -b^2 \end{cases}, \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = -c^2 \end{cases}.$

$$\lambda = \lambda_1 = -c^2 \Rightarrow M_{1,2} = (0, 0, \pm c),$$

$$\lambda = \lambda_2 = -b^2 \Rightarrow M_{3,4} = (0, \pm b, 0),$$

$$\lambda = \lambda_3 = -a^2 \Rightarrow M_{5,6} = (\pm a, 0, 0).$$

* Đặt $\Phi_\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$

$$\begin{aligned} d^2\Phi_\lambda(x, y, z) &= \dots = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2\lambda \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} \right) \\ &= 2 \left(\left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) dx^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) dy^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) dz^2 \right). \end{aligned}$$

Xác định dx, dy, dz từ ràng buộc:

$$dF(x, y, z) = d\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 2\left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2}\right) = 0 \quad (*)$$

+ Tại $\lambda = \lambda_1 = -c^2$ và $M = M_{1,2}$, ràng buộc (*) trở thành

$$\pm 2 \frac{cdz}{c^2} = 0 \text{ hay } dz = 0.$$

$$\text{Khi đó } d^2\Phi_{\lambda_1}(0, 0, \pm c) = 2\left[\left(1 + \frac{-c^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{-c^2}{b^2}\right)dy^2\right] > 0.$$

Vậy $(0, 0, \pm c)$ là điểm cực tiểu điều kiện và $z(0, 0, \pm c) = c^2$.

* Làm tương tự, suy ra $(\pm a, 0, 0)$ là điểm CĐĐK và $z(\pm a, 0, 0) = a^2$.

* Với $\lambda = \lambda_2 = -b^2$, $M = M_{3,4} = (0, \pm b, 0)$, tương tự trên, phải có $dy = 0$.

$$\Rightarrow d^2\Phi_{\lambda_2}(0, \pm b, 0) = 2\left[\left(1 + \frac{-b^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{-b^2}{c^2}\right)dz^2\right].$$

Vì $a > b > c$ nên đây là dạng toàn phương không xác định. Vậy hàm số không có cực tiểu điều kiện tại điểm này. #

Chữa Bài tập 35(i, j, k, l); 36(e)

ĐS. 35. i) $(6, 3)$ is maximum, $(0, 0)$ is saddle;

j) $(3, 1)$ is a saddle point, $(-1, 1)$ is minimum;

k) $(0, 0)$ is minimum, $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, $(1, \pm 4)$ are saddle points;

l) $(\pm 2, 2)$ are minima, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ is a saddle point.

36 e) minimum $f(\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})) = -8$, $(0, 0)$ is a saddle;

b) Thảo luận	- Nhắc lại về vi phân cấp 2 của hàm 2, 3 biến - Quy tắc tính cực trị của hàm 2 biến
c) Tự học	- Chuẩn bị cho bài mới:
d) Bài tập chuẩn bị tối thiểu	Các bài tập còn lại
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 4: Hàm số nhiều biến số (tiếp)

Chương, mục: 1

Tiết thứ: 16-20

Tuần thứ: 4

Mục đích, yêu cầu:

- Kiểm tra kiến thức, rèn luyện kỹ năng tính đạo hàm riêng cấp cao, vi phân cấp cao, tìm cực trị, cực trị có điều kiện và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số
- Nắm được khái niệm độ cong, bán kính cong, tâm cong
- Phương trình tiếp tuyến ĐC
- PT pháp diện, pháp tuyến của mặt cong
- Ý nghĩa của véc tơ $\overrightarrow{\text{grad}}$

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chữa bài tập phần Đạo hàm – Vi phân và Cực trị, GTLN, NN

§1.5 Sơ lược về hình học vi phân

*** Chữa bài tập (2 tiết)**

36(f, g, h, i, j, k); 37(c, d, e, f); 40(d, e, f);

ĐS. 36. f) minimum $f(-1, -2, 3) = -24$; g) maximum $z(0; 1) = \pi / 2 + 1$;

h) minimum $z(1, 1) = z(-1, -1) = -2$, $(0, 0)$ is a saddle.

i) minimum $z(1, -1) = 3$; j) $(1, 0)$ is a saddle;

k) maximum $z\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$, $(0, 0)$ is a saddle.

40. d) Minu = $u(\pm 1, 0, 0) = 1$, Max u = $u(0, 0, \pm 2) = 4$;

e) Min u = $u(-1, 0, 1) = 0$;

f) Max u = $u(2, 2, -1) = 9$, Minu = $u(-2, -2, 1) = -9$.

§ 1.5. SƠ LƯỢC VỀ HÌNH HỌC VI PHÂN

Hình học vi phân: Dùng các phương pháp của phép tính vi phân để nghiên cứu hình học.

1.5.1. Đường cong phẳng

a. Tiếp tuyến, pháp tuyến. Ở phổ thông chúng ta biết rằng, nếu đường cong C là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ ($y_0 = f(x_0)$) trên đường cong là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Bây giờ giả sử đường cong C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad x(t), y(t) \text{ là liên tục.}$$

Đường cong trơn:

$x(t), y(t)$ khả vi liên tục trên $[\alpha, \beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0 \quad \forall t$

Nếu tại điểm $t_0 \in [\alpha, \beta]$ nào đó mà $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ thì điểm tương ứng $M_0(x(t_0), y(t_0))$ trên C gọi là *điểm kỳ dị*. Chúng ta không xét trường hợp đường cong có điểm kỳ dị.

Bây giờ lấy $t_0 \in [\alpha, \beta]$ và giả sử điểm tương ứng trên đường cong là $M_0(x_0, y_0)$. Ta đã biết hệ số góc của tiếp tuyến tại M_0 là $k = y'_x = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$. Vậy

phương trình tiếp tuyến có dạng $y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0)$ hay

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}. \quad (1.53)$$

Véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến là

$$\vec{\tau}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Suy ra phương trình pháp tuyến:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0 \quad (1.54)$$

b. Độ cong

- Định nghĩa độ cong của đường cong tại 1 điểm (xem [1])
- Cách tính độ cong

+ Đường cong cho dưới dạng phương trình $y = f(x)$ thì

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (1.55)$$

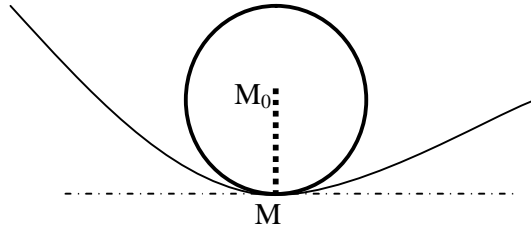
+ Đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (1.56)$$

c. Đường tròn mật tiếp

Cho trước điểm M trên đường cong. Nhiều khi cần phải xấp xỉ đường cong tại lân cận điểm M bằng một cung tròn nào đó. Đường tròn chứa cung tròn đó phải tiếp xúc với đường cong tại M , có cùng bề lõm với đường cong và có độ cong bằng độ cong của đường cong tại M (Hình 1.14). Đường tròn đó gọi là *đường tròn mật tiếp* (còn gọi là *đường tròn chính khúc*) với đường cong tại M .

Bán kính của đường tròn mật tiếp gọi là *bán kính cong*, tâm của đường tròn mật tiếp gọi là *tâm cong* của đường cong (tại điểm M).



Hình 1.14. Đường tròn mật tiếp, tâm cong, bán kính cong

d. Bán kính cong

Theo trên, bán kính cong bằng nghịch đảo của độ cong. Vậy,

Nếu đường cong cho dưới dạng phương trình $y = f(x)$ - tương ứng phương trình tham số - thì bán kính cong được tính lần lượt theo công thức:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \quad (1.57)$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}. \quad (1.58)$$

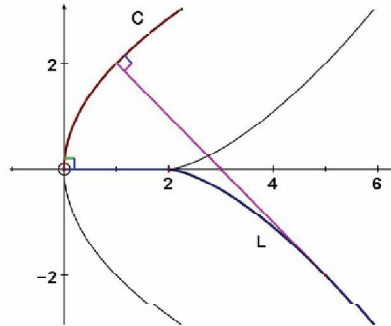
e. Tọa độ tâm cong.

Lưu ý. Người ta cũng có công thức tính độ cong, bán kính cong cho trường hợp đường cong cho dưới dạng tọa độ cực.

f. Túc bẻ, thân khai

Xét đường cong phẳng C. Mỗi điểm M trên C có tương ứng một tâm cong I. Quỹ tích L các tâm cong I của đường cong C gọi là đường *túc bẻ* của C, còn C gọi là *thân khai* của L (xem Hình 1.15.)

Nếu C cho bởi phương trình $y = f(x)$ hay phương trình tham số thì phương trình túc bẻ dưới dạng tham số lần lượt là



Hình 1.15. Đường thân khai C và đường túc bẻ L

$$\begin{cases} X = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''} \\ Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(tham số x hoặc y)} \\ \end{matrix} \quad (1.61)$$

$$\begin{cases} x_0 = x - \frac{(x'^2 + y'^2)y'}{x'y'' - x''y'} \\ y_0 = y + \frac{(x'^2 + y'^2)x'}{x'y'' - x''y'} \end{cases} \quad (\text{tham số } t) \quad (1.62)$$

Ví dụ 1.57. Tìm đường tức bề của parabol $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Giải. Rõ ràng là $x \geq 0$, ta có $y = \sqrt{2p} \sqrt{x}$.

Vì $y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}$, $y'' = -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2x}\sqrt{x}}$, thay vào (1.61) nhận được tức bề

$$\begin{cases} X = 3x + p \\ Y = -\frac{(\sqrt{2px})^3}{p^2} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} X = \frac{3y^2}{2p} + p \\ Y = -\frac{y^3}{p^2} \end{cases}$$

(xem Hình 1.14 khi $p = 2$).

#

1.5.2. Đường cong trong không gian

a. Hàm véc tơ của đối số vô hướng

Định nghĩa. Nếu với mỗi $t \in [a, b]$ có tương ứng với một véc tơ $\vec{V} = \vec{V}(t)$ thì ta nói, ta đã có một *hàm véc tơ* của đối số vô hướng t , ký hiệu $\vec{V} = \vec{V}(t)$, $t \in [a, b]$.

Các véc tơ nói đến ở định nghĩa là véc tơ tự do. Ta có thể đưa chúng về cùng gốc là gốc tọa độ O bằng cách đặt $\vec{OM} = \vec{V}(t)$. Ký hiệu

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}$$

gọi là *hàm bán kính véc tơ* của điểm M .

Từ đây, ta chỉ cần xét hàm bán kính véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Nếu M có tọa độ (x, y, z) thì

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.63)$$

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.64)$$

Khi t biến thiên từ a đến b , điểm M vạch nên đường cong C nào đó trong không gian. C được gọi là *tốc độ* của hàm véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Hệ (1.63) được gọi là *phương trình tham số* của C , (1.64) gọi là *phương trình véc tơ* của C .

Sự liên tục. Hàm véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ được gọi là *liên tục* nếu các hàm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ là những hàm liên tục. Khi đó đường cong C được gọi là *đường cong liên tục*.

Sự khả vi. Hàm véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ gọi là *khả vi* tại điểm t_0 nếu các hàm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ là khả vi tại t_0 ; gọi là *khả vi trong khoảng* (a, b) nếu nó khả vi tại mọi điểm $t \in (a, b)$.

Đạo hàm của hàm véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ký hiệu bởi $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ tính theo công thức

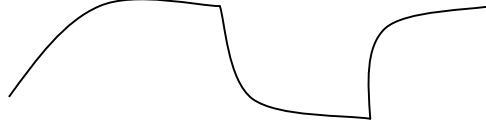
$$\vec{r}' = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \quad (1.65)$$

Nếu các hàm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ là khả vi trong khoảng (a, b) thì đường cong C gọi là *đường cong trơn*. Ta cũng chỉ xét trường hợp đường cong không có *điểm bất thường*, nghĩa là chỉ xét trường hợp

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0, \quad \forall t.$$

Nếu đường cong C liên tục, có thể phân thành một số hữu hạn cung trơn thì C được gọi là *trơn từng khúc* (xem Hình 1.16).

Lưu ý. Để đường C trơn từng khúc, trước hết nó phải liên tục.



Hình 1.16. Đường cong trơn từng khúc

Ý nghĩa của véc tơ đạo hàm

* *Ý nghĩa hình học.* Véc tơ đạo hàm của hàm véc tơ trùng phương với phương của tiếp tuyến của tốc độ của hàm véc tơ tại điểm tương ứng.

* *Ý nghĩa cơ học.* Khi coi t là tham số thời gian, độ dài của véc tơ đạo hàm $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ của hàm bán kính véc tơ tại thời điểm t bằng tốc độ của điểm M tại thời điểm đó và được tính theo công thức

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = V(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}. \quad (1.66)$$

b. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

Như đã nói, véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến là

$$\vec{T} = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Vậy, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ trên đường cong ứng với giá trị t_0 của tham số là:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad (1.67)$$

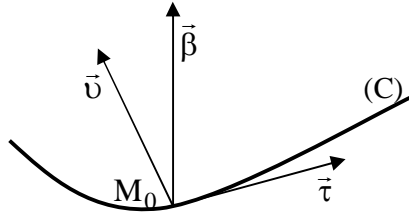
(quy ước khi mẫu số bằng 0 thì tử số cũng vậy), và phương trình mặt phẳng pháp với đường cong tại M_0 là:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.68)$$

Với $\vec{r}'' = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$, đặt

$$\vec{B} = \vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix},$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}.$$



Chuẩn hóa các véc tơ $\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}$ ta được

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}, \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}.$$

Mặt phẳng qua M_0 ,

- + Có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ (véc tơ pháp $\vec{\beta}$) gọi là *mặt phẳng tiếp*;
- + Có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{\nu}, \vec{\beta}$ (véc tơ pháp $\vec{\tau}$) gọi là *mặt phẳng pháp*;
- + Có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{\beta}, \vec{\tau}$ (véc tơ pháp $\vec{\nu}$) gọi là *mặt phẳng trực đặc*.

Các véc tơ đơn vị $\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\nu}$ với các mặt phẳng vừa nêu gọi là *tam diện Frenet*.

Với đường cong trong không gian, người ta cũng xét độ cong, bán kính cong, hơn nữa độ xoắn; tuy nhiên chúng ta không trình bày ở đây.

Ví dụ 1.58. Tìm các véc tơ $\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\nu}$ của đường đỉnh ốc trụ là quỹ đạo của một điểm M vừa quay đều xung quanh một trục d với vận tốc góc không đổi ω , vừa tịnh tiến dọc theo trục đó với vận tốc không đổi C.

Giải. Lập hệ trục Oxyz (xem Hình 1.17). Chiếu M xuống mặt Oxy được điểm M' gọi θ là góc hợp bởi trục Ox với $\overrightarrow{OM'}$. Theo giả thiết $\theta = \omega t$, từ đó phương trình tham số của chuyển động là

$$x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = Ct \quad (t \geq 0).$$

Tính các đạo hàm ta được

$$x' = -a\omega \sin \omega t, y' = a\omega \cos \omega t, z' = C;$$

$$x'' = -a\omega^2 \cos \omega t, y'' = -a\omega^2 \sin \omega t, z'' = 0.$$

Từ đó nhận được

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\omega \sin \omega t & a\omega \cos \omega t & C \\ -a\omega^2 \cos \omega t & -a\omega^2 \sin \omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= Ca\omega^2 \sin \omega t \vec{i} - Ca\omega^2 \cos \omega t \vec{j} + a^2\omega^3 \vec{k},$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = -a\omega^2(C^2 + a^2\omega^2) \cos \omega t \vec{i} - a\omega^2(C^2 + a^2\omega^2) \sin \omega t \vec{j}.$$

Vậy các véc tơ đơn vị cần tìm là

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{-a\omega \sin \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{i} + \frac{a\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{j} + \frac{C}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{k},$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{C \sin \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{i} + \frac{-C \cos \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{j} + \frac{a\omega}{\sqrt{a^2\omega^2 + C^2}} \vec{k},$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}.$$

Trong trường hợp $a = C = \omega = 1$, $t = \pi$ thì $M(-1, 0, \pi)$.

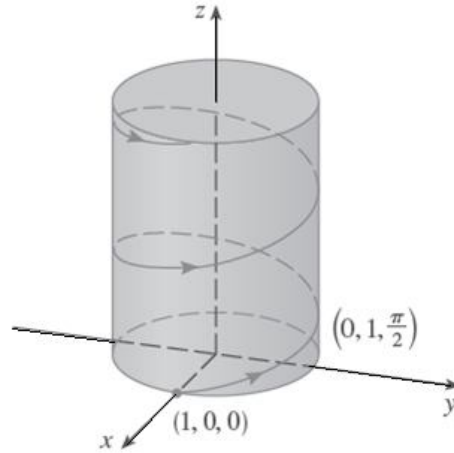
$$\vec{\tau} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{\beta} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{v} = (-1, 0, 0)$$

Mặt phẳng tiếp (véc tơ pháp $\vec{\beta}$) là: $y + z - \pi = 0$,

Mặt phẳng pháp (véc tơ pháp $\vec{\tau}$) là: $-y + z - \pi = 0$,

Mặt phẳng trục đặc (véc tơ pháp \vec{v}) là: $x + 1 = 0$.

#



Hình 1.17. Đường đing ốc trụ

1.5.3. Mặt cong

a. Khái niệm mặt cong

• Cho hàm ba biến $F(x, y, z)$ xác định trong miền $G \subset \mathbb{R}^3$. Tập hợp S các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình

$$F(x, y, z) = 0$$

hay tổng quát hơn

$$F(x, y, z) = k \quad (1.69)$$

được gọi là *mặt cong*, phương trình (1.69) gọi là *phương trình của mặt*.

• Đôi khi từ (1.69) ta có thể giải ra dưới dạng

$$z = z(x, y), \text{ hay } x = x(y, z), \text{ hay } y = y(z, x) \quad (1.70)$$

thì mỗi phương trình này cũng được gọi là phương trình của mặt, mặt được gọi là *cho dưới dạng hiện*.

Chúng ta chỉ xét trường hợp mặt cong liên tục, ở đó hàm $F(x, y, z)$ liên tục.

Mặt S được gọi là *tron* nếu hàm $F(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục và không đồng thời bằng không:

Nói cách khác, trên S thì véc tơ gradient $\overline{\text{grad}} F(M)$ khác không.

Mặt S được gọi là *tron từng mảnh* nếu nó liên tục, có thể phân thành hữu hạn mảnh tron.

Lưu ý. Để mặt S tron từng mảnh, trước hết nó phải liên tục.

b. Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Giả sử mặt S cho bởi (1.69). Tại $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$,

+ Véc tơ pháp tuyến với mặt:

$$\vec{n}_0 = \vec{n}(M_0) = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k}. \quad (1.72)$$

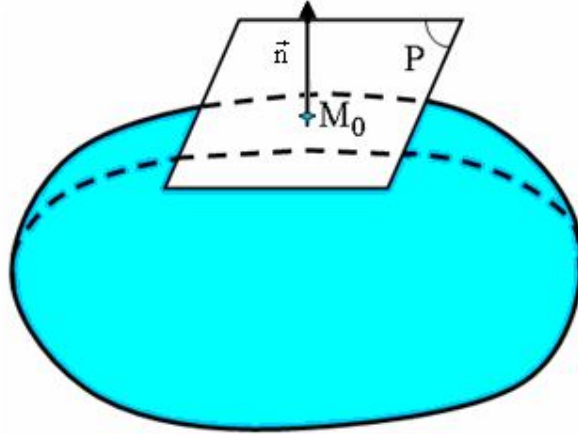
Ta còn viết véc tơ pháp tuyến dưới dạng tọa độ

$$\vec{n}(M_0) = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)). \quad (1.73)$$

+ Phương trình *pháp tuyến* và phương trình *tiếp diện* lần lượt là

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}, \quad (1.74)$$

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.75)$$



Hình 1.18. *Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong*

Đặc biệt, nếu mặt cho dưới dạng $z = f(x, y) \Leftrightarrow F(x, y, z) = z - f(x, y)$, tại điểm $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ thì véc tơ pháp tuyến, phương trình pháp tuyến và phương trình tiếp diện lần lượt là

$$\vec{n}_0 = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1), \quad (1.76)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad (1.77)$$

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

hay
$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (1.78)$$

Ví dụ 1.59. Viết phương trình tiếp diện của mặt $S: x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ song song với mặt $P: x + y - z = 0$.

Giải.

$$(Q_1): -(x+2) - (y+2) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 5 = 0.$$

$$(Q_2): (x-2) + (y-2) - (z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0. \quad \#$$

TÓM TẮT CHƯƠNG 1 (Tự đọc)

TÓM TẮT CHƯƠNG 1

Các định lý về giới hạn, liên tục của tổng, hiệu, tích, thương, lũy thừa, hợp hàm của các hàm, các hàm liên tục, định nghĩa hàm sơ cấp và tính liên tục của chúng, các khái niệm và kết quả về sự liên tục đều đối với hàm một biến vẫn còn bảo toàn cho trường hợp hàm nhiều biến.

Khi tính đạo hàm riêng theo biến nào đó, ta coi các biến khác không đổi, rồi lấy đạo hàm theo biến đó như lấy đạo hàm với hàm một biến.

Đạo hàm hàm hợp: $F = F(u(x, y), v(x, y))$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Đạo hàm hàm số ẩn: $z = z(x, y)$ xác định từ $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Các phép toán về vi phân

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = u dv \pm v du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad df(u) = f'(u) du.$$

Dù u, v là biến độc lập hay biến phụ thuộc luôn có

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

Đạo hàm theo hướng $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{\ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos\gamma.$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} \right| \leq |\overrightarrow{\text{grad}} u| = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{\ell}$ cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}} u$.

Điều kiện cần của cực trị. $f(x, y)$ khả vi, đạt cực trị tại M_0 thì

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0.$$

Điều kiện đủ của cực trị

Cho $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm $z = f(x, y)$. Đặt

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, \quad \Delta = B^2 - AC.$$

- i) Nếu $\Delta < 0$; $A > 0$ ($\Leftrightarrow C > 0$) thì f đạt cực tiểu tại M_0 .
- ii) Nếu $\Delta < 0$; $A < 0$ ($\Leftrightarrow C > 0$) thì f đạt cực đại tại M_0 .
- iii) Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 không là điểm cực trị.

Trường hợp 3 biến

Tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ của hàm $u = f(x, y, z)$ tính

$$d^2f(M_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f(M_0).$$

Nếu $d^2f(M_0)$ xác định dương thì M_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $d^2f(M_0)$ xác định âm thì M_0 là điểm cực đại.

Tìm GTLN - GTNN trên miền đóng, giới nội D

- + Tìm những điểm tới hạn bên trong của D : M_1, \dots, M_k ;
- + Tìm những điểm tới hạn trên biên của D : N_1, \dots, N_ℓ ;
- + Tính: $f(M_1); \dots; f(M_k); f(N_1); \dots; f(N_\ell)$;
- + Kết luận: GTLN - GTNN của hàm là Max, Min các giá trị nhận được.

Cực trị có điều kiện

Tìm cực trị của hàm $f(x, y, z)$ với điều kiện $F(x, y, z) = 0$, ta có thể dùng

a) Đưa về trường hợp ít biến hơn

b) Phương pháp nhân tử Lagrange:

- i) Lập hàm Lagrange $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$.
- ii) Tìm các nghiệm $\lambda_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, k$ từ hệ

$$\begin{cases} \Phi'_x = f'_x(x, y, z) + \lambda F'_x(x, y, z) = 0 \\ \Phi'_y = f'_y(x, y, z) + \lambda F'_y(x, y, z) = 0 \\ \Phi'_z = f'_z(x, y, z) + \lambda F'_z(x, y, z) = 0 \\ \Phi'_\lambda = F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

iii) Kiểm tra xem các điểm dừng điều kiện $N_i(x_i, y_i, z_i)$ có là điểm cực trị điều kiện hay tại đó đạt GTLN, GTNN điều kiện hay không.

Tiếp tuyến của đường - pháp tuyến, tiếp diện của mặt

Tiếp tuyến của đường cong $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ trên đường ứng với giá trị $t = t_0$ của tham số là:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $F(x, y, z) = 0$ tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ trên mặt có phương trình lần lượt là:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

Bài giảng 5: Tích phân bội

Chương, mục: 2

Tiết thứ: 21-25

Tuần thứ: 5

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm định nghĩa TP bội, cách xác định cận TP
- Một số ứng dụng
- Thấy lợi ích của dùng đổi biến tọa độ cực
- Nắm được một số các đổi biến tổng quát khác

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§2.1. Tích phân kép

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

§ 2.1. TÍCH PHÂN KÉP

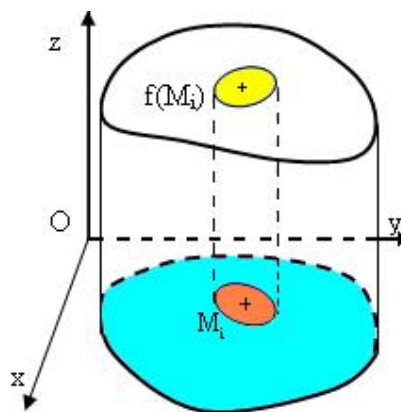
2.1.1. Mở đầu

a. Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$, xác định trên D là miền giới nội, có diện tích.

Chia D thành n mảnh nhỏ không chồng lên nhau. Gọi các mảnh nhỏ đó là $(\Delta S_1), \dots, (\Delta S_n)$ và diện tích tương ứng của chúng là $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$.

Trên mỗi mảnh (ΔS_i) lấy điểm M_i tùy ý: $M_i(x_i, y_i) \in (\Delta S_i)$. Lập tổng tích phân



Hình 2.1. Hình trụ cong

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (2.1)$$

Gọi d_i là đường kính của mảnh (ΔS_i) :

$$d_i = d(\Delta S_i) = \text{Sup}\{MN : M, N \in (\Delta S_i)\}.$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\text{Max}(d_i) \rightarrow 0$, I_n dần đến giới hạn hữu hạn I , không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn các điểm M_i trên (ΔS_i) thì ta nói:

+ Hàm $f(x,y)$ khả tích trên D ;

+ I được gọi là tích phân kép của hàm $f(x,y)$ trên D , ký hiệu là $\iint_D f(x,y) dx dy$;

+ D là miền lấy tích phân; $f(x,y)$ là hàm dưới dấu tích phân.

Lưu ý. Ở trên ta dùng thuật ngữ *miền có diện tích* (hay cầu phương được).

Không cần quan tâm nhiều, đại thể đó là các tập thông thường.

b. Ý nghĩa hình học

$$\text{Thể tích } V = \iint_D f(x,y) dx dy. \quad (2.2)$$

Cho $f(x,y) = 1$, được công thức tính diện tích miền phẳng:

$$dt(D) = \iint_D dx dy. \quad (2.3)$$

c. Điều kiện tồn tại. Cho D là miền giới nội, (có diện tích).

* Nếu $f(x,y)$ bị chặn, liên tục trên D thì khả tích trên D .

* Nếu $f(x,y)$ bị chặn, liên tục từng mảnh trên D thì khả tích trên D .

Chú ý. Để tham khảo, chúng ta nên biết điều kiện rộng rãi nhất của khả tích (xem [15] tr 130):

d. Tính chất của tích phân kép

Tích phân kép có các tính chất giống với tích phân xác định.

Định lý 2.1. Cho $f(x,y)$, $g(x,y)$ là các hàm khả tích trên miền (có diện tích) D nào đó, và a là một số thực. Khi đó

i) Các hàm $f(x,y) \pm g(x,y)$, $af(x,y)$, $|f(x,y)|$ khả tích trên D và

$$\begin{aligned} \iint_D (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy &= \iint_D f(x,y) dx dy \pm \iint_D g(x,y) dx dy, \\ \iint_D a f(x,y) dx dy &= a \iint_D f(x,y) dx dy, \end{aligned}$$

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (2.4)$$

ii) Nếu D có thể tách thành hai miền (có diện tích) và không đâm lên nhau (phần chung chỉ có thể là một phần biên của mỗi miền): $D = D_1 \cup D_2$, thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

iii) Nếu $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (2.6)$$

iv) Các hàm $f(x, y)$, $g(x, y)$, $f^2(x, y)$, $g^2(x, y)$ khả tích trên D và

$$\left(\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy \right)^2 \leq \left(\iint_D f^2(x, y) dx dy \right) \left(\iint_D g^2(x, y) dx dy \right) \quad (2.7)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

Nghiệm đúng Định lý về giá trị trung bình.

2.1.2. Cách tính trong tọa độ Descartes

a. Miền lấy tích phân có dạng hình chữ nhật

Định lý 2.2. Cho $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ và giả sử $f(x, y)$ là hàm liên tục trên D . Khi đó tích phân $\int_c^d f(x, y) dy$ xác định với mọi $x \in [a, b]$ và

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Đổi vai trò hai biến ta thu được

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2.9)$$

Xét trường $f(x, y) = h(x).k(y)$. Theo Định lý 2.2,

$$\iint_D h(x).k(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d (h(x).k(y)) dy = \left(\int_a^b h(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d k(y) dy \right).$$

$$\text{Hệ quả.} \quad \iint_{\{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}} h(x).k(y) dx dy = \int_a^b h(x) dx \cdot \int_c^d k(y) dy. \quad (2.10)$$

$$\text{Ví dụ 2.1. Tính i) } \iint_{0 \leq x, y \leq 1} (x + y^2) dx dy, \quad \text{ii) } \iint_{\{0 \leq x \leq \pi/2, 1 \leq y \leq 2\}} \sin 2x \cdot 2^y dx dy.$$

$$\text{Giải. i) } I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x + y^2) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{5}{6}.$$

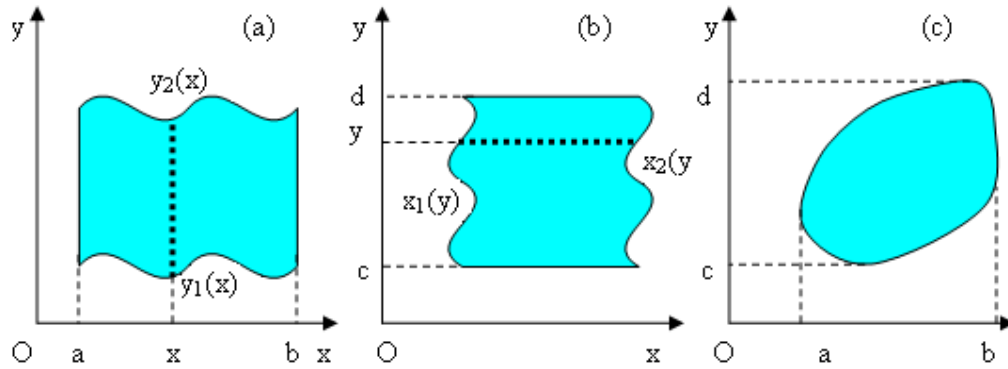
$$\text{ii) } J = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \cdot \int_1^2 2^y dy = \frac{-\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{2^y}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{3}{\ln 2}. \quad \#$$

b. Miền lấy tích phân có dạng bất kỳ

• Nếu D là hình thang cong $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ (Hình 2.2a), $y_1(x), y_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$, hàm $f(x, y)$ liên tục trên D thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.11)$$

• D -hình thang cong đáy//Ox: $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ $f(x, y), x_1(y), x_2(y)$ là những hàm liên tục thì



Hình 2.2. Một số miền lấy tích phân thông dụng trong \mathbb{R}^2

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (2.12)$$

• D vừa có dạng ở Hình 2.2a, vừa có dạng ở Hình 2.2b (xem Hình 2.2c): Chọn một trong hai công thức (2.11) hoặc (2.12). Từ đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.13)$$

Đường như luôn có một thứ tự lấy tích phân thuận lợi hơn thứ tự kia!

Hướng dẫn cách xác định cận TP (xem [1]).

Ví dụ 2.2. Tính $I = \iint_D x^2(y-x) dx dy$, D là miền giới hạn bởi các đường

$y = x^2$ và $x = y^2$.

Giải. $x = y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$. Giao điểm: $y = x^2, y^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x)dy = \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} - x^3 y \right) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \dots = \frac{1}{504}. \quad \#$$

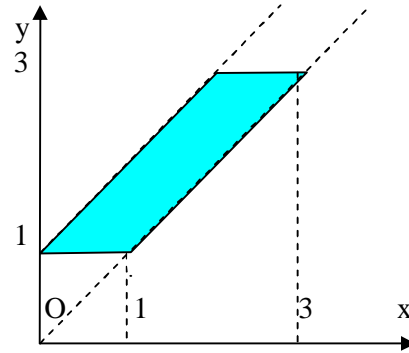
Ví dụ 2.3. Cho D là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x, y = x + 1, y = 1, y = 3.$$

$$\text{Tính } I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Giải.

$$D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 3, y - 1 \leq x \leq y\}.$$



$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dy \int_{y-1}^y (x^2 + y^2) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=y-1}^{x=y} dy \\ &= \int_1^3 \left(\frac{y^3}{3} + y^3 - \left(\frac{(y-1)^3}{3} + y^2(y-1) \right) \right) dy = \dots = 14. \quad \# \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4. Tính tích phân $\int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{x^2} dx$. (Không có nguyên hàm sơ cấp)

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} e^{x^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{4} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4} (e^4 - 1).$$

2.1.3. Đổi biến số với tích phân kép

a. Công thức đổi biến tổng quát

Để tính tích phân kép nhiều khi ta dùng phép đổi biến

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in D' \end{cases} \quad (2.14)$$

+ $x(u, v)$, $y(u, v)$ là các hàm liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng, giới nội $D' \subset Oxy$, (D' có diện tích);

+ (2.14) xác định một song ánh (đơn ánh và lên) từ $D' \rightarrow D \subset Oxy$;

+ Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \det \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D';$$

(có thể trừ ra tại một số hữu hạn đường). Khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (2.15)$$

Chú ý. i) Tính chất của định thức Jacobi là:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0 \Rightarrow \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}}. \quad (2.16)$$

Điều này có thể giúp ta tính định thức Jacobi J thuận lợi hơn.

ii) Bằng đổi biến $u = x, v = -y$ ta nhận được kết quả hữu ích sau:

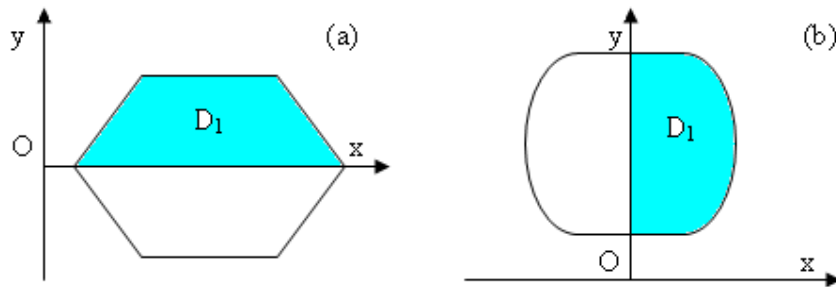
* Cho D là miền đối xứng qua trục Ox , D_1 là phần miền D phía trên trục Ox (xem Hình 2.3a) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) \text{ chẵn với biến } y \\ 0, & f(x, y) \text{ lẻ với biến } y \end{cases} \quad (2.17)$$

(Hàm $f(x, y)$ chẵn với biến y nếu $f(x, -y) = f(x, y), \forall (x, y) \in D$

lẻ với biến y nếu $f(x, -y) = -f(x, y), \forall (x, y) \in D$).

* Tương tự khi miền D đối xứng qua trục tung.



Hình 2.3. Miền đối xứng qua trục Ox (a) và qua trục Oy (b)

Ví dụ 2.5. Tính tích phân $I = \iint_D (x + y)^4 (x - 2y)^5 dx dy$.

trong đó D là miền giới hạn bởi các đường thẳng

$$x + y = 2, \quad x + y = 3, \quad x - 2y = 1, \quad x - 2y = 2.$$

Giải. $D = \{(x, y) : 2 \leq x + y \leq 3, 1 \leq x - 2y \leq 2\}$. Đặt

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v \end{cases} \Rightarrow J = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Khi đó miền D trở thành $D' = \{(u, v) : 2 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2\}$.

$$\Rightarrow I = \int_2^3 du \int_1^2 u^4 v^5 \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3} \left(\frac{u^5}{5} \Big|_2^3 \right) \left(\frac{v^6}{6} \Big|_1^2 \right) = 147,7.$$

Chú ý. Dùng tính chất (2.16) ta có cách thứ hai để tính J thuận lợi hơn:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = -\frac{1}{3}. \quad \#$$

b. Đổi biến tọa độ cực

Xét đổi biến tọa độ cực $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$ Định thức Jacobi của phép biến đổi là

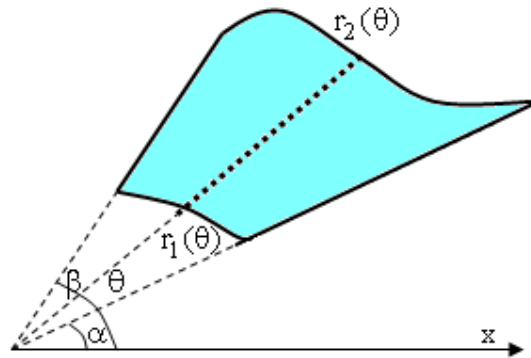
$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \neq 0 \quad (\text{trừ ra tại } O(0,0)).$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (2.18)$$

Đặc biệt, nếu miền D có dạng *hình quạt* như ở Hình 2.4 ta nhận được

$$D' = \{\alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (2.19)$$



Hình 2.4. Miền hình quạt

Cách xác định cận: Xem [1]

Ví dụ 2.6. i) Chứng minh rằng $\iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi R^4}{4}.$

ii) Tính tích phân $I = \iint_D \left(\sin(xy^2) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx dy,$

với D là nửa trên hình tròn tâm O , bán kính 1.

Giải. i) Đặt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ thì $|J| = r$, từ đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 r dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

$$\text{ii) } I = \iint_D \sin(xy^2) dx dy + \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 0 \text{ (lý do?)}$$

$$I_2: \text{ đặt } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, |J| = r,$$

$$I = I_2 = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} dr = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{d(r^2+1)}{2\sqrt{1+r^2}} = \pi \sqrt{1+r^2} \Big|_0^1 = \pi(\sqrt{2}-1). \quad \#$$

Tọa độ cực co giãn (☼) (xem tài liệu [1])

$$\begin{cases} x = a r \cos \theta \\ y = b r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = r \cos \theta \\ \frac{y}{b} = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.20)$$

Nhận xét. Hình dung tọa độ cực co giãn thuận lợi thông qua các đường đồng mức (Hình 2.5b). Các điểm trên trục tọa độ Ox, Oy có góc cực như nhau với tọa độ cực thông thường cũng như tọa độ cực co giãn: Với cả hai loại tọa độ cực, các điểm trên tia Ox đều có góc cực là 0, các điểm trên tia Oy đều có góc cực là $\pi/2$..., các đường đồng mức $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots$ vẫn là các tia Ox, Oy, (☼)

Khi dùng tọa độ cực co giãn $x = a r \cos \theta$, $y = b r \sin \theta$, định thức Jacobi của phép biến đổi là $|J| = abr$. Từ đó ta nhận được

$$\iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_{D'} f(ar \cos \theta, br \sin \theta) r dr d\varphi. \quad (2.21)$$

Ví dụ 2.7. Tính diện tích hình giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, tia Ox và tia:

$$\text{i) } y = x \quad (x \geq 0); \quad \text{ii) } y = 2x/3 \quad (x \geq 0).$$

Giải. Xét phép đổi biến tọa độ cực (co giãn) $\begin{cases} x = 3r \cos \theta \\ y = 2r \sin \theta \end{cases}; |J| = 6r.$

$$\text{i) } y = x \Leftrightarrow 2r \sin \varphi = 3r \cos \theta \Leftrightarrow \tan \theta = 3/2 \Leftrightarrow \theta = \theta_1 = \arctan(3/2).$$

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^1 6r dr = \theta_1 6 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = 3\theta_1 = 3 \arctan \frac{3}{2}.$$

Nhận xét. Nhiều người nhầm $\theta_1 = \pi/4$.

ii) $y = 2x/3 \Leftrightarrow 2r \sin \theta = (2/3)3r \cos \theta \Leftrightarrow \tan \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \theta_2 = \pi/4$.

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 6r dr = \frac{\pi}{4} 6 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{4}. \quad \#$$

Ví dụ 2.8. Tính $\iint_D (|xy| + x + y^2 + \sin(y^3)) dx dy$; $D = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$.

Giải. $I = \iint_D (|xy| + y^2) dx dy + \iint_D x dx dy + \iint_D \sin(y^3) dx dy = I_1 + I_2 + I_3$.

D là miền đối xứng qua trục Oy , hàm $f(x,y) = x$ lẻ với biến x , vậy $I_2 = 0$.

Tương tự, D đối xứng qua Ox , $\sin(y^3)$ lẻ với biến y nên $I_3 = 0$. Từ đó

$$I = I_1 = \iint_D (|xy| + y^2) dx dy = 4 \iint_{D_1} (xy + y^2) dx dy$$

trong đó $D_1 = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, x, y \geq 0 \right\}$.

Đặt $x = 3r \cos \theta$, $y = 4r \sin \theta$, $|J| = 12r$, ta được

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} (3r \cos \theta \cdot 4r \sin \theta + 16r^2 \sin^2 \theta) 12r d\theta \\ &= 4,12 \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) \int_0^{\pi/2} (6 \sin 2\theta + 8(1 - \cos 2\theta)) d\theta = 24(3 + 2\pi). \quad \# \end{aligned}$$

Chú ý. i) Để thuận lợi, người ta còn dùng phép đổi trục

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

để đưa gốc về (x_0, y_0) ; tiếp theo dùng đổi biến $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$.

Việc xác định cận của các biến r, θ nhiều khi khá dễ.

Thực chất của hai lần đổi biến trên là sử dụng phép đổi biến *tọa độ cực dịch chuyển*

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + x_0 \\ y = r \sin \theta + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = r \cos \theta \\ y - y_0 = r \sin \theta \end{cases}, \text{ với } J = r.$$

ii) Nhiều khi miền lấy tích phân cho phép ta sử dụng cả tọa độ cực thông thường và tọa độ cực dịch chuyển. Tuy nhiên khi thực hiện lấy tích phân lặp với loại tọa độ này thì dễ, với loại khác lại khó hơn nhiều. Không có một gợi ý cho điều này.

iii) Đôi khi, người ta còn dùng đổi biến *tọa độ cực co giãn dịch chuyển*

$$\begin{cases} x - x_0 = a r \cos \theta \\ y - y_0 = b r \sin \theta \end{cases}, \text{ với } J = abr.$$

2.1.4. Ứng dụng của tích phân kép

a. Ứng dụng hình học

- Diện tích mảnh phẳng + Thể tích vật thể (đã biết)
- Diện tích mặt cong

$$(S): z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$dt(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy. \quad (2.22)$$

Đề áp dụng (2.22), D: Hình chiếu của S lên Oxy.

Ví dụ 2.9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường Lemniscat

$$(L): (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0).$$

Giải. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, dẫn đến

$$(r^2)^2 = a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) \Leftrightarrow r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Từ tính đối xứng,

$$\begin{aligned} S = 4S_1 &= 4 \iint_{S_1} dx dy = 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2. \end{aligned} \quad \#$$

Ví dụ 2.10. Tính diện tích của mặt xác định bởi giao của các mặt trụ

$$x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0).$$

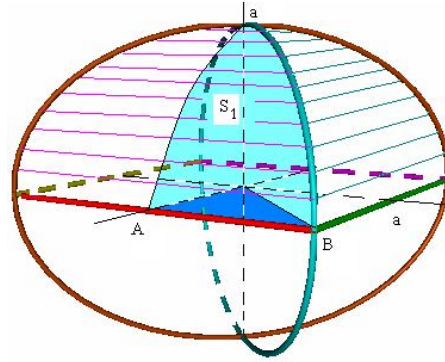
Giải. Từ tính đối xứng, $dt(S) = 16 dt(S_1)$, trong đó S_1 là mặt như Hình 2.6.

Trên (S_1) thì $x^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ hay $(S_1): z = \sqrt{a^2 - x^2}, (x, y) \in D$; D là hình chiếu của (S_1) xuống mặt Oxy, (tam giác OAB). Vậy

$$dt(S_1) = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} dx dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = a^2.$$

$$\text{Suy ra } dt(S) = 16a^2. \quad \#$$



Ví dụ 2.11. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Giải. Khi chiếu vật thể V lên mặt Oxy ta được miền D giới hạn bởi đường

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1: \text{đường tròn tâm } I(1,0) \text{ bán kính } 1.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Từ tính đối xứng, thể tích V được tính bởi

$$V = 2 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Chuyển qua tọa độ cực: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ thì $|J| = r$,

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2r \cos \theta \Leftrightarrow r = 2 \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{4 - r^2} r dr \\ &= 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{16(3\pi - 4)}{9}. \end{aligned} \quad \#$$

b. Một số ứng dụng cơ học

* *Khối lượng bản phẳng D :*

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy; \quad (2.23)$$

* *Trọng tâm $G(x_G, y_G)$:*

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy. \quad (2.26)$$

Đặc biệt, nếu vật đồng chất thì $\rho(x, y) = \rho = \text{const}$, công thức trên trở thành

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{S} \iint_D y dx dy \quad (2.27)$$

trong đó S là diện tích miền D .

Ví dụ 2.12. Tính khối lượng, mô men quán tính với các cạnh OA , OB , điểm O cũng như tọa độ trọng tâm của một phần tư hình tròn D , biết rằng khối lượng riêng tại điểm M trên D tỷ lệ với khoảng cách đến mỗi cạnh OA , OB .

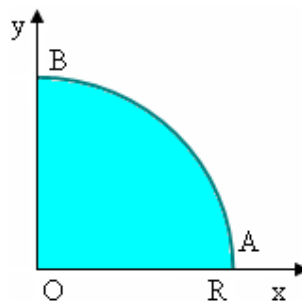
Giải

Xét hệ trục như Hình 2.8. Ta có,

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Khối lượng riêng là

$$\rho(x, y) = Kxy.$$



Hình 2.8. 1/4 hình tròn

$$* m = \iint_D Kxy \, dx \, dy = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} Kxy \, dy = K \int_0^R x \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx = \frac{KR^4}{8}.$$

$$* M_{OA} = M_{OB} = K \iint_D x^2 xy \, dx \, dy = K \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3 y \, dy = \dots = \frac{KR^6}{24}$$

$$* \iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy = K \iint_D x \cdot xy \, dx \, dy = K \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 y \, dy = \frac{KR^5}{15}$$

$$x_G = \frac{KR^5}{15} : \frac{KR^4}{8} = \frac{8}{15}R. \text{ Từ tính đối xứng, } x_G = y_G = \frac{8}{15}R. \quad \#$$

* **Chữa bài tập** (2 tiết):

ĐS. 1. e) $2(e-2)$; 5. f) $20/3$; 6(a): ;

7. e) $(3-2\ln 2)/4$; f) $\sqrt{8}-2\ln(1+\sqrt{2})$.

8: b) $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$; d) $(1/3) \ln(b/a)$; 9: g) $7/24$;

10: f) $64\pi/3$; g) 8π ; h) $16a^3/3$. 14: c) $\pi \frac{3\sqrt{3}-1}{12}$; d) $2a^2(\pi-2)$.

b) Thảo luận	- Viết công thức chuyển TP kép sang TP lặp, cận của biến x trước, cận của biến y sau; Ngược lại - Nêu tọa độ Descartes và tọa độ cực của vài điểm đặc biệt. - Vẽ một số hình, nêu cách xác định cận tích phân.
c) Tự học	VD 2.11; VD2.25; VD 2.26; VD 2.27;
d) Bài tập	Bổ trợ: 1(b, d); 2(b, c); 3(b); 4(a, b); 5(a, c, d); 6(b); 7(d, c); 8(a); 9(d, f); 10(c); 15; 17;
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 6: Tích phân bội (tiếp)

Chương, mục: 2

Tiết thứ: 26-30

Tuần thứ: 6

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm cách xác định cận TP
- Một số ứng dụng
- Nắm được một số các đổi biến tổng quát khác
- Thực chất đổi biến tọa độ trụ là gì.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§2.2. Tích phân bội ba

§ 2.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.2.1. Mở đầu

a. Định nghĩa

Cho $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$, V : miền giới nội, có thể tích.

Chia V thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau. Gọi các mảnh nhỏ đó là $(\Delta V_1), \dots, (\Delta V_n)$ và thể tích tương ứng của chúng là $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$.

Trên mỗi mảnh (ΔV_i) lấy điểm M_i tùy ý: $M_i(x_i, y_i, z_i) \in (\Delta V_i)$.

Lập tổng TP

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad (2.28)$$

Gọi d_i là đường kính của mảnh (ΔV_i) :

$$d_i = d(\Delta V_i) = \sup\{MN : M, N \in \Delta V_i\}.$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max(d_1, \dots, d_n) \rightarrow 0$, I_n dần đến giới hạn I hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn các điểm M_i trên (ΔV_i) thì ta nói:

+ Hàm $f(x, y, z)$ khả tích trên V ;

+ I được gọi là tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên V , ký hiệu là
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \text{ (hay } \iiint_V f dx dy dz \text{ hay } \iiint_V f(x, y, z) dV \dots);$$

+ V là miền lấy tích phân; $f(x,y,z)$ là hàm dưới dấu tích phân.

Lưu ý. Ở trên ta dùng thuật ngữ *miền có thể tích*. Đại thể, đó là miền không quá "lạ lùng"; miền ta xét thông thường luôn có thể tích.

b. Điều kiện tồn tại. Cho V là miền giới nội, (có thể tích).

* $f(x,y,z)$ liên tục trên V thì khả tích trên V ;

* $f(x,y,z)$ bị chặn, liên tục từng mảnh trên V thì khả tích trên V .

c. Tính chất của tích phân bội ba

Giống với tích phân xác định.

2.2.2. Cách tính trong tọa độ Descartes

a. Miền lấy tích phân là hình hộp

$$V = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

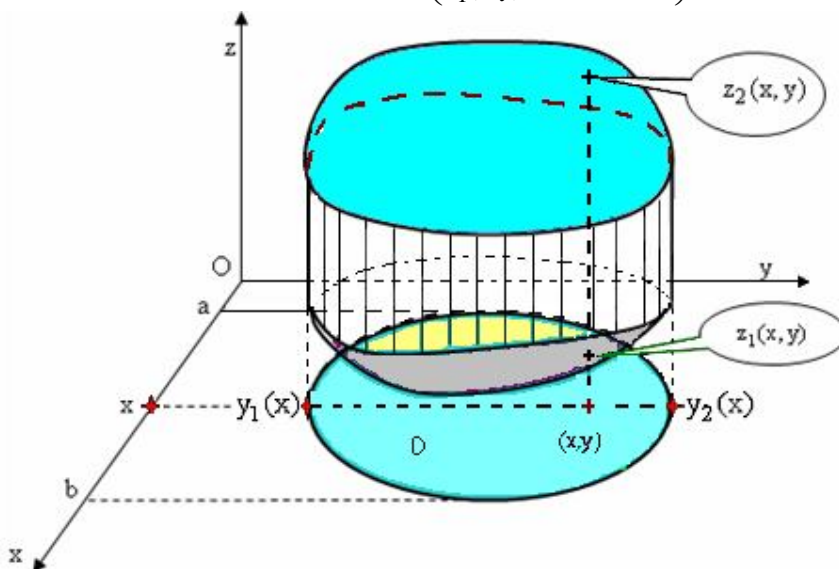
$$\iiint_V f(x,y,z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z) dz$$

(Có thể đổi sang một thứ tự khác).

b. Miền lấy tích phân có dạng hình trụ cong

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}.$$

$$I = \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz.$$



Hình 2.9. Miền hình trụ cong

Hơn nữa, nếu miền D là hình thang cong có đáy // Oy (xem Hình 2.9)

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.30)$$

Lưu ý. (ii) Miền D chính là hình chiếu của vật thể V lên mặt Oxy.

(iii) Để xác định các cận tích phân: Xem [1].

Nếu vật thể có dạng hình trụ cong, với đường sinh song song với trục Ox (hoặc Oy) thì cần điều chỉnh thủ tục đi ít nhiều; chẳng hạn để tìm miền D ta phải chiếu vật thể V lên các mặt Oyz (hoặc Ozx).

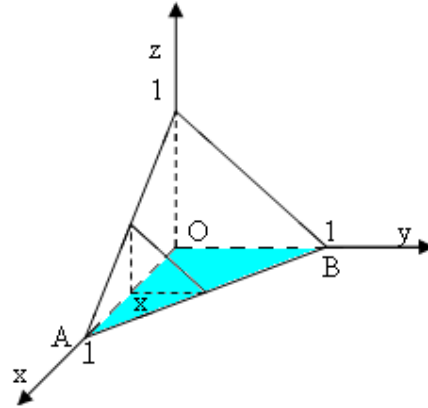
Ví dụ 2.13. Tính tích phân bội ba

$$I = \iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz,$$

V là vật thể giới hạn bởi các mặt tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

$$G. \quad x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - (x + y).$$

Chiếu V xuống mặt phẳng Oxy ta nhận được tam giác OAB. Vậy

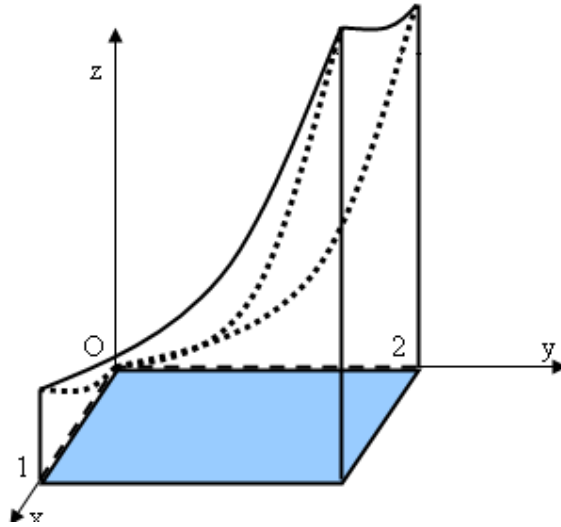


Hình 2.10. Vật thể ở Ví dụ 2.13

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \dots = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned} \quad \#$$

Ví dụ 2.14. Tính tích phân $I = \iiint_V xyz dx dy dz$ với V là miền giới hạn bởi

các mặt $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = x^2 + y^2$.



Hình 2.11. Miền ở Ví dụ 2.14

Giải. Chiếu V xuống Oxy ta được $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Vậy

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^{x^2+y^2} xyz \, dz = \int_0^1 dx \int_0^2 xy \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=x^2+y^2} dy = \frac{121}{60}. \quad \#$$

c. Tính tích phân theo thiết diện

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) \, dy \, dz. \quad (2.31)$$

Xây ra công thức tương tự khi xét các thiết diện $\perp Oy$ hay $\perp Oz$.

Ví dụ 2.15. Tính tích phân $I = \iiint_V x^4 \, dx \, dy \, dz$

trong đó V là miền giới hạn bởi elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$\text{Giải. } I = \int_{-a}^a dx \iint_{S(x)} x^4 \, dy \, dz = \int_{-a}^a x^4 dx \cdot \iint_{S(x)} dy \, dz = \int_{-a}^a x^4 \, dt(S(x)) \, dx.$$

$$\text{Bởi vì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ hay}$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1 \Rightarrow dt(S(x)) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$\text{Từ đó } I = \int_{-a}^a x^4 \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{35} \pi bca^5. \quad \#$$

2.2.3. Đổi biến số trong tích phân bội ba

a. Công thức đổi biến tổng quát

Có thể dùng đổi biến

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in V' \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.32)$$

+ Các hàm $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng $V' \subset Oxyz$, (V' có thể tích);

+ (2.32) xác định một song ánh (đơn ánh và lên) từ $V' \rightarrow V \subset Oxyz$;

+ Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y, w)}{D(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in V' \quad (2.33)$$

(có thể trừ ra tại một số hữu hạn mặt). Khi đó

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw. \quad (2.34)$$

Nhận xét. Bằng cách đổi biến $u = x$, $v = y$, $w = -z$ ta nhận được kết quả hữu ích sau:

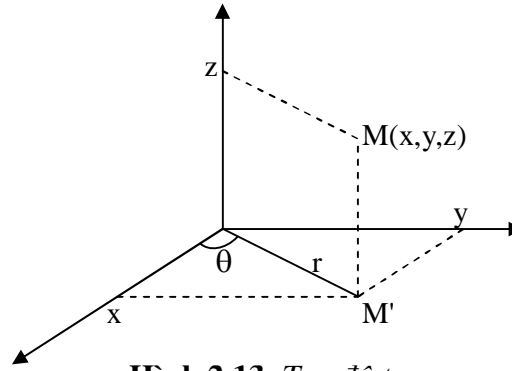
* Cho V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy , V_1 là phần miền V phía trên mặt phẳng Oxy thì

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \begin{cases} 2 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz, & \text{nếu } f(x, y, z) \text{ chẵn với biến } z \\ 0, & \text{nếu } f(x, y, z) \text{ lẻ với biến } z \end{cases}$$

* Phát biểu tương tự khi miền V đối xứng qua mặt Oyz hoặc Ozx .

b. Đổi biến tọa độ trụ

* Tọa độ trụ. $M(x, y, z)$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, tọa độ trụ của nó là bộ ba số (r, θ, z) , trong đó (r, θ) là tọa độ cực của hình chiếu M' của M lên mặt phẳng Oxy (xem Hình 2.13).



Hình 2.13. Tọa độ trụ

Rõ ràng là $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (2.35)$$

Duy chỉ có các điểm trên trục Oz thì $r = 0$, θ tùy ý, z xác định. Các điểm khác có tương ứng 1 - 1 giữa hai loại tọa độ.

Ta có thể viết $M(x, y, z)$ hoặc $M(r, \theta, z)$

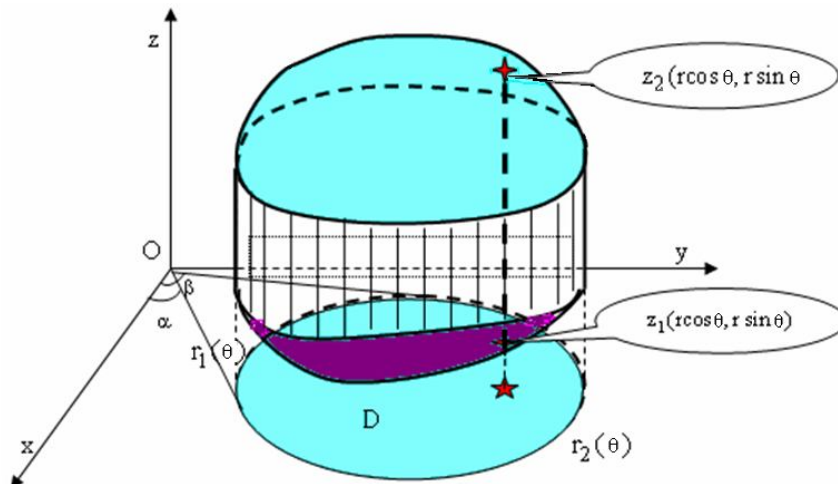
Tọa độ trụ suy rộng ở đó r, θ có thể nhận giá trị bất kỳ, kể cả giá trị âm, hay tọa độ trụ co giãn.

Định thức Jacobi của phép đổi biến (2.35) là

$$J = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

Nhận được công thức tích phân bội ba trong tọa độ trụ

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, d\theta \, dr \, dz. \quad (2.36)$$



Hình 2.14. Miền hình trụ cong trong tọa độ trụ

Khi miền V có dạng *hình trụ cong* và hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy có dạng hình quạt (xem Hình 2.14) thì

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int_{z_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{z_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz$$

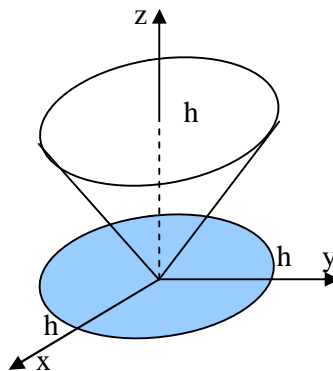
Ví dụ 2.16. Tính tích phân $I = \iiint_V z dx dy dz$ với V là miền giới hạn bởi các

mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = h$ ($h > 0$).

Giải. Xét đổi biến tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r.$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r. \end{aligned}$$



Hình 2.15. Hình nón

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dr \int_r^h z r dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r \frac{z^2}{2} \Big|_r^h dr = 2\pi \int_0^h \frac{r}{2} (h^2 - r^2) dr = \frac{\pi h^4}{4}. \quad \#$$

Nhận xét. Để thuận lợi khi xác định các cận của tích phân lặp, trước hết ta chiếu miền V lên mặt Oxy. Dùng công thức (2.29) ta được

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

rồi dùng tọa độ cực để tính tích phân trên miền D .

Thủ tục "đưa về tọa độ cực" thuận lợi hơn dùng trực tiếp tọa độ trụ.

2.2.4. Ứng dụng của tích phân bội ba

a. Ứng dụng hình học

Thể tích vật thể:

$$V = \iiint_V dx dy dz. \quad (2.44)$$

Ví dụ 2.18. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad (S_2): x^2 + y^2 = 8z.$$

Giải. Vật thể V nằm giữa mặt dưới $z_1 = (x^2 + y^2)/8$ và mặt trên $z_2 = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \geq 0$.

$$\text{Giao tuyến hai mặt: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 8\}$, là hình tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{8}$. Từ đó

$$V = \iiint_V dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D \left(\sqrt{9 - (x^2 + y^2)} - \frac{1}{8}(x^2 + y^2) \right) dx dy.$$

Dùng tọa độ cực $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ với $|J| = r$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{9 - r^2} - \frac{1}{8}r^2 \right) r dr = \frac{40\pi}{3} \text{ (đvtt)}. \quad \#$$

b. Một số ứng dụng cơ học

Khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ tại điểm $M(x, y, z) \in V$, $\rho(x, y, z)$.

* *Khối lượng vật thể V :*

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.45)$$

* *Tọa độ trọng tâm x_G, y_G, z_G của V :*

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ y_G &= \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ z_G &= \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Đặc biệt, $\rho(x, y, z) = \rho = \text{const}$ (vật đồng chất),

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz, \quad z_G = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz \quad (2.47)$$

V : là thể tích vật thể V .

Ví dụ 2.19. Tính tọa độ trọng tâm vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt trụ parabolic $y = x^2$ và các mặt $y = z$, $z = 0$, $y = 1$.

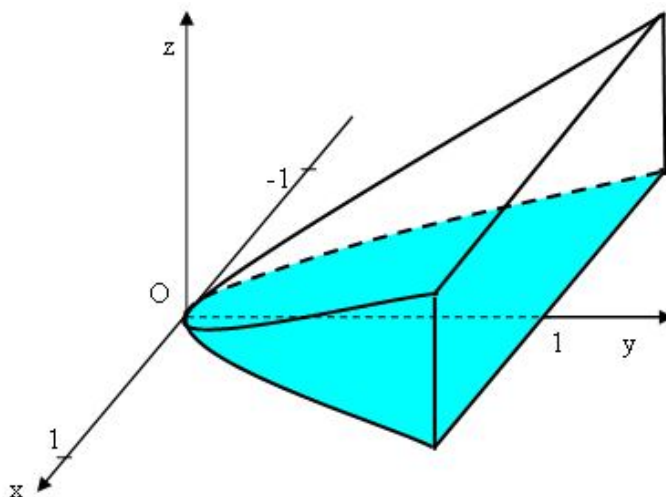
Giải. Mặt dưới và mặt trên của vật thể là $z = 0$ và $z = y$. Ta có

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \dots = \frac{4}{5}.$$

Từ tính đối xứng, $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz = 0$.

$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y y \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y^2 \, dy = \dots = \frac{4}{7}.$$

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2} \, dy = \dots = \frac{2}{7}.$$



Hình 2.19. Miền ở Ví dụ 2.19

Vậy $(x_G, y_G, z_G) = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{5}{14}\right)$.

#

Chữa bài tập.

ĐS. 19. c) 0; 20. f) $\pi/60$; **21:** c) $\pi(e-2)$; d) $16a^2/9 \cdot 2a^2(\pi-2)$.

b) Thảo luận	- Viết công thức chuyển TP bội ba sang TP lặp, cận của biến x trước, cận của biến y sau rồi đến của z; Thứ tự khác. - Nêu một số đối biến tổng quát với miền lấy TP cụ thể (không tính TP).
c) Tự học	VD 2.13;
d) Bài tập	Bổ trợ:
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 7: Tích phân bội (tiếp)

Chương, mục: 2

Tiết thứ: 31-35

Tuần thứ: 7

Mục đích, yêu cầu:

- Thấy lợi ích đặc biệt của đổi biến tọa độ cầu
- Khi nào nên dùng đổi biến TĐ cầu.
- Lợi ích của TP phụ thuộc tham số

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§2.2. Tích phân bội ba (tiếp)

§2.3. Tích phân phụ thuộc tham số

§ 2.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

c. Đổi biến tọa độ cầu (1 tiết)

* **Tọa độ cầu.** Cho ứng mỗi điểm $M(x,y,z)$ trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ với bộ ba số (r, θ, φ) như Hình 2.16, được gọi là *tọa độ cầu* của điểm M .

Gốc tọa độ O ứng với $r = 0$, θ và φ tùy ý.

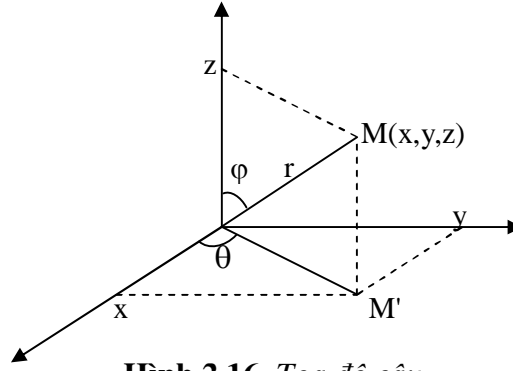
Các điểm còn lại trên trục Oz có r xác định, θ tùy ý, $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = \pi$.

Đối với các điểm còn lại có tương ứng 1 - 1 giữa tọa độ cực và tọa độ cầu:

$$\mathbb{R}^3 - Oz \leftrightarrow \{(r, \theta, \varphi) : 0 < r, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi\}.$$

(Cũng có thể chọn khoảng biến thiên của θ là $-\pi \leq \theta < \pi$).

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (2.38)$$



Hình 2.16. Tọa độ cầu

Nhận xét. Một số tài liệu ký hiệu góc $\widehat{xOM'}$ là φ , góc \widehat{zOM} là θ . Tuy nhiên, ta ký hiệu như trên để phù hợp với nhiều tài liệu khác, và đặc biệt là phù hợp với các phần mềm tính toán hiện đại.

Hà Nội có tọa độ (cầu) (6300, 108, 69) (ở đây góc tính theo độ).

* **Đổi biến số dùng tọa độ cầu.** Dùng đổi biến tọa độ cầu (2.38) để tính tích phân bội ba rất hiệu quả. Định thức Jacobi của phép đổi biến là:

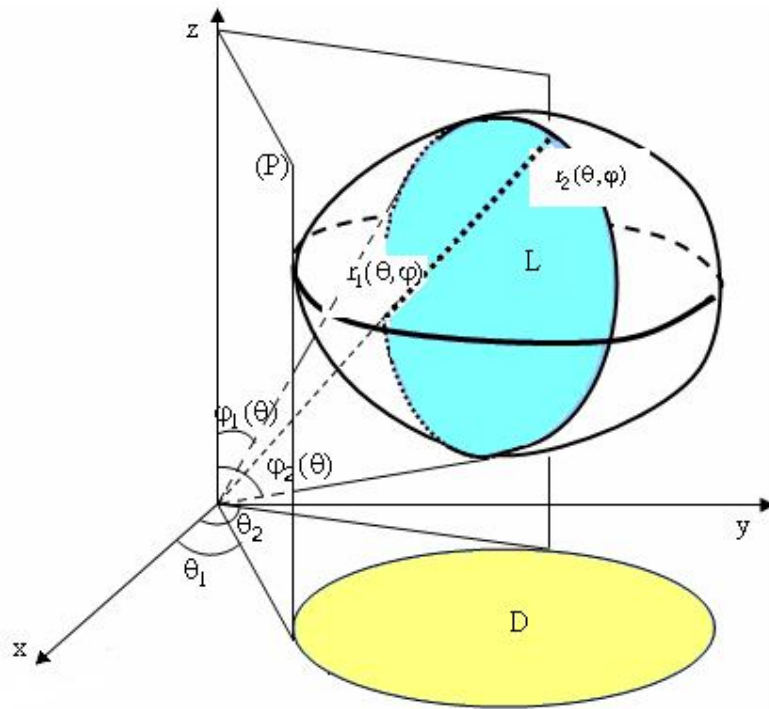
$$J = \det \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{bmatrix} = -r^2 \sin \varphi \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Công thức đúng kể cả khi miền V có chứa những điểm trên trục Oz .

Trong trường hợp miền cho ở Hình 2.17 thì:

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\varphi)}^{\varphi_2(\varphi)} d\varphi \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr. \quad (2.41)$$



Hình 2.17. Xác định cận tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Xác định các cận tích phân: Xem [1].

Tọa độ cầu co giãn

Để tính tích phân bội ba người ta cũng hay dùng tọa độ cầu co giãn:

$$\begin{cases} x = a r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = b r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = c r \cos \varphi, \end{cases} \quad (a, b, c > 0). \quad (2.42)$$

Lưu ý rằng khi đó $|J| = abc r^2 \sin \varphi$, ta được

$$I = abc \iiint_{V'} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi. \quad (2.43)$$

Ví dụ 2.17. Tính tích phân $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ với V là phần giới hạn

bởi 2 mặt cầu

$$\begin{aligned} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

nằm phía trên mặt phẳng Oxy.

Giải. Xét phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{ta được } |J| = r^2 \sin \varphi.$$

Trên (S_1) : $(r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1$,

Tương tự, trên (S_2) : $r = 2$.

$$\text{Từ đó } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} r^2 \sin \varphi dr = 2\pi (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3\pi. \quad \#$$

Ta nên dùng kiểu đổi biến nào cho bài toán tích phân bội ba cụ thể?

Theo kinh nghiệm của chúng tôi, điều này chủ yếu dựa vào miền lấy tích phân.

§ 2.3. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.3.1. Tích phân thường phụ thuộc tham số

Định nghĩa. Cho $f(x, y)$ xác định trên $D = [a, b] \times [c, d]$ sao cho với mọi y cố định trên đoạn $[c, d]$, hàm số $f(x, y)$ khả tích (theo biến x) trên đoạn $[a, b]$. Đặt

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

Tích phân $I(y)$ được gọi là *tích phân phụ thuộc tham số* y . (Là hàm của y).

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Định lý 2.3. Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên $D = [a, b] \times [c, d]$ thì:

- (i) $I(y)$ là hàm liên tục trên đoạn $[c, d]$, $J(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$;
- (ii) $I(y)$ là hàm khả tích trên $[c, d]$, $J(x)$ là hàm khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (2.51)$$

(công thức đổi thứ tự lấy tích phân).

- (iii) Ngoài ra, nếu giả thiết thêm rằng $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ tồn tại và liên tục trên D thì

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx, \quad \forall y \in [c, d] \quad (2.52)$$

(công thức đạo hàm dưới dấu tích phân).

Chứng minh (✱)

Ví dụ 2.20. Tính các tích phân

$$\text{i) } I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b), \quad \text{ii) } J = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (0 < a).$$

Giải. i) Nhận thấy rằng $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \Rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx$.

Áp dụng công thức đổi thứ tự lấy tích phân ta đi đến

$$I = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

ii) Xuất phát từ đẳng thức

$$J(a) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a}, \quad \ell \leq a \leq L$$

trong đó ℓ, L là những số dương bất kỳ, $\ell < L$.

Áp dụng công thức đạo hàm dưới dấu tích phân ta được

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) dx = -2a \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{1}{a^2} \arctan \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \frac{1}{a^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow J = J_2(a) = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(a^2 + 1)}. \quad (*)$$

Vì ℓ, L dương tùy ý nên (*) đúng với mọi a dương.

$$J_n(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n = 3, 4, \dots \#$$

2.3.2. Tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

trong đó hàm số $f(x, y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$, các hàm $u(y), v(y)$ xác định trên đoạn $[c, d]$ và nhận giá trị trên đoạn $[a, b]$:

$$a \leq u(y) \leq b, \quad a \leq v(y) \leq b, \quad \forall y \in [c, d].$$

Định lý 2.4. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$, các hàm số $\alpha(y), \beta(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$ và nhận giá trị trên đoạn $[a, b]$ thì

(i) $I(y)$ là hàm liên tục trên $[c, d]$.

$$(ii) \quad \frac{d}{dy} \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(v(y), y)v'(y) - f(u(y), y)u'(y).$$

Ví dụ 2.21. Tính đạo hàm hàm số $f(x) = \int_x^{\sin x} \sin(tx) dt$

$$\text{Giải. } f'(x) = \int_x^{\sin x} t \cos(tx) dt + \sin(x \sin x) \cos x - \sin x^2. \quad \#$$

2.3.3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét tích phân suy rộng với cận vô hạn phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (2.54)$$

trong đó $f(x, y)$ là hàm số xác định trên dải vô hạn $[a, +\infty) \times [c, d]$.

Định nghĩa. Giả sử tồn tại tích phân

$$I_b(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in [c, d], \quad \forall b > a.$$

* Tích phân suy rộng (2.54) gọi là *hội tụ* tại $y \in [c, d]$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b(y) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx = I(y).$$

Cụ thể là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : \forall b > B \Rightarrow |I_b(y) - I(y)| < \varepsilon.$$

* Tích phân suy rộng (2.54) được gọi là *hội tụ đều* trên đoạn $[c, d]$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : \forall b > B, \forall y \in [c, d] \Rightarrow |I_b(y) - I(y)| < \varepsilon.$$

Nếu tích phân suy rộng $I(y)$ hội tụ đều trên đoạn $[c, d]$ thì cũng hội tụ đều trên đoạn con $[\alpha, \beta]$ bất kỳ của nó.

Định lý 2.5. Nếu tồn tại hàm $g(x)$ sao cho

$$(i) |f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty), \forall y \in [c, d],$$

$$(ii) \text{ Tích phân suy rộng } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ hội tụ}$$

thì tích phân $I(y)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c, d]$.

$$\text{Ví dụ 2.22. Xét tích phân } I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2} dx.$$

Ta thấy $\left| \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall y$; tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ đều trên \mathbb{R} . #

Định lý 2.6

a) Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ còn tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ hội tụ đều trên đoạn $[c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$.

b) Với những giả thiết ở phần a) thì

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \quad (2.55)$$

(Công thức đổi thứ tự lấy tích phân).

c) Giả sử

* $f(x,y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$;

* Tích phân $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ hội tụ với mọi $y \in [c, d]$;

* Đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tồn tại và liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$;

* Tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$.

Khi đó

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x,y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \quad \forall y \in [c, d] \quad (2.56)$$

(Công thức đạo hàm dưới dấu tích phân).

Ta thấy công thức đạo hàm dưới dấu tích phân khá giống với công thức đạo hàm dưới dấu tổng xét đến ở Giáo trình Giải tích I.

Lưu ý. Tất cả các định nghĩa, tính chất vừa nêu ở trên về tích phân suy rộng với cận vô hạn vẫn còn đúng khi chuyển sang tích phân suy rộng của hàm không bị chặn trên đoạn hữu hạn. Độc giả có thể phát biểu các định lý cho riêng mình.

Ví dụ 2.23. Tính các tích phân

$$\text{i) } I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a, b > 0),$$

$$\text{ii) } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{tích phân Poisson-Euler}).$$

Giải. i) Không hạn chế tổng quát coi $0 < a < b$. Xét tích phân

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx = \frac{1}{y} \quad (y > 0).$$

Ta thấy $0 < f(x, y) = e^{-xy} \leq e^{-ax}$, tích phân $\int_a^{+\infty} e^{-ax} dx$ hội tụ.

Vậy $I(y)$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-yx} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln y \Big|_a^b.$$

Từ đó $I = \ln(b/a)$. Công thức đúng cả khi $0 < b < a$.

ii) Đặt $x = ut$, ($u > 0$), ta được $I = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 x^2} dx$.

Nhân hai vế với e^{-u^2} rồi lấy tích phân trên đoạn $[0, +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} I du = \int_0^{+\infty} \left(u e^{-u^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 x^2} dx \right) du = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-u^2 x^2} dx \right) du.$$

Vế trái là I^2 . Đổi thứ tự lấy tích phân ở vế phải ta được

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+x^2)} du \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Nhận xét. Chúng ta nhận được tích phân Poisson-Euler nổi tiếng hay dùng trong Lý thuyết Xác suất:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad \#$$

Ví dụ 2.24 (Hàm Gamma $\Gamma(x)$). Hàm Gamma xác định theo công thức

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0).$$

Trước hết ta có

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x).$$

Sau đây là một số tính chất của hàm Gamma.

$$* \Gamma(1) = 1 \quad * \Gamma(n+1) = n! \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$* \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0) \quad * \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \quad \#$$

Chữa bài tập:

22: b) $4\pi(R^5 - r^5)/15$; c) $8\pi/5$; e) $\pi/48$.

23. a) $\pi a^3/240$; b) $32\pi/3$.

TÓM TẮT CHƯƠNG 2 (Tự học)

TÓM TẮT CHƯƠNG 2

TP kép	Cách tính	<ul style="list-style-type: none"> $\iint_{[a,b] \times [c,d]} h(x).k(y) dx dy = \left(\int_a^b h(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d k(y) dy \right)$ $\iint_{\{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$
	Đổi biến tổng quát	<ul style="list-style-type: none"> $x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D', D \leftrightarrow D'$ thì $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) J du dv$ D đối xứng qua Ox thì $\iint_D f dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f dx dy, & f(x,y) \text{ chẵn với biến } y \\ 0, & f(x,y) \text{ lẻ với biến } y \end{cases}$
	Đổi biến toạ độ cực	<ul style="list-style-type: none"> D là hình quạt: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ D là một phần của ellip: Dùng toạ độ cực co giãn
	Ứng dụng	<ul style="list-style-type: none"> DT mảnh phẳng: $dt(D) = \iint_D dx dy$ KL: $m = \iint_D \rho(x,y) dx dy$ Trọng tâm: $G(x_G, y_G), x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x,y) dx dy, \dots$ DT mặt cong: $dt(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$ TT hình trụ cong: $V = \iint_D f(x,y) dx dy$
TP bộ ba	Cách tính	<ul style="list-style-type: none"> $\iiint_{\left\{ \begin{matrix} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{matrix} \right\}} f dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$

		<ul style="list-style-type: none"> $\iiint_{\{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}} f \, dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f \, dz$ $\iiint_V f(x,y,z) \, dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x,y,z) \, dy dz$
	Đổi biến tổng quát	<ul style="list-style-type: none"> $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), V \leftrightarrow V'$ $\iiint_V f \, dV = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) J \, du dv dw$ V đối xứng qua mặt Oxy thì: $\iiint_V f \, dx dy dz = \begin{cases} 2 \iiint_{V_1} f \, dx dy dz & \text{nếu } f(x, y, z) \text{ chẵn với biến } z \\ 0 & \text{nếu } f(x, y, z) \text{ lẻ với biến } z \end{cases}$
	Đổi biến tọa độ trụ	V là hình trụ cong, hình chiếu lên Oxy là hình quạt: $\iiint_V f \, dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy$ Dùng tọa độ cực để tính tích phân kép thu được
	Đổi biến tọa độ cầu	V là phần hình cầu: $x = r \cos \theta \sin \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \varphi, I =$ $\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr$
	Ứng dụng	<ul style="list-style-type: none"> Thể tích: $V = \iiint_V dx dy dz$ Khối lượng: $m = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz$ Trọng tâm: $G(x_G, y_G, z_G)$: $x_G = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \dots$

b) Thảo luận	<ul style="list-style-type: none"> - Liên hệ tọa độ D với tọa độ cầu. - Công thức đổi biến TĐ cầu - Xác định cận tích phân trong TĐ cầu
c) Tự học	VD2.37 ; VD 2.40
d) Bài tập	Bổ trợ: 22(d); 24(c, d, e, f, h); 25.
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 8: Tích phân đường và tích phân mặt

Chương, mục: 3

Tiết thứ: 36-40

Tuần thứ: 8

Mục đích, yêu cầu:

- Tích phân đường loại I: Nắm được công thức tính, vài ứng dụng.
- TP đường loại II: Các công thức tính, Cách nhớ và áp dụng của công thức Green. Điều kiện TP độc lập với đường lấy TP.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§ 3.1 Tích phân đường loại I

§3.2. Tích phân đường loại II

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG - TÍCH PHÂN MẶT

§ 3.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

3.1.1. Mở đầu

a. Bài toán khối lượng đường cong vật chất (xem [1])

b. Định nghĩa. $u = f(M)$ xác định trên cung $L = \widehat{AB}$ là đường cong liên tục trong không gian, không tự cắt, (có độ dài). Chia \widehat{AB} thành n cung nhỏ bởi các điểm chia liên tiếp $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$. Gọi độ dài cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i . Trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ chọn điểm M_i tùy ý. Lập tổng TP

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max_{i=1, \dots, n} \Delta s_i \rightarrow 0$ mà tổng tích phân dần đến giới hạn

hữu hạn I xác định, không phụ thuộc vào cách chia cung \widehat{AB} và cách chọn các điểm M_i thì:

+ Giới hạn I được gọi là *tích phân đường loại một* của hàm $f(M)$ trên cung \widehat{AB} , và ký hiệu là $\int_{\widehat{AB}} f(M) ds$ (hay $\int_L f(M) ds, \int_L f(x, y, z) ds, \int_L f ds \dots$).

Lưu ý. Trong định nghĩa có nói đến đường cong có độ dài, là đường cong thông thường ta vẫn gặp, coi mọi đường cong ta xét đều có độ dài.

c. *Điều kiện tồn tại.* Nếu cung \widehat{AB} giới nội, trơn từng khúc, còn $f(M)$ bị chặn và liên tục từng khúc trên \widehat{AB} thì hàm $f(M)$ khả tích trên \widehat{AB} .

d. *Tính chất*

i) Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của đường cong:

$$\int_{\widehat{AB}} f(M) ds = \int_{\widehat{BA}} f(M) ds.$$

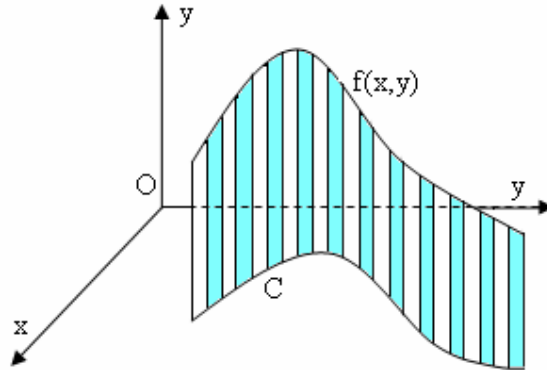
ii) Tích phân đường loại một có các tính chất khác giống với tích phân xác định thông thường như tính chất tuyến tính, hệ thức Chasles, xác định dương ...

e. *Ý nghĩa hình học - cơ học*

* Chiều dài s của cung \widehat{AB} có thể tính thông qua tích phân đường loại một:

$$s = \int_{\widehat{AB}} ds. \quad (3.2)$$

* Diện tích của bức rèm (hay hàng rào) (Hình 3.1) cho bởi



Hình 3.1. Bức rèm

$$S = \int_C f(x, y) ds$$

* Nếu cung vật chất \widehat{AB} có khối lượng riêng $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ tại điểm $M(x, y, z)$ thì khối lượng đường cong được tính bởi công thức

$$m = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) ds. \quad (3.3)$$

Trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của cung \widehat{AB} xác định như sau:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} x \rho(x, y, z) ds \\ y_G = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} y \rho(x, y, z) ds \\ z_G = \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} z \rho(x, y, z) ds \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1.2. Cách tính

\widehat{AB} : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Khi đó

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (3.5)$$

\widehat{AB} : đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (3.6)$$

Ví dụ 3.1. Tính tích phân $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$,

L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

Giải. $L: \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Xét phép đổi biến tọa độ cực $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Phương trình của L là $r = a \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, suy ra phương trình tham số

của nó là $\begin{cases} x = a \cos^2 \theta \\ y = (a/2) \sin 2\theta \end{cases}$. Từ đó $\begin{cases} x' = -a \sin 2\theta \\ y' = a \cos 2\theta \end{cases} \Rightarrow x'^2 + y'^2 = a^2$. Vậy

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} a d\theta = 2a^2. \quad \#$$

§ 3.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

3.2.1. Mở đầu

a. Bài toán công của lực biến đổi (Cùng đọc sách)

Ta biết rằng, nếu chất điểm di chuyển trên đoạn thẳng AB dưới tác động của lực không đổi \vec{F} thì công của lực sinh ra là $\overline{AB} \cdot \vec{F}$.

Tổng quát hiện tượng này (xem [1]) cùng nhiều hiện tượng vật lý khác người ta dẫn đến khái niệm TP đường loại II sau đây.

b. Định nghĩa. Trong mặt phẳng Oxy xét đường cong định hướng $L = \widehat{AB}$ (chiều đường cong đi từ A đến B). Cho $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là những hàm xác định trên \widehat{AB} . Lập hàm véc tơ $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Chia \widehat{AB} thành n cung nhỏ bởi các điểm chia liên tiếp $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$.

Gọi hình chiếu lên các trục Ox, Oy của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lần lượt là $\Delta x_i, \Delta y_i$. Lấy điểm M_i tùy ý trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i],$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max_{i=1, \dots, n} |\Delta x_i|, \max_{i=1, \dots, n} |\Delta y_i| \rightarrow 0$ mà tổng I_n dần đến

giới hạn I hữu hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia cung \widehat{AB} , cách chọn các điểm M_i thì:

+ Giới hạn I được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ (hay của trường véc tơ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$) trên cung \widehat{AB} và ký hiệu là

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ hay } \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy \text{ hay } \int_L Pdx + Qdy;$$

+ Các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ được gọi là khả tích trên \widehat{AB} .

Chú ý. Tích phân được viết đơn giản hơn khi thành phần P (hoặc Q) triệt tiêu, cũng như khi có thừa số chung:

$$\int_{\widehat{AB}} Qdy \text{ (hoặc } \int_{\widehat{AB}} Pdx); \int_{\widehat{AB}} HPdx + HQdy = \int_{\widehat{AB}} H(Pdx + Qdy).$$

c. Điều kiện tồn tại

Nếu \widehat{AB} là đường cong liên tục, trơn từng khúc, các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục hoặc liên tục từng khúc và bị chặn thì tích phân đường loại hai $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ tồn tại.

d. Tính chất. + Chiều đường cong có vai trò quan trọng: Nếu đường cong được lấy theo chiều ngược lại thì tích phân đường loại hai cùng trị tuyệt đối nhưng đổi dấu:

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = - \int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy.$$

+ Ngoài ra, TP đường loại hai cũng có các tính chất khác của TP xác định thông thường.

e. Ý nghĩa cơ học. Công của lực $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ tác động trên đường cong (định hướng) trơn từng khúc \widehat{AB} cho bởi

$$W = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy.$$

3.2.2. Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai

Giả sử đường cong định hướng L trơn từng khúc và tại điểm $M(x,y)$ có véc tơ tiếp tuyến đơn vị $\vec{\tau}(M) = (\alpha(M), \beta(M))$. Khi đó

$$\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_L [P(x,y)\alpha(x,y) + Q(x,y)\beta(x,y)] ds$$

hay một cách tương đương:

$$\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_L \vec{F}(x,y) \cdot \vec{\tau}(x,y) ds = \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds.$$

Một số tài liệu dùng về phải của PT này làm định nghĩa (và ký hiệu) của tích phân đường loại II.

3.2.3. Cách tính

a. Đường cong cho dưới dạng tham số. Nếu đường cong $L = \widehat{AB}$ cho dưới dạng tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, ($t = a$ ứng với điểm đầu A , $t = b$ ứng với điểm cuối B), các hàm $x(t)$, $y(t)$ liên tục, khả vi từng khúc, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là những hàm liên tục trên L thì

$$\begin{aligned} I &= \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \end{aligned} \quad (*)$$

b. Đường cong cho dưới dạng phương trình hiện.

+ $L = \widehat{AB} : y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, $y(x)$ là hàm liên tục, khả vi từng khúc, $x = a$ ứng với điểm đầu A , $x = b$ ứng với điểm cuối B của đường;

+ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục trên L thì

$$I = \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx.$$

Chú ý. * Nếu đường cong chưa có dạng tham số thì khi lấy tích phân đường loại hai ta phải tham số hóa đường cong.

* Trong không gian, cũng ĐN TP đường loại hai của các hàm $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ (hay của trường véc tơ $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$) lấy trên đường cong định hướng L :

$$I = \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

Các tính chất, cách tính ... tương tự với trường hợp đường cong phẳng, chẳng hạn, công thức (3.12) trở thành:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

Ví dụ 3.2. Cho tích phân $I = \int_L (x + y) dx + xy dy$.

- (a) Vẽ một số véc tơ của trường \vec{F} .
 (b) Tích phân mang dấu gì khi L là cung nối $O(0,0)$ với $A(1, 1)$ theo:
 (i) cung parabol $y = x^2$; (i) đoạn thẳng AB ?

Hãy tính giá trị của I để khẳng định nhận xét vừa đưa ra.

Giải. (a) $\vec{F} = (x + y, xy)$ (Hình 3.3- Độ dài các véc tơ đã được co 5 lần).

(b) Ta thấy toàn bộ chuyển động đều xuôi theo trường, vậy $I > 0$.

Cụ thể: Tiếp tuyến của đường cong đều tạo với véc tơ của trường một góc nhọn. Mọi số hạng $\vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ trong tổng tích phân đều dương; tổng tích phân cũng vậy, và do đó tích phân sẽ dương.

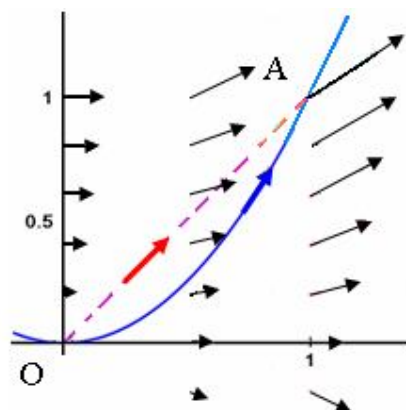
(i) Trên cung \widehat{AB} thì $y = x^2$, vậy

$$I = \int_0^1 (x + x^2 + x \cdot x^2 \cdot 2x) dx = \frac{27}{30}.$$

(ii) Trên đoạn AB thì $y = x$,
 vậy

$$I = \int_0^1 (x + x + x \cdot x) dx = \frac{4}{3}. \quad \#$$

Nhận xét. Đối với trường đã cho, TP trên hai đường cong nối O với A cho ra hai kết quả khác nhau.



Hình 3.3. Trường ở Ví dụ 3.2

3.2.4. Công thức Green

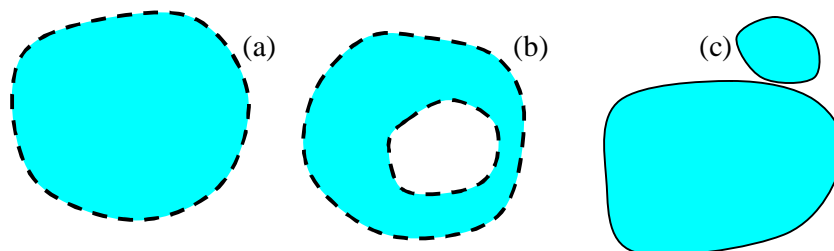
Nhắc lại và đưa ra vài khái niệm phụ trợ.

* *Miền liên thông.* Miền $E \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là liên thông (liên thông đường) nếu ta có thể nối hai điểm bất kỳ của nó bằng một đường gãy khúc nằm hoàn toàn trong E .

Nếu E mở thì có thể thay cụm từ “đường gãy khúc” bằng “đường cong trơn từng khúc”.

* *Miền đơn liên.* Miền liên thông U trong \mathbb{R}^2 được gọi là một miền đơn liên nếu mọi đường cong kín, có độ dài (đo được Jordan) đều bao bọc một miền nằm hoàn toàn trong U . Nói cách đơn giản, miền đơn liên là miền “không có lỗ”

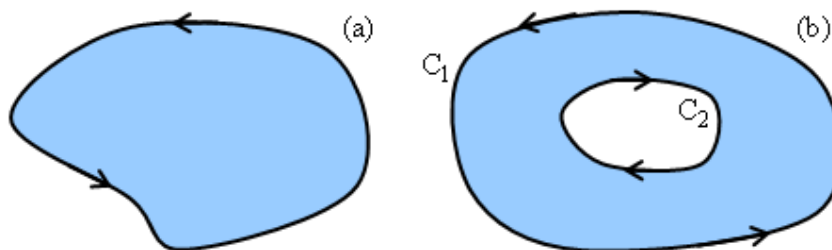
thủng" và không thể chứa hai mẫu riêng biệt. Miền không đơn liên (miền có "lỗ thủng") là miền đa liên.



Hình 3.4. Miền liên thông(a,b) - không liên thông (c)

đơn liên (a), nhị liên (b) trong \mathbb{R}^2

* *Hướng dương* của biên của miền liên thông D - đơn liên cũng như đa liên - là hướng mà một người đi theo hướng đó sẽ thấy phần miền D gần nhất luôn ở bên trái. (Xem Hình vẽ)



Hình. Hướng dương của biên của miền đơn liên (a) và nhị liên (b)

Định lý (Công thức Green). Cho D là miền đóng, bị chặn, liên thông, có biên L gồm một số hữu hạn đường cong kín, trơn từng khúc, rời nhau đôi một và có hướng dương. Giả sử $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng là những hàm liên tục trên D. Khi đó ta có công thức

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

CÁCH NHỚ!

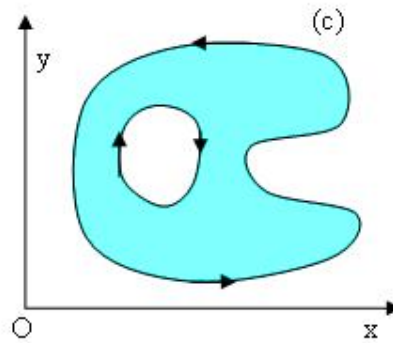
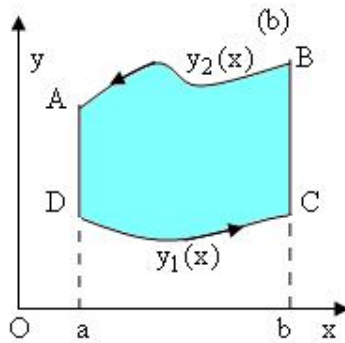
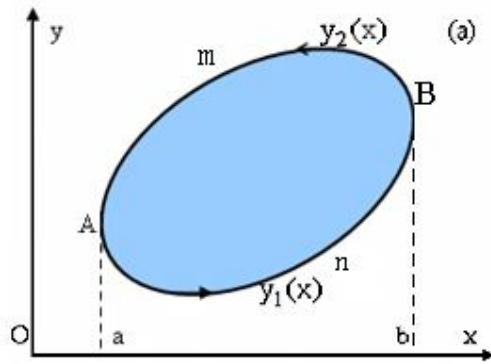
Chứng minh. * Giả sử D là miền đơn giản, ở đó mọi đường thẳng song song với trục Ox hoặc Oy sẽ cắt biên L của nó tại không quá 2 điểm (Hình a).

Áp dụng công thức chuyển tích phân kép sang tích phân lặp ta được

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Theo cách tính tích phân đường loại hai, về phải là

$$\int_{\widehat{AmB}} P(x,y)dx - \int_{\widehat{AnB}} P(x,y)dx = \int_{\widehat{AmBnA}} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx$$



Hình. Miền đơn giản (a), hình thang cong (b), và miền đa liên (c)

Tương tự, $J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x,y) dy$

Suy ra $J - I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$

* D là hình thang cong có đáy // Oy, tức là mọi đường thẳng đi qua điểm trong của miền và // Oy sẽ cắt biên L của nó tại đúng hai điểm (xem Hình), ta thêm vào tích phân trên 2 đoạn CB và AD, ta nhận được kết quả tương tự.

* Các trường hợp khác: Bỏ qua chứng minh (xem [1]) \square

Ví dụ. Tính $I = \int_{\widehat{AO}} (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$ với \widehat{AO} là nửa đường

tròn $x^2 + y^2 = 4x$ ($y \geq 0$), chạy từ A(4,0) đến O(0,0).

Giải. $x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$. ĐT C tâm (2,0), bán kính 2.

\widehat{AO} chưa kín, ta thêm vào đoạn thẳng OA để được đường kín. Từ đó,

$$I = \int_{\widehat{AO}} = \left(\int_{\widehat{AO}} + \int_{OA} \right) - \int_{OA} = \oint_L - \int_{OA}$$

L: biên của nửa trên của hình tròn (theo hướng dương). Vậy,

$$\oint_L = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 1) dx dy = 2\pi.$$

Trên OA thì $y = 0 \Rightarrow \int_{OA} = 0$. Tóm lại $I = 2\pi - 0 = 2\pi$.

Nhận xét. Phương trình tọa độ cực của \widehat{AO} là $r = 4\cos\theta$, do đó dạng tham số của nó là $x = 4\cos^2\theta$, $y = 2\sin 2\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Tuy nhiên, tính trực tiếp tích phân I dùng công thức (*) theo tham số θ sẽ khó khăn. #

3.2.5. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân

Nói chung, TP $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ phụ thuộc vào A, B cũng như vào bản thân đường cong nối A với B (xem Ví dụ 3.2). Trong một số trường hợp, tích phân này chỉ phụ thuộc vào các mút A, B của đường mà không phụ thuộc vào đường nối A với B.

Định lý 3.2. Cho D là một tập mở, đơn liên trong \mathbb{R}^2 . Giả sử $P(x,y)$, $Q(x,y)$ cùng các đạo hàm riêng của chúng là các hàm liên tục trong D. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương với nhau:

a) $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ với mọi $(x,y) \in D$.

b) $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong L kín, không tự cắt, trọn từng khúc nằm hoàn toàn trong D.

c) Tích phân $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$, trong đó \widehat{AB} là cung trọn từng khúc, không tự cắt, nằm hoàn toàn trong D, chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A, điểm cuối B mà không phụ thuộc vào đường cong trọn từng khúc, không tự cắt, nằm hoàn toàn trong D nối A với B.

d) Biểu thức $Pdx + Qdy$ là *vi phân toàn phần*, tức là tồn tại hàm $u(x,y)$ có các đạo hàm riêng (cấp hai) liên tục trong D và $du = Pdx + Qdy$.

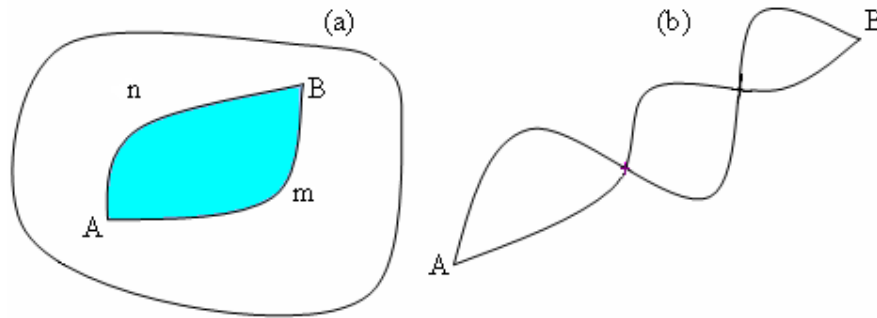
Chứng minh. Ta sẽ chứng minh theo sơ đồ $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$.

* $a) \Rightarrow b)$. Giả sử L là đường cong kín bất kỳ, không tự cắt, trọn từng khúc, nằm trong D. Vì D là miền đơn liên nên miền (hữu hạn) G có biên là L cũng nằm trong D. Theo công thức Green ta có

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

* b) \Rightarrow c). Giả sử \widehat{AmB} , \widehat{AnB} là hai cung bất kỳ tron từng khúc, có hai điểm chung duy nhất là A và B, nằm hoàn toàn trong D. Khi đó \widehat{AmBnA} là đường cong kín trong D. Từ chỗ mệnh đề b) là đúng, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\widehat{AmBnA}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AmB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BnA}} Pdx + Qdy \\ &= \int_{\widehat{AmB}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{AnB}} Pdx + Qdy \end{aligned}$$



Hình 3.7. Những cung nối A với B (a): Không cắt nhau, (b): Cắt nhau

Chú ý. i) Giả thiết đơn liên của miền D không bỏ qua được (xem Ví dụ 3.23, 3.30). Nếu D không đơn liên thì từ khẳng định a) ta không thể suy ra các khẳng định còn lại. Muốn nhận được các khẳng định còn lại, ta phải hạn chế xét trong miền đơn liên con D' nào đó chứa trong D.

ii) Nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D nói trên sao cho $du = Pdx + Qdy$ thì $\vec{F} = (P, Q)$ gọi là *trường thế*, hàm $u(x,y)$ gọi là *hàm thế* (hàm thế năng, hàm thế vị) của trường, (chúng ta sẽ xét kỹ hơn về trường ở Bài §3.5) và có thể chứng minh rằng

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) \doteq u(M) \Big|_A^B. \quad (3.15)$$

iii) Nếu D mở, đơn liên và một trong 4 khẳng định nêu trong Định lý 3.4 thỏa mãn, (Khẳng định (a) dễ kiểm tra hơn cả!) có thể tính hàm thế $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \int_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy + C \quad (3.16)$$

trong đó \widehat{AM} là đường cong tùy ý tron từng khúc, không tự cắt, nằm trong D nối A với M.

Đặc biệt, nếu đường gấp khúc ACM (mỗi khúc của nó song song với một trong hai trục tọa độ) nằm trong D. Vậy

$$u(x,y) = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C$$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

Tương tự cho trường hợp khi đường gấp khúc ABM nằm trong D.

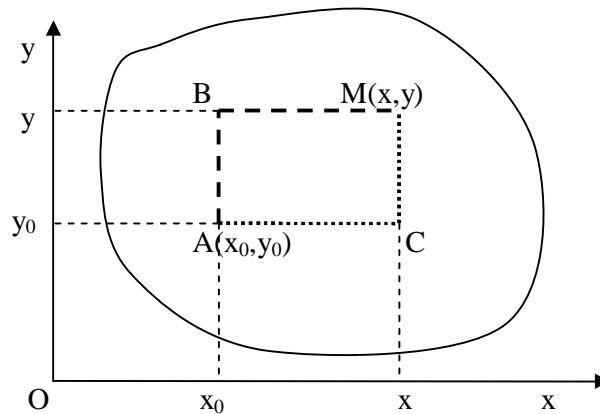
Như vậy, nếu đường gấp khúc ACM (hoặc ABM) nằm trong D thì

$$u(x, y) =$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

Vị trí của chỉ số “0”

(chỉ số “0” đánh vào biến một lần,
đánh vào biến này ở tích phân lấy theo biến kia).



Hình 3.9. Đường gấp khúc mà mỗi khúc // trục tọa độ nối A với M

Ví dụ 3.5. Tính tích phân $I = \int_{\widehat{AO}} e^{xy} [y^2 dx + (1 + xy) dy]$, với \widehat{AO} là cung

$y = x \sin^2 x$ đi từ $A(\pi, 0) \rightarrow O(0, 0)$.

Giải. $P(x, y) = e^{xy} y^2 \Rightarrow P'_y = e^{xy} (xy^2 + 2y)$;

$$Q(x, y) = e^{xy} (1 + xy) \Rightarrow Q'_x = e^{xy} (2y + xy^2).$$

Vậy $P'_y = Q'_x$. Các hàm P, Q, P'_y, Q'_x liên tục. Từ đó, tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân, ta chọn đoạn thẳng AO nối A với O.

$$\text{Trên AO, } y = 0 \text{ nên } I = \int_{AO} P dx + Q dy = \int_{AO} P dx = \int_a^0 0 dx = 0. \quad \#$$

Ví dụ 3.6. Chứng tỏ rằng biểu thức $6x(e^y + x)dx + (3x^2 + y - 2)e^y dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Tìm hàm $u(x,y)$ đó.

Áp dụng: Tính tích phân $I = \int_L 6x(e^y + x)dx + (3x^2 + y - 2)e^y dy$ trong đó L

là đường $y^3 + 3x^3 - 4x = 0$ đi từ điểm $O(0,0)$ tới điểm $A(1,1)$.

Giải. * Vì $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xe^y = \frac{\partial P}{\partial y}$, các hàm $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ liên tục (trên \mathbb{R}^2) nên theo Định lý 3.2 biểu thức đã cho là vi phân toàn phần. Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$, áp dụng công thức (3.17),

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^y (3 \cdot 0 + y - 2)e^y dy + \int_0^x 6x(e^y + x)dx + C \\ &= \int_0^y (y - 2)de^y + 6 \left(e^y \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^x + C = e^y(y - 3 + 3x^2) + 2x^3 + C. \end{aligned}$$

* Theo (3.15), $I = u(1,1) - u(0,0) = e + 5$.

Nhận xét. Theo ngôn ngữ của lý thuyết trường, Ví dụ trên nghĩa là: Chứng tỏ $\vec{F} = 6x(e^y + x)\vec{i} + (3x^2 + y - 2)e^y\vec{j}$ là trường thế; tìm hàm thế. Tìm lưu số của trường khi một chất điểm di chuyển từ $O(0,0)$ tới $A(1,1)$.

Vì \vec{F} là trường thế, tích phân đã cho bằng hiệu hai giá trị của hàm thế tại A và O : $I = u(1,1) - u(0,0) = e + 5$. #

Bài tập chữa trên lớp

7. $\pi/2$; 8. $\alpha = -2$; 14. c) $-7\pi a^2/2$; 16. c) $3\pi/2$; d) $3\pi/4 - 4$.

b) Thảo luận	
c) Tự học	VD3.23 ; VD3.25 ; VD3.26 ; VD3.27 ; VD3.28 ; VD3.29 ; VD3.31
d) Bài tập (1t)	3(b); 10(b, c, d, e);
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 9: Tích phân đường và tích phân mặt (tiếp)

Chương, mục: 3

Tiết thứ: 41-45

Tuần thứ: 9

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được điều kiện TP độc lập với đường lấy TP.
- Làm được bài tập
- Nắm được khái niệm tích phân mặt loại I, loại II

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§3.2. Tích phân đường loại II (tiếp: Sự độc lập của TP vào đường trong KG)

Bài tập tích phân đường

§3.3. Tích phân mặt loại I

§3.4. Tích phân mặt loại II

§ 3.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

Định lý 3.2. cũng được tổng quát sang trường hợp không gian.

Định lý. Trong \mathbb{R}^3 cho U là một tập mở, đơn liên mặt (xem [1]). Các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên U . Khi đó 4 mệnh đề sau là tương đương với nhau.

$$(a) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ với mọi } (x,y,z) \in U.$$

CÁCH NHỚ!

(b) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong L không tự cắt, kín, trơn từng khúc nằm hoàn toàn trong U .

(c) Tích phân $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$, trong đó \widehat{AB} là cung trơn từng khúc, không tự cắt, nằm hoàn toàn trong U , chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A , điểm cuối B mà không phụ thuộc vào đường cong trơn từng khúc, không tự cắt, nằm hoàn toàn trong U nối A với B .

(d) Biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần, tức là tồn tại hàm $u(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng (cấp hai!) liên tục trong U và

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Chú ý. (i) Nếu tồn tại hàm $u(x,y,z)$, có các đạo hàm riêng liên tục trong miền U nói trên sao cho $du = Pdx + Qdy + Rdz$ thì trường $\vec{F} = (P, Q, R)$ gọi là trường thế, $u(x,y,z)$ gọi là hàm thế (hay hàm thế vị, hàm thế năng) của trường, và có thể chứng minh rằng

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A) \doteq u(M) \Big|_A^B.$$

(ii) Nếu miền D mở, đơn liên mặt và một trong 4 khẳng định nêu trong Định lý 3.3 thỏa mãn thì có thể tính hàm $u(x,y,z)$ theo công thức

$$u(x,y,z) = \int_{\widehat{AM}} P dx + Q dy + R dz + C$$

trong đó \widehat{AM} là đường cong tùy ý trơn từng khúc, không tự cắt, nằm trong U nối A với M .

Đặc biệt, với $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x, y_0, z_0)$, $C(x, y, z_0)$, $M(x, y, z)$ mà đường gấp khúc $ABCM$ (các đoạn của nó lần lượt song song với các trục Ox , Oy , Oz) nằm trong U , thì

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C. \quad (3.17)$$

Tương tự với các trường hợp khác của đường gấp khúc nối A với M .

(iii) Giả thiết đơn liên của miền U là không bỏ qua được.

Ví dụ 3.8. Chứng tỏ rằng $y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2 z^2 dz$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y,z)$ nào đó, tìm hàm này. (Nói cách khác: Chứng tỏ rằng $\vec{F} = y^2 z^3 \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + 3xy^2 z^2 \vec{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị).

Giải. $P = y^2 z^3$, $Q = 2xyz^3$, $R = 3xy^2 z^2$.

Rõ ràng các điều kiện về khả vi thỏa mãn. Ta có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2yz^3 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 6xyz^2 = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 3y^2 z^2 = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Theo Định lý, biểu thức đã cho là vi phân toàn phần. Đặt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, hàm thế vị có thể tính như sau:

$$u(x,y,z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y 0 dy + \int_0^z 3xy^2 z^2 dz + C = xy^2 z^3 + C. \quad \#$$

Chữa bài trên lớp.

22. d) $-2\pi a(h+a)$; 24. c) $12\pi/5$; d) 0; e) $4\pi a^3/3$; f) $4\pi a^3$; h) 0.

25. $\pi/3$.

§ 3.3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

3.3.1. Mở đầu

a. Định nghĩa. S : mặt hữu hạn, (có diện tích),

Hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên S .

Chia S thành n mảnh nhỏ, gọi các mảnh này là $(\Delta S_1), \dots, (\Delta S_n)$ và diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$.

Trên mảnh ΔS_i lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$.

Gọi d_i là đường kính của mảnh ΔS_i . Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max_{i=1, \dots, n} d_i \rightarrow 0$ mà các tổng I_n dần đến một giới hạn I hữu hạn xác định, không

phụ thuộc vào cách chia mặt S cũng như cách chọn các điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân mặt loại một* của hàm $f(x, y, z)$ trên S và ký hiệu là $\iint_S f(x, y, z) dS$ hay $\iint_S f(M) dS$ hay $\iint_S f dS$.

Nếu mặt S kín thì ký hiệu là $\oiint_S f(M) dS$.

b. Điều kiện tồn tại. Giả sử rằng:

i) Mặt S liên tục, giới nội, (có diện tích), trơn từng mảnh;

ii) Hàm $f(x, y, z)$ liên tục hoặc bị chặn và liên tục từng mảnh trên S .

Khi đó tồn tại tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ trên S .

c. Tính chất. Giống tính chất của TP xác định.

3.3.2. Ý nghĩa

a. Ý nghĩa hình học. Nếu mặt S liên tục, giới nội, trơn từng mảnh thì diện tích S của nó có thể tính theo công thức

$$dt(S) = \iint_S dS. \quad (3.18)$$

b. Ý nghĩa cơ học. Nếu khối lượng riêng của mặt tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của nó là $\rho(x, y, z)$ thì:

i) *Khối lượng của mặt* cho bởi

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS; \quad (3.19)$$

ii) *Trọng tâm* $G(x_G, y_G, z_G)$ có các tọa độ được tính theo công thức

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) dS, \\
y_G &= \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x, y, z) dS, \\
z_G &= \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x, y, z) dS.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.3. Cách tính

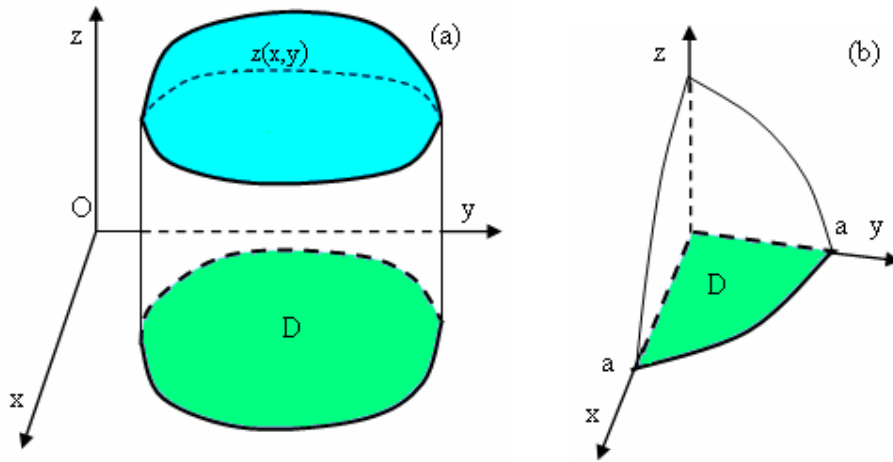
+ $S: z = z(x, y), (x, y) \in D$ (D miền đóng, giới nội)

+ $z(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một z'_x, z'_y liên tục trên D .

Khi đó

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy. \tag{3.21}$$

Tự đặt ra công thức tương tự cho các trường hợp khác.



Hình 3.11. Mặt cho bởi phương trình hiện (a) và mặt ở Ví dụ 3.9 (b)

Ví dụ 3.9. Tính tích phân $I = \iint_S z^2 dS$, trong đó S là một phần tám mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0); \quad x, y, z \geq 0.$$

Giải. Trên S thì $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$, $(x, y) \in D$ với D là phần hình tròn tâm O , bán kính a nằm ở góc phần tư thứ nhất. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} \\
1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{a^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \iint_D (a^2 - (x^2 + y^2)) \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= a^2 \iint_D \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy. \\ I &= a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \frac{a^4 \pi}{6}. \text{ (Tọa độ cực).}\end{aligned}$$

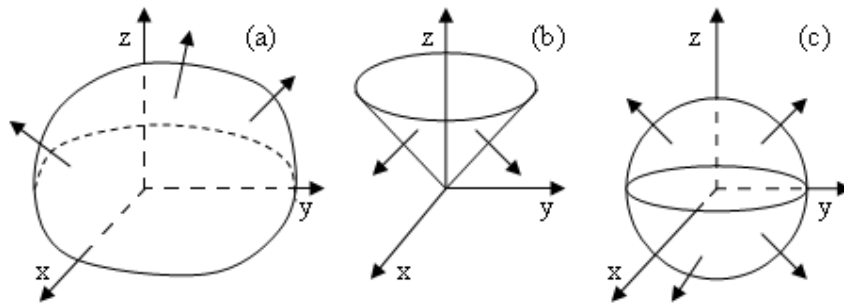
#

§ 3.4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

3.4.1. Mặt định hướng

Yêu cầu về hệ pháp tuyến của mặt: Biến thiên liên tục.

Phía mà các pháp tuyến $\vec{n}(M)$ hướng vào là *phía dương*, phía còn lại là *phía âm*.



Hình 3.13. *Phía của mặt: (a) phía trên, (b) phía dưới, (c) phía ngoài*

Đối với mặt S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$, phía của S ứng với pháp tuyến làm với tia Oz một góc nhọn là *phía trên*, phía kia gọi là *phía dưới* (xem Hình 3.13a,b).

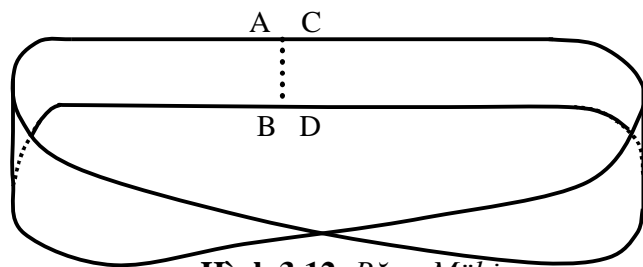
Nếu mặt S cho bởi phương trình $x = x(y, z)$, ta có thể xét phía trước - phía sau. Nếu S cho bởi phương trình $y = y(x, z)$, ta có thể nói đến phía trái - phía phải. Thực ra các từ trên - dưới, trước - sau, trái - phải ở đây chỉ có tính ước lệ, phụ thuộc vào vị trí tương đối của hệ trục với người quan sát.

Mặt kín bất kỳ không tự cắt S (mặt cầu, mặt elipsoide ...) là mặt hai phía. Phía có pháp tuyến hướng vào miền trong giới hạn bởi mặt S được gọi là *phía trong* của S , phía kia được gọi là *phía ngoài* của S (xem Hình 3.13c).

Bạn hãy nói những phía có thể của chiếc chum?

Mặt trụ, mặt cầu, mặt nón?

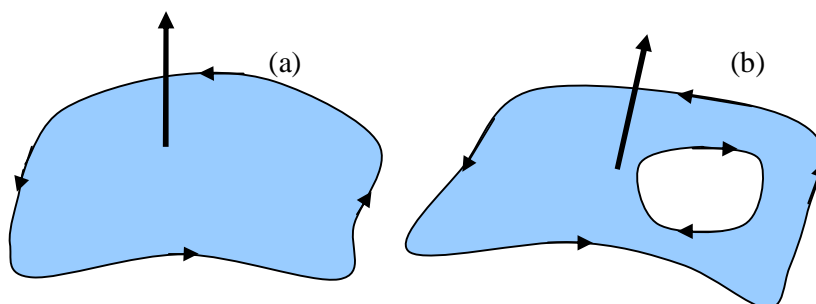
Lưu ý: Có những rắc rối khi xác định phía của mặt: băng Möbius. Ta lấy một băng giấy hình chữ nhật $ABCD$; xoắn băng lại nửa vòng; dán chéo A với C , B với D , ta sẽ được băng Möbius (xem Hình 3.12).



Hình 3.12. Băng Möbius

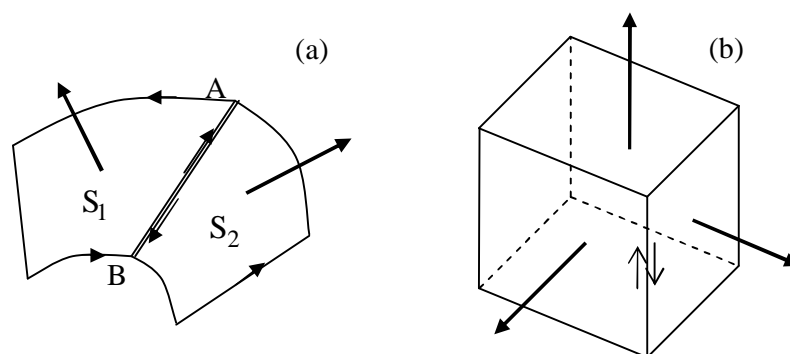
Một con kiến có thể bò ở trên “cả hai phía” của mặt mà không cần bò qua biên. Mặt như thế là mặt 1 phía. Tuy nhiên người ta loại đi những trường hợp rắc rối này, chỉ xét mặt 2 phía.

Cho một mặt định hướng S được giới hạn bởi biên C gồm một (nếu mặt đơn liên) hoặc một số (nếu mặt đa liên) đường cong kín, liên tục, trơn từng khúc. Ta gọi *hướng dương* trên C ứng với phía đã chọn của mặt S là hướng mà một người quan sát đứng thẳng theo hướng của pháp tuyến của mặt, đi dọc theo hướng dương của đường cong sẽ thấy phần gần nhất của mặt S luôn ở về bên trái (xem Hình 3.14).



Hình 3.14. Hướng dương của biên của mặt đơn liên (a) và của mặt đa liên (b)

Mặt S được gọi là **định hướng từng mảnh** nếu nó là liên tục, được phân chia bởi một số hữu hạn đường trơn từng khúc thành một số hữu hạn mảnh định hướng, hướng trên mỗi mảnh được xác định sao cho hai hướng dương trên phần biên chung của hai mảnh kề nhau là ngược nhau.



Hình 3.15. Mặt định hướng từng mảnh (a), phía ngoài của hình hộp (b)

Theo nguyên tắc này, hình hộp có thể định hướng ra ngoài (Hình 3.15b) - hoặc ngược lại, định hướng vào trong.

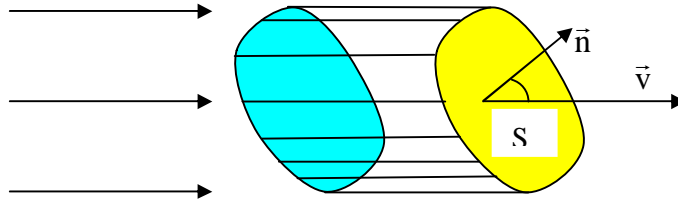
3.4.2. Tích phân mặt loại hai

a. Bài toán thông lượng. Chất lỏng có vận tốc \vec{v} không đổi theo thời gian cũng như không phụ thuộc vào vị trí của điểm xem xét. Xét một mảnh phẳng S đặt trong chất lỏng, biết rằng S là mặt định hướng với véc tơ pháp tuyến đơn vị \vec{n} và với diện tích ΔS . Trong một đơn vị thời gian, lượng chất lỏng chảy qua mặt S (từ trái sang phải) là thể tích hình trụ xiên (xem Hình 3.16):

$$\Phi = V = v \cdot \cos(\vec{n}, \vec{v}) \cdot \Delta S = \vec{n} \cdot \vec{v} \cdot \Delta S. \quad (3.22)$$

Ở đây chúng ta quy ước rằng Φ mang giá trị dương nếu góc hợp bởi véc tơ pháp tuyến \vec{n} với \vec{v} là góc nhọn, mang giá trị âm nếu đó là góc tù.

Φ còn được gọi là thông lượng của trường vận tốc \vec{v} qua mặt S .



Hình 3.16. Lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian

Tổng quát hóa tình huống trên khi vận tốc \vec{v} phụ thuộc vào điểm đặt M trong môi trường, mật độ vẫn coi là không đổi, và mặt S là mặt cong định hướng, cũng như nhiều hiện tượng vật lý khác, người ta đi đến khái niệm tích phân mặt loại hai.

b. Định nghĩa. Trong miền không gian G xét hàm véc tơ $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$. Trong G cho mặt định hướng S ở đó véc tơ pháp tuyến đơn vị tại điểm $M \in S$ là $\vec{n} = \vec{n}(M) = (\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M))$. Chia S thành các mảnh nhỏ $(\Delta S_1), \dots, (\Delta S_n)$ không chồng lên nhau và gọi diện tích tương ứng của chúng là $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$. Trên mảnh (ΔS_i) chọn một điểm M_i tùy ý. Lập tổng sau đây, gọi là tổng tích phân:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n (P(M_i) \cos \alpha(M_i) + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i)) \Delta S_i. \end{aligned}$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max d_i \rightarrow 0$ (d_i là đường kính của mảnh (ΔS_i)) mà tổng I_n dần đến giới hạn I hữu hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách chọn các điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân mặt loại hai* của các hàm $P(M), Q(M), R(M)$ (hay của trường véc tơ $\vec{F}(M)$) trên S và được ký hiệu là

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (3.23)$$

(hoặc đơn giản hơn, $\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$).

Nếu S là mặt định hướng từng mảnh, tích phân trên S là tổng các tích phân trên những mảnh nhỏ định hướng:

$$\iint_{S_1 \cup \dots \cup S_n} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Chú ý. Tích phân được viết đơn giản hơn khi một (hay hai) thành phần P , Q , R triệt tiêu, cũng như khi có thừa số chung, chẳng hạn

$$\iint_S P dydz, \dots; \iint_S HP dydz + HQ dzdx = \iint_S H(P dydz + Q dzdx).$$

Mặt cong kín S là biên của miền hữu hạn V nào đó trong không gian và không có chỉ dẫn gì thêm thì ta quy ước tích phân lấy trên S theo phía ngoài là:

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

c. Điều kiện tồn tại

Nếu S là mặt định hướng từng mảnh và các hàm P , Q , R liên tục trên S thì tồn tại tích phân mặt loại hai của các hàm này trên S .

d. Tính chất

- **Sự phụ thuộc vào hướng của mặt.** Nếu mặt được chọn theo hướng ngược lại thì tích phân có cùng trị tuyệt đối nhưng đổi dấu:

$$\iint_{S^-} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad (3.24)$$

ở đây S^+ là mặt S với hướng dương đã chọn ban đầu, S^- là mặt S với hướng ngược lại.

- **Mối liên hệ với tích phân mặt loại một**

Nhắc lại: $\vec{n}(M) = (\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M))$ - véc tơ pháp tuyến đơn vị tại điểm M của mặt định hướng S .

$$\begin{aligned} \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \quad (3.25)$$

- **Ngoài ra**, tích phân mặt loại có các tính chất thông thường của tích phân như tính chất tuyến tính, hệ thức Chasles, ...

Lưu ý. Một số tài liệu dùng vế phải của phương trình (3.25) làm định nghĩa cũng như ký hiệu của tích phân mặt loại hai.

3.4.3. Ý nghĩa

Đối với trường véc tơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, **thông lượng** Φ của trường qua mặt định hướng S là tích phân mặt loại hai của \vec{F} trên S :

$$\Phi = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy .$$

(Nhớ lại trường vận tốc: Φ = lượng chất lỏng chảy qua mặt theo chiều xác định trong một đơn vị thời gian).

3.4.4. Cách tính

* Sử dụng công thức liên hệ hai loại tích phân mặt

* Mặt cho bởi phương trình hiện $z = z(x, y)$

S: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ (D là hình chiếu của S xuống mặt Oxy),

Phía của mặt là phía trên thì các véc tơ pháp tuyến sẽ tạo với trục Oz một góc nhọn. $\Rightarrow \vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$ (thành phần thứ 3 của pháp tuyến ≥ 0), pháp tuyến đơn vị tương ứng là

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \right).$$

Thay vào (3.25) và sử dụng cách tính tích phân mặt loại một ta được:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{-z'_x \cdot P}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} + \frac{-z'_y \cdot Q}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} + \frac{R}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \right) dS. \\ &= \iint_D (-z'_x \cdot P(x, y, z(x, y)) - z'_y \cdot Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))) dx dy. \end{aligned}$$

Nếu phía của mặt là phía dưới (pháp tuyến tạo với trục Oz một góc tù) thì ta phải thêm dấu trừ vào vế phải.

Định lý 3.4. Giả sử mặt cong (S) cho bởi phương trình hiện $z = z(x, y)$, là hàm liên tục cùng các đạo hàm riêng z'_x, z'_y trên miền đóng, giới nội (có diện tích) D trong \mathbb{R}^2 . Cũng giả sử rằng P, Q, R là những hàm liên tục trên (S). Khi đó xảy ra công thức

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \pm \iint_D (-z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q + R) dx dy. \quad (3.26)$$

Đặc biệt,

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (3.27)$$

Dấu cộng "+" hay trừ "-" tùy thuộc vào phía của mặt chọn là phía trên hay phía dưới.

Ví dụ 3.10. Tính tích phân mặt loại hai $\iint_S x^2 dx dy + z dy dz$, trong đó S là

phần của mặt $z = x^2 + y^2$ nằm phía trên hình vuông $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ và hướng lên phía trên.

Giải. $z = x^2 + y^2$, $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$. Vì mặt lấy theo phía trên, theo công thức (3.26) nhận được

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dx dy + z dy dz &= \iint_S z dy dz + 0 \cdot dz dx + x^2 dx dy \\ &= \iint_D ((-2x)z(x, y) + 1 \cdot x^2) dx dy = \iint_D (x^2 - 2x^3 - 2xy^2) dx dy = \frac{4}{3}. \# \end{aligned}$$

Ví dụ 3.11. Tính thông lượng của trường véc tơ $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + 4\vec{k}$ trong đó S là phần tám thứ nhất của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và hướng ra ngoài.

Giải. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$

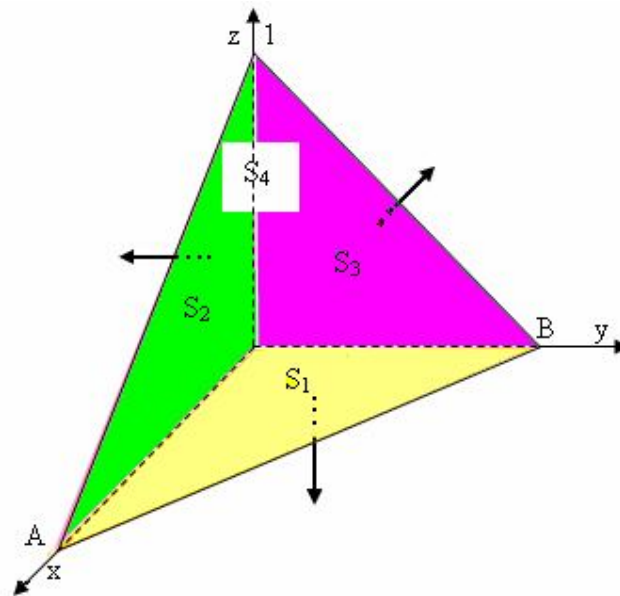
$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Mặt hướng ra ngoài cũng là hướng lên trên. Theo (3.26),

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S y dy dz - x dz dx + 4 dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 4 \right) dx dy \\ &= \iint_D 4 dx dy = 4 \text{dt}(D) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \# \end{aligned}$$

Ví dụ 3.12. Tính tích phân mặt loại hai $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, trong đó S là mặt xung quanh của tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$ và mặt $x + y + z = 1$, hướng ra phía ngoài.

Giải. $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, trong đó I_i là tích phân lấy trên mặt $S_i, i = \overline{1, 4}$.



Hình 3.17. Tứ diện ở Ví dụ 3.12

Vì định hướng ra phía ngoài nên mặt S_1 hướng xuống phía dưới, véc tơ pháp tuyến đơn vị là $-\vec{k} = (0, 0, -1)$. Vậy

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iint_{S_1} (x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot (-1)) dS \\ &= - \iint_{S_1} z dS = \iint_D 0 dx dy = 0 \quad (D \text{ là tam giác } OAB). \end{aligned}$$

(Có thể nhận xét rằng, trên S_1 thì $z = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow dydz = dzdx = 0$. Vậy

$$I_1 = \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = 0 + 0 + \iint_{S_1} z dx dy = 0).$$

Từ tính đối xứng suy ra $I_2 = I_3 = I_1 = 0$.

Để tính I_4 , ta thấy $z = 1 - x - y \Rightarrow \vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, dùng (3.26):

$$I_4 = \iint_{S_4} xdydz + ydzdx + z dx dy = \iint_D (x + y + z(x, y)) dx dy = \iint_D 1 dx dy = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2}.$$

* Thực ra sau đây sử dụng công thức Ostrogradski-Gauss ở mục 3.4.6 sẽ tiện lợi hơn nhiều. #

3.4.5. Công thức Stokes

Định lý 3.5 (Công thức Stokes). Giả sử S là mặt định hướng được từng mảnh, biên của S là đường cong L kín, tron từng khúc, hướng của L được xác định phù hợp với hướng dương của mặt.

Giả sử các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên tập mở nào đó của \mathbb{R}^3 chứa S . Khi đó

$$\begin{aligned} &\oint_L Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ví dụ 3.13. Tính tích phân $\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$, trong đó C là giao

tuyến của hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $2x + 2y + z = 2$ định hướng sao cho hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy có chiều ngược kim đồng hồ.

Giải. Gọi E là elip có biên C , định hướng lên trên. Hình chiếu E lên Oxy là hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 1$. Theo công thức Stokes,

$$I = \iint_S (3x^2 + 3y^2) dx dy + (0 - 0) dy dz + (0 + 0) dz dx$$

$$= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy = 3.2\pi \int_0^1 r^2 r dr = \frac{3\pi}{2}. \quad \#$$

3.4.6. Công thức Ostrogradski-Gauss

Định lý 3.5 (Công thức Ostrogradski-Gauss) (hay Định lý Divergence).

Giả sử V là miền giới nội, đóng trong \mathbb{R}^3 với biên là mặt S kín, trơn từng mảnh, định hướng được. Cũng giả sử rằng các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên tập mở chứa V . Khi đó

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3.30)$$

Tích phân trên mặt S ở về trái được lấy theo phía ngoài.

Ví dụ 3.14. Tính tích phân $\oiint_S xy^2 dydz + x^2 y dzdx + (x^2 + y^2)z^2 dx dy$,

trong đó S là mặt ngoài của hình trụ $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, hướng ra ngoài.

Giải. Gọi hình chiếu của hình trụ lên mặt phẳng Oxy là D , theo công thức Ostrogradski-Gauss,

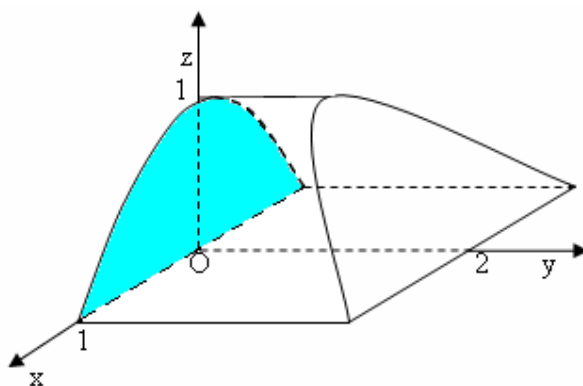
$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (y^2 + x^2 + 2z(x^2 + y^2)) dx dy dz = \iiint_V (x^2 + y^2)(2z + 1) dx dy dz \\ &= \iint_D (x^2 + y^2)(z^2 + z) \Big|_0^1 dx dy = 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \pi. \quad \# \end{aligned}$$

Ví dụ 3.15. Tính tích phân $\oiint_S xy dydz + (y^2 + e^{xz}) dzdx + \cos(xy) dx dy$,

trong đó S là mặt xung quanh của miền G giới hạn bởi hình trụ parabolic $z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$, hướng ra ngoài.

Giải. Tính trực tiếp tích phân đã cho là khó khăn vì phải tính trên 4 mảnh khác nhau. Ta sử dụng công thức Ostrogradski-Gauss,

$$I = \iiint_V (y + 2y) dx dy dz = 3 \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dz \int_0^{2-z} y dy = \frac{184}{35}. \quad \#$$



Hình 3.18. Miền ở Ví dụ 3.15

Ví dụ 3.16. Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S x^2 dydz - 2xy dzdx + 3xz dxdy ,$$

với S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong góc phần tám thứ nhất $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, hướng ra phía ngoài (không kể các hình rẽ quạt nằm trên các mặt phẳng tọa độ).

Giải. Nếu ta dùng công thức (3.26) ta sẽ đi đến tích phân khó khăn.

Bổ sung thêm các mặt $S_1 : x = 0$, $S_2 : y = 0$, $S_3 : z = 0$, cùng với S ta được một mặt kín S' (xem Hình 3.11b). Gọi V là miền giới hạn bởi S' , theo công thức Ostrogradski-Gauss,

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S'} - \iint_{S_1} - \iint_{S_2} - \iint_{S_3} \\ &= \iiint_V (2x - 2x + 3x) dxdydz - \iint_{S_1} - \iint_{S_2} - \iint_{S_3} = \iiint_V 3x dxdydz . \end{aligned}$$

(Tích phân mặt trên mỗi mặt S_1, S_2, S_3 , đều bằng 0).

Chuyển sang tọa độ cầu,

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi, \quad |J| = r^2 \sin \varphi$$

$$I = 3 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (r \cos \theta \sin \varphi) \cdot (r^2 \sin \varphi) dr = 3\pi . \quad \#$$

Ví dụ 3.17. Dùng công thức Ostrogradski-Gauss để tính tích phân ở Ví dụ 3.12.

$$\text{Giải. } I = \iiint_V (1+1+1) dxdydz = 3 \iiint_V dxdydz = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} . \quad \#$$

b) Thảo luận	
c) Tự học	VD3.32 ; VD 3.33; VD3.34 .
d) Bài tập (1t)	
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 10: Tích phân đường và tích phân mặt (tiếp)

Chương, mục: 3

Tiết thứ: 46-50

Tuần thứ: 10

Mục đích, yêu cầu:

- Làm được các bài tập căn bản của chương
- Thấy sự gắn kết chặt chẽ của các loại TP với lý thuyết trường.
- Phạm vi ứng dụng của TP, Trường trong thực tế, trong kỹ thuật

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Bài tập Tích phân đường loại II.

§3.5. Lý thuyết trường

22. d) $-2\pi a(h+a)$; 24. c) $12\pi/5$; d) 0; e) $4\pi a^3/3$; f) $4\pi a^3$; h) 0. 25. $\pi/3$.

§ 3.5. LÝ THUYẾT TRƯỜNG

3.5.1. Trường vô hướng

a. Định nghĩa. Trường vô hướng là phần không gian G mà tại mỗi điểm M của nó có xác định một đại lượng vô hướng $u(M)$ ($\in \mathbb{R}$).

Như vậy, bản chất toán học của trường là hàm $u(M)$, gọi là hàm vô hướng của trường. Để đơn giản, ta gọi là trường vô hướng $u(M)$, hay trường u .

Giả sử trong hệ trục Oxyz cho trước nào đó điểm M có tọa độ (x,y,z) . Việc cho trường tương đương với việc cho hàm số $u = u(x,y,z)$ xác định trên G .

Ta chỉ xét trường mà hàm u không phụ thuộc vào thời gian, gọi là trường dừng. Hơn nữa, ta cũng chỉ xét những trường mà các đạo hàm riêng của hàm u tồn tại và không đồng thời bằng 0.

b. Mặt mức. Cho trường vô hướng $u(M)$. Phương trình $u(x,y,z) = c$, ($c = \text{const}$) xác định một mặt nào đó, gọi là mặt mức (hay mặt đẳng trị).

Rõ ràng là các mặt mức khác nhau thì không cắt nhau. Hơn nữa, các mặt mức lấp đầy miền G . Tại mỗi điểm của G có một và chỉ một mặt mức đi qua.

c. Gradient. Lấy một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$. Đặt $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$. Xét mặt mức qua M_0 , đó là mặt $(S): u(x,y,z) = u_0 \Leftrightarrow u(x,y,z) - u_0 = 0$.

Theo (1.73), véc tơ pháp của (S) tại điểm M_0 là $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right)$, được gọi là véc tơ gradient của trường tại M_0 , ký hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)$ (hay $\overline{\nabla} u(M_0)$). Như vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right).$$

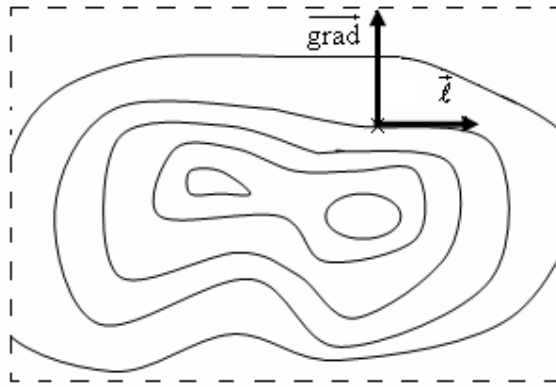
Điều này xảy ra tại điểm M_0 bất kỳ, vậy ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.31)$$

(luôn giả thiết $\overrightarrow{\text{grad}} u \neq \vec{0}$). Chúng ta nhận được định lý sau.

Định lý 3.7. Gradient của trường vô hướng $u = u(x, y, z)$ tại một điểm bất kỳ đồng phương với véc tơ pháp tuyến của mặt mức của trường đi qua điểm ấy.

Hình 3.19 mô tả các đường đồng mức của trường phẳng. Tại điểm M bất kỳ, véc tơ $\overrightarrow{\text{grad}}$ vuông góc với véc tơ tiếp tuyến $\vec{\ell}$ của mặt mức.



Hình 3.19. Véc tơ gradient thẳng góc với mặt mức

Hệ quả. Nếu $\vec{\ell}$ là hướng tiếp xúc với mặt mức qua điểm M trong trường u thì đạo hàm của hàm $u(x, y, z)$ theo hướng $\vec{\ell}$ triệt tiêu: $\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{\ell}} = 0$.

Tính chất. Cho u_1, u_2 là hai trường vô hướng trên G , f là hàm số khả vi, C là hằng số thực bất kỳ. Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(u_1 + u_2) &= \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \overrightarrow{\text{grad}} u_2, \\ \overrightarrow{\text{grad}}(Cu) &= C \overrightarrow{\text{grad}} u, \\ \overrightarrow{\text{grad}}(u_1 u_2) &= u_1 \overrightarrow{\text{grad}} u_2 + u_2 \overrightarrow{\text{grad}} u_1, \\ \overrightarrow{\text{grad}} f(u) &= f'(u) \overrightarrow{\text{grad}} u. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Như vậy, khi coi gradient như một toán tử, tính chất của nó rất giống tính chất của toán tử đạo hàm.

3.5.2. Trường véc tơ

a. Định nghĩa. Trường véc tơ là phần không gian mà tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của nó có xác định một véc tơ \vec{F} :

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z).$$

Giống như trường vô hướng, quan trọng ở đây là hàm véc tơ $\vec{F}(M)$.

Thông thường, trường véc tơ gắn với khái niệm vật lý cụ thể, ví dụ: trường lực hấp dẫn, trường vận tốc của những hạt chất lỏng chứa đầy trong một miền không gian nào đó và chuyển động, từ trường, điện trường...

Như vậy, trường véc tơ chính là một hàm véc tơ xác định trên một miền trong không gian.

Việc cho trường véc tơ \vec{F} tương đương với việc cho ba hàm vô hướng $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ trong $G \subset \mathbb{R}^3$ để

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

(hay $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$).

Chúng ta chỉ xét những trường véc tơ mà các hàm P , Q , R có các đạo hàm riêng liên tục trong G .

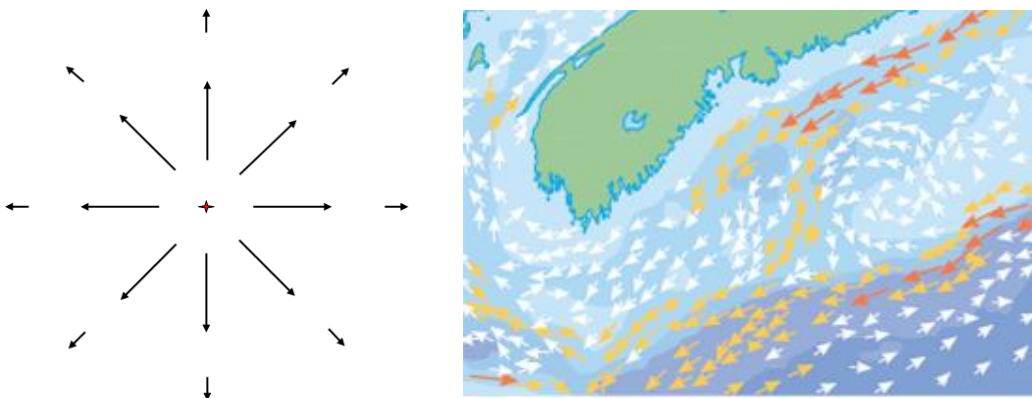
Để biểu diễn trường, người ta vẽ các véc tơ $\vec{F}(M_1), \dots, \vec{F}(M_n)$ tại các điểm tương ứng M_1, \dots, M_n thuộc trường (xem Hình 3.20).

Ví dụ 3.18. i) Xét một điện tích q ($q > 0$) đặt tại gốc tọa độ O . Giả sử tại điểm $M(x,y,z)$ ta đặt một điện tích đơn vị $q_1 = 1$. Theo định luật Coulomb, lực đẩy đặt lên q_1 xác định bởi

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = A \frac{\vec{r}}{r^3},$$

trong đó $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

\vec{E} được gọi là véc tơ điện trường, trường \vec{E} xung quanh gốc O gọi là điện trường.



Hình 3.20. Điện trường (trái) và dòng hải lưu ở một vùng biển (phải)

ii) Xét một chất lỏng chuyển động trong một vùng không gian nào đó. Vận tốc của hạt chất lỏng tại điểm M là véc tơ $\vec{V}(M)$. Vậy, trong chất lỏng ta đã có một trường vận tốc \vec{V} . Véc tơ \vec{V} có ba thành phần V_x , V_y , V_z (xem Hình 3.20 (phải) (từ [18])). #

b. Đường dòng (đường sức)

Đường dòng của trường véc tơ là mỗi đường cong mà tiếp tuyến của nó tại một điểm tùy ý đồng phương với véc tơ của trường đặt tại điểm này.

Cho trường véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$. Để tìm phương trình của đường dòng C: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, ta thấy véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến tại $M = M(x(t), y(t), z(t))$ là $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Véc tơ này phải đồng phương với véc tơ $\vec{F} = (P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t)))$. Vậy,

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R} \text{ hay } \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (3.33)$$

Đối với trường điện ở Ví dụ 3.18, nghiệm của (3.33) là các tia xuất phát từ gốc tọa độ.

Từ trường có các đường dòng là các "cung" nối hai cực Bắc-Nam.

Với từ trường hay điện trường, các đường dòng còn gọi là các *đường sức* (thể hiện chiều của lực tác động).

c. Thông lượng

Ta đã biết rằng (bài §3.2) đối với trường vận tốc trong chất lỏng, lượng chất lỏng Φ chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian được tính bởi

$$\Phi = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Chúng ta sẽ mở rộng khái niệm thông lượng sang trường véc tơ.

Cho trường véc tơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ trong miền G. Giả sử S là mặt cong định hướng từng mảnh trong G và $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt S theo phía đã chọn của S.

Thông lượng Φ của trường \vec{F} theo hướng đã chọn của các pháp tuyến xác định bởi tích phân mặt loại hai

$$\Phi = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

Từ mối liên hệ giữa 2 loại tích phân mặt, giá trị này chính là

$$\iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Vì thế, người ta hay viết công thức tính thông lượng dưới dạng véc tơ

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (3.34)$$

Ví dụ 3.19. Tích phân mặt loại hai được sử dụng nhiều khi nghiên cứu sự truyền nhiệt. Giả sử nhiệt độ tại điểm (x, y, z) trong một vật thể là $u(x, y, z)$. Trường véc tơ $\vec{F} = -K \text{grad } u = (P, Q, R)$ được gọi là **dòng nhiệt** (heat flow) (có tài liệu gọi là véc tơ thông lượng nhiệt), trong đó hằng số $K = K(x, y, z) \geq 0$ gọi là hệ số dẫn nhiệt địa phương của vật liệu, với vật đồng chất thì K là hằng số, được xác định bằng thực nghiệm. Ta phải dùng dấu âm (−) vì nhiệt độ được truyền từ cao xuống thấp. Lượng nhiệt truyền qua mặt S trong một đơn vị thời gian - gọi là tốc độ truyền nhiệt qua mặt S - cho bởi

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS.$$

Đây chính là thông lượng của dòng nhiệt qua mặt S.

d. Divergence (*độ phân kỳ*)

Cho trường véc tơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ trong miền G, và như thường lệ, giả sử các đạo hàm riêng của các hàm P, Q, R tồn tại và liên tục. *Divergence* của \vec{F} , ký hiệu là $\text{div } \vec{F}$, là hàm ba biến xác định bởi

$$\text{div } \vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \quad (3.35)$$

Một cách ngắn gọn, divergence tại điểm M là *độ phân kỳ* (độ phát tán) trung bình tại một thể tích đủ nhỏ bao quanh điểm này.

Chúng ta cũng có thể viết lại công thức Ostrogradski-Gauss dưới dạng véc tơ như sau:

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz \left(= \iiint_V \text{div } \vec{F} dV \right) \quad (3.37)$$

trong đó S là biên của miền V, hướng ra ngoài.

Chính vì thế, $\text{div } \vec{F}$ còn được gọi là *mật độ thông lượng* (mật độ phát tán) của trường.

* M nào đó mà $\text{div } \vec{F}(M) > 0$ thì $\text{div } \vec{F} > 0$ trong lân cận điểm này. Theo công thức (3.37), thông lượng qua mặt S ra phía ngoài dương. Ta gọi điểm M như thế là *điểm nguồn*.

Ngược lại, nếu $\text{div } \vec{F}(M) < 0$, thì điểm M gọi là *điểm rò* (điểm hút).

Tính chất. Cho $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ là những trường véc tơ, \vec{C} là véc tơ hằng số, u là trường vô hướng, k là hằng số. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) &= \text{div } \vec{F}_1 + \text{div } \vec{F}_2; \\ \text{div}(k\vec{F}) &= k \text{div } \vec{F}; \\ \text{div}(u\vec{C}) &= \vec{C} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u; \\ \text{div}(u\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u + u \text{div } \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

e. Lưu số và rotation (*xoáy*)

Ta đã biết rằng công T của trường lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo đường cong C được tính bởi

$$T = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_S (P \cos \alpha' + Q \cos \beta' + R \cos \gamma') dS$$

trong đó $\vec{\tau} = (\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma')$ là véc tơ tiếp tuyến đơn vị của đường C theo hướng đã xác định trên đó. Tổng quát hóa kết quả trên ta đi đến định nghĩa:

Định nghĩa. *Lưu số* (hay hoàn lưu) của trường véc tơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo đường cong định hướng C đặt trong trường là

$$L = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds. \quad (3.39)$$

Để dễ nhớ, người ta còn viết véc tơ này dưới dạng

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{F}. \quad (3.41)$$

với
$$\overrightarrow{\text{grad}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

(Ký hiệu " \wedge " để chỉ tích có hướng của hai véc tơ).

(Nhiều tài liệu ký hiệu véc tơ xoáy là $\text{curl } F$).

Từ đó, chúng ta có thể viết lại công thức Stokes dưới dạng véc tơ:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.42)$$

Về phải thể hiện hiệu ứng quay của trường quanh trục định hướng theo véc tơ \vec{n}_0 . Theo (3.43), hiệu ứng này lớn nhất khi chọn hướng $\vec{n}_0 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(M_0)$.

Nếu $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(M_0) = 0$, thì lưu số của trường dọc theo đường cong kín khá bé bao quanh M_0 bằng không. Ta nói M_0 là điểm bình thường.

Nếu $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(M_0) \neq 0$ thì lưu số của trường dọc theo một đường tròn khá bé bao quanh M_0 nói chung khác không, Ta nói điểm M_0 là điểm xoáy.

Véc tơ $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$ gọi là véc tơ xoáy của trường.

Tính chất. Cho $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ là những trường véc tơ, \vec{C} là véc tơ hằng số, u là trường vô hướng, k là hằng số. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}_1 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}_2 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(k\vec{F}) &= k\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(u\vec{C}) &= \overrightarrow{\text{grad}} u \wedge \vec{C} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(u\vec{F}) &= u\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}} u \wedge \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.45)

3.5.3. Toán tử vi phân

Cho $u = u(x, y, z)$ là trường vô hướng, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ là trường véc tơ. Xét các toán tử sau:

$$\overrightarrow{\text{grad}}: u \mapsto \overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

$$\text{div} : \vec{F} \mapsto \text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} : \vec{F} \mapsto \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Các toán tử trên gọi là các *toán tử vi phân*. Chúng là các toán tử tuyến tính.

Ngoài ra, người ta còn đưa vào các toán tử vi phân sau đây.

a. Toán tử Laplace là toán tử

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}:$$

$$\Delta : u \mapsto \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.46)$$

b. Toán tử del (còn gọi là toán tử nabla hay toán tử Haminton), được ký hiệu bởi véc tơ tượng trưng

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.47)$$

tác động như sau:

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} u,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \vec{F},$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}. \quad (3.48)$$

Mặc dầu $\overrightarrow{\text{grad}} u$, $\text{div} \vec{F}$, $\text{rot} \vec{F}$ là những trường rất thông dụng, song trong lý thuyết trường người ta hay thay chúng lần lượt bởi

$$\vec{\nabla} u, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{F}.$$

Vì toán tử $\vec{\nabla}$ là toán tử tuyến tính nên các phép nhân vô hướng, có hướng ở đây có một số tính chất của phép nhân vô hướng, có hướng thông thường của các véc tơ, chỉ cần coi toán tử nabla $\vec{\nabla}$ như một véc tơ tượng trưng. Tuy nhiên cũng có một chút khác biệt, chẳng hạn

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} = P \cdot \frac{\partial}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{là toán tử vi phân vô hướng}).$$

Hệ quả

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} = \Delta.$$

c. Trường dòng (hay trường ống). Nếu tại mọi điểm $M \in G$ đều xảy ra $\text{div } \vec{F}(M) = 0$ thì trường được gọi là *trường dòng* (hay trường ống).

Như vậy, trường dòng là trường không có điểm nguồn, cũng không có điểm rò, thông lượng qua mặt kín bất kỳ đều bằng không.

d. Trường thế. Nếu tại mọi điểm $M \in G$ đều xảy ra $\text{rot } \vec{F}(M) = 0$ thì trường được gọi là *trường thế*.

Như vậy, trường thế là trường không có điểm xoáy.

Giả sử $\vec{F} = (P, Q, R)$; \vec{F} là trường thế khi và chỉ khi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Như vậy, nếu U là miền mở, đơn liên bất kỳ trong G thì theo Định lý 3.3, một loạt kết luận ta có thể suy ra từ điều này:

- \vec{F} là trường thế khi và chỉ khi tồn tại hàm $u(x, y, z)$ trong U để $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad } u}$ ($\Leftrightarrow du = Pdx + Qdy + Rdz$). $u(x, y, z)$ được gọi là hàm thế vị của trường.
- \vec{F} là trường thế khi và chỉ khi lưu số trên một đường cong \widehat{AB} bất kỳ của trường (liên tục, không tự cắt, tron từng khúc trong U) chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của trường, không phụ thuộc vào đường nối 2 điểm này trong U . Lưu số đó bằng hiệu giữa thế của trường tại điểm cuối với thế của trường tại điểm đầu:

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

e. Trường điều hòa

Trường vừa là trường dòng, vừa là trường thế gọi là *trường điều hòa*.

Trường \vec{F} là trường điều hòa thì trong một miền mở, đơn liên U bất kỳ trong G , tồn tại hàm $u(x, y, z)$ trong U - gọi là hàm thế vị của trường - để:

$$\begin{cases} \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad } u} \quad (\Leftrightarrow du = Pdx + Qdy + Rdz) \\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Ví dụ 3.22. Xét điện trường ở Ví dụ 3.18: $\vec{E} = \frac{A\vec{r}}{r^3}$ với $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

... Là trường điều hòa.

Tóm tắt chương III. Tự đọc

TÓM TẮT CHƯƠNG 3

TP đường loại một	Cách tính	<ul style="list-style-type: none"> $\widehat{AB}: x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b,$ $\int_{\widehat{AB}} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \, dt$ $\widehat{AB}: y = f(x), a \leq x \leq b,$ $\int_{\widehat{AB}} f \, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx$ 	
	Ứng dụng	<ul style="list-style-type: none"> Độ dài: $s = \int_{\widehat{AB}} ds$ 	<ul style="list-style-type: none"> Khối lượng: $m = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) \, ds$
		<ul style="list-style-type: none"> Diện tích rềm: $\int_C f(x, y) \, ds$ 	
TP đường loại hai	Cách tính	<ul style="list-style-type: none"> $L: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b,$ $\int_L P \, dx + Q \, dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] \, dt$ $L: y = y(x), a \leq x \leq b,$ $\int_L P \, dx + Q \, dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] \, dx$ 	
	Công thức Green	$\oint_L P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$	
	Độc lập với đường lấy TP	<p>D mở, đơn liên, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in D$ thì:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\int_{\widehat{AB}} P \, dx + Q \, dy$ không phụ thuộc vào đường nối A với B, \exists hàm thế $u(x, y), du = P \, dx + Q \, dy$: $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) \, dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) \, dy + C$ 	
TP mặt loại một	Cách tính	$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} \, dx \, dy$	
	Ứng dụng	<ul style="list-style-type: none"> Diện tích mặt cong: $dt(S) = \iint_S dS$ 	<ul style="list-style-type: none"> Khối lượng mặt cong: $m = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS$
		<ul style="list-style-type: none"> Trọng tâm: $G(x_G, y_G, z_G),$ $x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) \, dS \dots$ 	

TP mặt loại hai	Cách tính	<ul style="list-style-type: none"> $\iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy = \pm \iint_D (-z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q + R) \, dxdy$ $\iint_S R \, dxdy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) \, dxdy$
	Công thức Stokes	$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ $+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx.$
	Công thức O -G	$\iiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$
Trường	Grad.	$\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$
	Thông lượng	$\Phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$
	Div.	$\text{div } \vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$
	Xoáy	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

*** Kiểm tra 1 tiết 3 chương đầu.**

Bài giảng 11: Phương trình vi phân

Chương, mục: 4

Tiết thứ: 50-55

Tuần thứ: 12

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các khái niệm căn bản về PTVP, cấp, các loại nghiệm, giải được các dạng cơ bản của PTVP cấp một.
- Thấy được một số ứng dụng thực tiễn của PTVP, PTVP cấp một.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§4.1 Phương trình vi phân cấp một

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§ 4.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT (4 tiết)

4.1.1. Các khái niệm mở đầu

Dạng: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (4.1)

x : biến độc lập, y : hàm phải tìm, $y', \dots, y^{(n)}$: đạo hàm các cấp của y ,

F : hàm nào đó của $n + 1$ biến.

Cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong PT được gọi là *cấp* của PTVP,

$$y' + x \ln y - y^3 = x e^x : \quad \text{cấp I,}$$

$$y'' + 4y = x^8 : \quad \text{cấp II.}$$

Nghiệm của PTVP (4.1) trong khoảng (a, b) là mỗi hàm số xác định trên (a, b) sao cho khi thay vào phương trình ta được đồng nhất thức:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{với } x \in (a, b).$$

Ví dụ 4.1. $y'' + 9y = 0$.

Các hàm $C \cos 3x$; $D \sin 3x$, C, D - hằng số tùy ý là những nghiệm của phương trình (PT) đã cho (trên \mathbb{R}). Nói chung, PTVP có vô số nghiệm. #

Giải một PTVP trên (a, b) là tìm tất cả các nghiệm của nó trên khoảng này.

Nghiệm có thể tìm dưới dạng hiển $y = f(x)$, có thể dưới dạng ẩn - tức là chỉ ra một biểu thức $\Phi(x, y)$ liên hệ biến độc lập x với hàm phải tìm y - cũng như có thể cho nghiệm dưới dạng tham số: $x = x(t)$; $y = y(t)$. Các đường cong tương ứng biểu diễn nghiệm gọi là các *đường cong tích phân* của PT.

4.1.2. Dạng tổng quát của PTVP cấp một

a. Định nghĩa. PTVP cấp I dạng tổng quát:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4.2)$$

x : biến độc lập, y : hàm phải tìm, y' : đạo hàm của y , F là hàm của ba biến x, y, y' trong tập D mở nào đó của \mathbb{R}^3 .

Nếu có thể giải y' qua các biến còn lại:

$$y' = f(x, y): \quad \text{dạng giải ra với đạo hàm.}$$

b. Bài toán Cauchy. Cho PTVP cấp I

$$y' = f(x, y) \quad (4.3)$$

$$(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x_0, y_0) \in D, \quad D \text{ mở}$$

Hãy tìm hàm $y = y(x)$ xác định trong một lân cận nào đó của điểm x_0 , thỏa mãn phương trình (4.3) và thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0 \quad (4.4)$$

Hàm $y(x)$, như vậy gọi là nghiệm của *bài toán Cauchy* (hay *bài toán giá trị ban đầu*) (4.3) – (4.4).

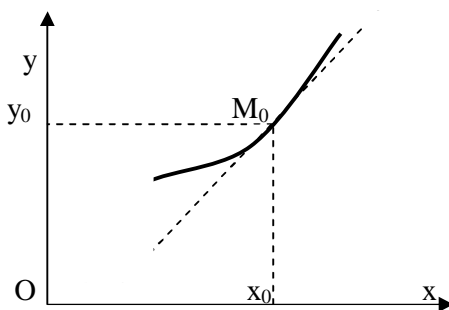
Định lý 4.1 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm)

Cho PT (4.3), $f(x, y)$ - liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$, D mở, $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó:

i) \exists nghiệm $y = y(x)$ xác định trên một lân cận nào đó của x_0 , thỏa mãn (4.4).

ii) Ngoài ra, nếu $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ liên tục trên $D \Rightarrow$ Nghiệm thỏa mãn (4.4) là duy nhất trên lân cận vừa nêu.

c. Ý nghĩa hình học



Hình 4.1. Đường cong tích phân qua điểm (x_0, y_0) có hệ số góc $f(x_0, y_0)$

d. Các loại nghiệm

• *Nghiệm tổng quát.* **Nghiệm tổng quát** của PTVP (4.3) là biểu thức $y = \varphi(x, C)$, C – hằng tùy ý sao cho:

i) Với mỗi hằng số C tùy ý, hàm số $y = \varphi(x, C)$ là một nghiệm của (4.3).

ii) Với mọi điểm (x_0, y_0) trong miền D , tại đó điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm ở Định lý 4.1 được thỏa mãn, có thể giải ra $C = C_0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0$.

- *Tích phân tổng quát.* Nếu hệ thức

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (4.6)$$

Φ : biểu thức liên hệ giữa biến độc lập x , hàm phải tìm y , C là hằng tùy ý xác định nghiệm thì nó gọi là *tích phân tổng quát* của PT đã cho.

- *Nghiệm riêng - tích phân riêng.* Thay hằng số tùy ý C bởi giá trị cụ thể C_0 vào nghiệm tổng quát (4.5), ta được $y = \varphi(x, C_0)$, gọi là *nghiệm riêng*.

Thay hằng số tùy ý C bởi giá trị cụ thể C_0 vào tích phân tổng quát (4.6), ta được $\Phi(x, y, C_0) = 0$, gọi là *tích phân riêng*.

4.1.3. Phương trình với biến số phân ly (PT tách biến)

Dạng: $f(x)dx = g(y)dy$. (4.7)

Coi y là hàm của x : $y = y(x)$ ta được $dy = y'(x)dx$. Thay vào PT:

$$f(x)dx = g(y(x))y'(x)dx.$$

Tích phân hai vế:

$$\int f(x)dx = \int g(y(x))y'(x)dx = \int g(y)dy.$$

Như vậy, để giải PT với biến số phân ly, ta chỉ việc tích phân hai vế:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C. \quad (4.8)$$

Chú ý. Các phương trình

$$u(x)dx + v(y)dy = 0 \quad (4.7')$$

$$y' = g(x)h(y). \quad (4.7'')$$

có thể chuyển về dạng (4.7) dễ dàng. Chẳng hạn, PT (4.7'') chuyển thành

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad (\text{khi } h(y) \neq 0).$$

(Một số tài liệu coi (4.7') hay (4.7'') là PT với biến phân ly).

Ví dụ 4.2. Giải phương trình $(1+x)ydx + (1-y)x dy = 0$.

Xét $x \neq 0, y \neq 0$, phương trình trở thành

$$\frac{1+x}{x}dx = -\frac{1-y}{y}dy \Rightarrow \int \frac{1+x}{x}dx = -\int \frac{1-y}{y}dy + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| + x = y - \ln|y| + C \Leftrightarrow \ln|xy| + x - y = C: \text{ Tích phân tổng quát.}$$

Còn có 2 nghiệm $x = 0$ và $y = 0$: nghiệm kỳ dị.

Nhận xét. Nhiều khi cần chia hai vế PT cho y , thường ta phải kiểm tra xem hàm hằng số $y = 0$ có là nghiệm hay không.

Cũng rất nhiều khi cần chia hai vế cho x , ta mặc nhiên đặt điều kiện $x \neq 0$ rồi thực hiện phép chia. Thực ra vấn đề phức tạp hơn nhiều, cần "ghép nối" nghiệm. #

4.1.4. Phương trình thuần nhất

a. Dạng: $y' = g(x, y)$, g - hàm thuần nhất

$$g(x, y) \text{- hàm thuần nhất: } g(kx, ky) = g(x, y) \quad \forall k \neq 0. \quad (4.9)$$

$$g(x, y) = g\left(x.1, x.\frac{y}{x}\right) = g\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

Vậy ta luôn có thể viết PT thuần nhất dưới dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Giải. Ta hãy tìm hàm $u = u(x)$ để $y = u(x).x = u.x \quad \left(\Leftrightarrow u = \frac{y}{x}\right)$ là nghiệm. Thay vào phương trình ta được

$$y' = u'x + u = f(u) \Leftrightarrow u'x = f(u) - u.$$

- Trường hợp $f(u) - u \neq 0$, chia hai vế cho $f(u) - u \neq 0$:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} : \quad \text{PT phân ly}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \text{ hay } \ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C = g(u) + C$$

$\Rightarrow x = Ce^{g(u)} = Ce^{g(y/x)}$. Đây là tích phân tổng quát.

- Trường hợp PT $f(u) - u = 0$ có nghiệm $u = u_0$ thì rõ ràng

$$\frac{y}{x} = u_0 \Leftrightarrow y = u_0 x \text{ cũng là một nghiệm.}$$

Ví dụ 4.4. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Với $x \neq 0$, $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$: hàm thuần nhất.

Đặt $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow u'x = \frac{1+u^2}{1-u} \Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế,

$$\ln|x| = \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{C}{\sqrt{1+u^2}} e^{\arctan u} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\arctan \frac{y}{x}}. \quad \#$$

b. Phương trình đưa được về dạng thuần nhất. Đó là PT

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad a_i, b_i, c_i - \text{const.} \quad (4.10)$$

* Nếu hệ PT đại số tuyến tính $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ có định thức khác không:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

thì có thể giải ra nghiệm duy nhất $x = x_0, y = y_0$. Đặt

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}; dx = du, dy = dv, v = v(u)$$

Phương trình trở thành $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$: thuần nhất

(u - biến độc lập, v - hàm phải tìm, hệ số c_1, c_2 biến mất, hệ số a_1, b_1, a_2, b_2 bảo toàn).

(Tiếp tục, đặt $v = t.u$ ($t = t(u)$) ta đưa về dạng phân ly của biến t và u).

(Trước kia ta đặt $y = ux$: **Hàm phải tìm = hàm phải tìm mới \times biến đl**)

$$* \text{ Hệ } \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_1 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \text{ có định thức } = 0: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

Đặt $z = a_1 x + b_1 y$ (hoặc $z = a_1 x + b_1 y + c_1$, hoặc $z = a_2 x + b_2 y + c_2$)

(x - biến độc lập, z - ẩn hàm): Đưa PT về dạng phân ly.

Ví dụ 4.6. Giải các phương trình

i) $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$;

ii) $(x + y - 2)dx + (2x + 2y - 2)dy = 0$.

Giải. i) Xét hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$, nghiệm là $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 1 \end{cases}$,

$\Rightarrow dx = du, dy = dv$, PT trở thành $(u - v)du + (2v - u)dv = 0$.

Ta tìm hàm $v = v(u)$ thỏa mãn PT này. Đây là PT thuần nhất, lại đặt $v = tu$ thì $dv = u dt + t du$, nhận được

$$(u - tu)du + (2tu - u)(u dt + t du) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2tu - u)u dt + (u - 2tu + 2t^2 u)du = 0$$

Với $u \neq 0$, PT $\Leftrightarrow \frac{2t-1}{1-2t+2t^2} dt = -\frac{du}{u} \Leftrightarrow \ln \sqrt{1-2t+2t^2} = -\ln|Cu|$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = C \text{ (tích phân tổng quát).}$$

ii) *Giải.* Đặt $z = x + y$; $dz = dx + dy \Rightarrow dy = dz - dx$, PT trở thành

$$(z - 2)dx + 2(z - 1)(dz - dx) = 0 \Leftrightarrow 2(z - 1)dz = z dx.$$

$$* z \neq 0, 2\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = dx \Leftrightarrow 2(z - \ln|z|) = x + C$$

$$\text{hay } 2(x + y - \ln|x + y|) = x + C \text{ (tích phân tổng quát).}$$

* Rõ ràng $z = 0 \Leftrightarrow y = -x$ cũng là một nghiệm, đó là nghiệm kỳ dị. #

4.1.5. Phương trình tuyến tính

$$\text{Dạng: } y' + p(x)y = q(x) \quad (4.11)$$

$p(x), q(x)$ -liên tục trên khoảng (a, b) nào đó.

Sur tồn tại, duy nhất nghiệm. (4.11) được viết lại dưới dạng

$$y' = f(x, y) \text{ với } f(x, y) = -p(x)y + q(x).$$

Các hàm $f(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -p(x)$ liên tục trên $D = \{a < x < b, y \in \mathbb{R}\}$.

Theo Định lý 4.1, D là miền tồn tại duy nhất nghiệm của PT này.

Nếu vế phải bằng không, (4.11) trở thành

$$y' + p(x)y = 0 \quad (4.12)$$

được gọi là *PT tuyến tính thuần nhất*. Nó cũng được gọi là *PT thuần nhất* tương ứng với PT không thuần nhất (4.11).

Giải PT TT * Giải PT TN (4.12). Giả sử $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx : \text{phân ly; tích phân hai vế,}$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \text{ hay } y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0).$$

Với $y = 0$, thay vào (4.12) ta thấy thỏa mãn, vậy $y = 0$ cũng là nghiệm, nghiệm này ứng với $C = 0$. Vậy, NTQ của PT thuần nhất (4.12) là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C - \text{hằng tùy ý.} \quad (4.13)$$

* Tìm nghiệm của (4.11) dưới dạng (4.13), trong đó $C = C(x)$ là hàm phải tìm nào đó của biến x . Lấy đạo hàm,

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Thay vào PT ban đầu

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x).p(x).e^{-\int p(x)dx} + p(x).C(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{+\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{+\int p(x)dx} dx + C.$$

Nhận được nghiệm tổng quát

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{+\int p(x)dx} dx \right], C - \text{hằng tùy ý.} \quad (4.14) \quad \text{CÁCH NHỚ!}$$

Lưu ý. * Các ký hiệu tích phân bất định ở (4.14) được hiểu là một nguyên hàm bất kỳ của hàm dưới dấu tích phân; thường chúng ta chọn hằng số tùy ý bằng 0 khi sử dụng các nguyên hàm cơ bản.

* Ở đây $e^{-\int p(x)dx} = \left(e^{\int p(x)dx} \right)^{(-1)}$.

* **Nên áp dụng trực tiếp (4.14)** để tính nghiệm của PT tuyến tính.

* Có thể dùng phương pháp thừa số tích phân (chặt chẽ hơn) để chứng minh (4.14) là nghiệm tổng quát của (4.11).

Ví dụ 4.7. Giải phương trình

i) $(x^2 + 1)y' + xy = 1$, thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=0} = 2$;

ii) $e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0$.

Giải. i) PT $\Leftrightarrow y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Theo (4.14), nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{x}{x^2+1} dx} \left[C + \int \frac{1}{x^2+1} e^{\int \frac{x}{x^2+1} dx} dx \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} \left[C + \int \frac{1}{x^2+1} e^{\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} [C + \ln(x + \sqrt{x^2+1})]. \end{aligned}$$

Từ điều kiện ban đầu suy ra $y(0) = \frac{C + \ln 1}{1} = C = 2$. Thay vào ta được

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} [2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1})]: \text{ nghiệm riêng.}$$

ii) Khi coi y là ẩn hàm, x là biến độc lập, ta được $y'(xe^y - 1) + e^y = 0$, là PT không có dạng quen thuộc. Bây giờ coi y là biến độc lập, x là ẩn hàm,

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} + x = e^{-y}: \text{PT TT}$$

$$\text{NTQ: } x = e^{-\int 1 dy} \left[C + \int e^{-y} e^{\int 1 dy} dy \right] = e^{-y} [C + y].$$

(là tích phân tổng quát của PT đã cho).

#

4.1.6. Phương trình Bernoulli.

$$\text{Dạng: } y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad (4.15)$$

$p(x), q(x)$ - liên tục trên (a, b) nào đó, $\alpha \in \mathbb{R}$.

* $\alpha = 0$: PT TT, * $\alpha = 1$: PT phân ly, (đã biết cách giải).

* $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Rõ ràng $y = 0$ là một nghiệm.

Xét $y \neq 0$. Chia hai vế cho y^α

NHỚ!

$$y^{-\alpha} y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} y' \Rightarrow y^{-\alpha} y' = z' / (1-\alpha)$, được

NHỚ!

$$z' / (1-\alpha) + p(x)z = q(x)$$

$$\Leftrightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x): \text{PTTT.}$$

Ví dụ 4.9. Giải PT $y' + \frac{2}{x+1}y + (x+1)^3 y^2 = 0$.

Giải. PT $\Leftrightarrow y' + \frac{2}{x+1}y = -(x+1)^3 y^2$.

* Xét trường hợp $y \neq 0$, chia hai vế cho y^2 được

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{x+1} \frac{1}{y} = -(x+1)^3.$$

Đặt $z = \frac{1}{y}$, ... , PT trở thành

$$z' - \frac{2}{x+1} z = (x+1)^3 \Rightarrow z = \dots = \frac{1}{2} [(x+1)^4 + C(x+1)^2]$$

hay $y = \frac{2}{(x+1)^4 + C(x+1)^2}$. Đây là nghiệm tổng quát.

* Rõ ràng $y = 0$ là nghiệm; đó là nghiệm kỳ dị. #

Lưu ý. Giống như với PTTT,

(Có thể), coi y : biến độc lập, x : ẩn hàm \Rightarrow **PT Bernoulli!**

4.1.7. Phương trình vi phân toàn phần (PTVPTP)

$$\text{Dạng: } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (4.16)$$

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$: **vi phân toàn phần** của một hàm u nào đó, tức là trong tập mở D nào đó tồn tại hàm $u = u(x, y)$ để

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in D.$$

Theo Định lý 3.2, nếu $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là hai hàm liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng trên tập mở, đơn liên $D \subset \mathbb{R}^2$ và thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad (x, y) \in D.$$

thì vế trái của (4.6) là vi phân toàn phần, hàm $u(x, y)$ được tính theo công thức (3.15) hay (3.16).

$$\text{TPTQ: } u(x, y) = C.$$

Ví dụ 4.10. Giải PT $[(1+x+y)e^x + e^y]dx + [e^x + xe^y]dy = 0$.

Giải. P, Q cùng các đạo hàm riêng là liên tục.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y. \text{ Chọn } (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x [(1+x)e^x + 1]dx + \int_0^y [e^x + xe^y]dy \\ &= (xe^x + x) \Big|_{x=0}^{x=x} + (e^x y + xe^y) \Big|_{y=0}^{y=y} = (x+y)e^x + xe^y. \end{aligned}$$

$$\text{TPTQ: } (x+y)e^x + xe^y = C. \quad \#$$

* **Thừa số tích phân** (TSTP). Giả sử PT (4.16) không là PTVP toàn phần, nhưng ta tìm được một hàm số $\alpha(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in D$ sao cho PT

$$\alpha(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0 \quad (4.17)$$

là PTVP toàn phần, hay tương đương với điều đó (D mở, đơn liên)

$$\frac{\partial(\alpha Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha P)}{\partial y}, (x, y) \in D.$$

Hàm $\alpha(x, y)$ như vậy được gọi là *thừa số tích phân*.

Tìm TPTQ của (4.17): $u(x, y) = C$, là TPTQ của PT đã cho.

$$* \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \varphi(x) \text{ (hàm chỉ phụ thuộc } x): \alpha = \alpha(x) = e^{-\int \varphi(x) dx}; \quad (4.18)$$

$$* \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \psi(y) \text{ (hàm chỉ phụ thuộc } y): \alpha = \alpha(y) = e^{-\int \psi(y) dy}. \quad (4.19)$$

Ví dụ 4.11. Giải PT $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$.

$$\text{Giải. } \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y; \frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = -1, \text{ chỉ phụ thuộc } x \Rightarrow \alpha = \alpha(x) = e^{-\int (-1) dx} = C e^x.$$

(Chỉ cần chọn một TSTP là đủ; cụ thể, chọn $C = 1$ ta được TSTP là e^x).

Nhân hai vế PT đã cho với ta e^x thu được (chắc chắn là PTVP toàn phần!)

$$e^x (x \sin y + y \cos y) dx + e^x (x \cos y - y \sin y) dy = 0.$$

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$, TPTQ:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy = 0 + \int_0^y e^x (x \cos y - y \sin y) dy \\ &= e^x [x \sin y + y \cos y - \sin y] = C. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.12. Giải PT $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.

$$\text{Giải. } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 - (4xy - 9y^2) = -4xy + 6y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{2}{y} \quad (y \neq 0, 2x - 3y \neq 0), \text{ chỉ phụ thuộc vào biến } y.$$

Chọn $\alpha = \alpha(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}$. Nhân 2 vế với $1/y^2$ ta thu được PT

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x \right) dy = 0.$$

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tính hàm $u(x, y)$ theo công thức

$$u(x, y) = \int_0^x (2x - 3) dx + \int_1^y \left(\frac{7}{y^2} - 3x \right) dy = x^2 - \frac{7}{y} - 3xy + 7.$$

TPTQ: $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C$, C- hằng số tùy ý.

Để thấy $y = 0$ là một nghiệm, còn $2x - 3y = 0$ không xác định nghiệm. #

4.1.8. Trường hệ số góc (xem tài liệu [1] tr ...)

4.1.9. Quỹ đạo trực giao (xem tài liệu [1] tr ...)

b) Thảo luận	Một số ứng dụng thực tế của PTVP cấp I
c) Tự học	<ul style="list-style-type: none"> - Phát biểu bài toán Cauchy cho PTVP cấp một dạng giải ra với đạo hàm; phát biểu định lý tồn tại duy nhất nghiệm, định nghĩa nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng. - Các dạng căn bản PTVP cấp I và cách giải các dạng này - Đọc các Ví dụ 4. 34; VD 4.35 ; VD 4.36; VD 4.48; VD 4.49; VD 4.50
d) Bài tập (1t)	3(b); 10(b, c, d, e);
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Chú ý: Bài tập về nhà cho cả chương

Bổ trợ: 2(a); 3(a) 8; 10(e); 12(b); 15(b,c); 18(b); 20(a); 21(d); 23(a); 24(b, e); 26(a, b, d); 28(a, b); 31(c).

Chính: 3(b); 10(b, c, d, e); 12(e, f, g); 13(b); 15(f, g); 18(c, d); 19(a, b, c, d, e); 24(e); 26(f, h, i, j); 27(c, d,e); 28(d, e, f, g); 30(d, e, f); 31(b); 32; 33(a, b, c).
VD 4. 34; VD 4.35 ; VD 4.36; VD 4.48; VD 4.49;
VD 4.50; VD 4.51 ; VD 4.52; VD 4.53; VD 4.54((i), (ii)).

Tóm tắt - PTVP cấp một

PT phân ly	<ul style="list-style-type: none"> • Dạng: $f(x)dx = g(y)dy$, f, g: liên tục • Giải: $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$
PT thuần Nhất	<ul style="list-style-type: none"> • Dạng: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ • Giải: $y = u(x).x$ $y' = u'x + u$, đưa về PT phân ly
PT tuyến tính	<ul style="list-style-type: none"> • Dạng: $y' + p(x)y = q(x)$ • Giải: NTQ: $y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]$
PT Bernoulli	<ul style="list-style-type: none"> • Dạng: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$) • Giải: Chia hai vế cho y^α, đặt $z = y^{1-\alpha}$ đưa về PTTT
PT VP Toàn phần	<ul style="list-style-type: none"> • Dạng: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ • Giải: TPTQ: $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C$

Thừa số tích phân	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{1}{Q} = \varphi(x)$: Chọn $\alpha = \alpha(x) = e^{-\int \varphi(x) dx}$ • $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{1}{P} = \psi(y)$: Chọn $\alpha = \alpha(y) = e^{-\int \psi(y) dy}$
--------------------------	--

Bài giảng 12: Phương trình vi phân (tiếp)

Chương, mục: 4

Tiết thứ: 55-60

Tuần thứ: 13

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các khái niệm căn bản về PTVP cấp II, cấu trúc nghiệm PTTT, giải được các dạng cơ bản của PTVP hệ số hằng, về phải đặc biệt.
- Thấy được một số ứng dụng thực tiễn của PTVP, PTVP cấp hai.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chữa bài tập phương trình vi phân cấp 1

§4.2 Phương trình vi phân cấp hai

d) Bài tập (2t)	12(e, f, g); 13(b); 15(f, g); 18(c, d); 19(a, b, c, d, e) (Cấp I)
------------------------	--

§ 4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

4.2.1. Mở đầu

a. Định nghĩa. Dạng tổng quát của PTVP cấp II

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (\text{phải có mặt } y'') \quad (4.23)$$

Nếu có thể giải ra y'' qua các biến còn lại:

$$y'' = f(x, y, y') : \text{PTVP cấp hai dạng giải ra với đạo hàm} \quad (4.24)$$

Định lý 4.2 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm)

Xét PTVP (4.24), $f(x, y, y')$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$: liên tục của ba biến

(x, y, y') trong tập mở $D \subset \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow \forall (x_0, y_0, y'_0) \in D, \exists ! y = y(x)$ trong một lân cận của x_0 thỏa mãn

$$\begin{cases} y|_{x_0} = y_0, \\ y'|_{x_0} = y'_0. \end{cases} \quad (4.25)$$

b. Nghiệm tổng quát. NTQ của PT (4.24) là họ hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, C_1, C_2 - hằng số tùy ý:

i) $\forall C_1, C_2$, hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ là nghiệm của (4.24).

ii) $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in D$, D: điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm của PT (4.24) thỏa mãn, giải ra được $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$: $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$:
 $y|_{x_0} = y_0; y'|_{x_0} = y'_0$.

c. Tích phân tổng quát. Nếu hệ thức $\Phi(x, C_1, C_2) = 0$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng tùy ý cho phép xác định NTQ, thì hệ thức đó gọi là TPTQ của PT.

d. Nghiệm riêng, tích phân riêng. Khi thay các hằng số C_1, C_2 một giá trị cụ thể C_1^0, C_2^0 nào đó vào NTQ, ta được hàm số $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$: NR.

Tương tự, khi thay các hằng số C_1, C_2 một giá trị cụ thể C_1^0, C_2^0 nào đó vào TPTQ, được hệ thức $\Phi(x, C_1^0, C_2^0) = 0$: TPR.

e. Bài toán giá trị ban đầu, bài toán biên

Điều kiện (4.25): *điều kiện ban đầu*. Bài toán tìm nghiệm của PT (4.24) thỏa mãn ĐKBĐ (4.25) gọi là *bài toán giá trị ban đầu*.

Bài toán biên: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của PT (4.24) trên đoạn $[x_1, x_2]$ và thỏa mãn

$$y(x_1) = y_1; y(x_2) = y_2 : \text{Điều kiện biên} \quad (4.26)$$

x_1, x_2, y_1, y_2 ($x_1 < x_2$): các giá trị cho trước.

Bài toán biên: Không phải luôn có nghiệm.

4.2.2. Các phương trình giảm cấp được

a. Phương trình $F(x, y', y'') = 0$ (*vắng y*)

Đặt $y' = p = p(x)$. Đạo hàm $y'' = p'$.

Thay vào PT $F(x, p, p') = 0$: PT cấp I (x : biến độc lập, p : ẩn hàm).

Ví dụ 4.15. Giải các phương trình

$$\text{i) } x = y''^2 + y'' + 1; \quad \text{ii) } y'' = x - y' / x.$$

Giải. i) Đặt $y' = p = p(x) \Rightarrow y'' = p'$, ta được $x = p'^2 + p' + 1$.

Đây là PT cấp I với biến x . Lại đặt

$$t = p' \Rightarrow x = t^2 + t + 1, \quad dx = (2t + 1)dt.$$

$$\text{Vì } \frac{dp}{dx} = t; \quad dp = t dx = t(2t + 1)dt = (2t^2 + t)dt \Rightarrow p = p(t) = \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C.$$

$$y = \int p(x)dx = \int p(t)x'(t)dt = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + Ct^2 + Ct + D.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + Ct^2 + Ct + D. \end{cases} \quad (\text{nghiệm dạng tham số})$$

ii) Đặt $y' = p = p(x) \Rightarrow y'' = p'$, ta được $p' + \frac{1}{x}p = x$: PT TT cấp I,

$$\text{NTQ: } p = y' = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}.$$

NTQ PT đã cho: $y = x^3/9 + C \ln|x| + D$. #

b. Phương trình $F(y, y', y'') = 0$ (vắng x)

Đặt $y' = p = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{d(y')}{dx} = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$.

Thay vào PT: $F(y, p, p'p) = 0$: PT bậc nhất (y : biến độc lập, p : ẩn hàm).

Ví dụ 4.16. Giải phương trình $2y y'' + y'^2 = 0$.

Giải. Đặt $y' = p = p(y) \Rightarrow y'' = p'p$, PT trở thành

$$2y \cdot p'p + p^2 = 0 \Leftrightarrow p(2y p' + p) = 0.$$

* $p = 0 = y' \Rightarrow y = D$.

* $p \neq 0 \Rightarrow 2y p' + p = 0$. $y \neq 0$, $\frac{2dp}{p} = -\frac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \ln|p| = -\frac{1}{2} \ln|y| + \ln|C_0| \Rightarrow p = \frac{C}{\sqrt{y}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{y}} \Rightarrow y^{3/2} = Cx + D.$$

Trường hợp $C = 0$ ta trở về họ đã nói. Tóm lại, $y^{3/2} = Cx + D$. #

4.2.3. Phương trình tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính (PTVPTT) cấp hai có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.27)$$

$p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ -liên tục trên (a, b) .

Nếu $f(x) \equiv 0 \Rightarrow$ PT thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (4.28)$$

PT (4.28) cũng được gọi là PT TN tương ứng với PT không TN (4.27).

Cấu trúc nghiệm:

Định lý 4.3. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là 2 nghiệm của PT TN (4.28) thì $\forall C_1, C_2$, hàm số $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là 1 nghiệm của (4.28).

Chứng minh. Thay $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ vào PT đã cho ta được

$$\begin{aligned} (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\ = C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Định nghĩa. Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* (đlitt) trên khoảng (a, b) nếu đẳng thức $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số thực nào đó, xảy ra chỉ khi $C_1 = C_2 = 0$.

Trái lại, nếu tồn tại hai hằng số C_1, C_2 không đồng thời bằng 0 để

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

thì hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ gọi là phụ thuộc tuyến tính (pttt) trên (a, b) .

Sự độc lập, phụ thuộc cũng được định nghĩa tương tự cho hệ n hàm số.

Định lý 4.4. Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm đltt của PT thuần nhất (4.28) thì nghiệm tổng quát của PT thuần nhất đó là

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \text{ -hằng số tùy ý.}$$

Định lý 4.5. Nếu $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm riêng của PT thuần nhất (4.28) thì ta có thể tìm nghiệm riêng thứ hai đltt với $y_1(x)$ dưới dạng $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x)$. Cụ thể hơn,

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx. \quad (4.29)$$

Định lý 4.6. NTQ của PT không TN (4.21) bằng tổng của NTQ của PTTN (4.22) với một nghiệm riêng của PT không TN (4.21):

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

C_1, C_2 - hằng số tùy ý, $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm đltt của PTTN (4.22), $\bar{y}(x)$ là một nghiệm riêng của PT (4.21).

Định lý 4.7 (Nguyên lý xếp chồng (chồng chất) nghiệm). Cho PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad (4.30)$$

$p(x), q(x), f_1(x), f_2(x)$: hàm liên tục. Giả sử

$$\bar{y}_1(x) \text{ là một nghiệm riêng của PT } y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

$$\bar{y}_2(x) \text{ là một nghiệm riêng của PT } y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x).$$

Khi đó, $\bar{y} = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ là một nghiệm riêng của PT (4.30).

4.2.4. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giả sử đã tìm được 2 nghiệm riêng đltt của PT thuần nhất (4.28) là $y_1(x)$ và $y_2(x)$. Theo Định lý 4.4, nghiệm tổng quát của PT (4.28) là $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

Giống như trường hợp cấp I, bây giờ ta tìm nghiệm của (4.27) dưới dạng

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (4.31)$$

với $C_1(x), C_2(x)$ là những hàm của biến x trong khoảng (a, b) . Lấy đạo hàm:

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Ta hãy chọn $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn điều kiện bổ sung

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Khi đó $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$. Tiếp tục, lấy đạo hàm ta được

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''.$$

Thay vào PT đã cho, rút gọn lại ta được

$$C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Vì $y_1(x), y_2(x)$ là những nghiệm của PT TN dẫn đến

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Tóm lại, $C_1(x), C_2(x)$ phải thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (4.32)$$

Có thể chứng minh hệ (4.32) luôn có nghiệm duy nhất. Giả sử đó là

$$\begin{cases} C_1' = \varphi_1(x) \\ C_2' = \varphi_2(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + K_1 \\ C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + K_2 \end{cases}$$

Thay vào (4.31) ta được nghiệm

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx, \quad (4.33)$$

(K_1, K_2 - các hằng số tùy ý).

Ta được luôn nghiệm tổng quát của PT không thuần nhất đã cho.

Phương pháp vừa nêu để giải PT không thuần nhất gọi là *Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)*.

Nó hiệu quả với **PT TT hệ số hằng số** (sẽ xét sau), về phải tùy ý.

Ví dụ 4.17. Giải phương trình $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$.

Giải. Trước hết ta giải PT thuần nhất $y'' - y' = 0$.

Ở mục 4.2.5a chúng ta sẽ giải PT thuần nhất này một cách dễ dàng. Tuy nhiên, có thể nhận thấy đây là phương trình vắng x , (hoặc coi là vắng y). NTQ:

$$y = C + D e^x.$$

Bây giờ ta tìm nghiệm PT đã cho dưới dạng

$$y = C(x).1 + D(x).e^x,$$

$$C(x), D(x): \begin{cases} C'.1 + D'.e^x = 0 \\ C'.0 + D'.e^x = (2-x)e^x / x^3 \end{cases} \Leftrightarrow C' = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}, D' = \frac{2-x}{x^3}$$

$$C = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \int \frac{e^x}{x^2} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} + C_1$$

$$D = \int \frac{2-x}{x^3} dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + D_1.$$

$$\text{Vậy NTQ } y = \left(\frac{e^x}{x^2} + C_1\right).1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + D_1\right).e^x \text{ hay } y = C + D e^x + \frac{e^x}{x}. \#$$

4.2.5. Phương trình tuyến tính với hệ số hằng số và vế phải đặc biệt

a. Phương trình thuần nhất

$$\text{Dạng: } y'' + p y' + q y = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (4.34)$$

Chỉ cần tìm hai NR độc lập tuyến tính. Ta tìm NR dạng $y = e^{kx}$, k là hằng số. Đạo hàm hai lần ta được $y' = k e^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$.

Thay vào PT đã cho

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0. \quad \text{PTĐT} \quad (4.35)$$

- Hai nghiệm k_1, k_2 thực, phân biệt

Rõ ràng, $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ là hai nghiệm (thực). Chúng đlitt vì $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.} \Rightarrow$ NTQ của (4.34) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

- Hai nghiệm thực trùng nhau: $k_1 = k_2$

$y_1 = e^{k_1 x}$ là NR. Dễ thấy nghiệm riêng thứ hai là $y_2 = x e^{k_1 x}$; rõ ràng hai nghiệm riêng này đlitt. Vậy NTQ của (4.34) là $y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$.

- Hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Khi xét trong tập số phức, $e^{(\alpha+i\beta)x}$ và $e^{(\alpha-i\beta)x}$ là hai nghiệm. Từ đó,

$$Y_1 = \frac{1}{2} (e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} (e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

cũng là hai nghiệm. Tuy nhiên, đây là hai nghiệm thực và đlitt. Vậy nghiệm tổng quát của PTTN là $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Bảng 4.1. Giải PT thuần nhất hệ số hằng số $y'' + py' + y = 0$

PTĐT $k^2 + pk + q = 0$	Nghiệm tổng quát
Có 2 nghiệm thực $k_1 \neq k_2$	$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Có nghiệm kép $k_1 = k_2$	$e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$
Có nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Ví dụ 4.18. Tìm nghiệm tổng quát của các PT

i) $y'' + 2y' - 3y = 0$; ii) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Giải. i) PTĐT: $k^2 + 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -3$

$$\Rightarrow \text{NTQ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

ii) PTĐT: $k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 3$

$$\Rightarrow \text{NTQ: } y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}.$$

#

Ví dụ 4.19. Tìm nghiệm của PT $y'' - 2y' + 5y = 0$ và thỏa mãn

i) Điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 3$;

ii) Điều kiện biên $y(0) = 0, y(\pi) = 1$.

Giải. PTĐT $k^2 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_{12} = 1 \pm 2i$.

NTQ: $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

i) Từ điều kiện suy ra $y = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$.

ii) Từ điều kiện thì $C_1 = 0$ và $e^\pi C_1 = 1$: vô lý; bài toán vô nghiệm. #

b. Phương trình với vế phải đặc biệt

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (4.36)$$

trong đó p, q là hai hằng số cho trước, $f(x)$ là hàm liên tục.

PT $k^2 + pk + q = 0$: PT đặc trưng của (4.36).

Ở phần a) chúng ta đã biết cách tìm nghiệm tổng quát của PTTN. Ta chỉ cần tìm một NR; cộng hai nghiệm này lại ta sẽ được NTQ của PT (4.36). Chúng ta tìm NR của PT không TN (4.36) khi vế phải $f(x)$ có dạng đặc biệt.

Bảng 4.2. Tìm nghiệm riêng PT hệ số hằng số $y'' + py' + q = f(x)$

Vế phải $f(x)$	So sánh với nghiệm PTĐT $k^2 + pk + q = 0$	Dạng nghiệm riêng
$e^{\alpha x} P_n(x)$	α không là nghiệm	$e^{\alpha x} Q_n(x)$
	α là nghiệm đơn	$x e^{\alpha x} Q_n(x)$
	α là nghiệm kép	$x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$
$e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$	$\alpha + i\beta$ không là nghiệm	$e^{\alpha x} [H_s(x) \cos \beta x + K_s(x) \sin \beta x]$
	$\alpha + i\beta$ là nghiệm	$x e^{\alpha x} [H_s(x) \cos \beta x + K_s(x) \sin \beta x]$ ($s = \text{Max}(m, n)$)

Công thức đạo hàm sau rất có ích

$$(e^{\alpha x} f(x))' = e^{\alpha x} (f'(x) + \alpha f(x)).$$

Ví dụ 4.20. Giải PT $y'' - 2y' + y = 1 + x$.

PTĐT: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$.

NTQ PTTN $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Thấy rằng $1 + x = e^{0x} P(x) \Rightarrow \alpha = 0$ không là nghiệm PTĐT.

Tìm NR dạng $y = \bar{y} = e^{0x} (A + Bx) = A + Bx$.

Thay vào PT, đồng nhất hệ số hai vế ta được $A = 3, B = 1 \Rightarrow \bar{y} = 3 + x$.

$$\Rightarrow \text{NTQ } y = e^x(C_1 + C_2x) + 3 + x. \quad \#$$

Ví dụ 4.21. Giải PT $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$.

$$\text{PTĐT: } k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2.$$

$$\text{NTQ PTTN } y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

* $f(x) = e^x(3 - 4x) = e^{1x}P_1(x) \Rightarrow \alpha = 1$ là nghiệm của PTĐT, tìm NR dạng

$$y = \bar{y} = xe^x(A + Bx) = e^x(Ax + Bx^2).$$

$$y' = e^x[A + (A + 2B)x + Bx^2],$$

$$y'' = e^x[2A + (A + 4B)x + Bx^2].$$

Thay vào PT đã cho, đồng nhất hệ số 2 vế ta được $A = 1, B = 2$.

$$\Rightarrow \text{NR: } \bar{y} = xe^x(1 + 2x) \Rightarrow \text{NTQ: } y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^x(1 + 2x). \quad \#$$

Ví dụ 4.22. Giải PT $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$.

$$\text{PTĐT: } k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2.$$

$$\text{NTQ PTTN: } y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

$f(x) = 4e^{2x} = e^{2x}.P_0(x) \Rightarrow \alpha = 2$ nghiệm kép của PTĐT. NR dạng

$$y = \bar{y} = x^2e^{2x}A = Ae^{2x}x^2 \Rightarrow y' = 2Ae^{2x}(x + x^2);$$

$$y'' = 2Ae^{2x}(1 + 4x + x^2).$$

Thay vào PT đã cho, đồng nhất hệ số 2 vế ta được $A = 2$.

$$\Rightarrow \text{NR: } \bar{y} = 2e^{2x}x^2 \Rightarrow \text{NTQ: } y = (C_1 + C_2x + 2x^2)e^{2x}. \quad \#$$

Ví dụ 4.23. Giải PT $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

$$\text{PTĐT: } k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i = 0 \pm i.$$

$$\text{NTQ PTTN } y = e^{0x}(C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Thấy rằng $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) = xe^x$, $f_2(x) = 2e^{-x}$.

* Xét PT $y'' + y = f_1(x) = xe^x$.

$f_1(x) = xe^x = e^{1x}P_1(x) \Rightarrow \alpha = 1$ không là nghiệm PTĐT, tìm nghiệm riêng

$$y = \bar{y}_1 = e^x(A + Bx); \quad y' = e^x(A + B + Bx); \quad y'' = e^x(A + 2B + Bx).$$

Thay vào PT ta được

$$A = -1/2; B = 1/2 \Rightarrow \text{NR: } \bar{y}_1 = e^x(-1 + x)/2.$$

* Bây giờ xét PT $y'' + y = f_2(x) = 2e^{-x}$.

$\alpha = -1$ không không là nghiệm PTĐT, tìm nghiệm riêng dạng

$$y = \bar{y}_2 = e^{-x}C \Rightarrow y' = -e^{-x}C, y'' = e^{-x}C.$$

Thay vào PT được $C = 1 \Rightarrow NR: \bar{y}_2 = e^{-x}.$

$$\Rightarrow NTQ: y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x(x-1)/2 + e^{-x}. \quad \#$$

b) Thảo luận	Một số ứng dụng thực tế của PTVP cấp II
c) Tự học	<p>Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai: định nghĩa, PT thuần nhất tương ứng, phát biểu 5 định lý nói lên cấu trúc nghiệm của PTVPTT cấp hai.</p> <p>- Đưa PT cấp II về cấp I:</p> <p>Đặt $p = p(x) = y' \Rightarrow y'' = p' \quad (\text{vắng } y)$ hay $p = p(y) = y' \Rightarrow y'' = p.p' \quad (\text{vắng } x).$</p> <p>Bảng 4.2 Đọc các Ví dụ: VD 4.51; VD 4.52; VD 4.53; D 4.54((i), (ii)).</p>
d) Bài tập	
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

Bài giảng 13: Phương trình vi phân (tiếp)

Chương, mục: 4

Tiết thứ: 61-65

Tuần thứ: 14

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các khái niệm căn bản về hệ PTVP, sự tương ứng giữa hệ PTVP cấp I và PTVP cấp cao.
- PP đưa hệ về PTVP cấp cao, áp dụng với hệ thuần nhất, hệ số hằng số.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chữa bài tập phương trình vi phân cấp 1

§4.2 Phương trình vi phân cấp hai (tiếp)

§4.3 Hệ phương trình vi phân.

Ôn tập chương 4

§ 4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI (tiếp – 1 tiết)

4.2.5. PT TT với hệ số hằng số và vế phải đặc biệt

Ví dụ 4.24. Giải PT $y'' + 9y = 4x \sin x.$

$$PT\acute{D}T: k^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3i.$$

$$NTQ\ PTTN\ y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Ta thấy $f(x) = 4x \sin x = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 4x \sin x) \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i$ không là nghiệm PTĐT, $s = \text{Max}(0, 1) = 1$. Vậy ta tìm nghiệm riêng dạng

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} = e^{0x}[(A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x] \\ &= (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x, \\ y' &= B\cos x + (-A - Bx)\sin x \\ &\quad (C + Dx)\cos x + D\sin x \\ &= (B + C + Dx)\cos x + (-A + D - Bx)\sin x, \\ y'' &= D\cos x + (-B - C - Dx)\sin x \\ &\quad + (-A + D - Bx)\cos x - B\sin x \\ &= (-A + 2D - Bx)\cos x + (-2B - C - Dx)\sin x. \end{aligned}$$

Thay vào PT, hằng đẳng hai vế ta được:

$$\begin{aligned} (8A + 2D + 8Bx)\cos x + (-2B + C + 8Dx)\sin x &= 4x \sin x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 8A + 2D + 8Bx = 0 \\ -2B + C + 8Dx = 4x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8A + 2D = 0 \\ 8B = 0 \\ -2B + C = 0 \\ 8D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/8 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{NR} \quad \bar{y} = -\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

$$\text{NTQ} \quad y = -\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{2}x \sin x + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x. \quad \#$$

Nhận xét. Nếu vế phải chứa các hàm cosin, sin thì đó là bài toán dạng khó. Khi đạo hàm, ta nên viết cos dưới cos, sin dưới sin, viết các số hạng của đa thức theo thứ tự lũy thừa tăng dần, hệ số theo thứ tự A, B, C.... Điều quan trọng là phải **tập trung cao độ** ta mới hy vọng nhận được đáp số đúng.

Ví dụ 4.25. $y'' - y' = 2\cos^2 x$. ĐS $y = C_1 + C_2 e^x - x - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{2}{10}\sin 2x$. #

c. Phương trình tuyến tính cấp cao với hệ số hằng số

Dạng: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$ (4.37)

p_1, p_2, \dots, p_n - các hằng số, $f(x)$: hàm liên tục trên (a, b) .

Bảng 4.3. Giải PT thuần nhất hệ số hằng số

PTĐT $k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_n = 0$	Nghiệm riêng ĐLTT tương ứng
k là nghiệm đơn	e^{kx}
k là nghiệm kép bội m	$e^{kx}, x e^{kx}, \dots, x^{m-1} e^{kx}$
$\alpha \pm i\beta$ là nghiệm phức liên hợp bội m	$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ $e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Tìm nghiệm riêng PT không thuần nhất tương ứng cũng như phương pháp biến thiên hằng số Lagrange với PT cấp cao rất giống trường hợp PT cấp II.

Ví dụ 4.27. Giải các PT

$$i) y''' - 3y'' - y' + 3y = -3e^{2x};$$

$$ii) y^{(4)} - 8y' = -48xe^{2x};$$

$$iii) y^{(4)} - y = 4\sin x : \text{Tự đọc}$$

Giải.

$$i) \text{ PTĐT } k^3 - 3k^2 - k + 3 = 0 \Leftrightarrow (k^2 - 1)(k - 3) = 0 \Leftrightarrow k = -1, 1, 3.$$

$$\text{NTQ PTTN } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}.$$

Để tìm nghiệm riêng, ta thấy $f(x) = -3e^{2x} : \alpha = 2$ không là nghiệm của PTĐT. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = \bar{y} = Ae^{2x}$.

$$\text{Thay vào PT đã cho, hằng đẳng hệ số 2 vế ta được } A = 1 \Rightarrow \bar{y} = e^{2x}.$$

$$\text{Vậy, NTQ phương trình đã cho là } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x} + e^{2x}.$$

$$ii) \text{ PTĐT } k^4 - 8k = 0 \Leftrightarrow k(k - 2)(k^2 + 2k + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 0; k_2 = 2; k_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

$$\text{NTQ PTTN: } y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + C_4 e^{-x} \sin \sqrt{3}x.$$

* Nghiệm riêng. $f(x) = 16xe^{2x} : \alpha = 2$ là nghiệm đơn của PTĐT.

Tìm nghiệm riêng dạng $y = \bar{y} = xe^{2x}(A + Bx) = e^{2x}(Ax + Bx^2)$.

$$y' = \dots = e^{2x}(A + (2A + 2B)x + 2Bx^2)$$

$$y'' = \dots = e^{2x}(4A + 2B + (4A + 8B)x + 4Bx^2)$$

$$y''' = \dots = e^{2x}(12A + 12B + (8A + 24B)x + 8Bx^2)$$

$$y^{(4)} = \dots = e^{2x}(32A + 48B + (16A + 64B)x + 16Bx^2)$$

Thay vào PT đã cho ta được

$$y^{(4)} - 8y' = e^{2x}(24A + 48B + 48Bx) = f(x) = e^{2x}(-48x)$$

$$\Leftrightarrow B = -1; A = 2 \Rightarrow \bar{y} = e^{2x}(2x - x^2).$$

Vậy nghiệm tổng quát PT đã cho là

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + C_4 e^{-x} \sin \sqrt{3}x + xe^{2x}(2 - x).$$

$$iii) \text{ ĐS: NTQ } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + x \cos x.$$

#

§ 4.3. SƠ LƯỢC VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (1 tiết)

4.3.1. Định nghĩa - Bài toán Cauchy – Các loại nghiệm

a. Định nghĩa

$$\text{Dạng: } \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (4.40)$$

x : biến độc lập, y_1, y_2, \dots, y_n : các ẩn hàm phải tìm.

* Họ các hàm số $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, $x \in (a, b)$ được gọi là *ng nghiệm* của hệ (4.40) trong khoảng $(a; b)$ nếu khi thay vào hệ, được các đồng nhất thức.

b. Bài toán Cauchy

Định lý 4.8 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm của hệ PTVP cấp I)

c. Nghiệm riêng, nghiệm tổng quát

4.3.2. Giải hệ phương trình vi phân (xem tài liệu [1] tr ...)

a. Phương pháp khử

- Từ một PT nào đó của hệ, đạo hàm hai vế liên tiếp theo biến x .
- Dùng các PT khác của hệ, dẫn đến PT cấp cao của một ẩn hàm.
- Giải PT cấp cao này, từ đó nhận được các ẩn hàm khác.

Ví dụ 4.28. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{z} \\ z' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Giải. Lưu ý rằng biến độc lập là x . Đạo hàm PT thứ hai

$$z'' = \frac{1}{2}y'.$$

Dùng cả PT đầu, cả PT sau, dẫn đến

$$z'' = \frac{1}{2} \frac{y^2}{z} = \frac{1}{2} \frac{(2z')^2}{z} \Leftrightarrow z z'' = 2z'^2: \text{PT bậc hai với } z, \text{ vắng } x.$$

Đặt $z' = p = p(z)$, $z'' = p' \cdot p$, được

$$z p p' = 2p^2.$$

* Rõ ràng $p = 0$ là nghiệm, ứng với nó là $z = C \neq 0, \quad y = 0$.

* $p \neq 0, \frac{dp}{p} = 2 \frac{dz}{z}$. Giải ra ta được

$$p = \frac{dz}{dx} = Cz^2 \Rightarrow z = -\frac{1}{Cx + D}.$$

$$\text{Từ PT sau, } y = 2z' = 2p = 2Cz^2 = \frac{2C}{(Cx + D)^2}.$$

$$\text{DS} \begin{cases} y=0 \\ z=C \neq 0 \end{cases}; \quad y = \frac{2C}{(Cx+D)^2}, z = -\frac{1}{Cx+D}. \quad \#$$

b. Phương pháp tổ hợp

b. Phương pháp khử. Chúng ta có thể dùng phương pháp khử nêu trên để đưa về PT vi phân cấp n, sau đó tìm ra nghiệm tổng quát. Điều này đặc biệt thuận lợi khi n nhỏ (chẳng hạn, $n = 2, 3$).

Ví dụ 4.32. Giải hệ
$$\begin{cases} x'_t = x + 2y & (*) \\ y'_t = x - y & (**) \end{cases}$$

Giải. Đạo hàm 2 vế PT (*),

$$x'' = x' + 2y'.$$

Ta cần đưa về PT của một biến x. Sử dụng PT (**) và sau đó là (*) ta được

$$x'' = x' + 2(x - y) = x' + 2x - 2y = x' + 2x - (x' - x) \Leftrightarrow x'' - x = 0.$$

Giải PT thuần nhất cấp hai này ta được nghiệm tổng quát $x = Ce^t + De^{-t}$.

Từ đó, $y = (x' - x) / 2 = \dots = -De^{-t}$.

Tóm lại, nghiệm của hệ là $x = Ce^t + De^{-t}$, $y = -De^{-t}$. #

c. Phương pháp Euler (⚙)

Ví dụ 4.33. Giải các hệ PTVP sau

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + z \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x' = -y + z \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases}$$

Giải. i) NTQ
$$\begin{cases} y = (-C - D - Dx)e^{-2x} \\ z = (C + Dx)e^{-2x} \end{cases}$$

ii) NTQ
$$\begin{cases} x = (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t \\ y = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t \\ z = C_1e^t - C_2\sin t + C_3\cos t \end{cases}$$

§ 4.4. MỘT SỐ VÍ DỤ VÀ BÀI TOÁN TỔNG HỢP (1 tiết)

Ví dụ 4.34. Giải PT $(x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0$.

Giải. Xét hệ
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, nên ta đặt $z = x + y$, $dz = dx + dy \Rightarrow dy = dz - dx$.

$$\frac{2z-1}{z-2} dz = dx \Rightarrow \int \left(2 + \frac{3}{z-2} \right) dz = \int dx \text{ hay}$$

$$2z + 3\ln|z-2| = x + C \Leftrightarrow x + 2y + 3\ln|x+y-2| = C. \quad \#$$

Ví dụ 4.35. Giải PT $xy' - x\sqrt{x^2 + y^2} - y = 0$ ($x > 0$) bằng cách đặt $y = zx$

Giải. Xét $x \neq 0$, đặt $y = z.x$ ($z = z(x)$) $\Rightarrow z = \frac{y}{x}$, $y' = z'.x + z$.

Thay vào PT được

$$x^2 z' + xz - x^2 \sqrt{1+z^2} - zx = 0 \Leftrightarrow z' = \sqrt{1+z^2} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(z + \sqrt{1+z^2}) = x + C \Leftrightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} - Dxe^x = 0.$$

Lưu ý rằng PT đã cho không thuần nhất; tuy nhiên ta vẫn giải thành công khi đặt $y = zx$! #

Ví dụ 4.37. (Bài toán nồng độ dung dịch). Một bể 1000 l nước có hòa tan 50 kg muối. Bơm nước biển với nồng độ muối 10 g/l vào bể với vận tốc 10l/phút, giữ thể tích nước trong bể cố định bằng cách rút nước khỏi bể với vận tốc 10 l/phút.

- Lập phương trình vi phân mô tả lượng muối trong bể theo thời gian.
- Sau 40 phút, lượng muối còn lại trong bể là bao nhiêu? ĐS: 36,8 kg.

Ví dụ 4.46. Số lượng ban đầu của mẻ vi khuẩn ở buồng cấy là 1000 và vận tốc sinh trưởng tỷ lệ với số lượng vi khuẩn có mặt ở buồng cấy. Sau 2 giờ, quần thể có 9 000 con.

- Tìm biểu thức số lượng vi khuẩn sau t giờ.
- Tìm số vi khuẩn sau 3 giờ.
- Tìm vận tốc sinh sau 3 giờ.
- Sau bao lâu số lượng vi khuẩn tăng lên gấp đôi

Ví dụ 4.47 (Bài toán xác định niên đại hóa thạch). Người ta cho rằng, lượng phóng xạ mà trái đất nhận từ vũ trụ về cơ bản cân bằng với lượng phóng xạ mà các chất phóng xạ mất đi trong quá trình phân rã. Vì thế, có thể coi lượng carbon-14 trong mỗi cơ thể sống ở mọi thời đại về cơ bản là như nhau. Tuy nhiên, khi một cơ thể sống chết đi thì tốc độ thay đổi carbon-14 là tỷ lệ thuận với khối lượng hiện có của nó trong cơ thể. Gọi $y(t)$ là lượng carbon-14 trong hóa thạch tại thời điểm t thì tốc độ thay đổi của carbon-14 trong hóa thạch tại thời điểm đó là $y'(t) = ky(t)$, k - hằng số âm.

Biết rằng chu kỳ bán phân rã của carbon-14 là 5730 năm, hãy tính hệ số phân rã k.

Hóa thạch của cơ thể người chứa 54% lượng carbon-14 ban đầu, người đó sống cách đây bao nhiêu lâu?

HD. Với $T = 5730$, $y(T) = \frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{kT} \Rightarrow k \approx -0,00012$.

$$0,54y_0 = y_0 e^{kt} \Rightarrow t = \frac{\ln 0,54}{k} = 5134 \text{ (trên năm ngàn năm)}. \quad \#$$

Ví dụ 4.48. Giải PT $(\sin^2 y - x^2) dx - x \sin 2y dy = 0$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \sin 2y \Rightarrow \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{2}{x} \Rightarrow \alpha(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

PT $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(\sin^2 y - x^2)dx - \frac{1}{x^2}x \sin 2y dy = 0$, là PTVP toàn phần.

Trên miền $\{(x, y) : x > 0\}$, với $(x_0, y_0) = (1, 0)$, tích phân tổng quát là:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x} \sin^2 0 - 1 \right) dx - \int_0^y \frac{1}{x} \sin 2y dy = C \quad \text{hay} \quad x + \frac{\sin^2 y}{x} = C. \quad \#$$

Ví dụ 4.49. Giải phương trình $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$.

Giải. Rõ ràng $y = 0$ là một nghiệm.

Với $y \neq 0$, PT $\Leftrightarrow x' - \frac{2}{y}x = \frac{3}{y^2}$, nghiệm tổng quát là:

$$x = e^{\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{3}{y^2} e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = Cy^2 - \frac{1}{y} \quad \text{hay} \quad xy + 1 = Cy^3.$$

(Đây là tích phân tổng quát PT đã cho).

#

Ví dụ 4.50. Giải phương trình: $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$

Xét hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 3 \end{cases}$, $dx = du$, $dy = dv$. Nhận được PT

$$(u + v)du + (u - v)dv = 0.$$

Đây là PT với u là biến độc lập, v là ẩn hàm, nó là PT đẳng cấp.

Đặt $v = tu \Rightarrow dv = u dt + t du$ dẫn đến

$$u(1 + 2t - t^2)du + u^2(1 - t)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d[u^2(1 + 2t - t^2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2(1 + 2t - t^2) = C \Leftrightarrow u^2 + 2uv - v^2 = C.$$

Trở về biến cũ, $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

Cách II. Thật may, đây là PTVP toàn phần!

#

Ví dụ 4.51. Giải PT $x^2 y'' - xy' + y = \cos(\ln x)$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

Giải. Đặt $x = e^t > 0$, $x'_t = e^t \Rightarrow t = \ln x$, $t'_x = 1/x = e^{-t}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t},$$

$$y''_{xx} = (y'_t \cdot e^{-t})'_t \cdot t'_x = (y''_t \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t - y'_t) \cdot e^{-2t}.$$

Thay vào được $y'' - 2y' + y = \cos t$, ($y = y(t)$). (*)

PTĐT: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$.

NTQ PTTN ứng với (*) $y = (C_1 + C_2 t)e^t$.

NR của PT (*) có dạng: $y = y_1 = A \cos t + B \sin t$.

Tìm được $A = 0, B = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = (C_1 + C_2 t)e^t - \frac{1}{2} \sin t$.

NTQ của PT đã cho là $y = C_1 x + C_2 x \ln x - \frac{1}{2} \sin(\ln x)$.

Nhận xét. PT $ax^2y'' - bxy' + cy = f(x)$ gọi là PT Euler. Nó luôn giải được bằng phép đổi biến $x = e^t$ trong miền $\{x > 0\}$ (trong miền $\{x < 0\}$ đặt $x = -e^t$). Các bạn phải thận trọng khi tính y'_t, y''_{tt} mới mong giải đúng! #

Ví dụ 4.52. Giải phương trình

$xy'' + 2y' - xy = e^x$ bằng phép đổi hàm $z = yx$.

Giải. Đặt $z = yx \Rightarrow z' = y'x + y, z'' = 2y' + y''x$.

Thay vào phương trình nhận được $z'' - z = e^x$ (*)

PTĐT của PT (*) là $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1$.

NTQ PT TN tương ứng là $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Về phải $f(x) = e^x, \alpha = 1$ là nghiệm đơn, tìm nghiệm riêng của (*) dạng

$$z = A.xe^x \Rightarrow z' = Ae^x + Axe^x, z'' = 2Ae^x + Axe^x.$$

Thay vào PT (*) đi tới $2A = 1 \Rightarrow A = 1/2 \Rightarrow z = xe^x / 2$.

NTQ của PT đã cho là:

$$y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x} \left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \right). \quad \#$$

Ví dụ 4.53. Giải các phương trình

$$\text{i) } y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}, \quad \text{ii) } y'' - 2y' + y = e^x / (1 + x^2).$$

Giải. i) Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4k + 5 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 2 \pm i$.

NTQ PTTN tương ứng: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

NTQ của phương trình không TN dưới dạng

$$y = C_1(x)e^{2x}\cos x + C_2(x)e^{2x}\sin x.$$

$$C_1, C_2 : \begin{cases} C'_1 e^{2x} \cos x + C'_2 e^{2x} \sin x = 0 \\ C'_1 e^{2x} (2\cos x - \sin x) + C'_2 e^{2x} (2\sin x + \cos x) = e^{2x} / \cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -\sin x / \cos x \\ C'_2(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x| + A \\ C_2(x) = x + B \end{cases}$$

NTQ của PT đã cho là

$$y = [\ln|\cos x| + A]e^{2x}\cos x + (x + B)e^{2x}\sin x.$$

ii) NTQ của PT thuần nhất $y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x$.

NTQ của PT ban đầu dưới dạng:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \text{ với}$$

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(e^x + xe^x) = e^x / (1+x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{-x}{1+x^2}, C_2' = \frac{1}{1+x^2} \\ C_1 = -\ln\sqrt{1+x^2} + K_1 \\ C_2 = \arctan x + K_2 \end{cases}$$

$$\text{NTQ của PT đã cho: } y = e^x \left(K_1 + K_2x + x \arctan x - \ln\sqrt{x^2+1} \right). \quad \#$$

Ví dụ 4.54. i) $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 3x + 4y \end{cases};$ iii) $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 8x + 2y \end{cases}$

Giải. i) Đạo hàm PT đầu, sử dụng PT thứ hai và PT đầu ta được

$$\begin{aligned} x'' = 2x' + 5y' &= 2x' + 5(3x + 4y) = 2x' + 15x + 20(x' - 2x) / 5 \\ &\Leftrightarrow x'' - 6x' - 7x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{PTĐT: } k^2 - 6k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = -1, k = 7 \Rightarrow \text{NTQ: } x = Ce^{-t} + De^{7t}.$$

$$y = (x' - 2x) / 5 = -(3/5)Ce^{-t} + De^{7t}.$$

$$\text{Đặt } C = -5C_1, D = C_2, \text{ nhận được } \begin{cases} x = -5C_1e^{-t} + C_2e^{7t} \\ y = 3C_1e^{-t} + C_2e^{7t} \end{cases}$$

iii) Đạo hàm PT thứ nhất, dùng PT đầu và PT thứ 2 của hệ ta được

$$\begin{aligned} x'' = 2x' - 2y' &= 2x' - 2(8x + 2y) = 2x' - 16x - 4(2x - x') / 2 \\ &\Leftrightarrow x'' - 4x' + 20x = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{PTĐT: } k^2 - 4k + 20 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \pm 4i.$$

$$\text{NTQ của PT (*): } x = e^{2t}(C\cos 4t + D\sin 4t).$$

$$y = (2x - x') / 2 = e^{2t}(-2D\cos 4t + 2C\sin 4t).$$

$$\text{NTQ hệ đã cho } \begin{cases} x = (C\cos 4t + D\sin 4t)e^{2t} \\ y = (-2D\cos 4t + 2C\sin 4t)e^{2t} \end{cases}$$

*CÔNG BỐ KẾT QUẢ điểm Quá trình, điểm thường xuyên

Học viên thắc mắc – Giáo viên trả lời về điểm Quá trình – Thường xuyên

b) Thảo luận	Để giải PTVP cấp cao ta có thể dùng PP nào?
c) Tự học	- Phương pháp khử để giải hệ PTVP
d) Bài tập (2t)	24(e); 26(h, i, j); 27(c); 30(d, e, f); 31(b); 32; 33(a, b, c).
Tài liệu	Tài liệu [1], tr

TÓM TẮT CHƯƠNG 4

PTVP cấp một	PT phân ly	<ul style="list-style-type: none"> Dạng: $f(x)dx = g(y)dy$ $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$
	PT thuần Nhất	<ul style="list-style-type: none"> Dạng: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Đặt $y = u(x).x$ $y' = u'x + u$, đưa về PT phân ly
	PT tuyến tính	<ul style="list-style-type: none"> Dạng: $y' + p(x)y = q(x)$ NTQ: $y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]$
	PT Bernoulli	<ul style="list-style-type: none"> Dạng: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$) Chia hai vế cho y^α, đặt $z = y^{1-\alpha}$ đưa về PTTT
	PT VP Toàn phần	<ul style="list-style-type: none"> Dạng: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ TPTQ: $u(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy = C$
	Thừa số tích phân	<ul style="list-style-type: none"> $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{1}{Q} = \varphi(x)$: Chọn $\alpha = \alpha(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$ $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{1}{P} = \psi(y)$: Chọn $\alpha = \alpha(y) = e^{-\int \psi(y)dy}$
PTVP cấp hai	Giảm cấp	$F(x, y', y'') = 0$ (vắng y): Đặt $y' = p = p(x)$, $y'' = p'$ $F(y, y', y'') = 0$ (vắng x): Đặt $y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$
	PT tuyến tính	Dạng: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$
		Thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
		Cấu trúc nghiệm: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \bar{y}$
	PP biến thiên hằng số	<ul style="list-style-type: none"> Tìm 2 nghiệm ĐLTT của PT thuần nhất $y_1(x)$ và $y_2(x)$ Tìm nghiệm riêng $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$: $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$
	Hệ số hằng	<ul style="list-style-type: none"> Thuần nhất: Bảng 4.1 Về phải đặc biệt: Bảng 4.2 Cấp cao, về phải đặc biệt: Bảng 4.3
Hệ PTVP	PP khử	Đưa về PT cấp cao
	PP Tổ hợp	Tìm ra một số tích phân đầu
	Hệ số hằng	<ul style="list-style-type: none"> Dùng PP khử để đưa về PT cấp cao Dùng PP Euler

Bài giảng 14-15: Ôn tập

Chương, mục: 4

Tiết thứ: 65-75

Tuần thứ: 14- 15

Mục đích, yêu cầu:

- Củng cố kiến thức về môn học
- Sẵn sàng để thi hết môn

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian:

Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 5t

- Địa điểm:

Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Ôn tập hết môn

- Chữa các bài chưa có điều kiện chữa
- Làm lại các ví dụ chưa kịp giới thiệu
(Bài 15- tuần cuối: Giáo viên làm là chính)
- Nhắc lại về các câu hỏi lý thuyết, cách học chúng

Hướng dẫn thi hết môn

- Một số kinh nghiệm khi thi
- Nhắc lại tinh thần nghiêm túc trong thi cử
- Nhắc một số quy định trong kỳ thi