bepoki

Übung 3 - Analytische Lösung

Gravitationspotential

- innerhalb Schale

$$V_k^{innen} = 4\pi G \int_{R_i}^{R_{i+1}} r^2 \rho(r)\, dr \qquad (nur\ von\ r\ abhängig)$$

$$mit \quad \rho(r) = B + C\frac{r}{R_k} + D\frac{r^2}{R_k^2} + E\frac{r^3}{R_k^3}$$

$$V_k^{innen} = 4\pi G \int_{R_i}^{R_{i+1}} r^2 \left(B + C\frac{r}{R_k} + D\frac{r^2}{R_k^2} + E\frac{r^3}{R_k^3}\right) dr$$

$$= 4\pi G \int_{R_i}^{R_{i+1}} B r^2 + C\frac{r^3}{R_k} + D\frac{r^4}{R_k^2} + E\frac{r^5}{R_k^5}\, dr$$

$$= 4\pi G \left[B\frac{r^3}{3} + C\frac{r^4}{4R_k} + D\frac{r^5}{5R_k^2} + E\frac{r^6}{6R_k^3}\right]_{R_i}^{R_{i+1}}$$

$$= 4\pi G \left[\left(B\frac{R_{i+1}^3}{3} + C\frac{R_{i+1}^4}{4R_k} + D\frac{R_{i+1}^5}{5R_k^2} + E\frac{R_{i+1}^6}{6R_k^3}\right) - \left(B\frac{R_i^3}{3} + C\frac{R_i^4}{4R_k} + D\frac{R_i^5}{5R_k^2} + E\frac{R_i^6}{6R_k^3}\right)\right]$$

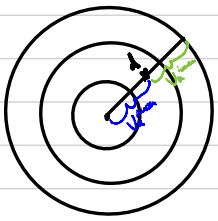
B, C, D und E in $\frac{kg}{m^3}$ umrechnen:

$\frac{g}{cm^3}$ mit Faktor $\quad cm^3 \to 10^{-6}\, m^3, \quad g \to 10^{-3}\, kg \Rightarrow \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^3$

- Ausserhalb Schale

$$V_k^{Aussen}(d) = \frac{4\pi G}{d}\left[B\frac{r^3}{3} + C\frac{r^4}{4R_k} + D\frac{r^5}{5R_k^2} + E\frac{r^6}{6R_k^3}\right]_{R_i}^{R_{i+1}}$$

Prinzip:



Potential = $V_k^{Aussen} + V_k^{innen}$

Für Beschleunigung nehme einfach d^2, der Rest bleibt gleich ausser $\frac{\partial V_k^{innen}}{\partial d} = 0$ (in der for-Schlaufe berücksichtigen!).