

# Статистические оценки

**Статистическая оценка** - это процесс нахождения числовых значений, которые приблизительно представляют какие-либо параметры или характеристики генеральной совокупности на основе данных, полученных из выборки. Эти числовые значения называются **оценками** и используются для приближенного описания и анализа популяции (генеральной совокупности), когда полное исследование всей популяции невозможно или слишком затратно.

Оценки могут быть получены для различных параметров или характеристик, таких как:

1. **Среднее значение (математическое ожидание):** Это оценка центральной тенденции данных. Например, среднее значение дохода в выборке может быть использовано для оценки среднего дохода в генеральной совокупности.
2. **Дисперсия или стандартное отклонение:** Эти оценки характеризуют разброс данных в выборке и могут использоваться для оценки разброса данных в популяции.
3. **Доля или пропорция:** Оценки доли используются, например, для оценки доли населения, поддерживающей определенную политическую партию.
4. **Интервалы уверенности:** Это диапазоны значений, в которых находится параметр с определенной вероятностью. Они предоставляют информацию о степени уверенности в оценке.
5. **Регрессионные коэффициенты:** В регрессионном анализе оценки коэффициентов регрессии используются для оценки связи между переменными.

**Оценки являются приближенными значениями**, и точность оценок зависит от выборки и методов, использованных для оценки. Статистические методы, такие как метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия и другие, используются для получения оценок параметров.

Важно отметить, что статистические оценки не всегда точны и могут содержать некоторую степень неопределенности, которая может быть измерена с использованием интервалов уверенности и доверительных интервалов. Тем не

менее, они позволяют делать выводы о генеральной совокупности на основе доступных данных из выборки.

## Средние величины

Средней величиной в статистике называют типичный уровень развития исследуемого социально-экономического явления в конкретных условиях места и времени.

Средние величины	
Средние степенные	Средние структурные
Средняя арифметическая	Мода
Средняя гармоническая	Медиана
Средняя геометрическая	
Средняя квадратическая	

## Среднее арифметическое значение

### Свойства среднего арифметического значения:

- Среднее арифметическое значение находится в диапазоне от минимального до максимального наблюдаемого значения

$$x_{min} < \bar{x} < x_{max}$$

- Сумма отклонений всех наблюдаемых значений от среднего арифметического равна 0
- На среднее арифметическое значение сильное явление оказывают необычные наблюдения

- Среднее арифметическое невозможно вычислить в статистических рядах с открытыми интервалами (например  $0-\infty$ )

## Расчёт среднего арифметического

Форма расчета средней величины																											
Простая		Взвешенная																									
если все частоты появления индивидуальных значений признака равны 1.		если все частоты появления индивидуальных значений признака отличны от 1.																									
<table><tr><th>Стаж работы, лет <math>x_i</math></th><th>Число рабочих, чел. <math>f_i</math></th></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>I 15</td><td>1</td></tr><tr><td>20</td><td>1</td></tr><tr><td>Итого</td><td>4</td></tr></table>		Стаж работы, лет $x_i$	Число рабочих, чел. $f_i$	5	1	10	1	I 15	1	20	1	Итого	4	<table><tr><th>Стаж работы, лет <math>x_i</math></th><th>Число рабочих, чел. <math>f_i</math></th></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td></tr><tr><td>15</td><td>7</td></tr><tr><td>20</td><td>2</td></tr><tr><td>Итого</td><td>10</td></tr></table>		Стаж работы, лет $x_i$	Число рабочих, чел. $f_i$	5	1	10	0	15	7	20	2	Итого	10
Стаж работы, лет $x_i$	Число рабочих, чел. $f_i$																										
5	1																										
10	1																										
I 15	1																										
20	1																										
Итого	4																										
Стаж работы, лет $x_i$	Число рабочих, чел. $f_i$																										
5	1																										
10	0																										
15	7																										
20	2																										
Итого	10																										

## Невзвешенное среднее арифметическое значение

**Среднее арифметическое значение** представляет собой сумму всех значений исследуемого признака, делённую на количество наблюдений.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Приведённое выше формула является формулой

**Пример:**

Группа студентов за экзамен получила следующие оценки - 0,1,1,2,2,2,3,3,4,5,5

Среднее арифметическое значение -  $(0+1+1+2+2+2+3+3+4+5+5)/(11) = 26/11 = 2.36$

### Взвешенное среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N}$$
$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

#### Пример:

Группа студентов за экзамен получила следующие оценки - 0,1,1,2,2,2,3,3,4,5,5

Построим статистический ряд:

$X_i$	$N_i$
0	1
1	2
2	3
3	2
4	1
5	2
Всего	11

$N = 11$

Числитель равен  $(0*1)+(1*2)+(2*3)+(3*2)+(4*1)+(5*2) = 0+2+6+6+4+10 = 26$

Тогда, используя формулу взвешенного среднего арифметического, получаем  $26/11 = 2.36$

### Среднее арифметическое значение для интервального ряда

Если статистический ряд представлен интервальными характеристиками, то используем следующую формулу:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N}$$

Где  $X_i$  с точкой - это **среднее арифметическое интервала** (нижний плюс верхний предел интервала делённое на 2)

**Пример:**

Рассмотрим распределение предприятий региона по объёму товарооборота.

Группы предприятий по объёму товарооборота, млн. руб., $x_i$	Число предприятий, $f_i$	Середина интервала, $x'_i$	$x'_i \cdot f_i$
До 400	9	350	3 150
400-500	12	450	5 400
500-600	8	550	4 400
600-700	9	650	5 850
Свыше 700	2	750	1 500
<b>Итого</b>	<b>40</b>		<b>20 300</b>

$$\bar{x} = \frac{350 \cdot 9 + 450 \cdot 12 + \dots + 750 \cdot 2}{40} = 507,5 \text{ млн. руб.}$$

## Простое среднее геометрическое значение

**Среднее геометрическое значение** применяется в математической статистике для вычисления среднего уровня изменения или относительного роста величины. В основном, оно используется в ситуациях, где важно учитывать процентное изменение величины относительно исходного значения.

**Формула:**

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$X_i$  - изменение (динамика) явления,  $n$  - кол-во наблюдаемых элементов (периодов)

### Пример:

Информация о занятости на конкретном предприятии показывает, что в трех последующих периодах было занято 50, 75 и 82 человека. Давайте посчитаем средний рост числа рабочих мест:

1. Найдём доленое увеличение числа рабочих мест во второй период по сравнению с первым:  
 $x_1 = 75/50 = 1.5$  - во столько раз увеличилось кол-во работников во втором периоде.
2. Найдём доленое увеличение числа рабочих мест в третий период по сравнению со вторым:  
 $x_2 = 82/75 = 1.1$  - во столько раз увеличилось кол-во работников во третьем периоде.
3. Найдём средний рост числа рабочих мест за все периоды, используя формулу среднего геометрического значения:

$$\overline{x_G} = \sqrt[2]{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{1,5 \cdot 1,1} = 1,2845$$

**Ответ:** 1.2845 - во столько раз в среднем увеличивается кол-во рабочих мест в исследуемом предприятии.

**?** Отметим, что среднее геометрическое обладает таким свойством, что после подстановки его в отдельные значения  $X_i$ , получим тот же самый результат:  
 $50 * 1.2845 * 1.2845 = 82.50$  (погрешность обусловлена нерациональными расчётами)

## Среднее гармоническое значение

**Среднее гармоническое значение** — это один из видов средних показателей, используемый для оценки среднего уровня изменения или роста величины. Оно определяется как обратное арифметическое среднее инвертированных значений чисел.

**Формула для вычисления невзвешенного среднего гармонического для набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выглядит следующим образом:**

$$\overline{x_h} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}}, \text{ gdzie } N = \sum_{i=1}^k n_i \text{ liczba obserwacji}$$

**Формула для вычисления взвешенного среднего гармонического для набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выглядит следующим образом:**

$$\overline{x_h} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}$$

Среднее гармоническое используется, когда значение признака задаётся как постоянная единица другой переменной (например, скорость км/ч, производительность мин/шт, плотность населения чел/кв.км.)

**Формула для статистического интервального ряда:**

$$\overline{x_h} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\dot{x}_i}}$$

где  $\dot{x}_i$  с точкой - это **среднее арифметическое интервала** (нижний плюс верхний предел интервала делённое на 2)

**Пример:**

### Задача

Пусть имеются два автомобиля: первый с расходом топлива 6 литров на 100 км, а второй – с расходом топлива 10 л на 100 км. Оба автомобиля заправили 60 литрами топлива. Необходимо рассчитать средний расход топлива для двух автомобилей с сохранением их общего пробега.

Вычислим общий пробег двух автомобилей ( $S_1 + S_2$ ):

$$S_1 = \frac{V}{x_1} \cdot 100 = \frac{60}{6} \cdot 100 = 1000 \text{ км}$$

$$S_2 = \frac{V}{x_2} \cdot 100 = \frac{60}{10} \cdot 100 = 600 \text{ км}$$

$$S_1 + S_2 = 1000 + 600 = \mathbf{1600} \text{ км.}$$

Средняя *гармоническая*:

$$\bar{x} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{10}} = 7,5 \text{ л на 100 км.}$$

Общий пробег:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{V}{x_1} \cdot 100 + \frac{V}{x_2} \cdot 100 = \\ &= \frac{V}{\bar{x}} \cdot 100 + \frac{V}{\bar{x}} \cdot 100 = \\ &= \frac{60}{7,5} \cdot 100 + \frac{60}{7,5} \cdot 100 = 800 + 800 = \mathbf{1600} \text{ км.} \end{aligned}$$





## Памятка по выбору расчёта среднего значения

### **Правило:**

Если при вычислении среднего значения признака в качестве весов-соизмерителей берётся числитель исходного соотношения, то используется формула **средней гармонической взвешенной**.

Используя в качестве весов-соизмерителей знаменатель соответствующего отношения при вычислении среднего значения признака выбирается формула **средней арифметической взвешенной**.