Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Отчет по лабораторной работе № 3

"Решение задачи одномерной минимизации."

дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/10401	Бойцов А.Д. Сулейманов В. Д. Свитюк А. А.
Преподаватель	Родионова Е. А.

1 Формулировка и формализация задачи

1.1 Формулировка задачи

1. Решить задачу одномерной минимизации, используя метод дихотомии и метод золотого сечения(0.1, 0.01, 0.001 - точности).

2. Предусмотреть счетчик обращений к вычислению функции и вывод этого числа, необходимого для достижения точности.

3. Вывести аналитически и привести формулу числа обращений к вычислению функции для достижения точности.

4. Показать работу методов на отладочном примере.

1.2 Постановка задачи одномерной минимизации

Мы будем рассматривать методы, применимые для унимодальных функций. Функция $f(x)$ называется унимодальной на $[a, b]$, если:

$$\exists! x^* : f(x^*) = min_{[a,b]} f(x) \tag{1}$$

причем слева от x^* функция монотонно убывает, а справа – монотонно возрастает.
Пусть $f(x)$ - действительная унимодальная функция одной переменной определенная на $[a, b], a \in R, b \in R$. $f(x^*) = min_{[a,b]} f(x)$

Тогда задачу одномерной оптимизации для $f(x)$ можно поставить следующим образом:
Положим $\epsilon \in R : 0 < \epsilon < b - a$
Трбуется найти $\tilde{x}^* \in [a, b] : |\tilde{x}^* - x^*| \leq \epsilon$

2 Предварительнй анализ

Оба метода рассматриваемых в работе опираются на следущую лемму:

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ - унимодальная функци определенная на $[a, b]$*
Пусть $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$

Тогда:

1. $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x^* \notin [a, x_1]$
2. $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow x^* \notin [x_2, b]$

Отрезок $[a, b]$ называется исходным интервалом неопределенности положения точки минимума на нем. Может теперь сказать, что, анализируя значения функции в точках x_1, x_2, мы сократили интервал неопределенности.

3 Метод золотого сечения

Идея этого метода также основана на лемме(1): за счет вычисления значения функции в двух точках интервала неопределенности и на основе их сравнения сокращаем интервал неопределенности.
Будем называть эти точки $f(\lambda_k)$ и $f(\mu_k)$ – левая и права внутренние точки соответственно. В данном методе на каждой итерации происходит всего 1 вычисление значения функции за счет того, что в качестве одной из внутренних точек, мы берем одну из предыдущих по следующему принципу:

1. $\mu_k - a_k = b_k - \lambda_k$
2. $\left[\begin{array}{l}\lambda_k = \mu_{k+1}, \\ \mu_k = \lambda_{k+1};\end{array}\right.$

Перейдем теперь к параметризации точек. Будем выбирать левую точку следующим образом:

$$\lambda_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$$

Перейдем теперь к параметризации точек. Будем выбирать левую точку следующим образом:

$$\mu_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k)$$

Из вышеприведенных условий $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

3.1 Алгоритм метода

1. Зададим $[a, b], a \in R, b \in R,\ f(x)$ - унимодальная функци определенная на $[a, b]$.

2. Зададим требуемую точность $\epsilon \in R : 0 < \epsilon < b - a$.

3. Положим $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

4. Положим счетчик $k = 1$, $a_1 = a, b_1 = b$

5. Положим $\lambda_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1), \mu_1 == a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$

6. Вычислим значаение функции цели в λ_1, μ_1

7. Если $f(\lambda_k) < f(\mu_k) \Rightarrow$ положим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \mu_k], \mu_{k+1} = \lambda_k$ и перейдем к шагу 8.
   Иначе положим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\lambda_k, b_k], \lambda_{k+1} = \mu_k$ и перейдем к шагу 9.

8. Увеличим значение счетчика $k+ = 1$.
   Если $b_k - a_k < \epsilon$, заврешиим работу алгоритма.
   Иначе положим $f(\mu_k) = f(\lambda_{k-1})$, вычислим $\lambda_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$, $f(\lambda_k)$ и перейдем к шагу 7.

9. Увеличим значение счетчика $k+ = 1$.
   Если $b_k - a_k < \epsilon$, заврешиим работу алгоритма.
   Иначе положим $f(\lambda_k) = f(\mu_{k-1})$, вычислим $\mu_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k)$, $f(\lambda_k)$ и перейдем к шагу 7.

3.2 Аналитическая оценка числа вызовов функции

4 Метод дихотомии

Идея этого метода также основана на лемме(1).На исходном интервале неопределенности выбираем две точки:

$$x_1, x_2 : x_1 < x_2$$

Рассматривается два случая сравнения значения функции в этих точках:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x^* \in [a, x_2] f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x^* \in [x_1, b]$$

Полученный интервал будет следующим интервалом неопределенности, с которым будет проводиться та же самая операция.
Очевидно, что оптимальная стратегия выбора точек состоит в следующем:

$$x_1, x_2 : \min\{\max\{x_2 - a, b - x_1\}\}$$

Отсюда:

$$x_1 = x_2 = \frac{b + a}{2}$$

Но нам нужны две различные точки. Поэтому отступим от найденной точки влево и вправо на какую-то величину σ:

$$x_1 = \frac{b + a}{2} - \sigma, x_2 = \frac{b + a}{2} + \sigma$$

Остается выяснить, каким должно быть σ. Практический опыт говорит о том, что:

$$\sigma \sim 10^{-3}(b - a)$$

4.1 Алгоритм метода

1. Зададим $[a, b], a \in R, b \in R,\ f(x)$ - унимодальная функци определенная на $[a, b]$.

2. Зададим требуемую точность $\epsilon \in R : 0 < \epsilon < b - a$.

3. Положим $k = 1$.

4. Положим $a_1 = a, b_1 = b$.

5. Положим $\sigma = 10^{-3} * (b_k - a_k)$.

6. Положим $x_{1,k} = \dfrac{b_k + a_k}{2} - \sigma, x_{2,k} = \dfrac{b_k + a_k}{2} + \sigma$.

7. Вычислим $f(x_{1,k}), f(x_{2,k})$.

8. Если $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$, положим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_{2,k}]$.
   Иначе положим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_{1,k}, b_k]$.

9. Увеличим значение счетчика $k+=1$.

10. Если $b_k - a_k < \epsilon$, заврешиим работу алгоритма.
Иначе перейдем к шагу 5.

4.2 Аналитическая оценка числа вызовов функции

5 Тестовый пример