2.1 NOTIONS DE PROBABILITÉ

cours 6

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Binôme de Newton

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Binôme de Newton
- ✓ Triangle de Pascal

Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

✓ Définition d’une probabilité

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Définition d'une probabilité
- ✓ Axiomes de probabilité

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Définition d'une probabilité
- ✓ Axiomes de probabilité
- ✓ Propriétés des probabilités

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Définition d'une probabilité
- ✓ Axiomes de probabilité
- ✓ Propriétés des probabilités
- ✓ Espace échantionnalle à évènement élémentaire équiprobable.

On a vu au premier cours qu'une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétée autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

On a vu au premier cours qu'une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétée autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

On a aussi vu que l'ensemble de tous les résultats possible est l'espace échantillonnal S.

On a vu au premier cours qu'une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétée autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

On a aussi vu que l'ensemble de tous les résultats possible est l'espace échantillonnal S.

Donc un résultat possible de l'expérience est

$$s \in S$$

On a vu au premier cours qu'une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétée autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

On a aussi vu que l'ensemble de tous les résultats possible est l'espace échantillonnal S.

Donc un résultat possible de l'expérience est

$$s \in S$$

Tout sous-ensemble de l'espace échantillonnal est un évènement.

$$A \subset S$$

On a vu au premier cours qu'une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétée autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

On a aussi vu que l'ensemble de tous les résultats possible est l'espace échantillonnal S.

Donc un résultat possible de l'expérience est

$$s \in S$$

Tout sous-ensemble de l'espace échantillonnal est un évènement.

$$A \subset S$$

On dit qu'un évènement a eu lieu si le résultat appartient à l'ensemble

$$a \in A$$

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

$$A = \{fff, fgf, gff, ggf\}$$

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

$$A = \{fff, fgf, gff, ggf\}$$

Exemple

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

$$A = \{fff, fgf, gff, ggf\}$$

Exemple

On lance deux dés

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

$$A = \{fff, fgf, gff, ggf\}$$

Exemple

On lance deux dés

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

Exemple Une personne à 3 enfants on regarde leurs sexes.

$$S = \{fff, ffg, fgf, gff, ggf, gfg, fgg, ggg\}$$

L'évènement, le plus jeune est une fille

$$A = \{fff, fgf, gff, ggf\}$$

Exemple

On lance deux dés

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

L'évènement, la somme des dés est 4

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

Exemple

L’expérience consiste à mesurer la durée de vie, en heure, d’une ampoule.

Exemple

L'expérience consiste à mesurer la durée de vie, en heure, d'une ampoule.

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \infty\}$$

Exemple

L'expérience consiste à mesurer la durée de vie, en heure, d'une ampoule.

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty$$

Exemple

L'expérience consiste à mesurer la durée de vie, en heure, d'une ampoule.

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty$$

L'évènement l'ampoule dure moins de 2000 heures

Exemple

L'expérience consiste à mesurer la durée de vie, en heure, d'une ampoule.

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty$$

L'évènement l'ampoule dure moins de 2000 heures

$$A = [0 \ , \quad 2000[$$

Faites les exercices suivants

2.1 et 2.2

Intuitivement, on aimerait définir la probabilité que l'évènement A se produise comme étant la fréquence à laquelle il se produit.

Intuitivement, on aimerait définir la probabilité que l'évènement A se produise comme étant la fréquence à laquelle il se produit.

Supposons qu'on répète l'expérience aléatoire n fois.

Intuitivement, on aimerait définir la probabilité que l'évènement A se produise comme étant la fréquence à laquelle il se produit.

Supposons qu'on répète l'expérience aléatoire n fois.

Notons $n(A)$ le nombre de fois que A a eu lieu.

Intuitivement, on aimerait définir la probabilité que l'évènement A se produise comme étant la fréquence à laquelle il se produit.

Supposons qu'on répète l'expérience aléatoire n fois.

Notons $n(A)$ le nombre de fois que A a eu lieu.

On peut définir la probabilité que A ait lieu comme

Intuitivement, on aimerait définir la probabilité que l'évènement A se produise comme étant la fréquence à laquelle il se produit.

Supposons qu'on répète l'expérience aléatoire n fois.

Notons $n(A)$ le nombre de fois que A a eu lieu.

On peut définir la probabilité que A ait lieu comme

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Le problème avec cette démarche est qu'il est extrêmement difficile de justifier que cette limite converge.

Le problème avec cette démarche est qu'il est extrêmement difficile de justifier que cette limite converge.

Ou de justifier que si on recommence la série d'expériences aléatoire, on obtient le même résultat.

Le problème avec cette démarche est qu'il est extrêmement difficile de justifier que cette limite converge.

Ou de justifier que si on recommence la série d'expériences aléatoire, on obtient le même résultat.

Donc l'intuition de ce qu'est une probabilité est là, mais les problèmes mathématiques sont difficiles à surmonté.

Le problème avec cette démarche est qu'il est extrêmement difficile de justifier que cette limite converge.

Ou de justifier que si on recommence la série d'expériences aléatoire, on obtient le même résultat.

Donc l'intuition de ce qu'est une probabilité est là, mais les problèmes mathématiques sont difficiles à surmonté.

Nous allons donc avoir une autre approche.

Approche axiomatique.

Approche axiomatique.

Plusieurs théories mathématiques sont fondées sur une approche axiomatique.

Approche axiomatique.

Plusieurs théories mathématiques sont fondées sur une approche axiomatique.

On pose un certain nombre d’axiomes.

Approche axiomatique.

Plusieurs théories mathématiques sont fondées sur une approche axiomatique.

On pose un certain nombre d'axiomes.

Un axiome est une affirmation qui semble raisonnable et qu'on suppose vraie.

Approche axiomatique.

Plusieurs théories mathématiques sont fondées sur une approche axiomatique.

On pose un certain nombre d'axiomes.

Un axiome est une affirmation qui semble raisonnable et qu'on suppose vraie.

Tout le reste de la théorie repose sur ce qui découle de ces axiomes.

Axiomes de probabilité.

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$A2.$ $$P(S) = 1$$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$A2.$ $$P(S) = 1$$

$A3.$ Pour chaque séquence d'évènement $A_1, A_2, \ldots$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$A2.$ $$P(S) = 1$$

$A3.$ Pour chaque séquence d'évènement $A_1, A_2, \ldots$

mutuellement exclusif, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

Axiomes de probabilité.

Étant donné un ensemble S, on suppose qu'il existe une fonction

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Respectant les 3 axiomes suivants.

$A1.$ Pour tous évènements $A \subset S$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$A2.$ $$P(S) = 1$$

$A3.$ Pour chaque séquence d'évènement $A_1, A_2, \ldots$

mutuellement exclusif, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

Puisque $n, n(A) \in \mathbb{N}$

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

Puisque $n, n(A) \in \mathbb{N}$ et $n(A) \leq n$

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

Puisque $n, n(A) \in \mathbb{N}$ et $n(A) \leq n$

On a nécessairement que $0 \leq \dfrac{n(A)}{n} \leq 1$

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

Puisque $n, n(A) \in \mathbb{N}$ et $n(A) \leq n$

On a nécessairement que $0 \leq \dfrac{n(A)}{n} \leq 1$

L'axiome 2 affirme que la probabilité que le résultat soit un élément de S est 1.

L'axiome 1 affirme que toute probabilité est entre 0 et 1.

Ceci est cohérent avec le concept de fréquence.

Puisque $n, n(A) \in \mathbb{N}$ et $n(A) \leq n$

On a nécessairement que $0 \leq \dfrac{n(A)}{n} \leq 1$

L'axiome 2 affirme que la probabilité que le résultat soit un élément de S est 1.

On nomme parfois l'espace échantillonnal, l'évènement certain.

L’axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu’au moins l’on d’eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

L’axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu’au moins l’on d’eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

L’axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu’au moins l’on d’eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

L'axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu'au moins l'on d'eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

alors lors d'une expérience, le résultat appartient soit à A, soit à B ou soit à ni l'un ni l'autre.

L'axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu'au moins l'on d'eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

alors lors d'une expérience, le résultat appartient soit à A, soit à B ou soit à ni l'un ni l'autre.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

L'axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu'au moins l'on d'eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

alors lors d'une expérience, le résultat appartient soit à A, soit à B ou soit à ni l'un ni l'autre.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$P(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \cup B)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$$

L'axiome 3 dit que si on a des évènements mutuellement exclusifs, la probabilité qu'au moins l'on d'eux survienne est simplement la somme de leurs probabilités.

Si on a deux évènements A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

alors lors d'une expérience, le résultat appartient soit à A, soit à B ou soit à ni l'un ni l'autre.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$P(A \cup B) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A \cup B)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$$

$$= P(A) + P(B)$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve:

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S)$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \quad \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

Théorème $P(\emptyset) = 0$

Preuve: Posons $A_1 = S$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \neq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \qquad S \cap \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \quad \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

On nomme parfois l'ensemble vide, l'évènement impossible.

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \qquad 3 \leq i$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \quad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \quad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \qquad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad B \cap \emptyset = \emptyset$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \qquad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup B$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \quad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \quad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A) + P(B) + \sum_{i=3}^{\infty} P(\emptyset)$$

Remarque: Habituellement on souhaite que les axiomes soient les plus généraux possible.

C'est pour cette raison que l'axiome 3 fait intervenir un nombre infini de sous-ensembles.

$$A_1 = A \qquad A_2 = B \qquad A_i = \emptyset \quad 3 \leq i$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A) + P(B) + \sum_{i=3}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$= P(A) + P(B)$$

Faites les exercices suivants

2.9

Théorème

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve:

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $\quad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$1 = P(S)$$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A})$$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $\qquad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $\qquad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Théorème $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve: $A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$\boxed{1} = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = \boxed{P(A) + P(\bar{A})}$$

$$\Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

En isolant $P(\bar{A})$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Or la pièce pourrait être pipé et

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Or la pièce pourrait être pipé et

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

On commence à voir comment la fonction de probabilité

$$P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se comporte, mais on ne sait toujours pas comment la trouver!

Prenons l'expérience aléatoire de lancer une pièce de monnaie.

$$S = \{p, f\} \quad A = \{p\} \quad B = \{f\} \qquad B = \bar{A}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Or la pièce pourrait être pipé et

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad\qquad P(B) = \frac{2}{3}$$

On a donc pas vraiment de façon de connaître une probabilité autre que par

On a donc pas vraiment de façon de connaître une probabilité autre que par

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

On a donc pas vraiment de façon de connaître une probabilité autre que par

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

On va donc faire une hypothèse supplémentaire.

Définition

Étant donné une expérience aléatoire d'espace échantillonnal S, un **évènement élémentaire** est un sous-ensemble contenant un seul élément.

Définition

Étant donné une expérience aléatoire d'espace échantillonnal S, un **évènement élémentaire** est un sous-ensemble contenant un seul élément.

Donc un évènement élémentaire correspond à un des résultats possibles.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l’hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d’arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l'hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d'arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

À moins d'avis contraires, à partir de maintenant, nous ferons toujours cette hypothèse.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l'hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d'arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

À moins d'avis contraires, à partir de maintenant, nous ferons toujours cette hypothèse.

On va considérer deux cas.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l'hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d'arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

À moins d'avis contraires, à partir de maintenant, nous ferons toujours cette hypothèse.

On va considérer deux cas.

Le cas ou l'espace échantillonnal est fini

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l'hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d'arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

À moins d'avis contraires, à partir de maintenant, nous ferons toujours cette hypothèse.

On va considérer deux cas.

Le cas ou l'espace échantillonnal est fini

et le cas ou l'espace échantillonnal est infini.

Expérience aléatoire à évènements élémentaires équiprobables.

Si on fait l'hypothèse que tous les évènements élémentaires ont exactement la même chance d'arriver, il devient plus simple de calculer les probabilités.

À moins d'avis contraires, à partir de maintenant, nous ferons toujours cette hypothèse.

On va considérer deux cas.

Le cas ou l'espace échantillonnal est fini

et le cas ou l'espace échantillonnal est infini.

Le cas infini sera traité plus en détail après l'examen 1.

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\}$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = nP(A_1)$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = nP(A_1)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{n}$$

Soit S, un espace échantillonnal de cardinalité n.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$A_i = \{a_i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = nP(A_1)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{n} = P(A_2) = P(A_3) = \cdots = P(A_n)$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right)$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\})$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n}$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Ce qui nous donne une façon explicite de trouver la probabilité

De manière plus générale,

$$A \subset S$$

$$|S| = n \qquad |A| = k \qquad A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Ce qui nous donne une façon explicite de trouver la probabilité

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|S|}}$$

Faites les exercices suivants

#2.3, 2.4 et 2.5

Théorème

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Théorème

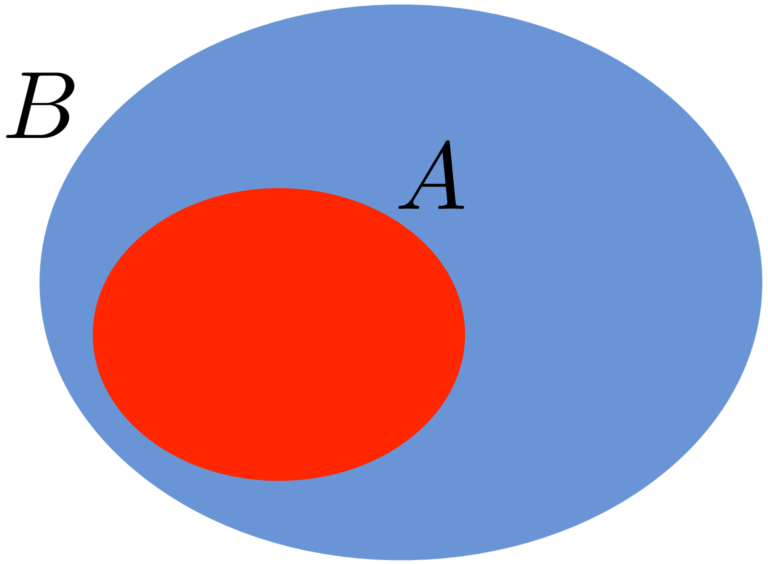
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Preuve:

Théorème

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

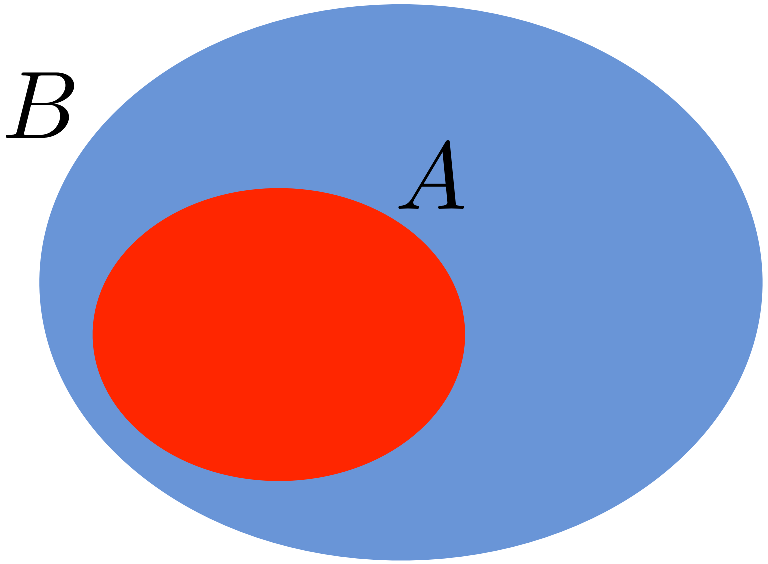
Preuve:



Théorème

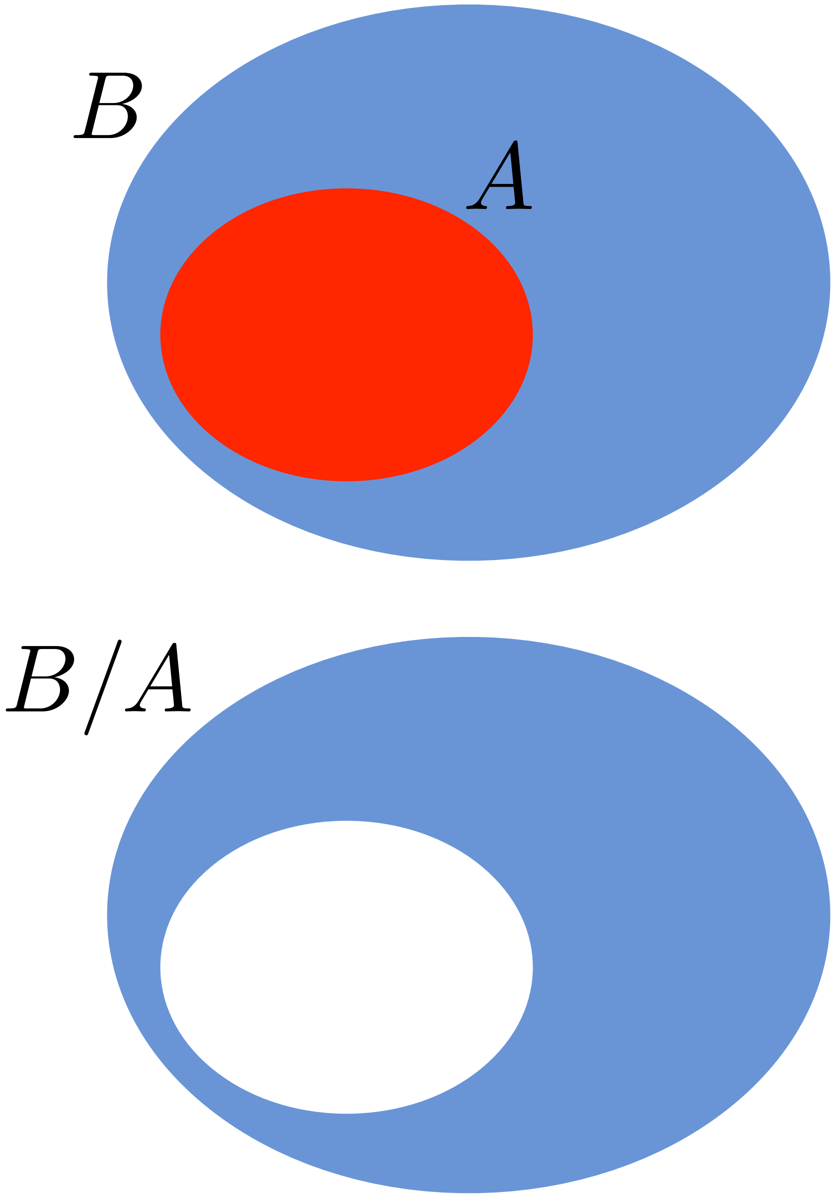
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A



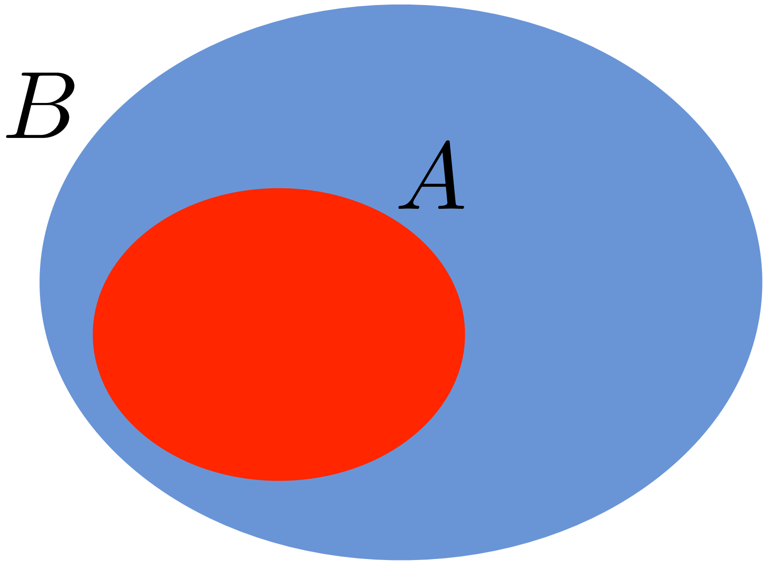
Théorème $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A

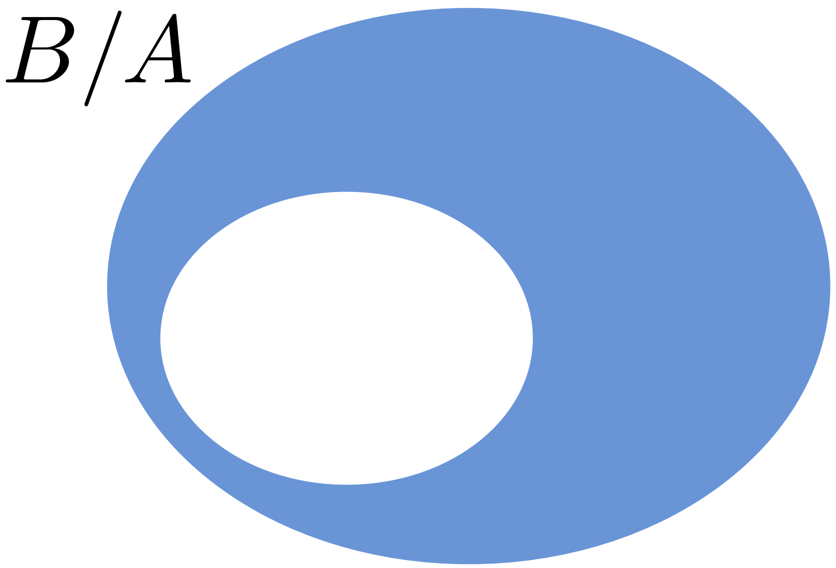


Théorème $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A



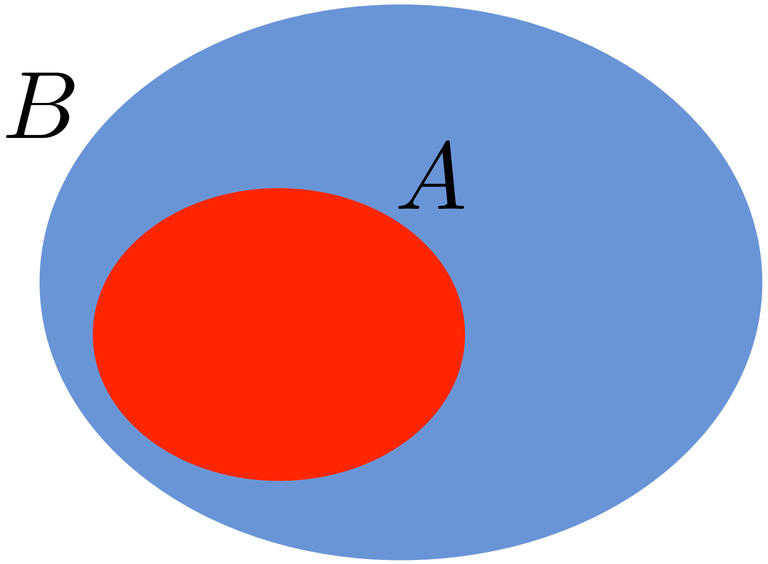
$$A \cup (B/A) = B$$



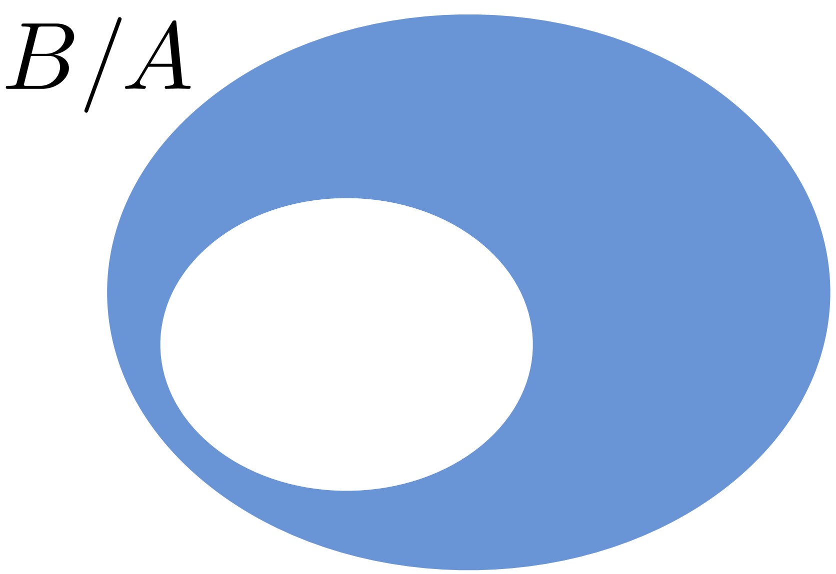
Théorème

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A

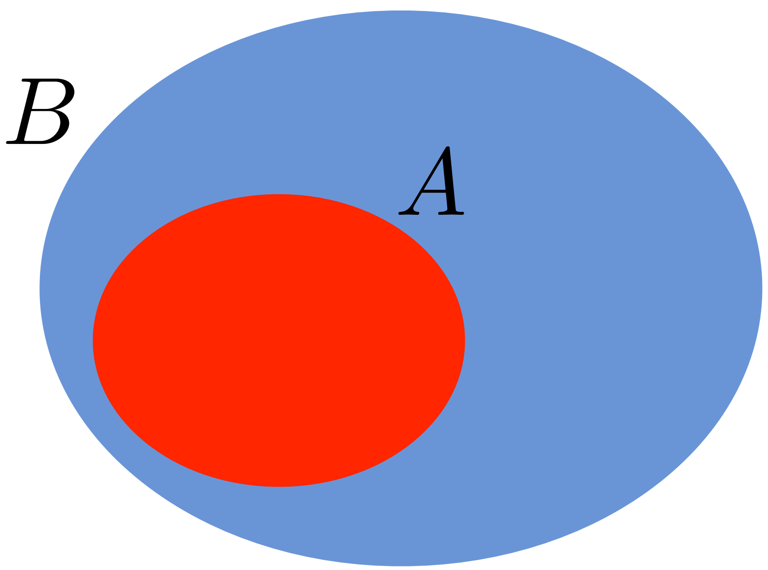


$$A \cup (B/A) = B \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$



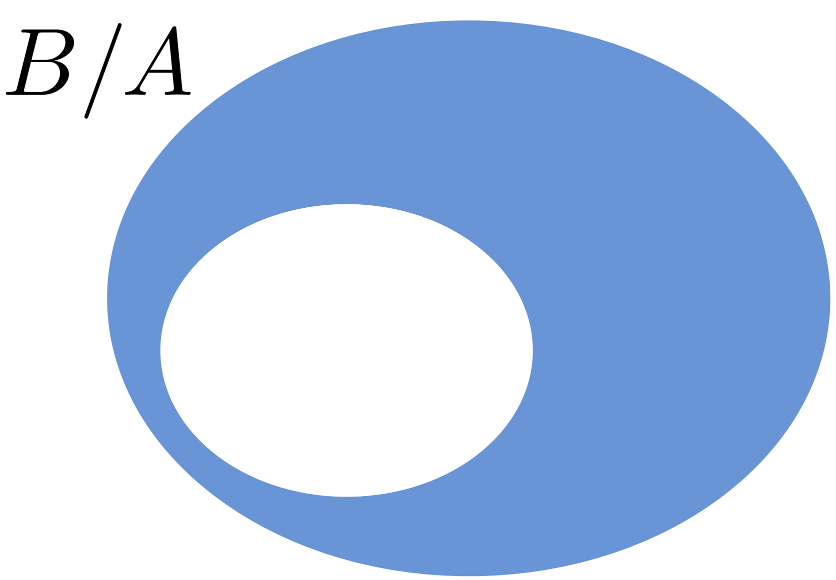
Théorème $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A



$$A \cup (B/A) = B \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$

$$P(B) = P(A \cup (B/A))$$

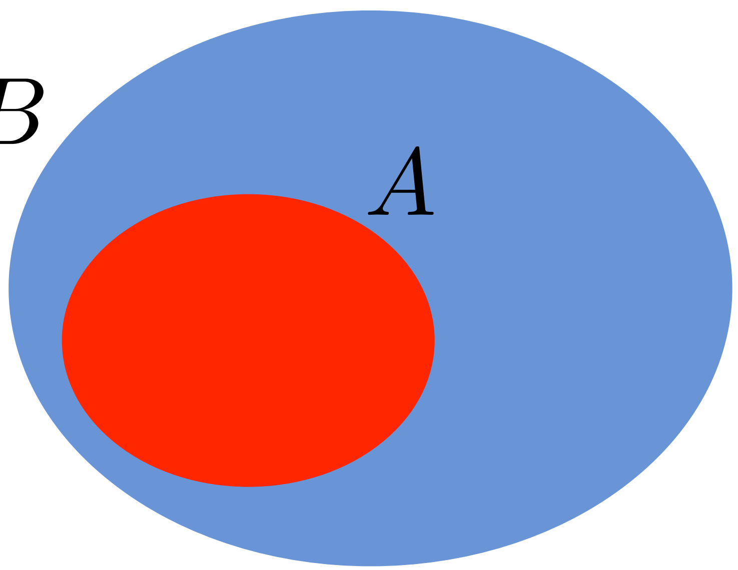


Théorème

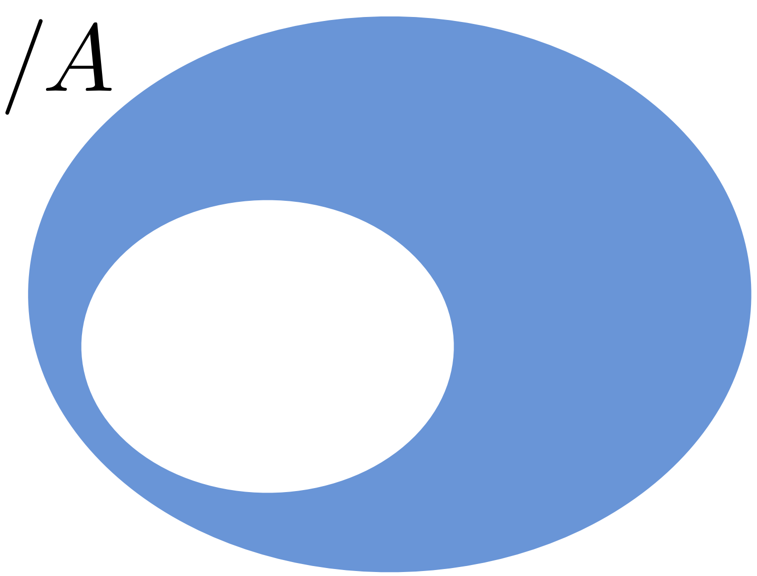
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A

B



B/A



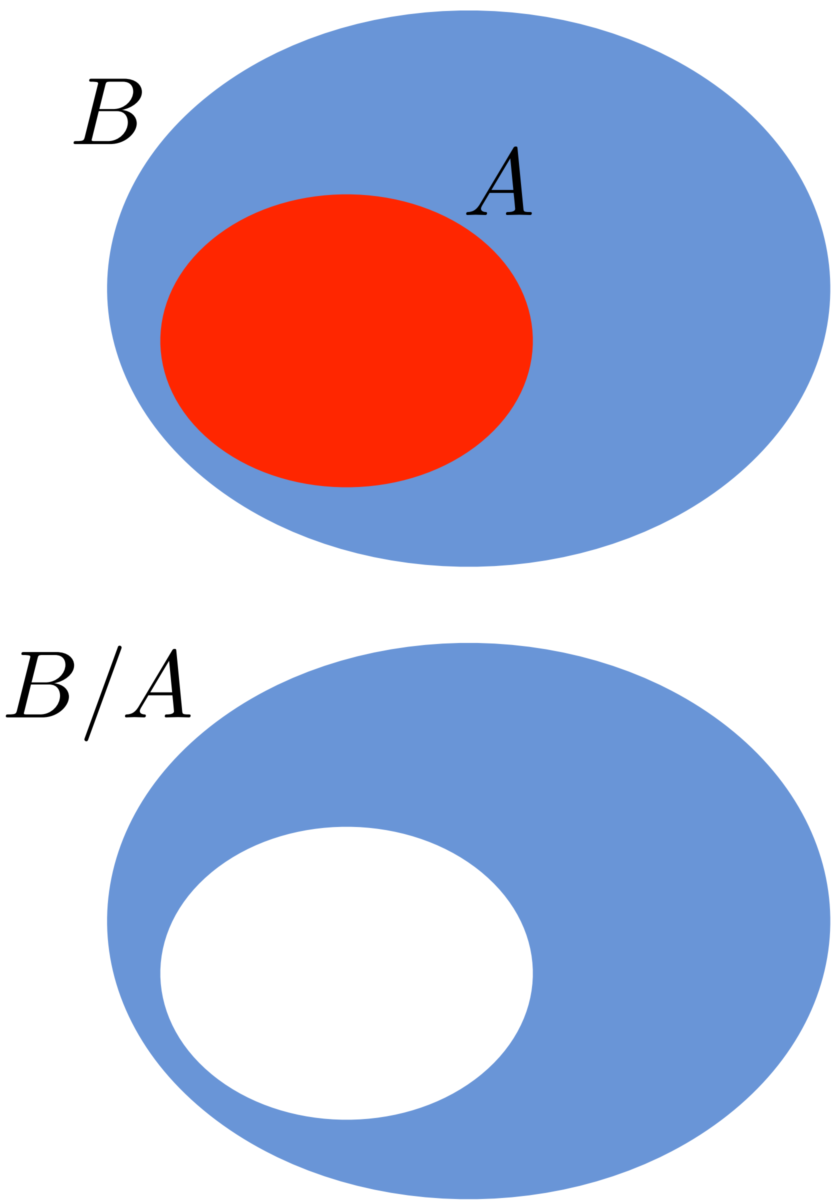
$$A \cup (B/A) = B \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$

$$P(B) = P(A \cup (B/A))$$

$$= P(A) + P(B/A)$$

Théorème $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A



$$A \cup (B/A) = B \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$

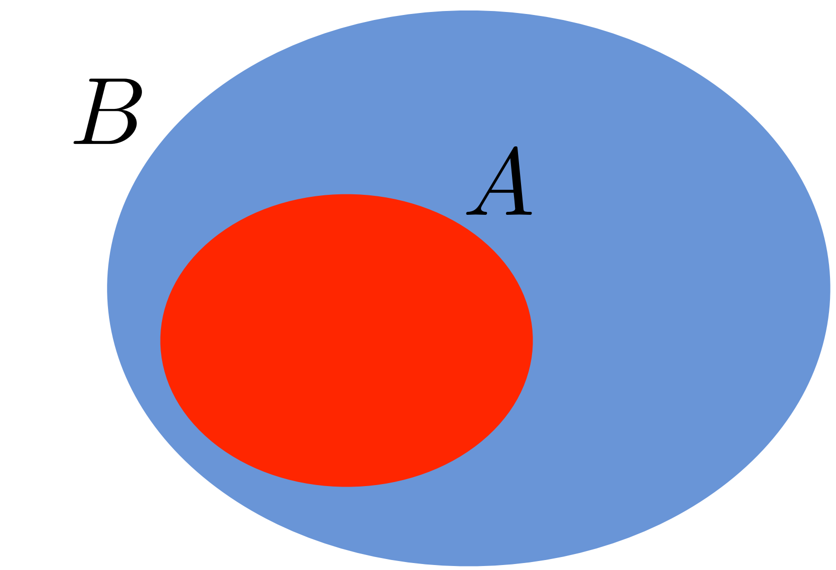
$$P(B) = P(A \cup (B/A))$$

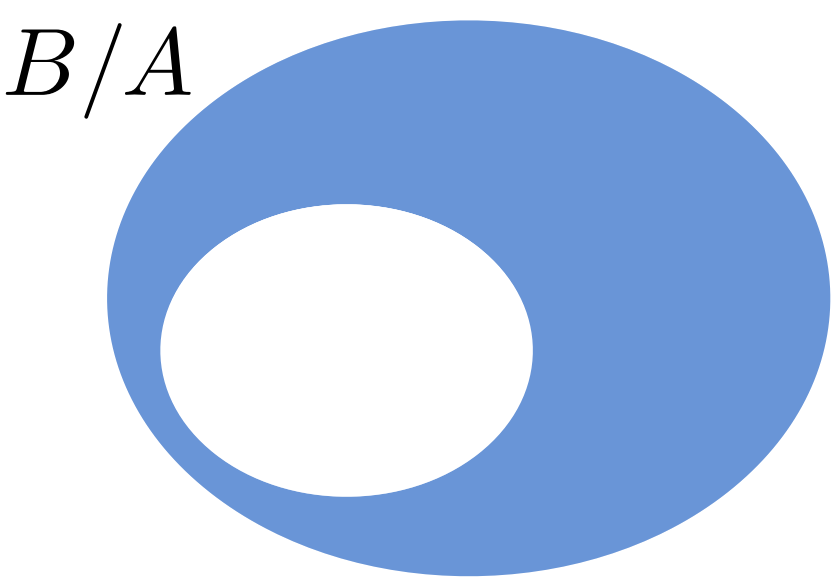
$$= P(A) + P(B/A)$$

$$0 \leq P(B/A)$$

Théorème $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Preuve: Regardons les ensembles A et B/A





$$A \cup (B/A) = B \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$

$$P(B) = P(A \cup (B/A))$$

$$= P(A) + P(B/A)$$

$$0 \leq P(B/A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

Théorème

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Théorème

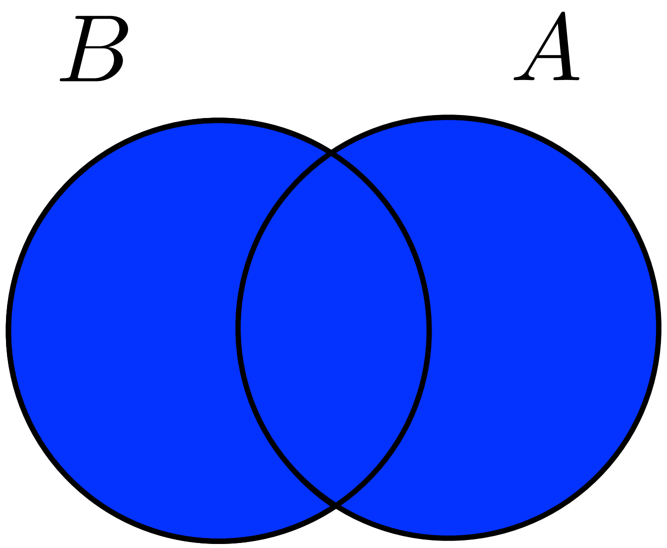
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve:

Théorème

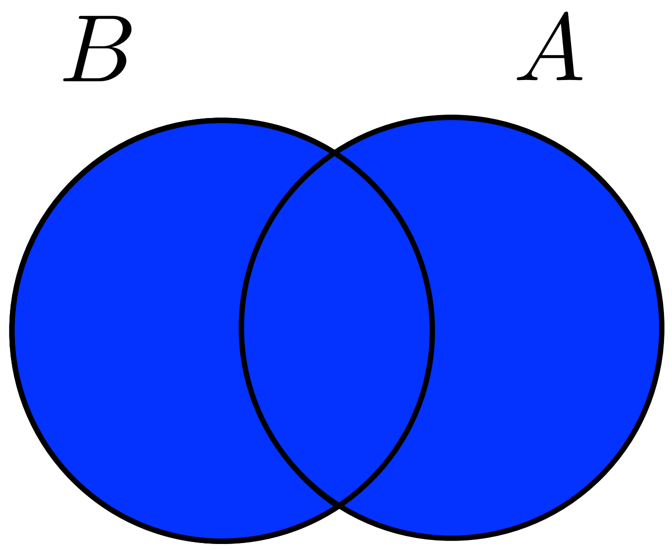
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve:



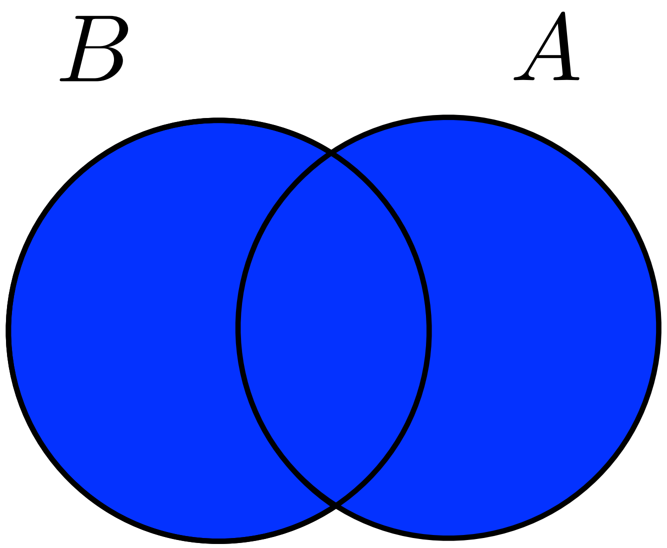
Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

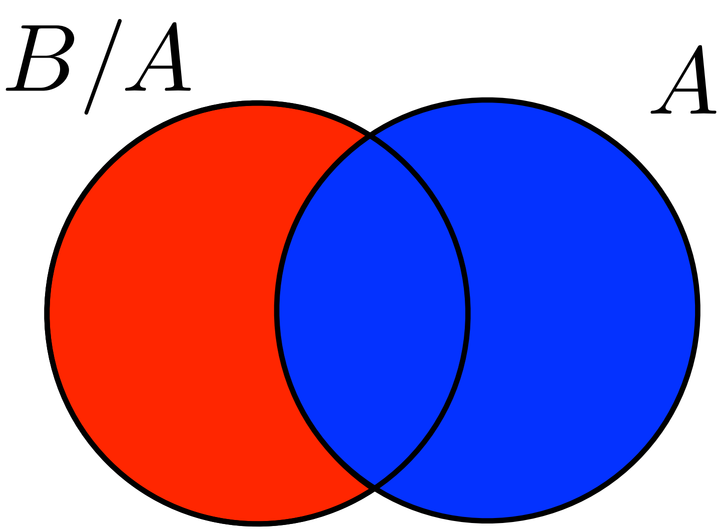
Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$



Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

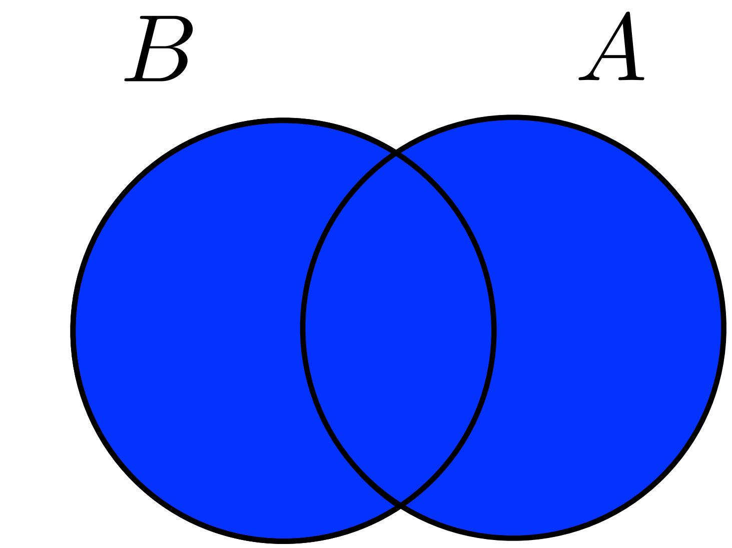
Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$

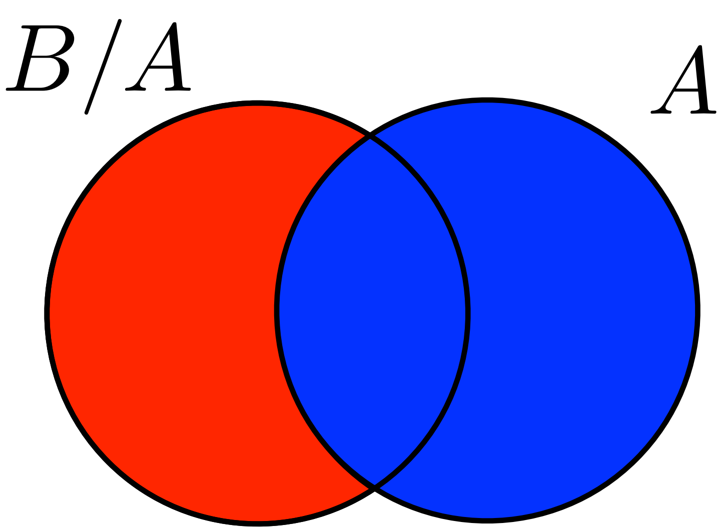




Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $A \cap (B/A) = \emptyset$

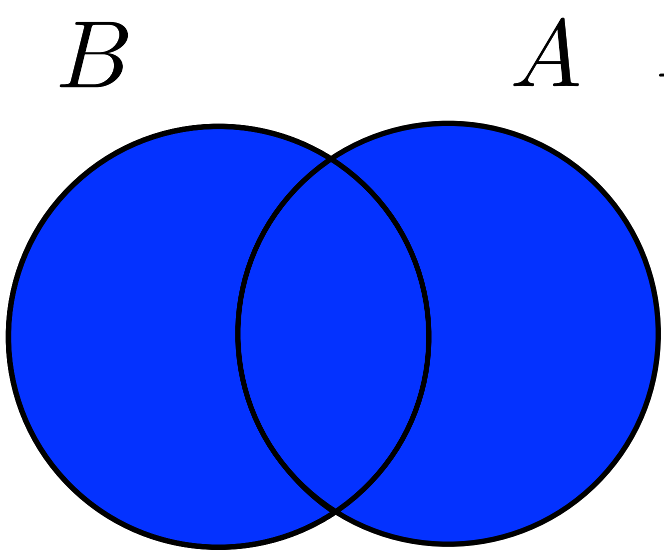


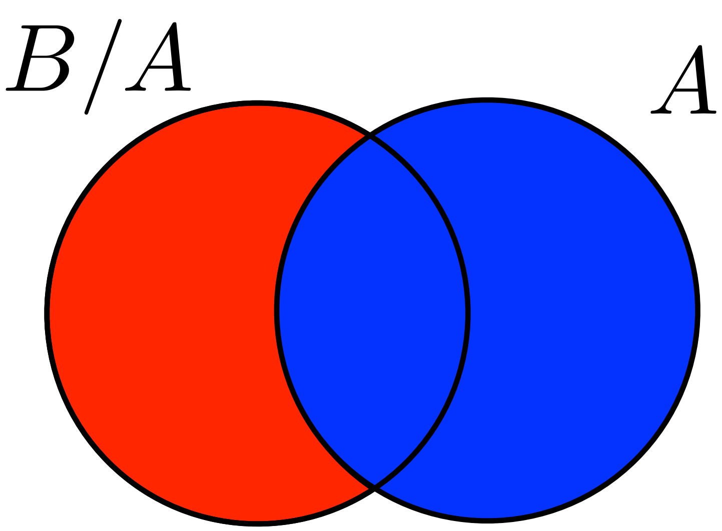


Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad A \cap (B/A) = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A))$

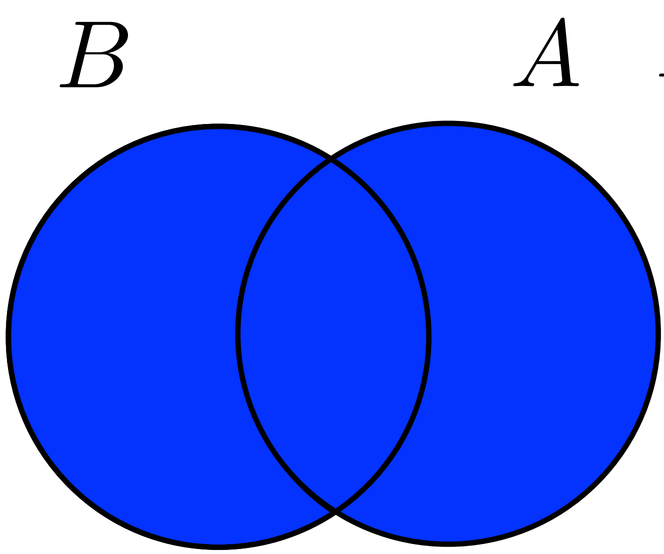


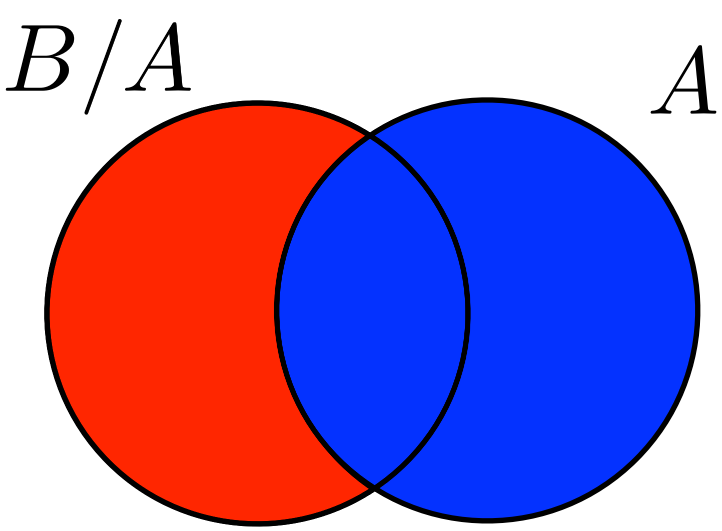


Théorème $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\quad$ $A \cap (B/A) = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$

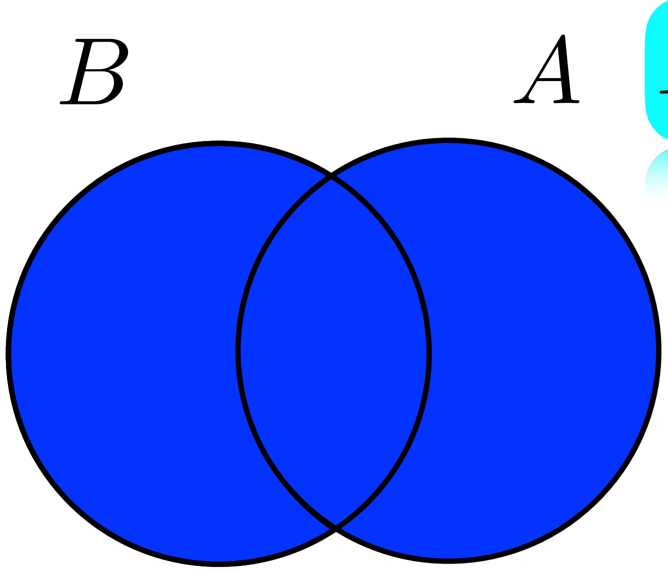


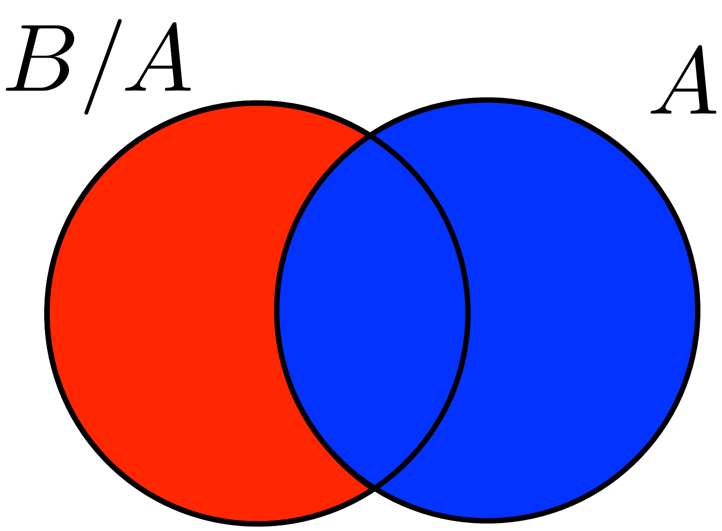


Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $A \cap (B/A) = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$

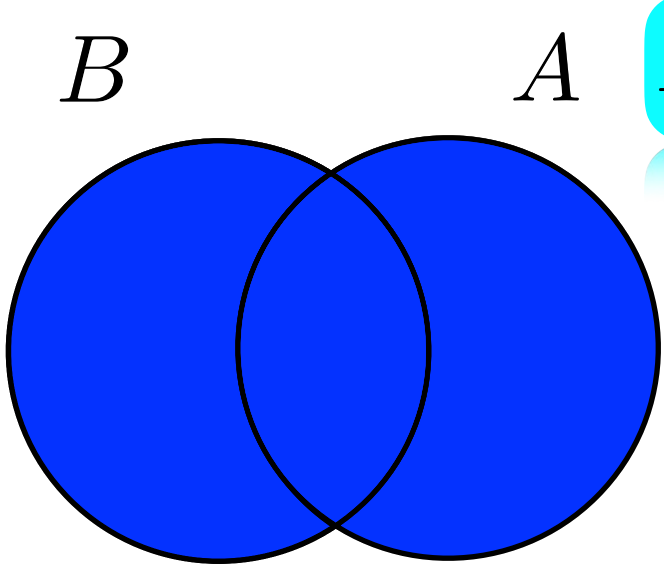


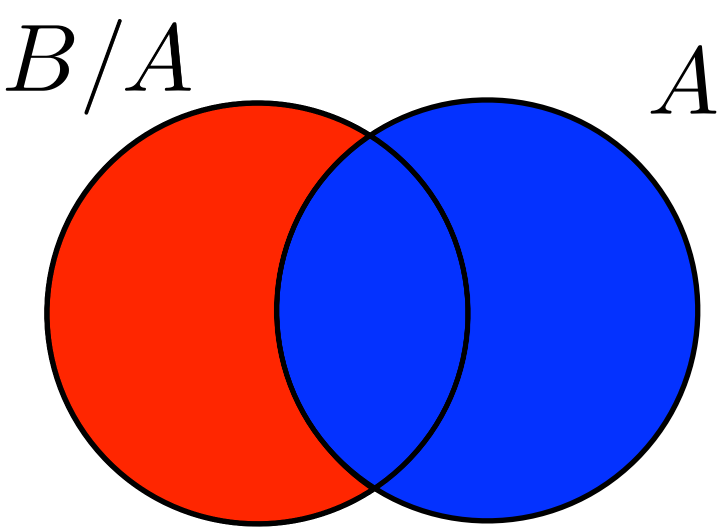


Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\quad A \cap (B/A) = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$

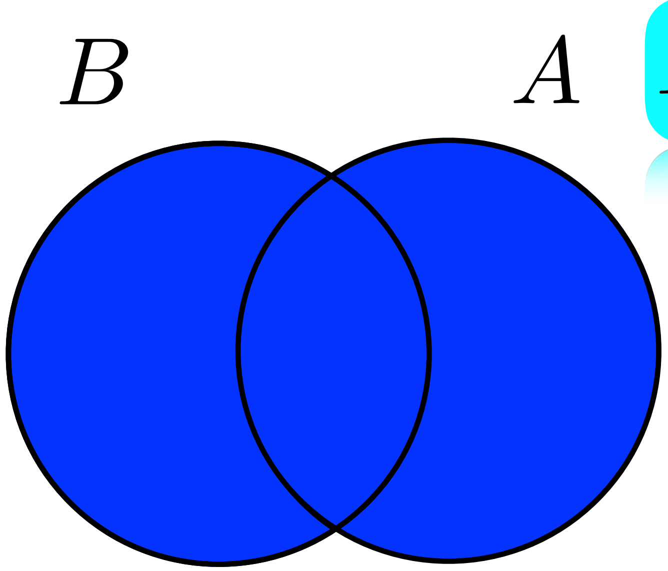


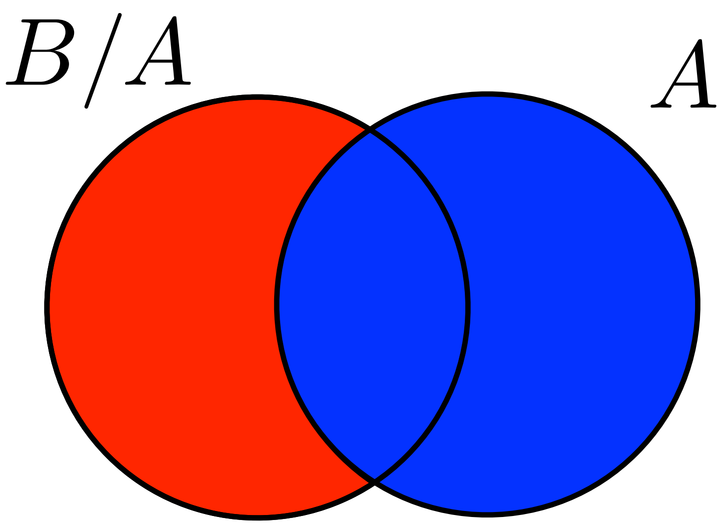


Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $A \cap (B/A) = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$

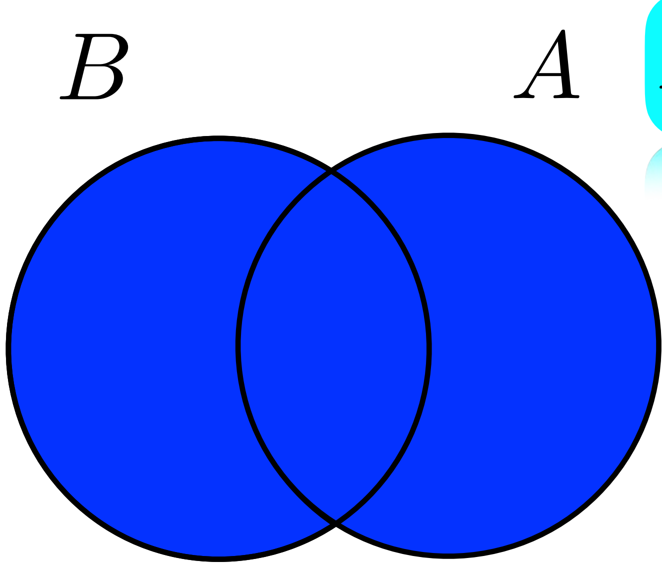


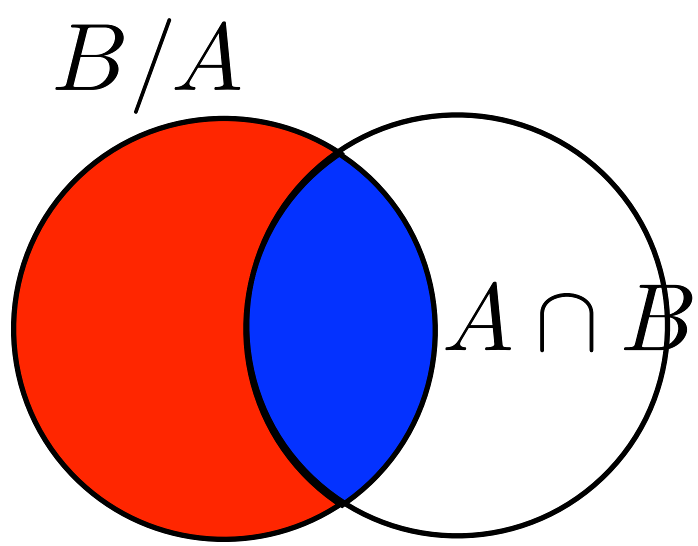


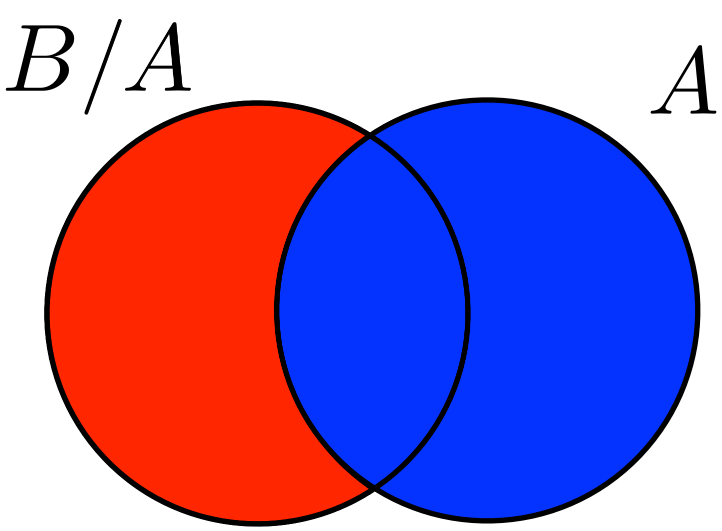
Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad A \cap (B/A) = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$





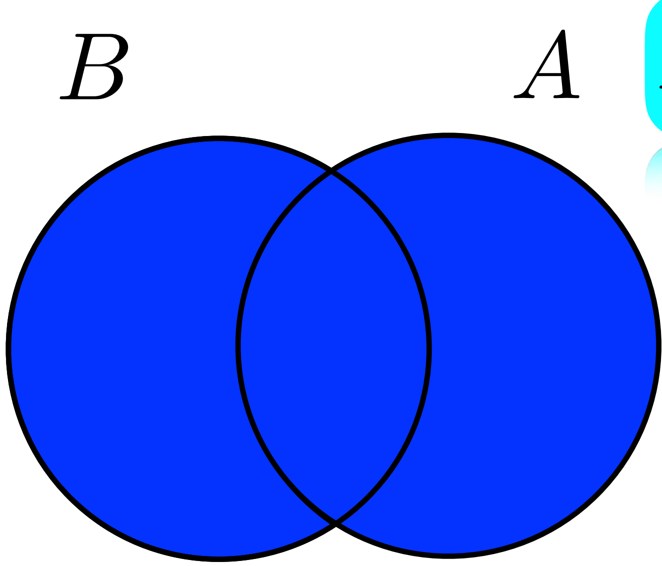


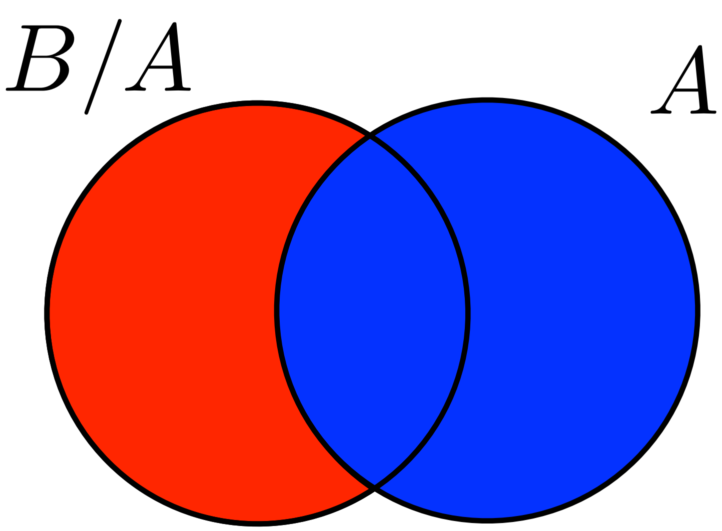
Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

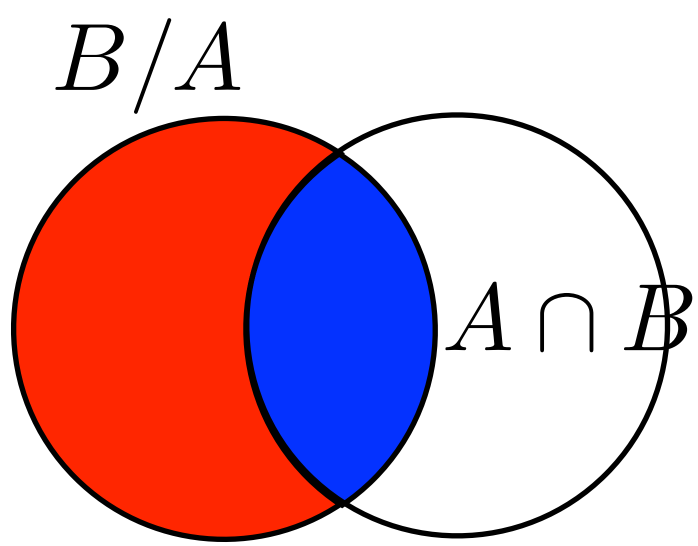
Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad$ $A \cap (B/A) = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B/A)$$

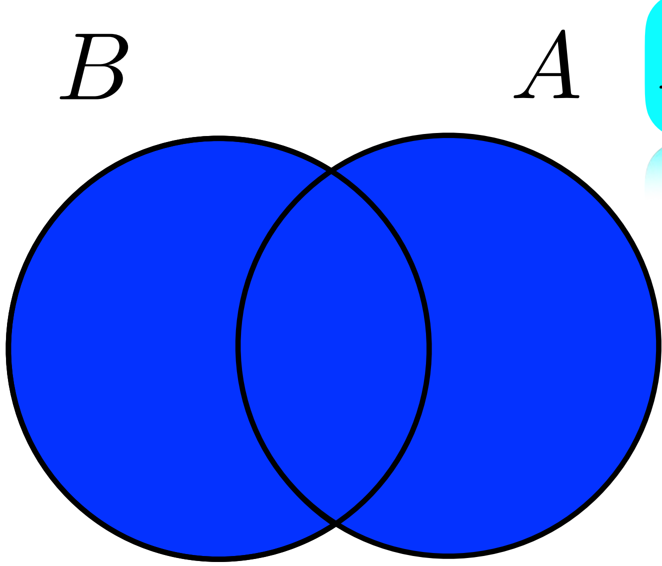




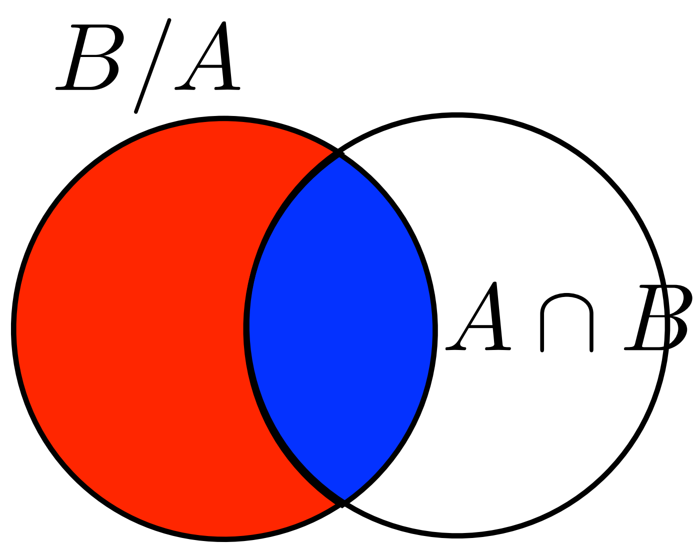


Théorème $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Preuve: $A\cup B = A\cup(B/A)$ $\qquad A\cap(B/A)=\emptyset$

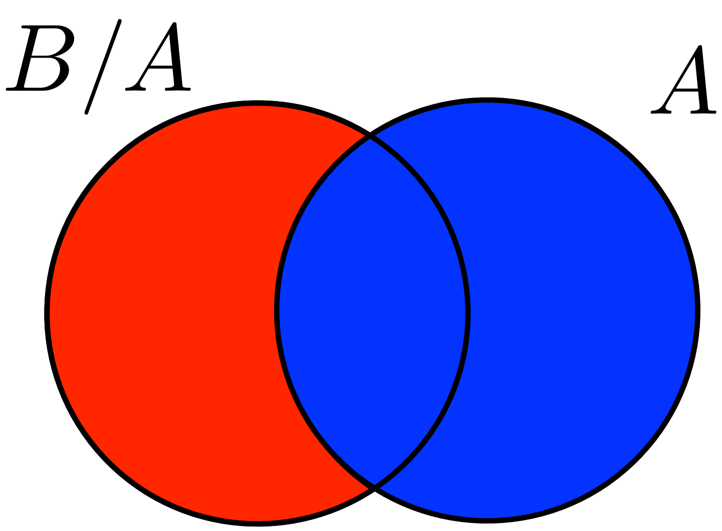


$$P(A\cup B) = P(A\cup(B/A)) = P(A) + P(B/A)$$



$$B = (A\cap B)\cup(B/A)$$

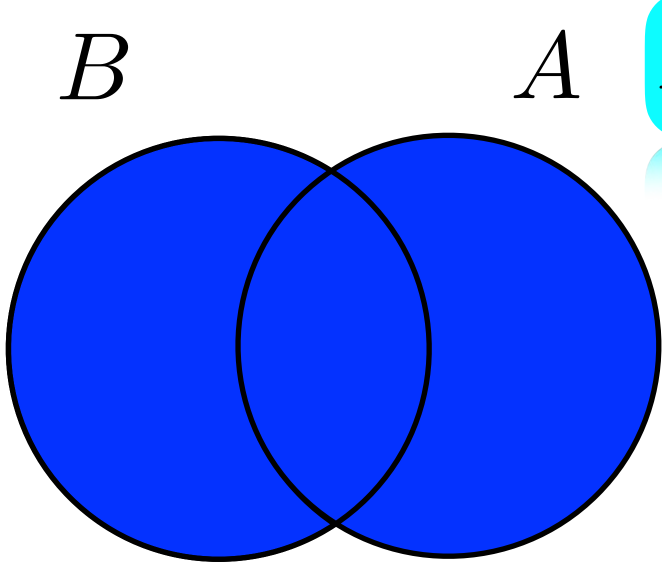
$$(A\cap B)\cap(B/A)=\emptyset$$

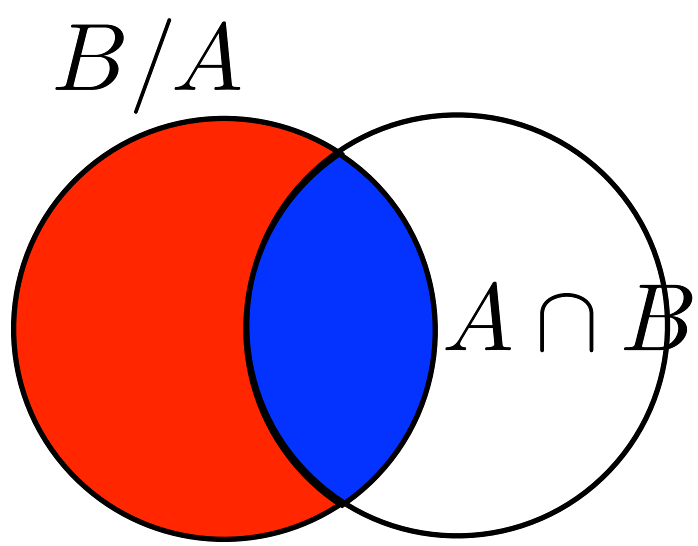


Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad A \cap (B/A) = \emptyset$

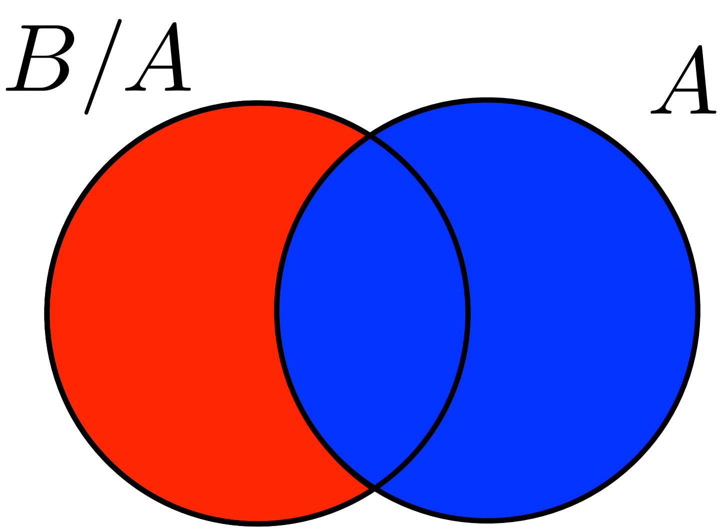
$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$





$$B = (A \cap B) \cup (B/A)$$

$$(A \cap B) \cap (B/A) = \emptyset$$



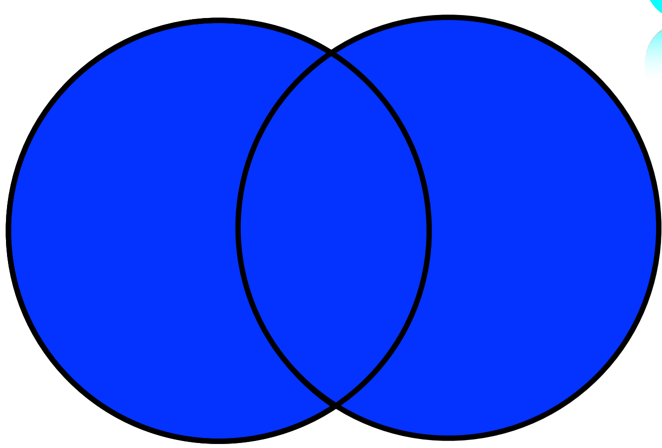
$$P(B) = P((A \cap B) \cup (B/A))$$

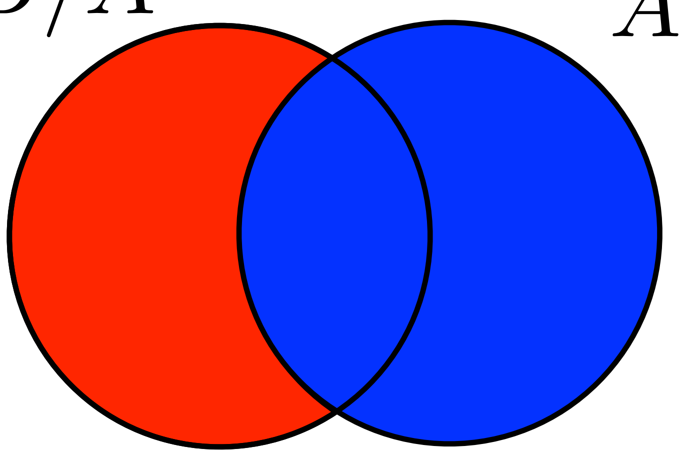
Théorème $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

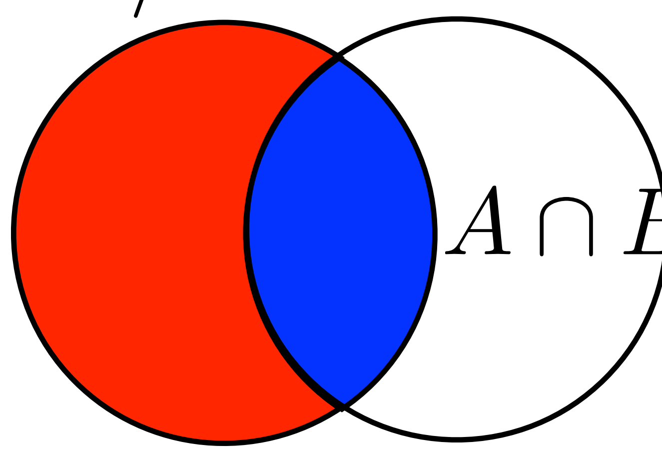
Preuve:

$$A \cup B = A \cup (B/A) \qquad A \cap (B/A) = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$







$$B = (A \cap B) \cup (B/A)$$

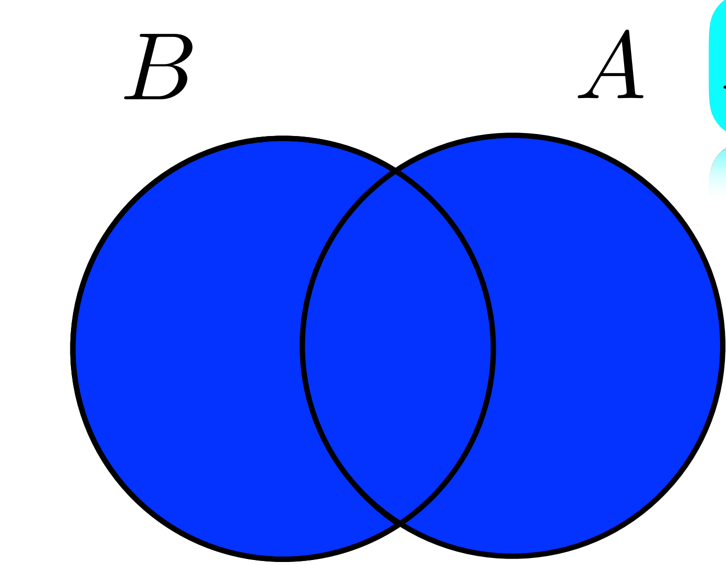
$$(A \cap B) \cap (B/A) = \emptyset$$

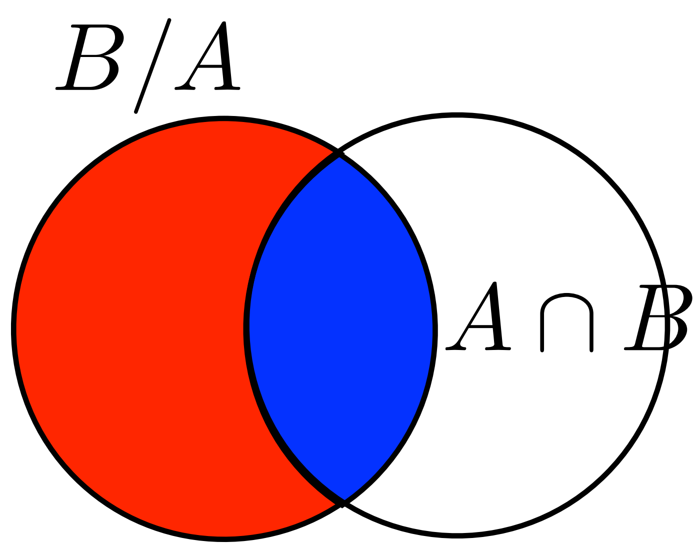
$$P(B) = P((A \cap B) \cup (B/A))$$
$$= P(A \cap B) + P(B/A)$$

Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad A \cap (B/A) = \emptyset$

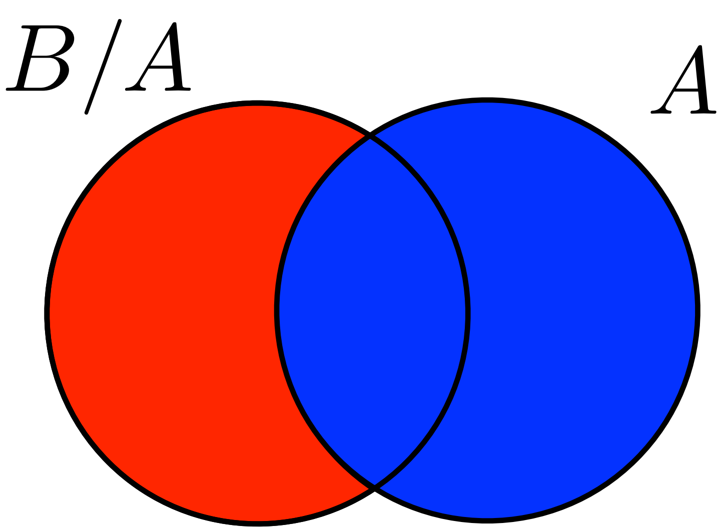
$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$





$$B = (A \cap B) \cup (B/A)$$

$$(A \cap B) \cap (B/A) = \emptyset$$



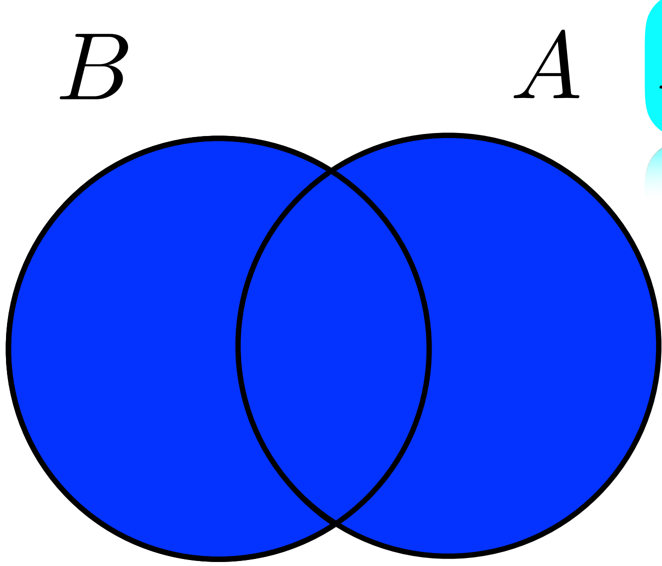
$$\begin{aligned} P(B) &= P((A \cap B) \cup (B/A)) \\ &= P(A \cap B) + P(B/A) \end{aligned}$$

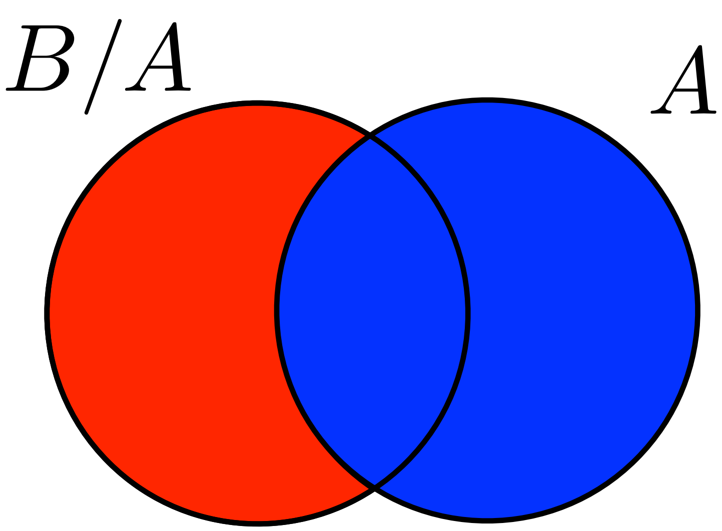
$$\Longrightarrow P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)$$

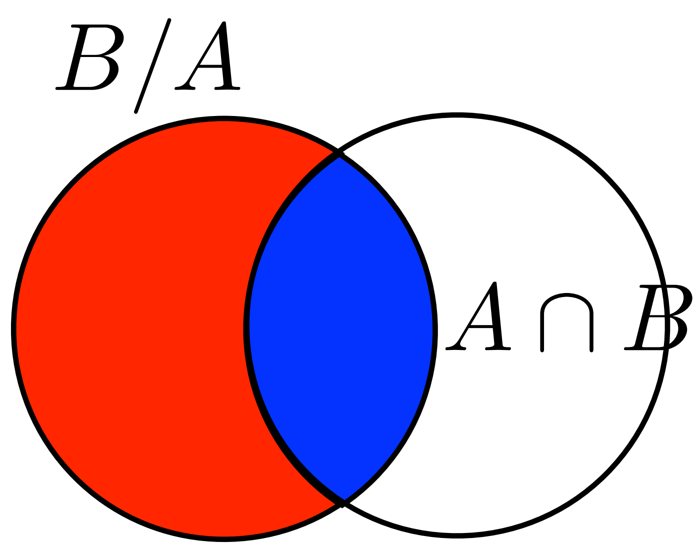
Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve: $A \cup B = A \cup (B/A)$ $\qquad A \cap (B/A) = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) = P(A) + P(B/A)$$







$$B = (A \cap B) \cup (B/A)$$

$$(A \cap B) \cap (B/A) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A \cap B) \cup (B/A)) \\ &= P(A \cap B) + P(B/A) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple

On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

Exemple

On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

Exemple

On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

$P(A \cup B)$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13 + 12 - 3}{52}$$

Exemple On pige une carte au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ou une figure?

$$|S| = 52$$

A Avoir un trèfle

$$A = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

B Avoir une figure

$$B = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13 + 12 - 3}{52} = \frac{22}{52}$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A^{365}_{30}$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{30}^{365}}{365^{30}}$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{30}^{365}}{365^{30}} \approx 1 - 0,2937$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{30}^{365}}{365^{30}} \approx 1 - 0,2937 = 0,7063$$

Exemple Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants d'une classe de 30 étudiants aient la même date de fête? (En supposant que personne n'est né le 29 fév.)

Puisque chaque étudiant peut avoir n'importe lequel des 365 jours de l'année comme anniversaire

$$|S| = 365^{30}$$

A Au moins deux étudiants ont la même date de fête

$\bar{A}$ Aucun étudiant a la même date de fête

$$|\bar{A}| = A_{30}^{365} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{30}^{365}}{365^{30}} \approx 1 - 0,2937 = 0,7063$$

S'il y a 50 étudiants dans la classe, cette probabilité devient 97%

Probabilité d'évènement non dénombrable.

non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

Probabilité d'évènement non dénombrable.

non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Probabilité d'évènement non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Probabilité d'évènement non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Par contre, on peut admettre que

Probabilité d'évènement non dénombrable.

non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Par contre, on peut admettre que

- Longueur

Probabilité d'évènement non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Par contre, on peut admettre que

- Longueur
- Aires

Probabilité d'évènement non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Par contre, on peut admettre que

- Longueur
- Aires
- Volumes

Probabilité d'évènement non dénombrable.

Lorsqu'une expérience aléatoire a un espace échantillonnal continu, on peut parfois définir la probabilité comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{mesure}(A)}{\text{mesure}(S)}$$

Définir ce qui peut être considéré comme une mesure dépasse largement le cadre du cours.

Par contre, on peut admettre que

- Longueur
- Aires
- Volumes

sont des mesures.

Exemple

Une cible de dard est formée de trois cercles concentriques de rayon 30, 20, et 10 cm. Si on suppose qu'un tir à l'extérieur ne compte pas, quelle est la probabilité de tirer dans le noir.

Exemple

Une cible de dard est formée de trois cercles concentriques de rayon 30, 20, et 10 cm. Si on suppose qu'un tir à l'extérieur ne compte pas, quelle est la probabilité de tirer dans le noir.

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(S)}$$

Exemple

Une cible de dard est formée de trois cercles concentriques de rayon 30, 20, et 10 cm. Si on suppose qu'un tir à l'extérieur ne compte pas, quelle est la probabilité de tirer dans le noir.

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(S)} = \frac{\pi(30^2 - 20^2)}{\pi 30^2}$$

Exemple

Une cible de dard est formée de trois cercles concentriques de rayon 30, 20, et 10 cm. Si on suppose qu'un tir à l'extérieur ne compte pas, quelle est la probabilité de tirer dans le noir.

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(S)} = \frac{\pi(30^2 - 20^2)}{\pi 30^2}$$

$$= \frac{900 - 400}{900}$$

Exemple

Une cible de dard est formée de trois cercles concentriques de rayon 30, 20, et 10 cm. Si on suppose qu'un tir à l'extérieur ne compte pas, quelle est la probabilité de tirer dans le noir.

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(S)} = \frac{\pi(30^2 - 20^2)}{\pi 30^2}$$

$$= \frac{900 - 400}{900} = \frac{5}{9}$$

Faites les exercices suivants

#2.10 à 2.20

Probabilité comme mesure de crédit accordé à un fait.

On entend parfois des phrases du genre

- L’athlète Untel a 60% de chance de gagner ce tournoi.

- Il probable à 90% que Cervantes n’ait pas écrit Don Quichotte 2.

- Mon médecin estime à 80% les chances que j’ai telle condition.

Bien que la valeur de telle probabilité est douteuse, si on les utilise, on doit quand même respecter les axiomes et donc tout ce qu’on a déduit aujourd’hui.

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$$P(\emptyset) = 0$$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$P(\emptyset) = 0$ $\qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

Devoir: Section 2.1