

## 2 Probabilités

### 2.1 Notions de probabilités

#### Q.2.1

Dans chaque cas, décrire en extension l'espace échantillonnal.

- Le nombre de truites prises par un pêcheur en une journée, le quota quotidien étant de 15.
- Un psychologue scolaire note le temps que met un enfant à lire une page d'un texte, le temps maximal alloué étant de 5 minutes.
- Lors d'un test psychologique, on compte le nombre de pièces d'un casse-tête de 20 pièces qu'un jeune enfant réussit à placer en 10 minutes.
- On note le mois de naissance d'une personne choisie au hasard.

#### Q.2.2

Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un chiffre non nul. Décrire en extension les événements suivants :

A : Obtenir un résultat pair

B : Obtenir un résultat supérieur à 5

C : Obtenir un nombre premier

D : Obtenir un multiple de 3

$A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $A \cap D$ ,  $A^c$ ,  $C^c$ ,  $B \cup C$ ,  $C \cup D$

#### Q.2.3

On lance une pièce de monnaie trois fois et on note le résultat de chaque lancer.

- Décrire en extension l'espace échantillonnal. (Faire un arbre de probabilité)
- Calculer la probabilité des événements suivants :
  - Obtenir exactement deux piles
  - Obtenir seulement des faces
  - Obtenir plus de piles que de faces
  - Obtenir autant de piles que de faces
  - Obtenir moins de quatre piles

#### Q.2.4

Dans l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard une carte d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on considère les événements suivants :

A : Tirer une carte noire

B : Tirer une dame

C : Tirer une carte de coeur

D : Tirer une figure (valet, dame ou roi)

Trouver la probabilité des événements suivants :

$A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap C$ ,  $A \cap B \cap C$ ,  $C \cap D$ ,  $A \cup B$ ,  $C \cup D$ ,  $A \cup B \cup C$

#### Q.2.5

Une expérience aléatoire consiste à piger un échantillon de deux personnes parmi les quatre personnes suivantes : Line, Paul, Monique, Yvan. Quelle est la probabilité de piger deux garçons ?

#### Q.2.6

Dans un lot de 25 calculatrices, on sait que 5 sont défectueuses. Si on choisit au hasard 4 calculatrices dans ce lot, quelle est la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse ?

#### Q.2.7

Une urne contient sept boules rouges et huit boules vertes. On pige quatre boules au hasard. Quelle est la probabilité qu'on pige deux boules rouges et deux boules vertes ?

#### Q.2.8

Un groupe formé de huit hommes et six femmes prennent place au hasard dans une file d'attente. Quelle est la probabilité que la personne occupant la troisième position dans la file soit une femme ?

#### Q.2.9

Dans le comté ZYPA, trois candidats A, B et C se font la lutte pour devenir député à la prochaine élection. La probabilité que A ou B gagne est de  $1/2$ . La probabilité que A ou C gagne est de  $9/10$ . Trouver la probabilité que A gagne.

#### Q.2.10

Voici quelques statistiques concernant des conducteurs impliqués dans des accidents de voiture : 5% étaient en état d'ébriété et conduisaient sans permis, 70% étaient en état d'ébriété ou conduisaient sans permis, 40% étaient sobres. Calculer la probabilité qu'un conducteur impliqué dans un accident de voiture détienne un permis.

#### Q.2.11

En 2006, il y a eu 81 937 naissances au Québec, dont 42 110 garçons. On sait qu'un nouveau-né de faible poids (moins de 2500g) risque davantage d'avoir des problèmes de santé. En 2006, on a dénombré 4 765 nouveaux-nés, dont 2280 garçons, qui pesaient moins de 2 500g.

Source : Statistique Canada. CANSIM, Tableau 102-4509.

- Illustrer à l'aide d'un tableau de probabilités.
- Quels sont les risques qu'un nouveau-né pèse moins de 2500g à la naissance ?
- Quels sont les risques qu'un nouveau-né soit une fille pesant moins de 2 500g ?
- Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né ne soit ni un garçon, ni un bébé de moins de 2 500g ?
- Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon ou un bébé pesant moins de 2 500g ?

### Q.2.12

Voici un portrait des membres de l'Ordre des ingénieurs du Québec en 2007 : 42,5% des membres ont moins de 40 ans ; 34,7% des membres sont des hommes de moins de 40 ans ; 3,9% des membres sont des femmes de 40 ans et plus.

Source : Ordre des ingénieurs du Québec. Rapport annuel 2007-2008.

a) Illustrer à l'aide d'un tableau de probabilités.

Selon ces statistiques, quelles sont les chances qu'un ingénieur choisi au hasard :

- b) Soit une femme ?
- c) Soit une femme de moins de 40 ans ?
- d) Soit un homme, ou une personne de 40 ans et plus ?

### Q.2.13

Dans l'expérience aléatoire consistant à faire tourner librement une aiguille d'horloge et à noter sa position d'arrêt, quelle est la probabilité que l'aiguille arrête entre 1 et 3 ?

### Q.2.14

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés bien équilibrés, quelle est la probabilité que la différence entre les deux chiffres soit supérieure à 3 ?

### Q.2.15

Une fléchette est lancée au hasard sur une cible circulaire de 60 cm de diamètre. Quelle est la probabilité que la fléchette soit à 10 cm ou moins du centre ?

### Q.2.16

On lance un dé vert et un dé rouge. Quelle est la probabilité :

- a) Que la somme soit huit ?
- b) Que les deux dés montrent deux nombres différents ?
- c) Que le dé vert donne un nombre plus petit que le dé rouge ?
- d) Que le produit des deux nombre soit pair ?
- e) D'obtenir une paire ?
- f) D'obtenir une somme de six ou une paire ?
- g) D'obtenir une somme de huit ou deux nombres différents ?
- h) D'obtenir un six sur le dé rouge ou une somme de neuf ?

### Q.2.17

Six livres différents sont placés au hasard sur un rayon. Quelle est la probabilité qu'ils soient placés par ordre alphabétique ?

### Q.2.18

Dans un groupe de 12 personnes, on en choisit 3 au hasard pour faire un voyage en Europe. Julie et Marie espèrent ardemment être choisies. Quelle est la probabilité que :

- a) les deux soient choisies ?
- b) seulement une des 2 soit choisie ?

### Q.2.19

Les membres de quatre couples sont placés au hasard sur une rangée de huit sièges. Quelle est la probabilité que :

- a) Chacun des couples soit réuni ?
- b) Les hommes et les femmes alternent ?
- c) Les femmes soient ensembles ?

### Q.2.20

On choisit au hasard une famille parmi les familles de sept enfants. Quelle est la probabilité que cette famille compte :

- a) Sept garçons ?
- b) Un garçon suivi d'une fille, d'un garçon, d'une fille, etc ?
- c) Sept enfants de même sexe ?
- d) Au moins une fille ?

### Q.2.21

À l'aide de diagrammes de Venne trouver une expression pour

- a)  $P(A \cup B \cup C)$
- b)  $P(A \cup B \cup C \cup D)$

## 2.2 Probabilités conditionnelles et indépendance

### Q.2.22

Durant la saison régulière 2007-2008, les Canadiens de Montréal ont perdu 35 des 82 matchs qu'ils ont disputés. Ils ont gagné 26 des 43 matchs qu'ils ont joués à l'extérieur.

Source : Site Internet Wikipedia. Les Canadiens de Montréal.

a) Représenter les données dans un tableau.

On choisit un match au hasard parmi les 82 matchs disputés :

- b) Si l'équipe a perdu le match, quelle est la probabilité qu'il ait été disputé à domicile ?
- c) Quelle est la probabilité que ce soit un match gagné à domicile ?
- d) Quelle est la probabilité que les Canadiens aient gagné le match ? Cette probabilité est-elle plus élevée si le match est disputé à domicile ?
- e) D'après les données du tableau, les événements  $P$  : «les Canadiens perdent le match» et  $E$  : «le match est disputé à l'extérieur» sont-ils indépendants ?

### Q.2.23

Répartition des sanctions décernées dans les universités québécoises selon le sexe du diplômé et le type de sanction, Québec, 2007.

	B :Bacc.	M : Maîtrise	D : Doc.	Total
F : Femme	20 086	5 077	640	25 803
H : Homme	13 352	4 897	787	19 036
Total	33 438	9 974	1 427	44 839

Source : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Statistiques et indicateurs.

On choisit un diplômé au hasard.

- Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
- Quelle est la probabilité que ce soit un homme détenteur d'une maîtrise ?
- Quelle est la probabilité que cette personne détienne un baccalauréat sachant que c'est une femme ?
- Si la personne détient un doctorat ou une maîtrise, quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
- Selon les données du tableau, existe-t-il un lien de dépendance entre le fait que le diplôme obtenu soit un doctorat et le sexe du diplômé ?

### Q.2.24

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, quelle est la probabilité d'avoir une somme égale à 8 ( $A$ ) si les deux indiquent des résultats différents ( $B$ ) ?

### Q.2.25

Quelle est la probabilité qu'il y ait deux garçons dans une famille de trois enfants, si on sait qu'il y a au moins une fille ?

### Q.2.26

Quelle est la probabilité de tirer successivement trois as d'un jeu ordinaire de 52 cartes, si on ne remet pas les cartes tirées ?

### Q.2.27

Un sac contient quatre billes rouges, deux billes bleues et trois billes vertes. On tire successivement et sans remise deux billes. Trouver la probabilité des événements suivants :

- Les deux billes tirées sont rouges.
- La première bille est bleue et la seconde est verte.
- Une des billes tirées est rouge et l'autre est bleue.
- Au moins une des billes est verte.

### Q.2.28

On choisit au hasard un nombre entier positif dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 15, 16\}$ . Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit divisible par 3 si le nombre obtenu est impair ?

### Q.2.29

Une boîte renferme 5 billes blanches, trois billes rouges et deux billes vertes. On tire successivement et sans remise trois billes. Trouver la probabilité des événements suivants :

- Les trois billes tirées sont rouges.
- La deuxième bille tirée est verte.
- Au moins une des billes est blanche.
- Les événements de  $b)$  et  $c)$  sont-ils indépendants ?

### Q.2.30

Pour connaître les intentions de vote de la population, on a interrogé 100 personnes et on leur a demandé pour lequel des partis A, B ou C elles voteraient. On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

	A	B	C	Total
Hommes	13%	21%	19%	53%
Femmes	20%	8%	19%	47%
Total	33%	29%	38%	100%

Si on choisit une personne au hasard dans ce groupe, trouver la probabilité :

- qu'elle vote pour le parti A ;
- qu'elle vote pour le parti A, si on sait que c'est une femme ;
- qu'elle vote pour le parti B ou C, si on sait que c'est un homme ;
- que ce soit une femme, si on sait qu'elle vote pour le parti C.
- Existe-t-il un lien de dépendance entre le sexe d'une personne et le fait qu'elle vote pour le parti C ?

## 2.3 Probabilités totales et formule de Bayes

### Q.2.31

Un tiroir contient 4 crayons et 3 effaces. On pige, successivement et sans remise deux objets. Si A est l'événement «le premier objet tiré est un crayon» et B l'événement «le second objet pigé est une efface», les événements A et B sont-ils indépendants ?

### Q.2.32

Une ville est formée à 54% de femmes. On sait que 32% des femmes et 41% des hommes font du jogging. On choisit une personne au hasard dans cette ville. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le jogging ?

### Q.2.33

Dans une usine, trois machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  fabriquent des stylos. La machine  $M_1$  en fabrique 1 000 dans une journée, la  $M_2$  en fabrique 2 000 et la  $M_3$ , 3 000. On sait que pour la  $M_1$ , 3% des stylos fabriqués sont défectueux, pour  $M_2$ , 2% sont défectueux et pour  $M_3$ , 1% sont défectueux. À la fin d'une journée, on choisit un stylo au hasard et on constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine  $M_2$  ?

### Q.2.34

On a quatre boîtes contenant des ballons de diverses couleurs (bleus, rouges, noirs). Voici une représentation de ces boîtes :

1	2	3	4
B B B R N N N N	B B B B R R N N N	B B R R R R N N N N N	B R R R N N N N N N

On choisit une boîte au hasard et on tire un ballon. Trouver la probabilité de :

- Choisir un ballon bleu.
- Choisir un ballon rouge.
- Choisir un ballon noir.
- Provenir de la boîte 2 si le ballon choisi est rouge.
- Provenir de la boîte 4 si le ballon choisi est bleu.
- Si le ballon choisi est noir, quelle est la provenance la plus probable ?

### Q.2.35

Des chercheurs à la faculté de médecine de l'Université de Pennsylvanie ont déterminé que les enfants de moins de deux ans qui dorment avec une veilleuse ont 36% de chance d'être myope avant l'âge de 16 ans. Les enfants de moins de deux ans qui dorment à la noirceur ont, pour leur part, 21% de chance de devenir myope avant l'âge de 16 ans. De plus, une enquête indique que 28% des enfants de moins de deux ans dorment avec une veilleuse.

- Représenter ces probabilités à l'aide d'un arbre, d'un tableau ou d'un diagramme de Venn.
- Calculez la probabilité qu'un enfant soit myope avant l'âge de 16 ans.
- Calculez la probabilité qu'un enfant qui est myope avant l'âge de 16 ans ait dormi avec une veilleuse lorsqu'il était âgé de moins de deux ans.

### Q.2.36

Dans un cégep, les étudiants doivent choisir un cours d'éducation physique parmi trois disciplines, soit le soccer (S), le badminton (B) et la natation (N). Il s'avère que 35% choisissent le soccer, 40% le badminton et 25% la natation. Le pourcentage d'étudiants qui ont réussi (R) leur cours d'éducation physique est de 80% dans le groupe de soccer, 90% dans le groupe de badminton et 75% dans le cours de natation. Si on choisit un étudiant au hasard :

- Quelles sont les chances qu'il ait réussi le cours de natation ?
- Quelles sont les chances qu'il ait réussi son cours d'éducation physique ?
- Quelles sont les chances qu'il ait choisi la natation, sachant qu'il a réussi son cours d'éducation physique ?

## 2.4 Exercices récapitulatifs

### Q.2.37

Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont trois événements associés à une expérience aléatoire, exprimer et représenter par un diagramme de Venn les événements.

- Les trois événements se réalisent.
- Aucun des trois événements ne se réalise.
- Au moins un des trois événements se réalise.
- Seulement  $B$  se réalise.
- $A$  et  $B$  se réalisent et  $C$  ne se réalise pas.
- Ni  $B$  ni  $C$  ne se réalisent.

### Q.2.38

Décrire un ensemble fondamental associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce de monnaie et un dé.

### Q.2.39

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer quatre fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Trouver la probabilité des événements suivants :

- Les deux premiers lancers donnent face.
- On obtient exactement trois faces.
- On obtient au moins deux faces.
- Les résultats sont alternés.
- On obtient au moins deux piles.
- On a au moins deux faces de suite.

### Q.2.40

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés. Trouver la probabilité des événements suivants :

- a) La somme des dés donne 7.
- b) Le second dé donne un résultat supérieur au premier.
- c) Les deux dés ont des résultats différents.
- d) Le second dé donne 2 de plus que le premier.
- e) La somme des dés est inférieure à 6.
- f) La somme des dés est 7 ou 11.

### Q.2.41

Dans une urne, on a trois boules rouges, deux boules vertes, quatre boules noires et une boule bleue. On pige au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; on pige une seconde boule et on note sa couleur.

- a) Décrire un ensemble fondamental associé à cette expérience aléatoire. Est-ce que tous les résultats sont équiprobables ?
- b) Trouver la probabilité de choisir deux boules rouges.
- c) Trouver la probabilité de choisir deux boules noires.
- d) Trouver la probabilité de choisir une, et une seule, boule rouge.
- e) Trouver la probabilité de ne pas choisir la boule bleue.
- f) Trouver la probabilité de choisir au moins une boule verte.

### Q.2.42

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée à six reprises. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au moins une fois ?

### Q.2.43

Le personnel travaillant dans un bureau est réparti selon le tableau suivant :

	Cadres	Professionnels	Syndiqués
Hommes	5	11	71
Femmes	3	14	65

- a) Si on choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un cadre ? un cadre féminin ? un syndiqué masculin ?
- b) Si on choisit une personne parmi les professionnels, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
- c) Si on choisit une personne parmi les femmes, quelle est la probabilité que ce soit une professionnelle ?

### Q.2.44

Un dé est balancé de sorte que le nombre 1 a deux fois plus de chances que les autres nombres d'apparaître. Si on considère l'expérience aléatoire consistant à lancer ce dé :

- a) Décrire un ensemble fondamental et trouver la probabilité de chaque résultat.
- b) Trouver la probabilité d'obtenir un nombre premier.
- c) Trouver la probabilité d'obtenir un nombre impair.

### Q.2.45

Une loterie émet des billets dont le numéro est formé de six chiffres, le premier chiffre n'étant pas zéro. Quelle est la probabilité que le numéro gagnant soit formé de six chiffres différents ?

### Q.2.46

Un point est choisi au hasard sur une règle de 30 cm. Quelle est la probabilité que ce point soit situé à moins de 5 cm du centre de la règle ?

### Q.2.47

Dans un groupe composé de 16 garçons et 18 filles, on choisit deux personnes au hasard. Quelle est la probabilité que :

- a) les deux personnes choisies soient des garçons ?
- b) les deux personnes choisies soient des filles ?
- c) un garçon et une fille soient choisis ?

### Q.2.48

Dans un bureau de tourisme, il y a 40 employés, dont 18 parlent anglais, 22 parlent français, 17 parlent espagnol, 9 parlent anglais et français, 6 parlent anglais et espagnol, 5 parlent français et espagnol et 2 parlent les trois langues. Si on demande une information à un employé choisi au hasard, quelle est la probabilité de cet employé :

- a) parle anglais ou espagnol ?
- b) ne parle que l'espagnol ?
- c) ne parle que l'anglais ?
- d) parle français ou espagnol ?
- e) parle une des trois langues ?

### Q.2.49

Vous avez dans votre poche trois pièces de 2\$ et quatre pièces de 1\$. Vous en choisissez trois au hasard. Quelle est la probabilité que vous ayez alors 5\$ ou plus en main ?

### Q.2.50

On tire, successivement et sans remise, 2 cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir 2 figures (valets, dames ou rois) ?

### Q.2.51

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer successivement deux dés, trouver la probabilité que :

- a) la somme des dés soit paire, sachant que le premier dé indique un 4.
- b) la somme des dés soit paire, sachant que le premier dé indique un nombre pair.
- c) la somme des dés soit 10, sachant que le premier dé indique un nombre pair.
- d) la somme des dés soit 10, sachant que le premier dé indique un nombre impair.
- e) la somme des dés soit 10, sachant que le premier dé indique un 3.

### Q.2.52

Une urne contient 5 boules : 1, 2, 3, 4 et 5. On veut former un nombre de deux chiffres en pigeant successivement et sans remise deux boules. Soient les événements suivants : A : le produit est impair ; B : La somme des chiffres donne six ; C : Le 1er chiffre est plus grand que le 2e ; D : Le nombre formé est pair.

- a) décrire en extension les événements A, B, C et D.
- b) Évaluer  $P(A \cup B)$ .
- c) Évaluer  $P(A|C)$ .
- d) Évaluer  $P(C \cap B)$ .
- e) Évaluer  $P(B^c)$ .
- f) Évaluer  $P(A \cap D)$ .
- g) Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier.

### Q.2.53

Dans un tirage organisé au bureau, Monique a acheté 10 des 100 billets vendus. S'il y a quatre prix à gagner, quelle est la probabilité qu'elle gagne au moins un prix ?

### Q.2.54

On lance à trois reprises une pièce de monnaie bien équilibrée. On considère les événements suivants :

- A : le premier lancer donne pile
- B : le troisième lancer donne face
- C : au moins deux lancers consécutifs donnent face.

Les événements suivants sont-ils indépendants ?

- a) A et B
- b) B et C
- c) A et C
- d) A, B et C

### Q.2.55

On a trois boîtes contenant des tablettes de chocolat, des sacs de noix et des sacs de croustilles. Le contenu des boîtes est décrit dans le tableau suivant :

	Chocolat	Noix	Croustilles
Boîte 1	1	3	4
Boîte 2	3	2	5
Boîte 3	2	2	3

Louis est invité à choisir une boîte au hasard et dans cette boîte, une friandise.

- a) Quelle est la probabilité qu'il choisisse un sac de noix ?
- b) S'il a choisi une tablette de chocolat, quelle est la probabilité que ce soit dans la boîte 1 ?

### Q.2.56

En médecine, la sensibilité d'un test représente sa capacité de donner un résultat positif en présence de la maladie chez un patient. Par exemple, une sensibilité de 90% signifie que 90% des personnes malades sont diagnostiquées correctement tandis que 10% d'entre elles seront déclarées à tort exemptes de la maladie. La spécificité d'un test représente plutôt sa capacité de donner un résultat négatif lors de l'absence de la maladie chez un patient. Par exemple, une spécificité de 95% signifie que 95% des personnes en santé seront diagnostiquées comme tel tandis que 5% d'entre elles seront déclarées à tort comme étant malades.

Supposons qu'un test permettant de déceler un certain type de cancer ait une sensibilité de 90% et une spécificité de 98%. Supposons également que 5% des habitants d'une ville quelconque sont atteints par cette maladie. On sélectionne aléatoirement une personne dans cette ville et on lui fait passer le test.

- a) Représenter ces probabilités à l'aide d'un arbre, d'un tableau ou d'un diagramme de Venn.
- b) Le résultat du test est positif, on déclare la personne atteinte de la maladie. Quelle est la probabilité que cette personne soit réellement atteinte de la maladie ?
- c) Le résultat du test est négatif, on déclare la personne en santé. Quelle est la probabilité que cette personne soit malgré tout atteinte de la maladie ?

**Q.2.57**

Il y a deux urnes sur une table : l'urne A contient 3 boules rouges et 7 blanches ; l'urne B contient 4 rouges et 5 blanches. Vous pigez une boule de l'urne A et, sans la regarder, vous la déposez dans l'urne B. Vous pigez ensuite une boule de l'urne B, quelle est la probabilité que :

- a) Les deux boules pigées soient blanches ?
- b) La deuxième boule pigée soit blanche ?
- c) La première soit rouge si la deuxième est rouge ?

**Q.2.58**

Jean lance deux dés : S'il obtient un six, alors il choisit au hasard un prix dans le lot # 1 ; s'il obtient 2 six, il en choisit un dans le lot # 2 ; sinon, il choisit dans le lot # 3. Le lot # 1 contient 3 voyages, 6 bons d'achat et une automobile ; le lot # 2 contient 5 voyages, 3 bons d'achat et 2 automobiles ; le lot # 3 contient un voyage et 9 bons d'achat. Quelle est la probabilité que :

- a) Jean gagne l'automobile ?
- b) Jean gagne un voyage ?
- c) Jean n'ait pas obtenu de six sachant qu'il a gagné un bon d'achat ?

**Q.2.59**

Soit A et B deux événements tels que  $P(A) = 0,3$  et  $P(B) = 0,6$ . Trouver  $P(A \cup B)$  si :

- a) Les événements A et B sont mutuellement exclusifs ?
- b) Les événements A et B sont indépendants ?