3.1 VARIABLE ALÉATOIRE

(Discrète)

cours 11

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Variables aléatoires

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Variables aléatoires
- ✓ Fonctions de répartitions

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.

$$\boxed{\Omega} \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) \xrightarrow{\mathbb{P}} [0,1]$$

$$\boxed{A} \in \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(A)$$

$\boxed{X}$: variable aléatoire

$$\omega : \longmapsto X(\omega)$$

[signification interprétation]

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

Lors d’une expérience aléatoire, il arrive souvent qu’on s’intéresse plus à une fonction du résultat qu’au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

- La somme des trois dés.

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

- La somme des trois dés.
- Le nombre de fois que le 4 sort.

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

- La somme des trois dés.
- Le nombre de fois que le 4 sort.
- Le plus grand des trois.

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

- La somme des trois dés.
- Le nombre de fois que le 4 sort.
- Le plus grand des trois.
- etc.

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction (réelle)

$$X : \overset{\Omega}{S} \longmapsto \mathbb{R} \; ; \; \omega \mapsto X(\omega)$$

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : S \longmapsto \mathbb{R}$$

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : \overset{\Omega}{S} \longmapsto \mathbb{R}$$

Ω : l'univers.

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

On nomme l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire l'**ensemble de réalisation**. $(X(\Omega))$ $(X(S))$

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : \overset{\Omega}{\underline{S}} \longmapsto \mathbb{R}$$

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

On nomme l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire l'**ensemble de réalisation**.

$$X(\Omega) = \mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R}$$

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : S \longmapsto \mathbb{R}$$

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

On nomme l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire l'**ensemble de réalisation**.

image de Ω par X

$$X(\Omega) = \mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R} = \text{les valeurs que peut prendre } X$$

Lorsque l'ensemble de réalisation est fini ou dénombrable, on dit que la **variable aléatoire** est **discrète**.

ex : on lance deux dés ; on note X := la somme des valeurs obtenues

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (ensemble fini)

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : S \longmapsto \mathbb{R}$$

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

On nomme l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire l'**ensemble de réalisation**.

$$\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R}$$

Lorsque l'ensemble de réalisation est fini ou dénombrable, on dit que la **variable aléatoire** est **discrète**.

Lorsque l'ensemble de réalisation est non dénombrable, on dit que la **variable aléatoire** est **continue**.

V : le volume de pluie $V(\Omega)$ = Intervalle

Prenons une variable aléatoire discrète dont l’ensemble de réalisation est fini

Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R}$$

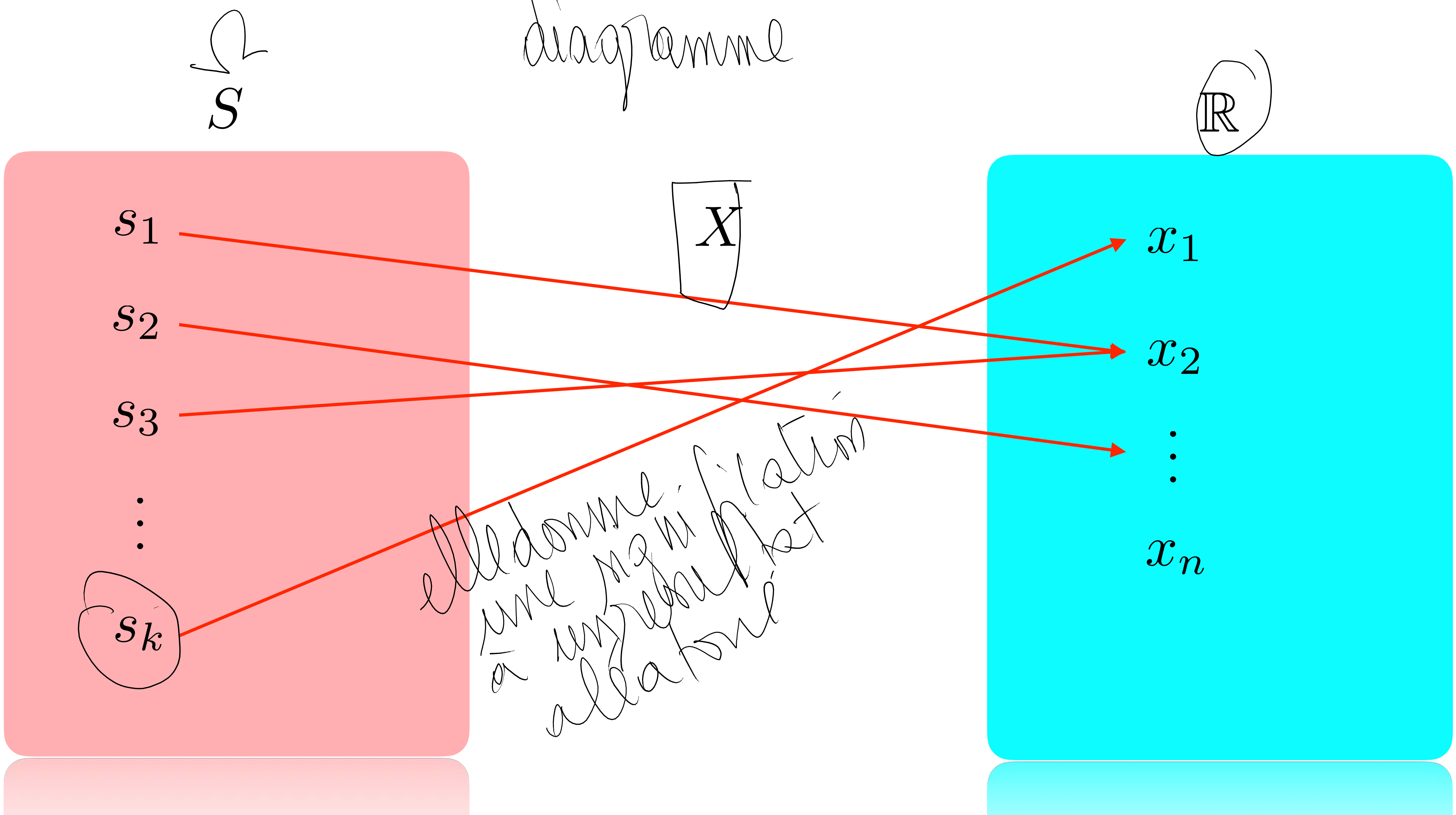
Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad X(\Omega) = \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

diagramme

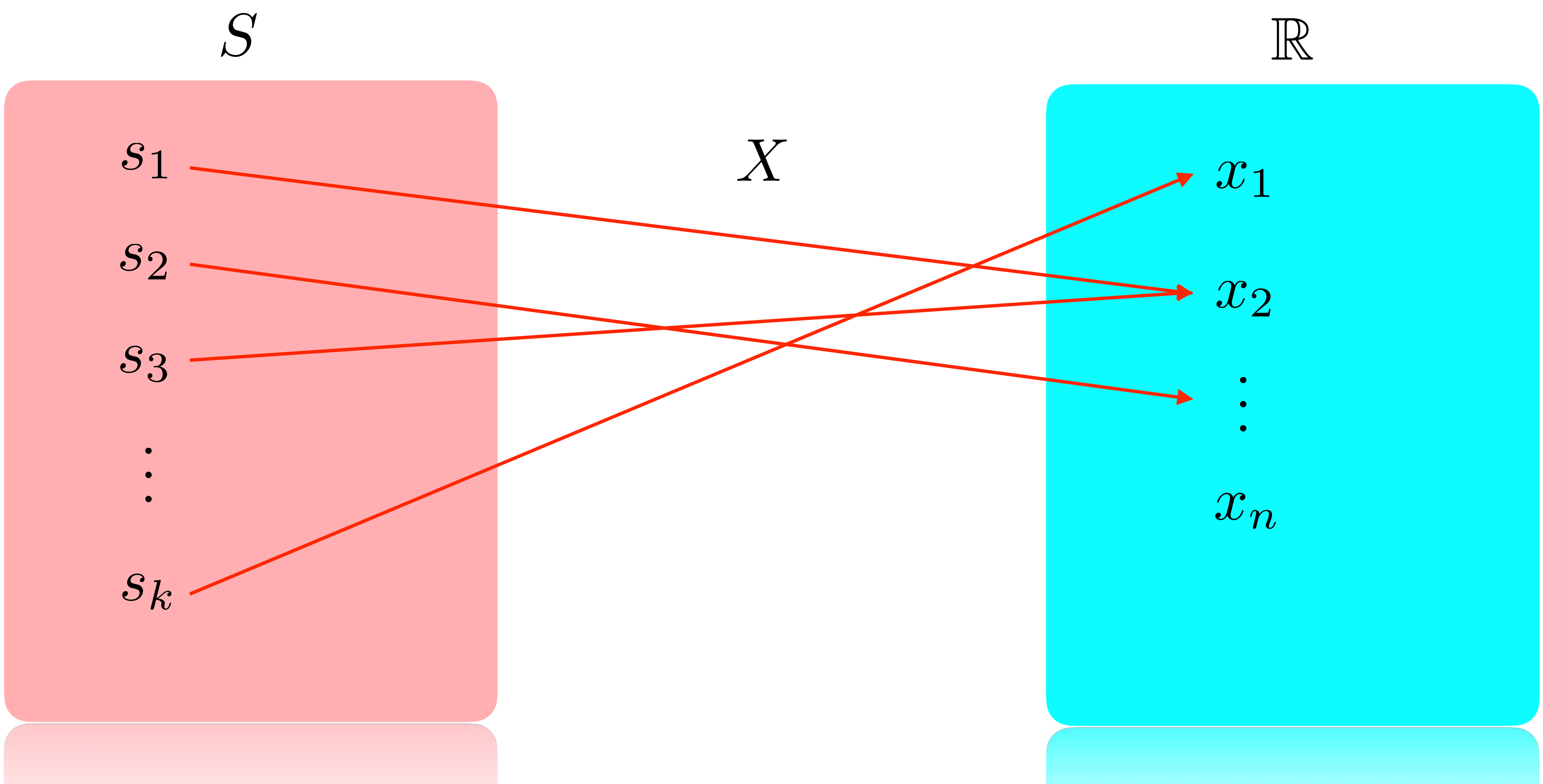


elle donne une signification à un résultat aléatoire

Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

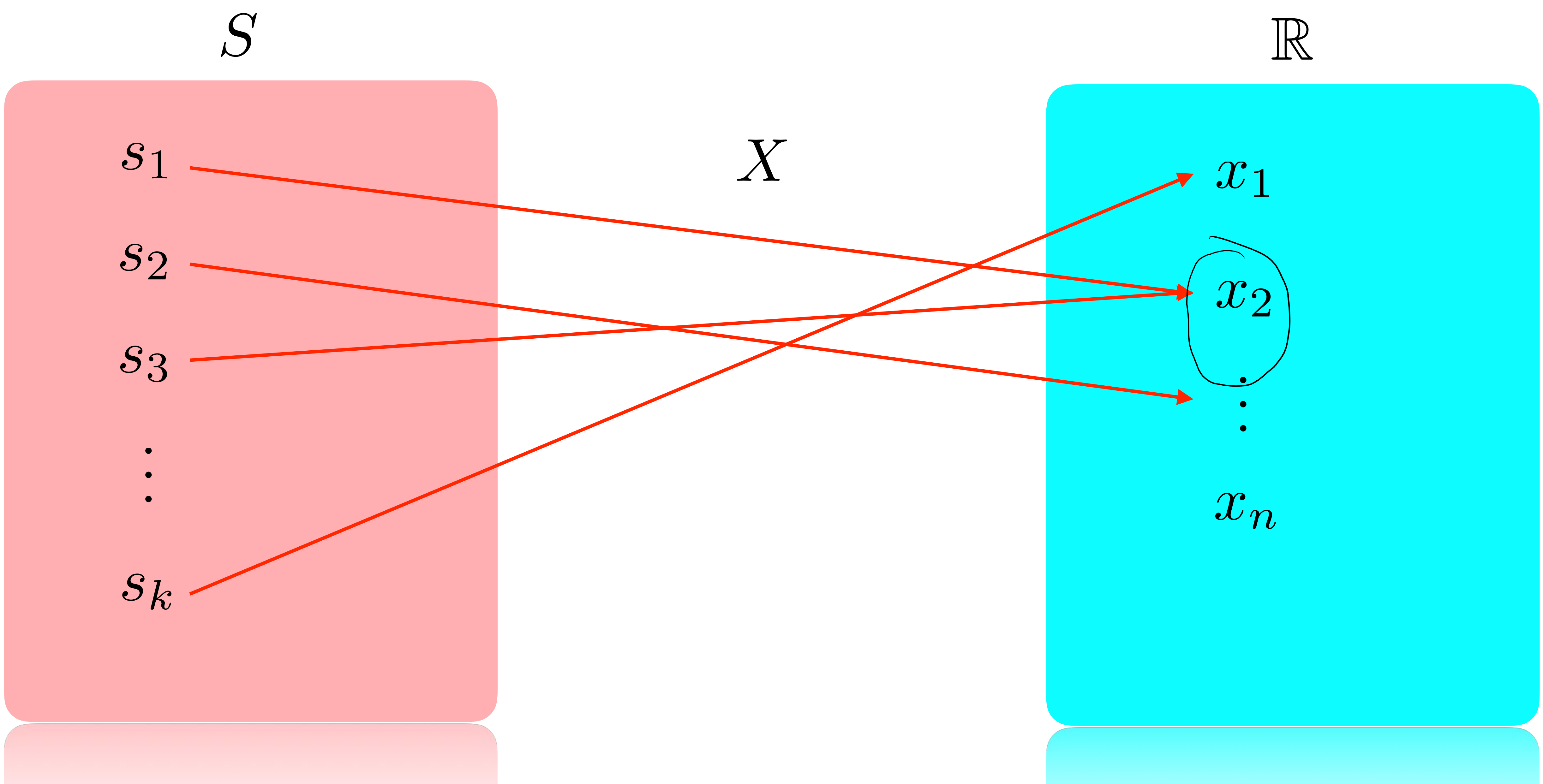
$$X = x_2$$



Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$$

$$X = x_2 \qquad X^{-1}(x_2) \subset S$$



Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

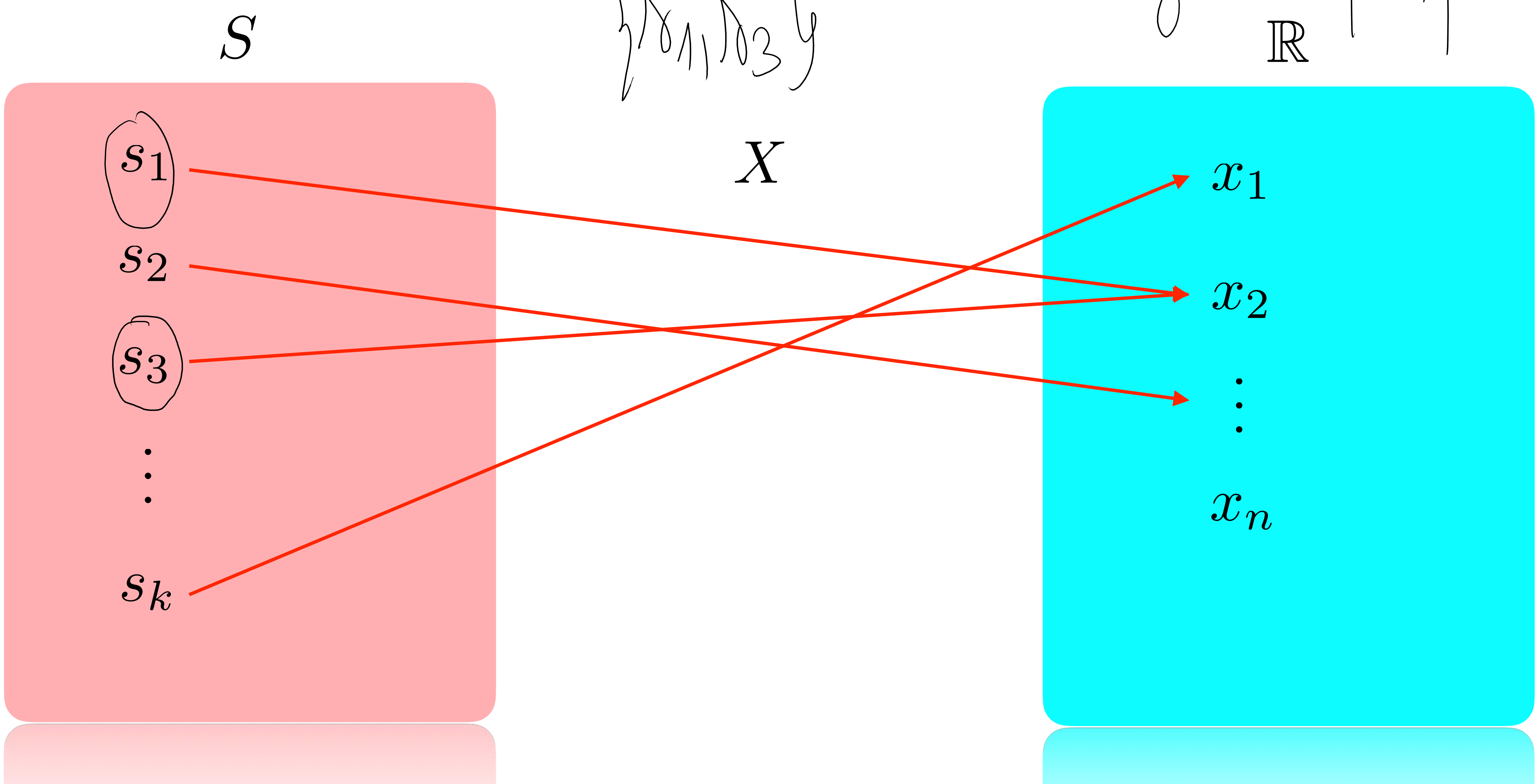
$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

$$X = x_2 \qquad X^{-1}(x_2) \subset S$$

la préimage de x_2

↳ l'image réciproque

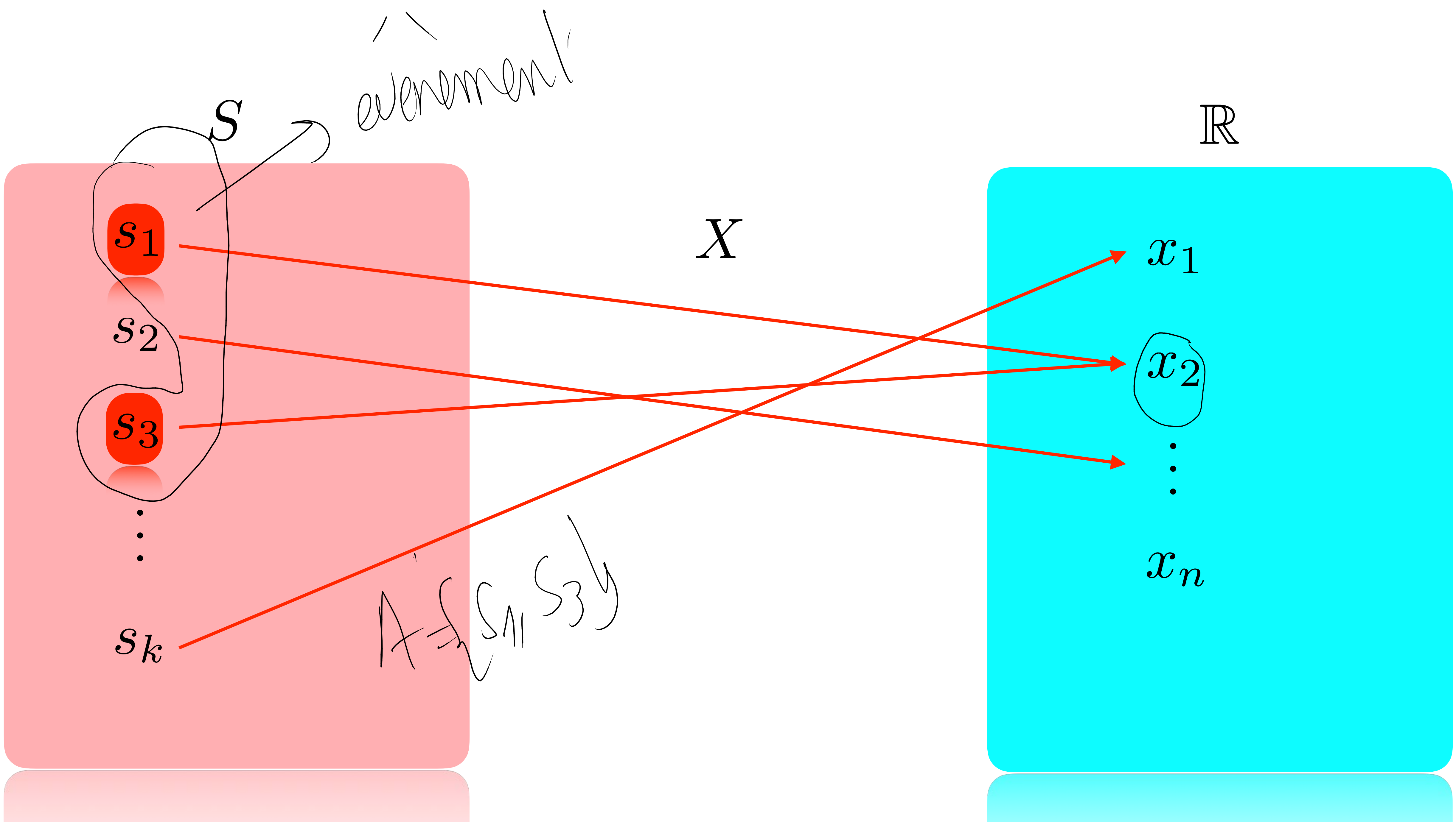
$$X^{-1}(x_2) = \{s_1, s_3\}$$



Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$X : S \longmapsto \mathbb{R}$ $\qquad\qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$

$X = x_2$ $\qquad X^{-1}(x_2) \subset S$ $\qquad$ la préimage de x_2



Donc à une réalisation x_i on y peut associer

Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i$$

Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i \qquad\qquad X^{-1}(x_i) \subset S$$

Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i \qquad\qquad X^{-1}(x_i) \subset S$$

donc $X^{-1}(x_i)$ est un évènement A_i

Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i \qquad X^{-1}(x_i) \subset S$$

donc $X^{-1}(x_i)$ est un évènement A_i

Et on peut calculer sa probabilité

Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i \qquad\qquad X^{-1}(x_i) \subset S$$

Exp Aléatoire $\longrightarrow \Omega \xrightarrow{\ X\ } X(\Omega)$

donc $X^{-1}(x_i)$ est un évènement A_i

probabilité

Et on peut calculer sa probabilité

la probabilité d'obtenir une valeur de $X = x_i$

$$P(A_i) = P(X = x_i)$$

$$A_i = X^{-1}(\{x_i\})$$

$$\Omega = S \xrightarrow{\boxed{X}} \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "X"] & \mathbb{R} \arrow[dl, "X^{-1}"'] \\
\mathcal{P}(S) &
\end{tikzcd}$$

la tribu
engendrée
par X
(l'ensemble
des événements)

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "X"] & \mathbb{R} \arrow[dl, "X^{-1}"'] \\
\mathcal{P}(S) \arrow[r, "P"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

expérience aléatoire

Ω

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
S \arrow[r, "\boxed{X}"] & \mathbb{R} \arrow[dl, "X^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\
\boxed{\mathcal{P}(S)} \arrow[r, "P"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

X : variable aléatoire

f : la loi de probabilité de X

P_X

$X \to$ loi

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "X"] & \mathbb{R} \arrow[dl, "X^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{P}(S) \arrow[r, "P"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

Lorsqu'on détermine les valeurs $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$

$\Rightarrow$ on dit qu'on a déterminé la loi de X

$$p_i = f(x_i) = P(X = x_i)$$

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

on définit sa **fonction de probabilités**

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

on définit sa **fonction de probabilités**

$$R = \mathrm{Im}(X) \xrightarrow{\quad f \quad} [0, 1]$$

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

on définit sa **fonction de probabilités**

$$R = \mathrm{Im}(X) \xrightarrow{\quad f \quad} [0,1]$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

on définit sa **fonction de probabilités**

$$R = \mathrm{Im}(X) \xrightarrow{\quad f \quad} [0,1]$$

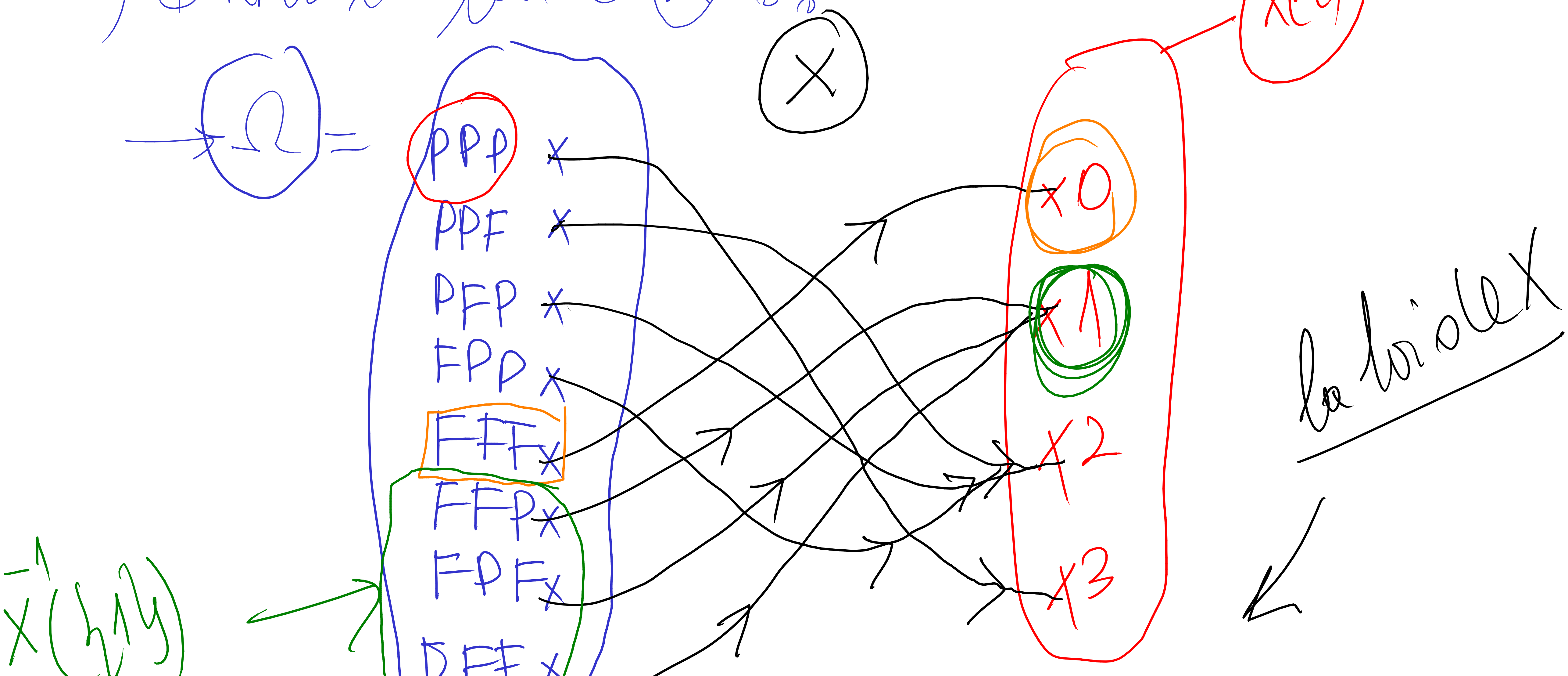
$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

on nomme aussi cette fonction la **loi de probabilités**
ou **distribution de probabilités** de la variable aléatoire X

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues. on notera X ce nombre

Q) Donner la loi de X ??



$i \in X(\Omega)$	$\boxed{0}$	1	2	3	T
$\mathbb{P}(X=i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

S

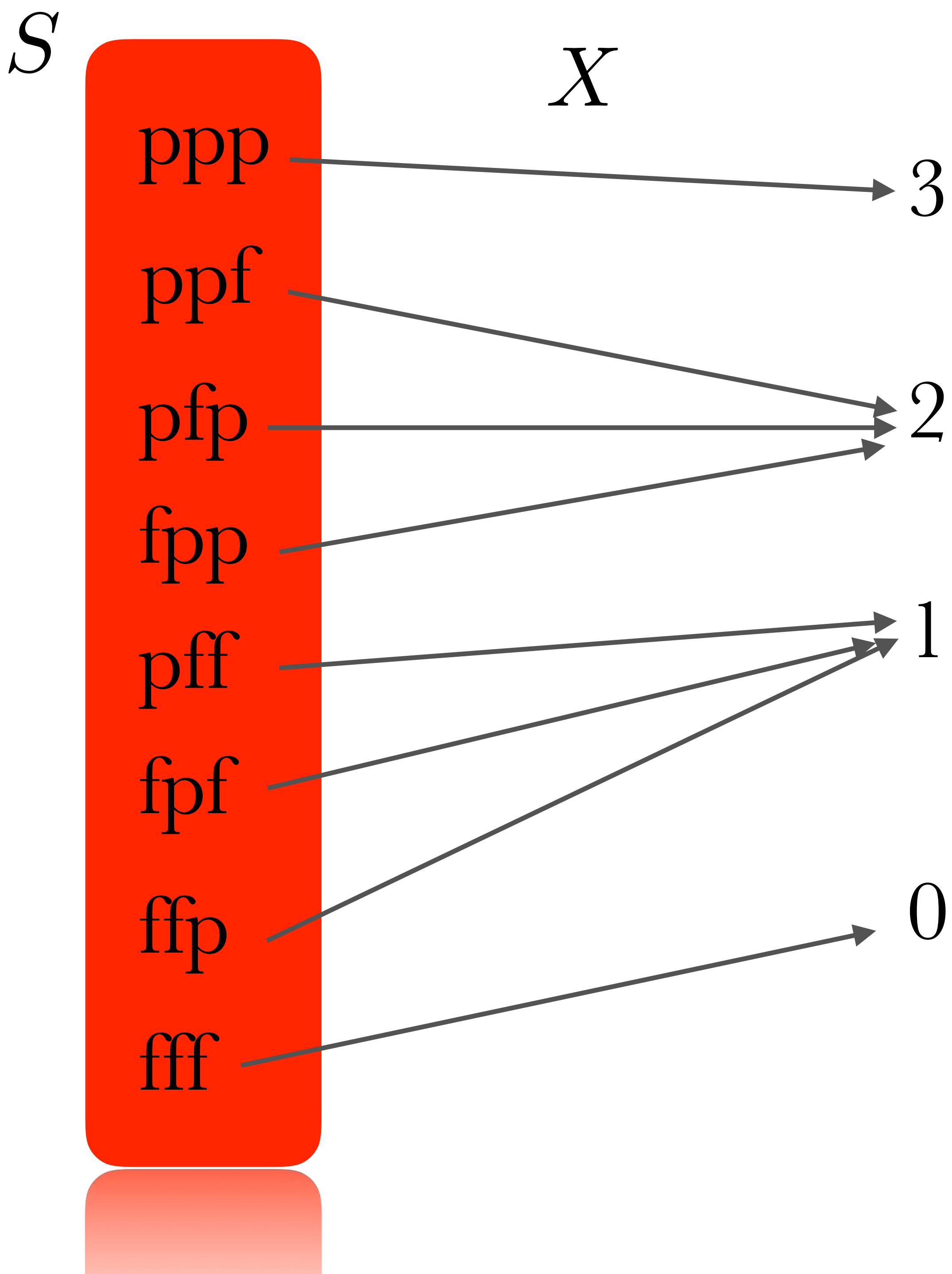
ppp
ppf
pfp
fpp
pff
fpf
ffp
fff

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

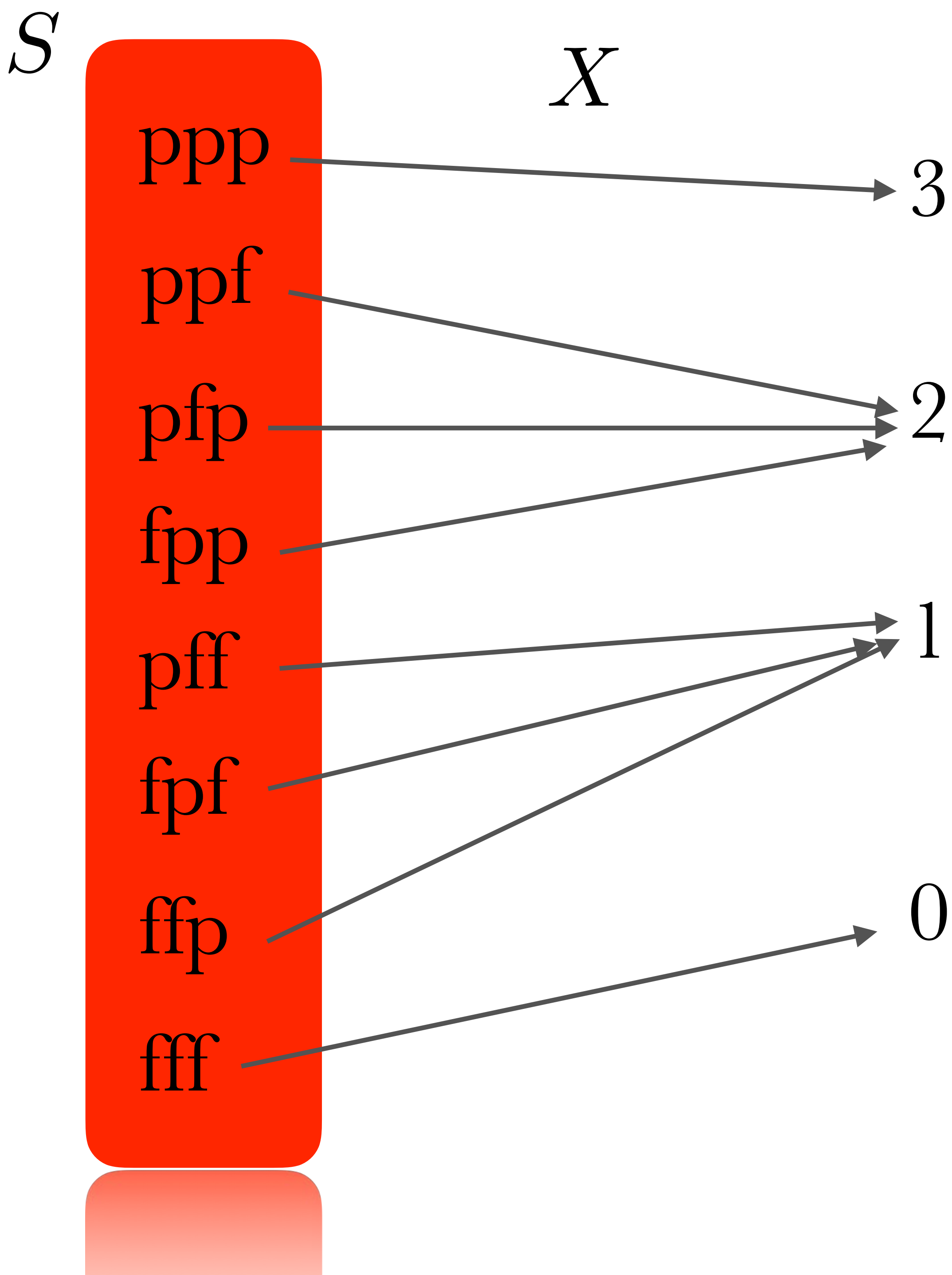
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

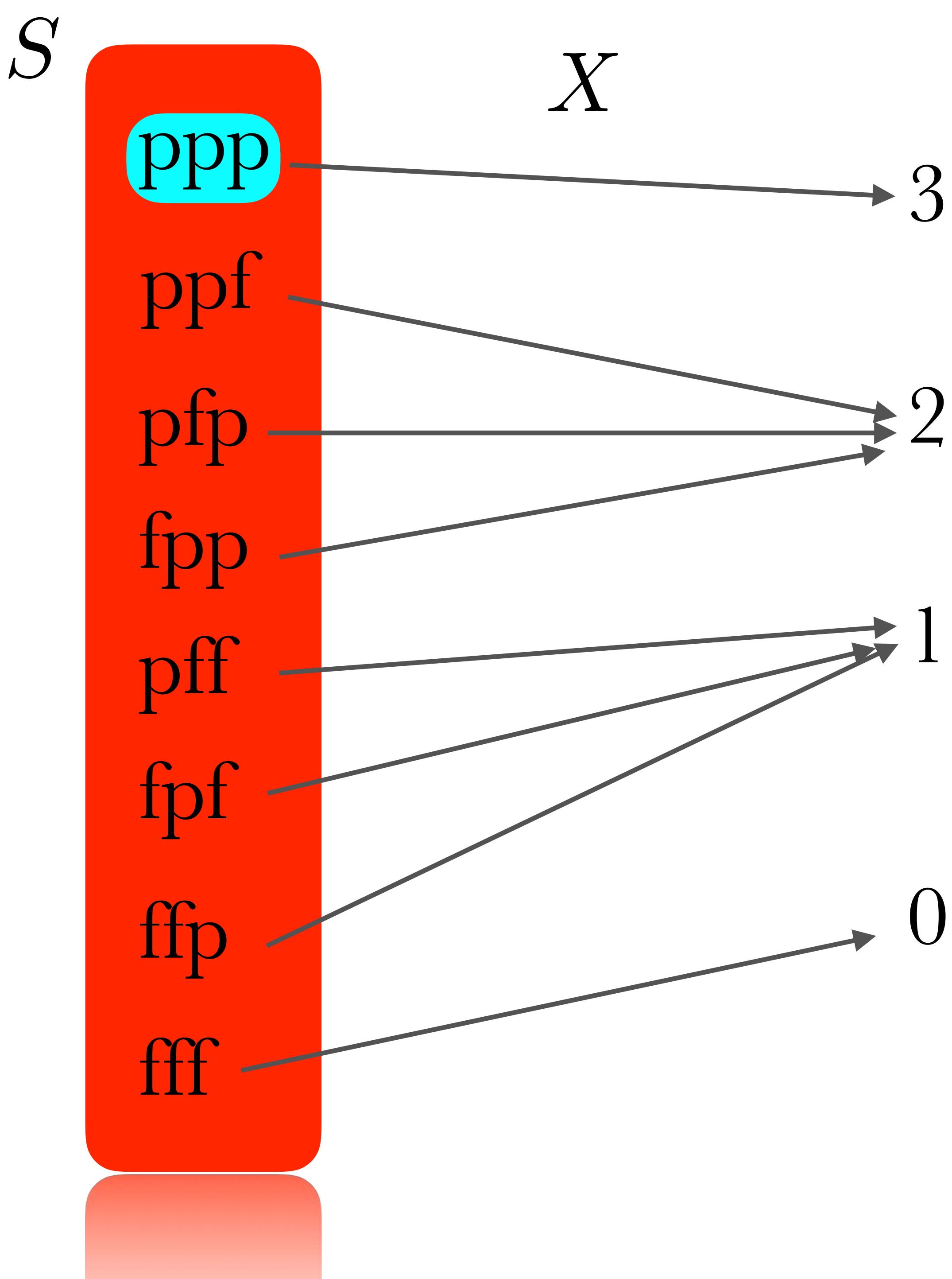


$f(3)$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



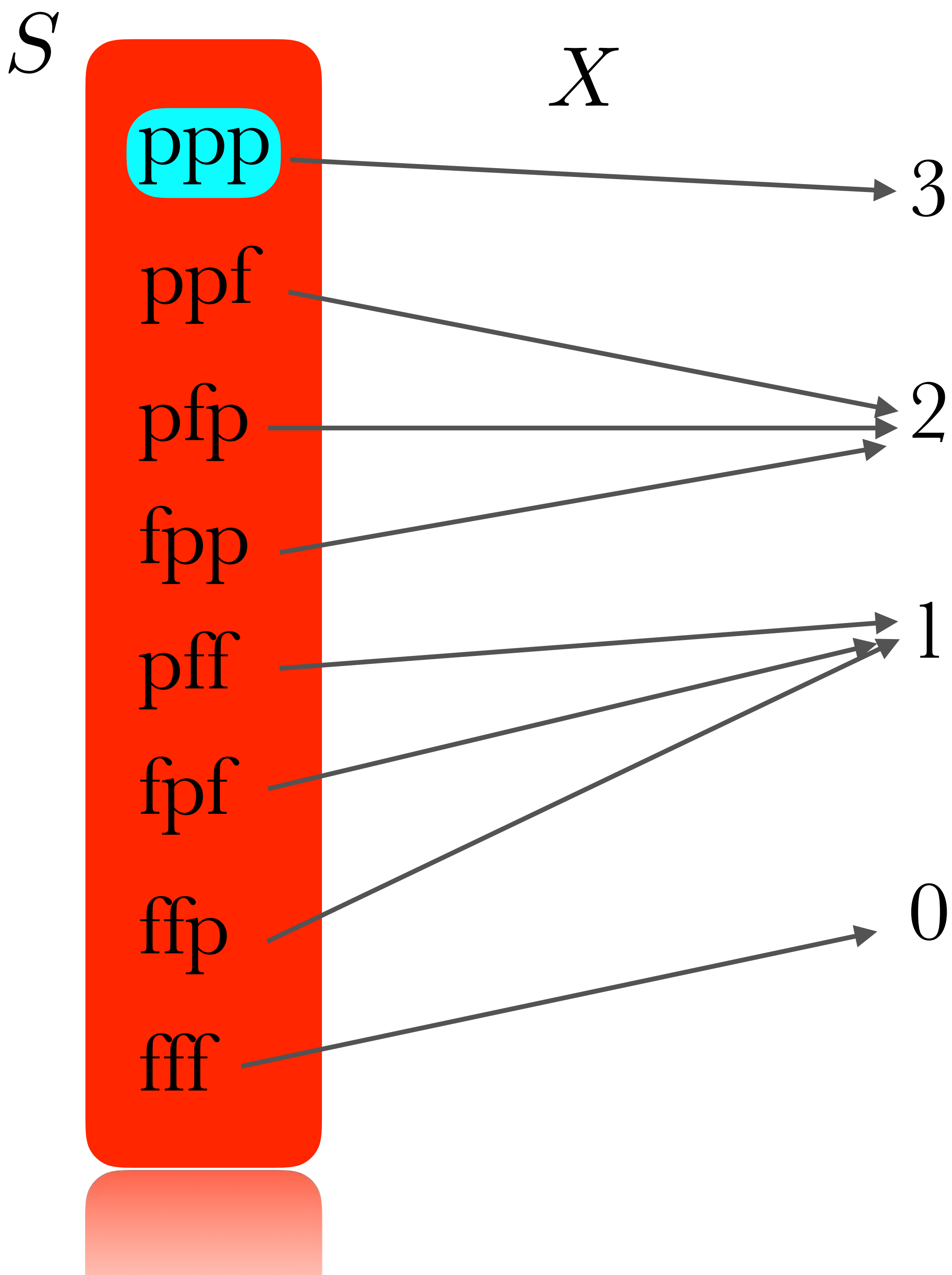
$f(3)$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



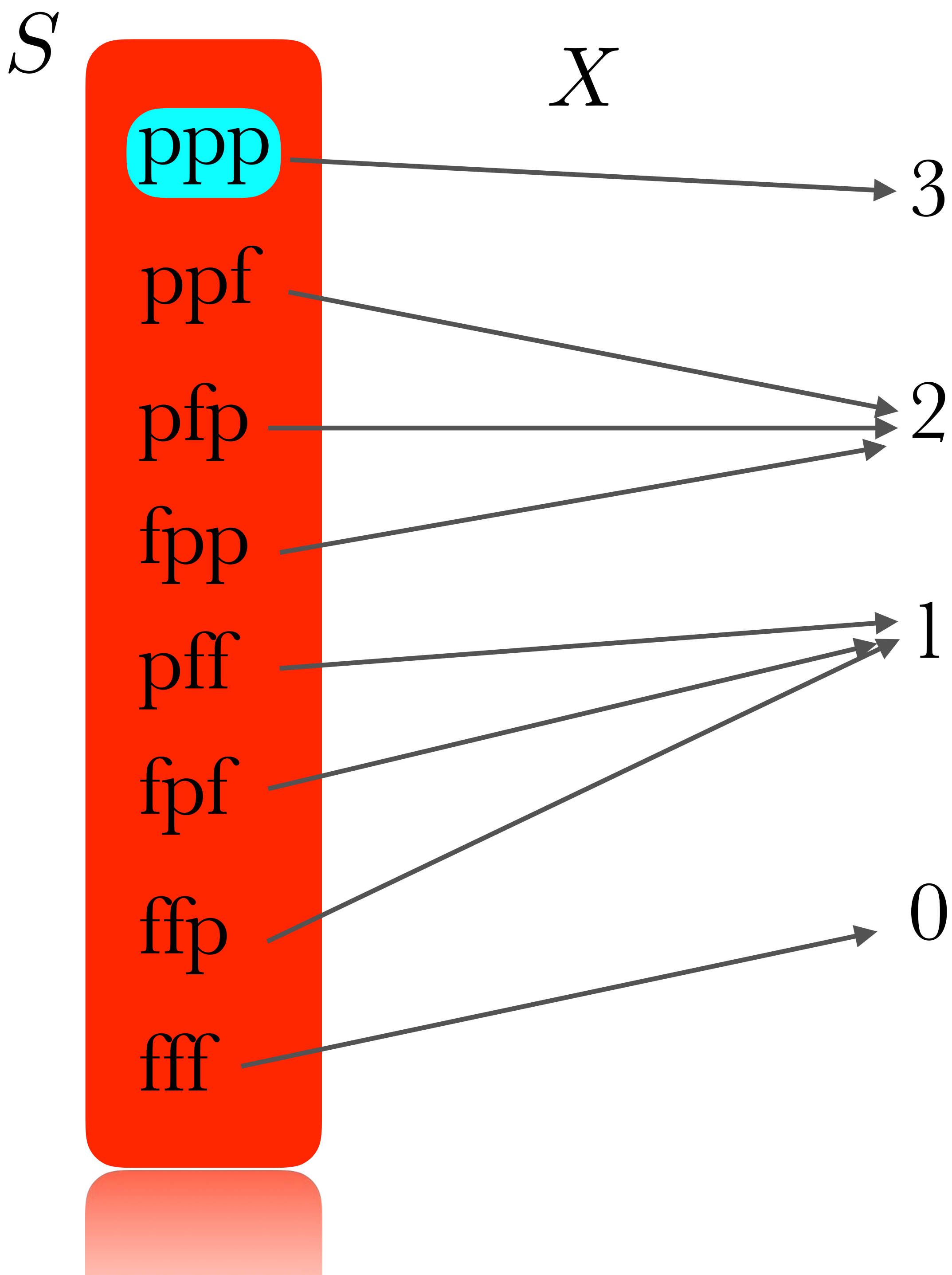
$$f(3) = P(X = 3)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



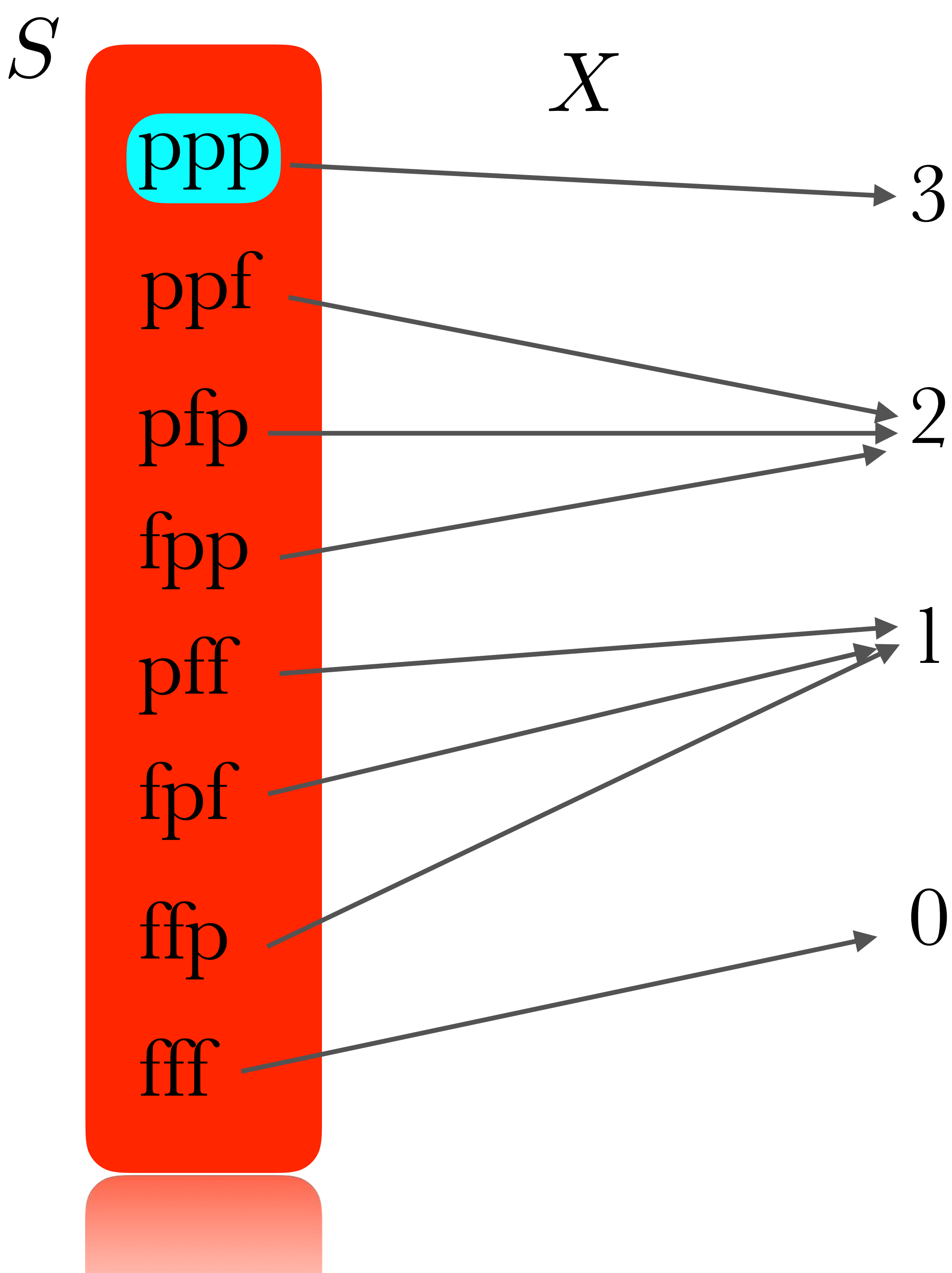
$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

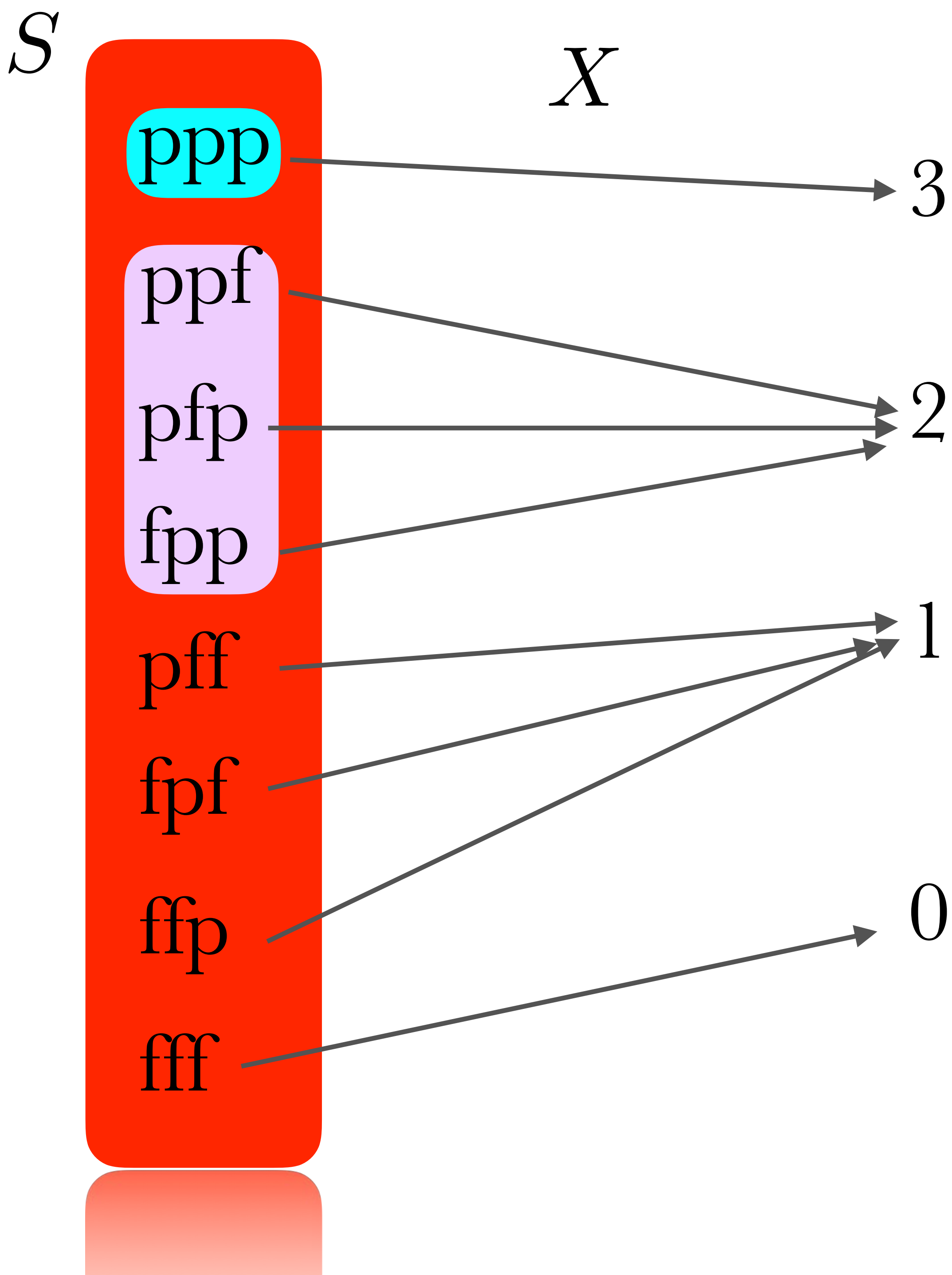
$$f(2)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

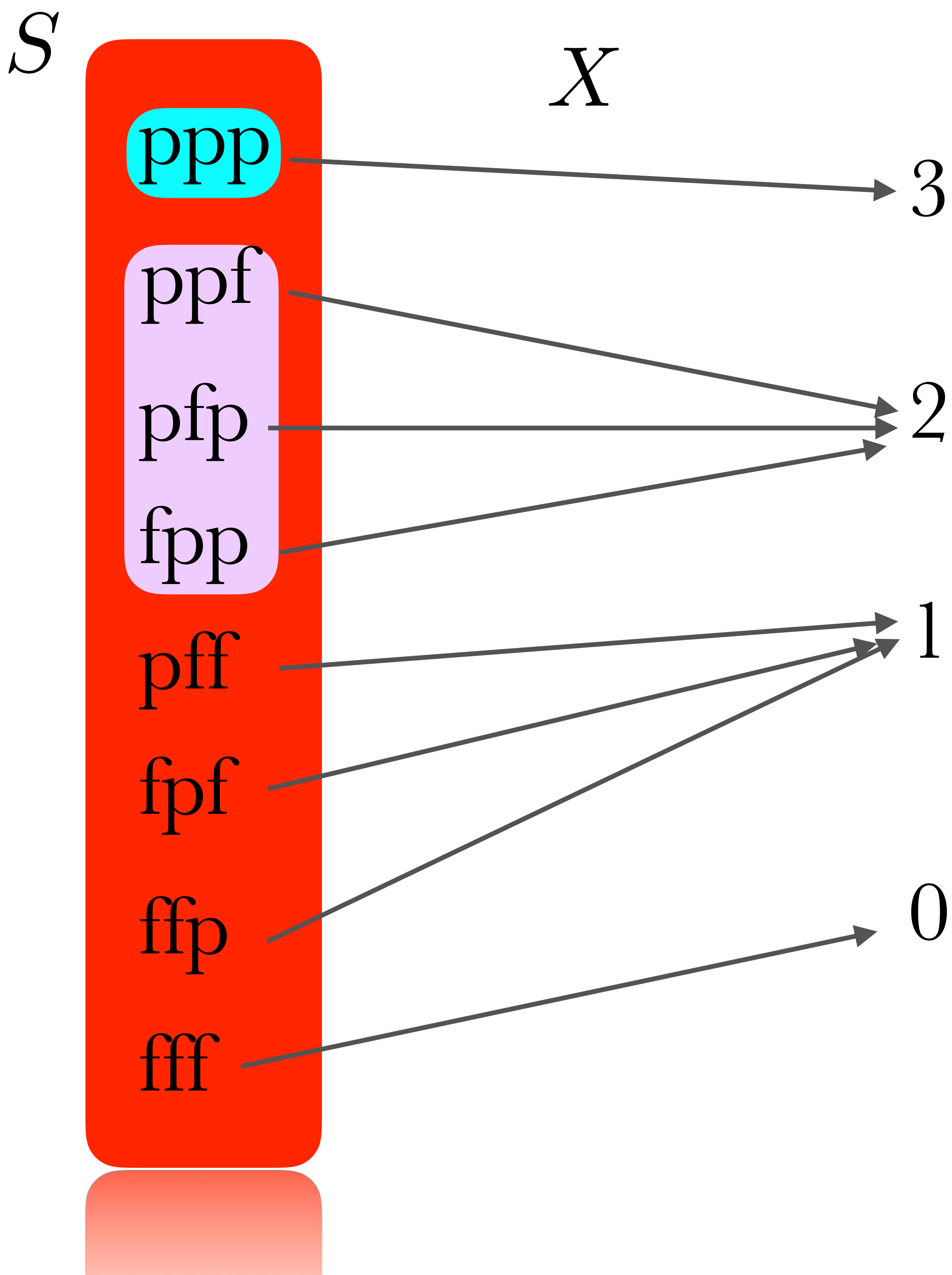
$$f(2)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

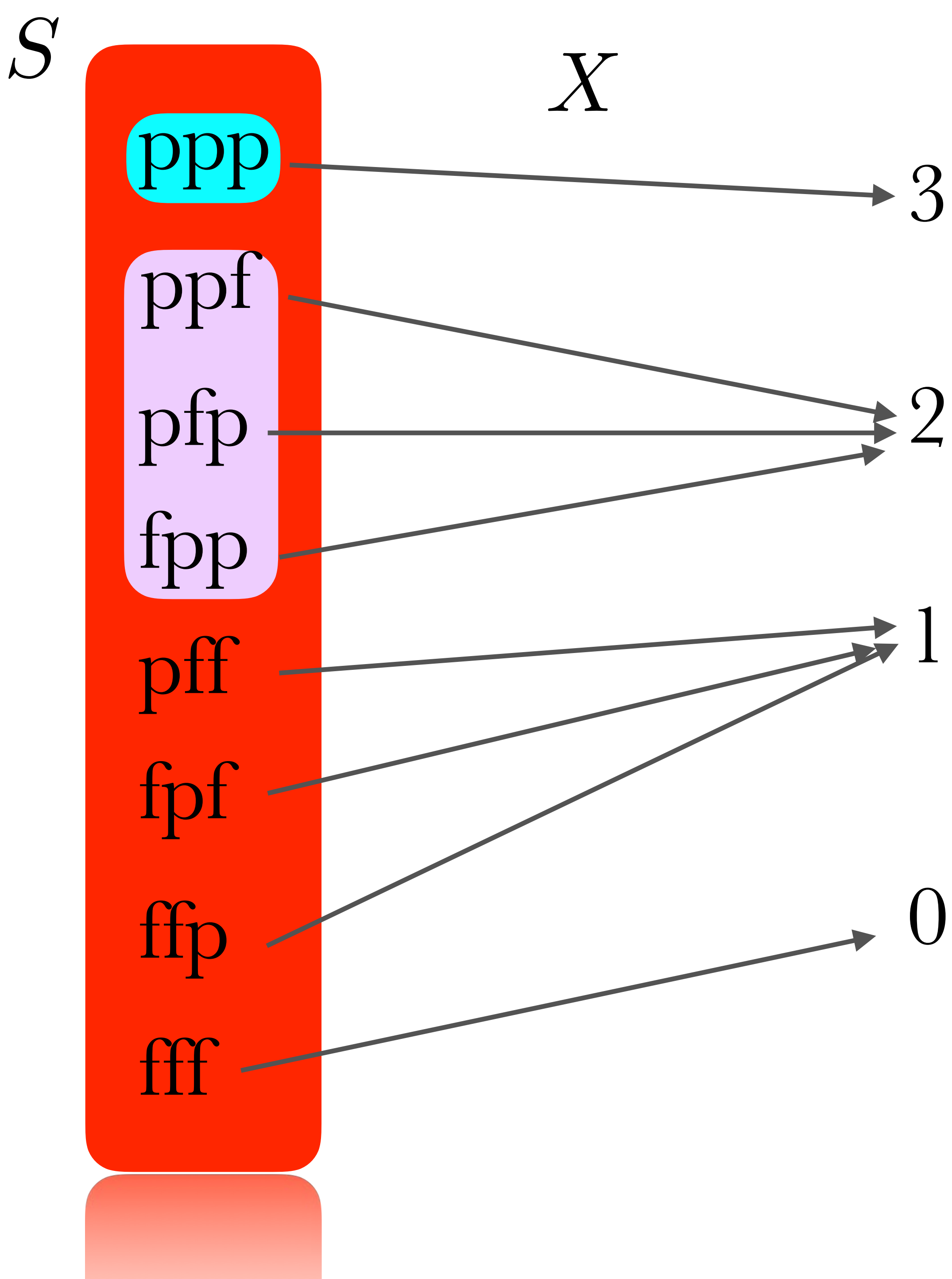
$$f(2) = P(X = 2)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

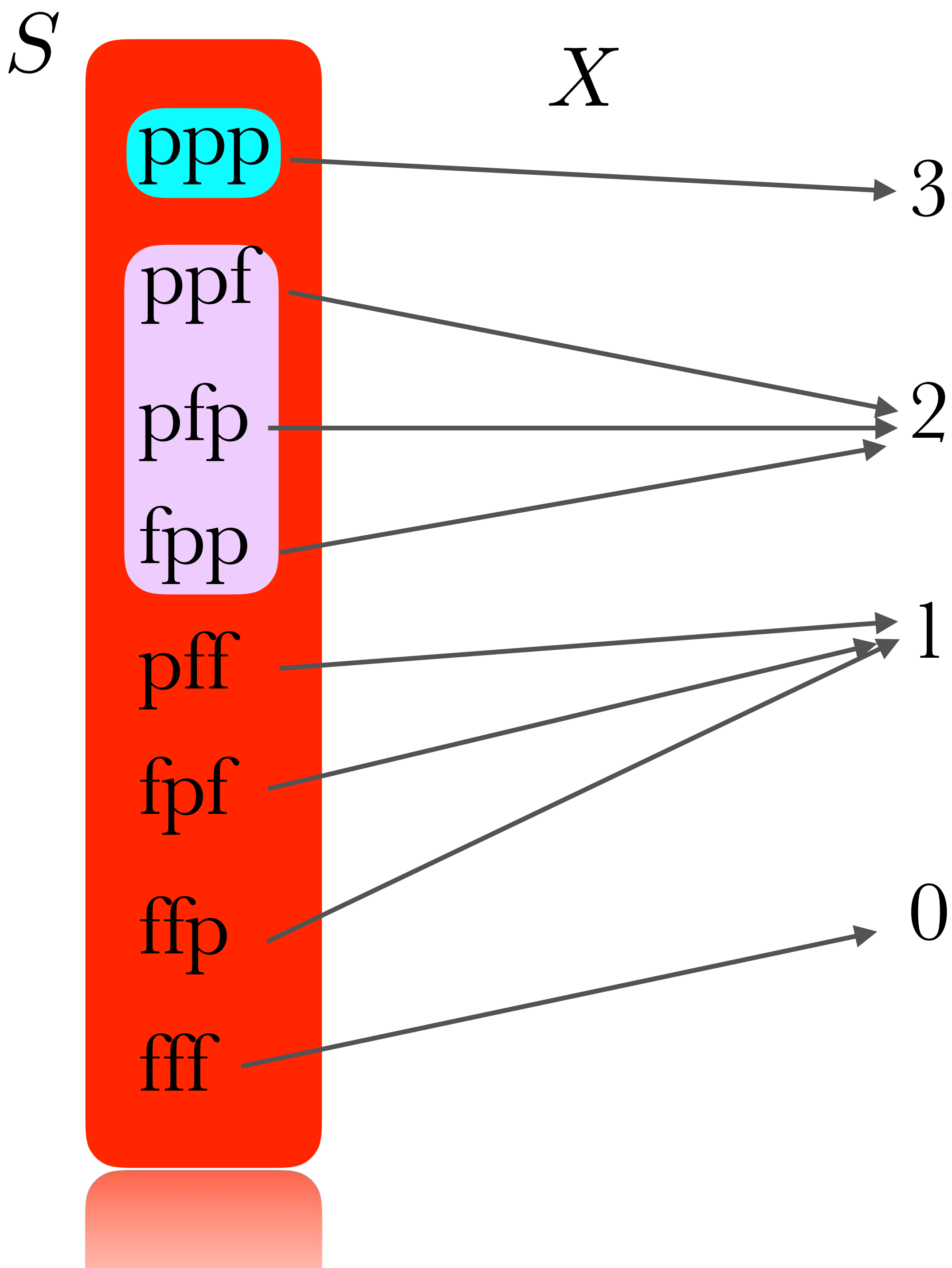
$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

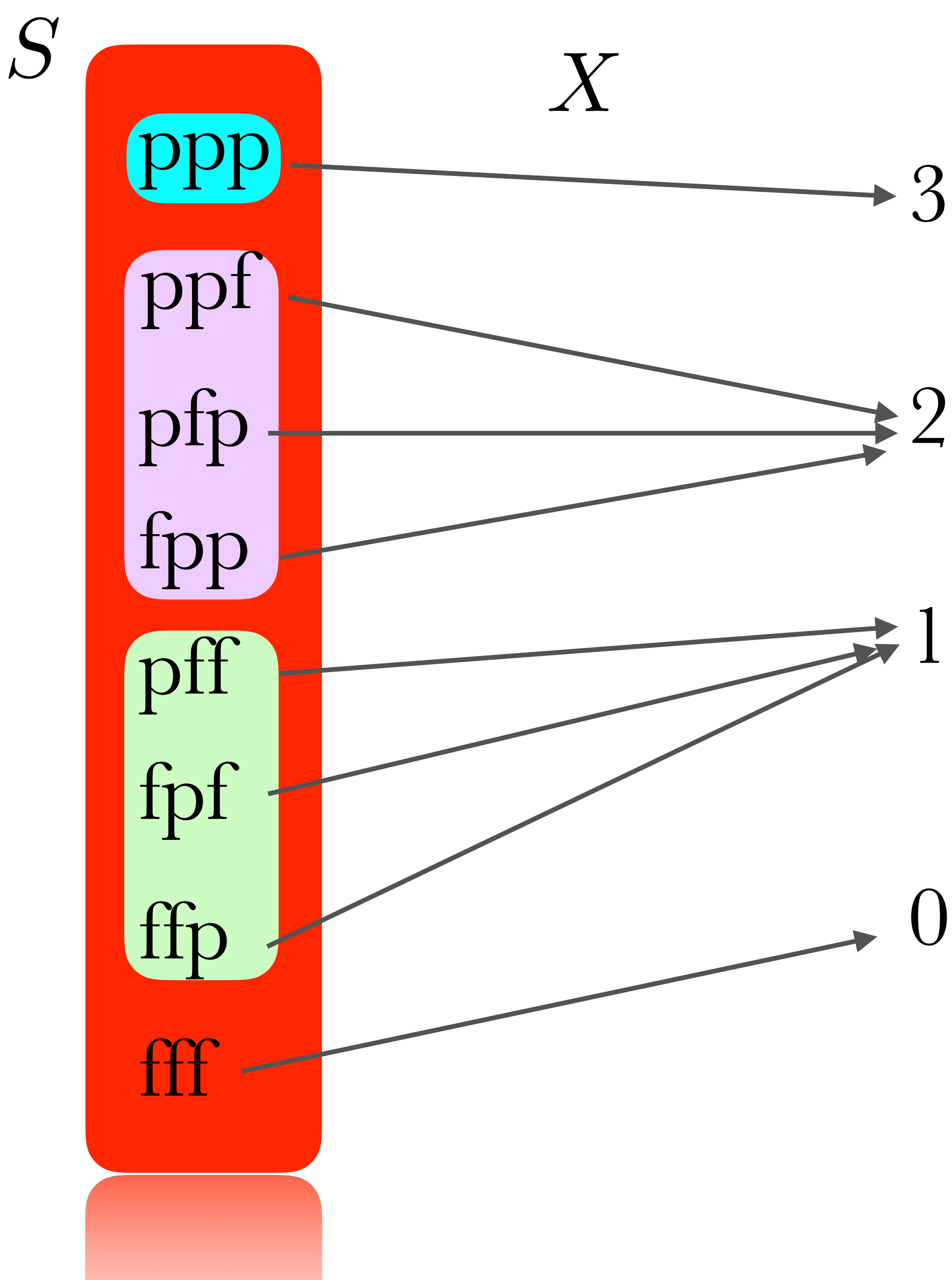
$$f(1)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

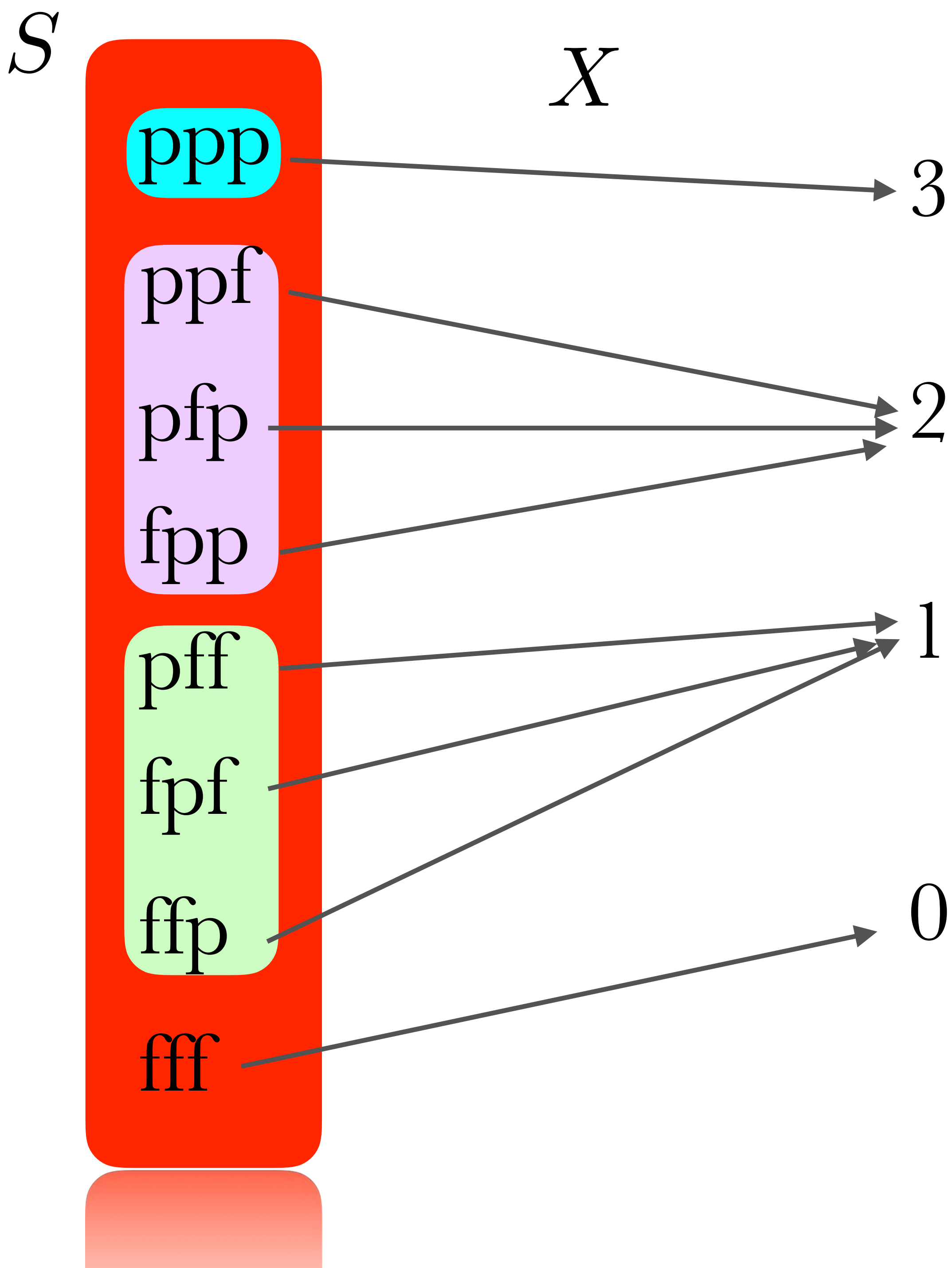
$$f(1)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

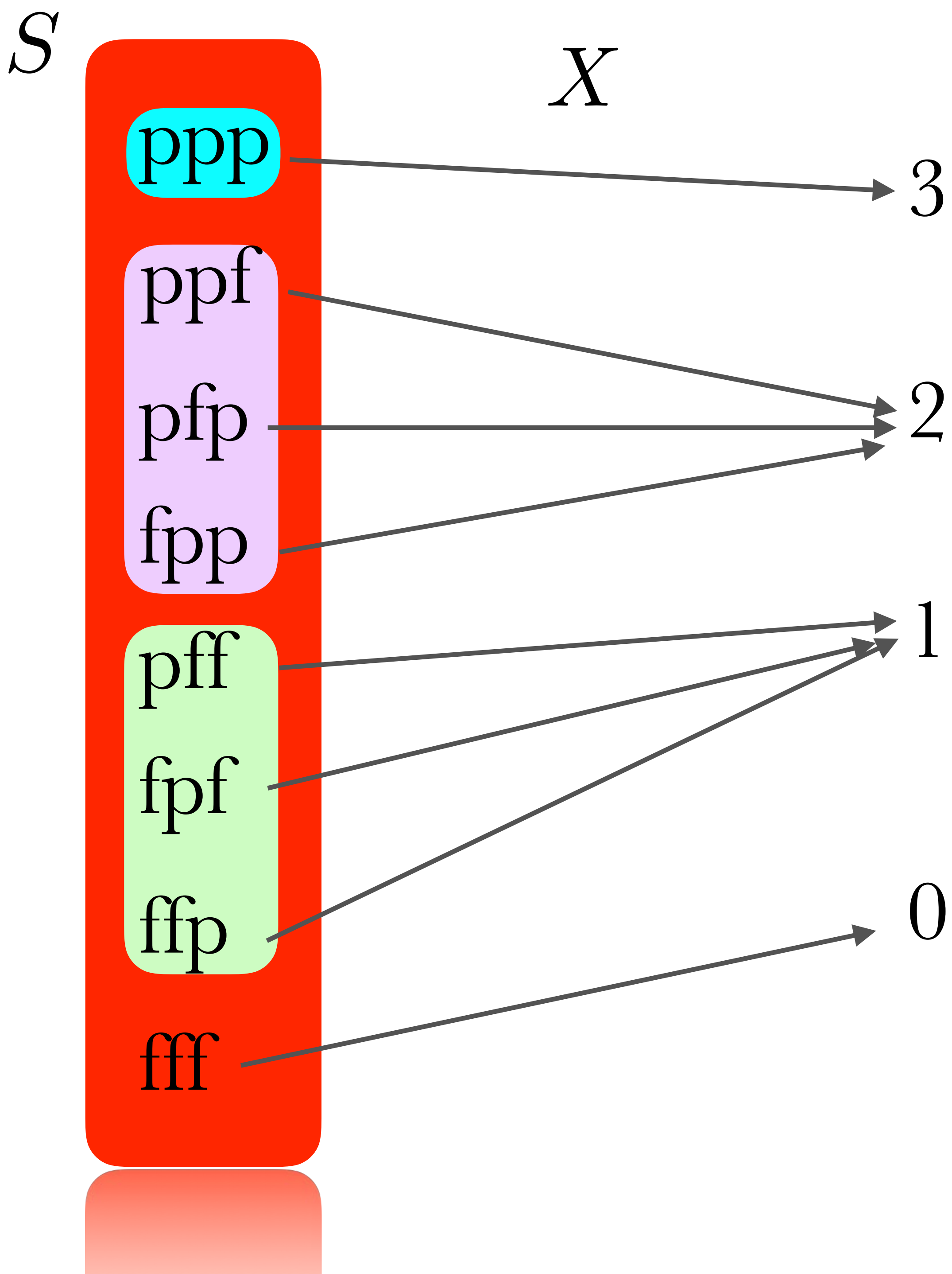
$$f(1) = P(X = 1)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

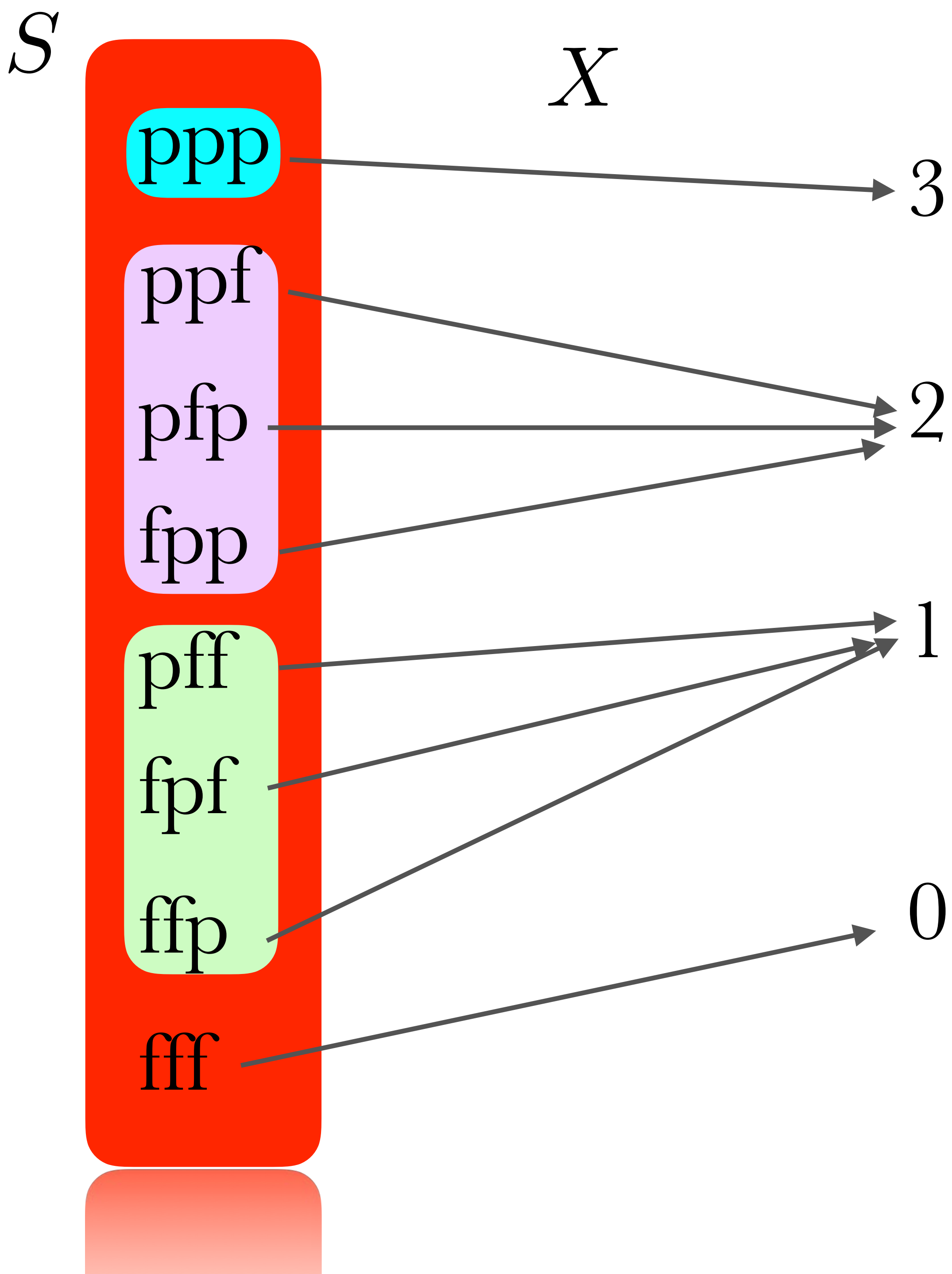
$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

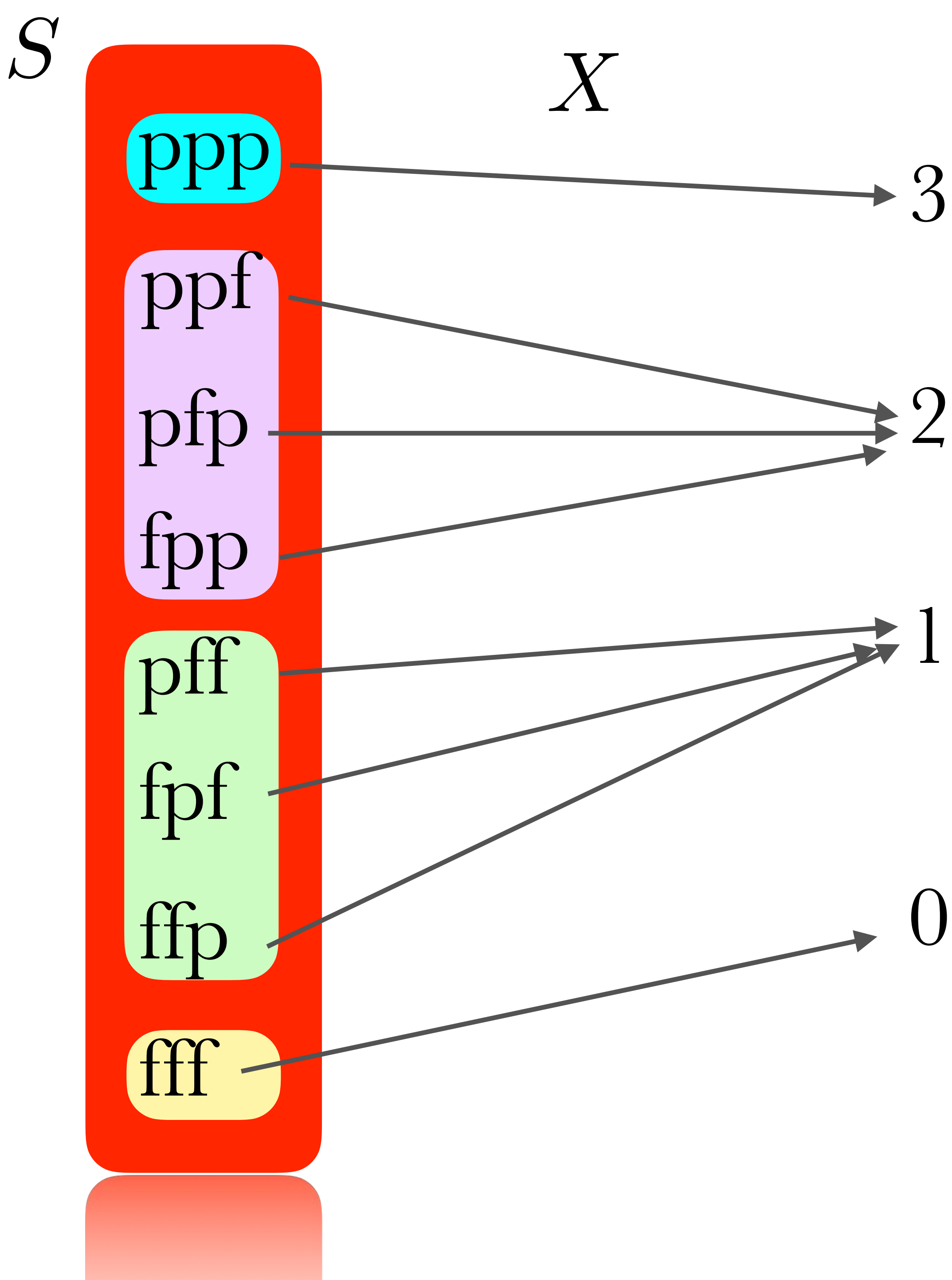
$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0)$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

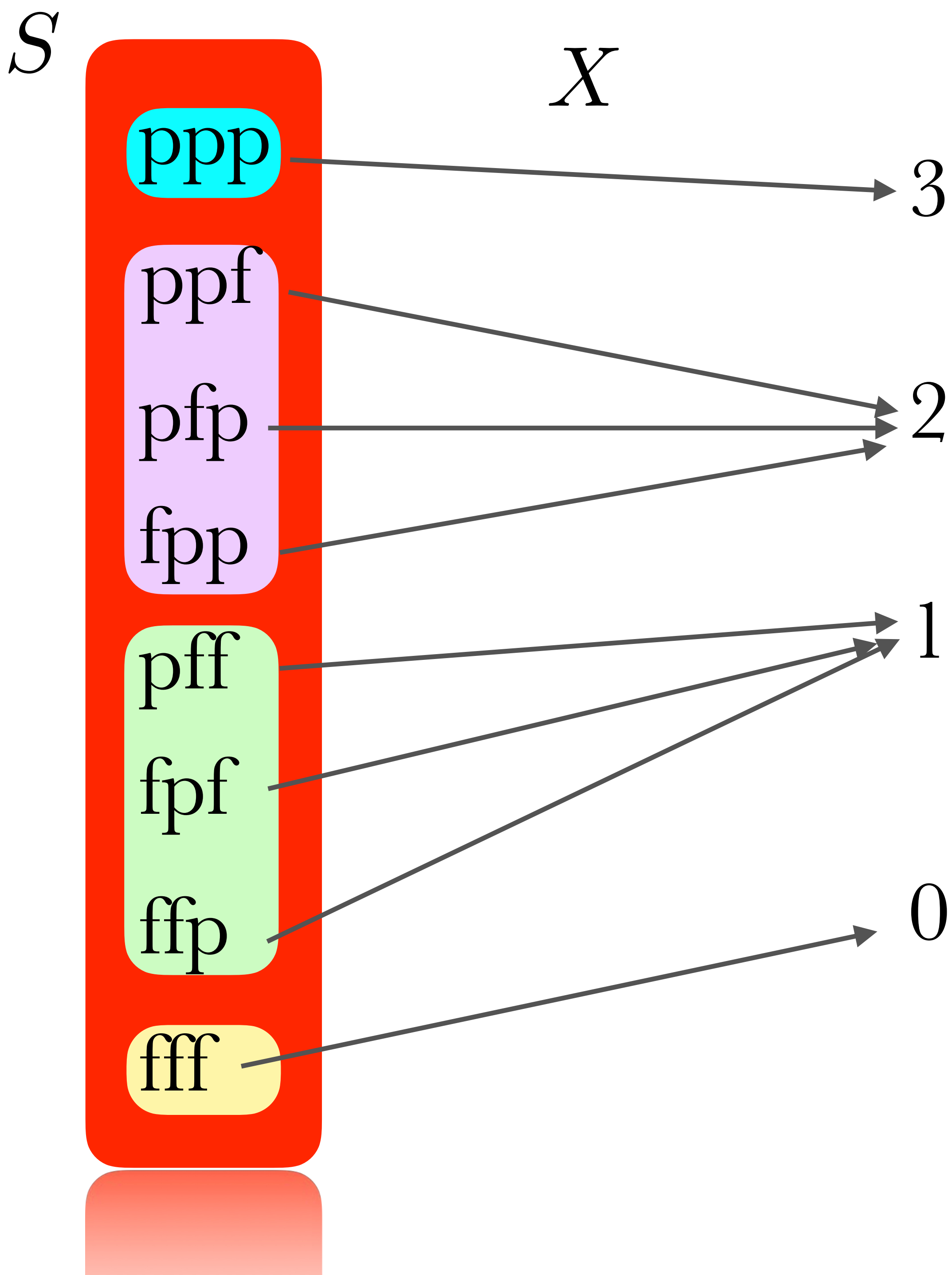
$$f(0)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

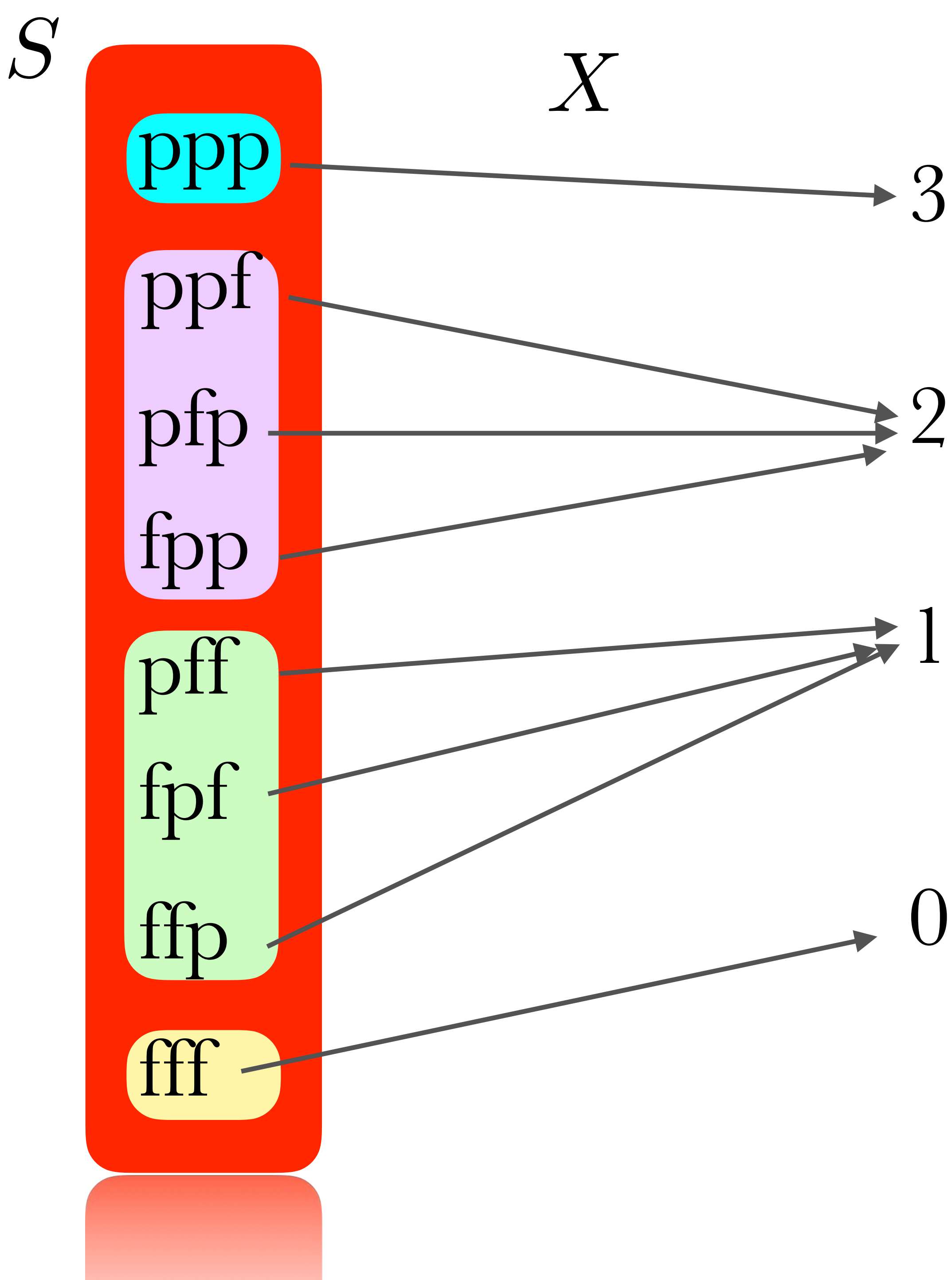
$$f(0) = P(X = 0)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

x_i	$f(x_i)$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{1}{8}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

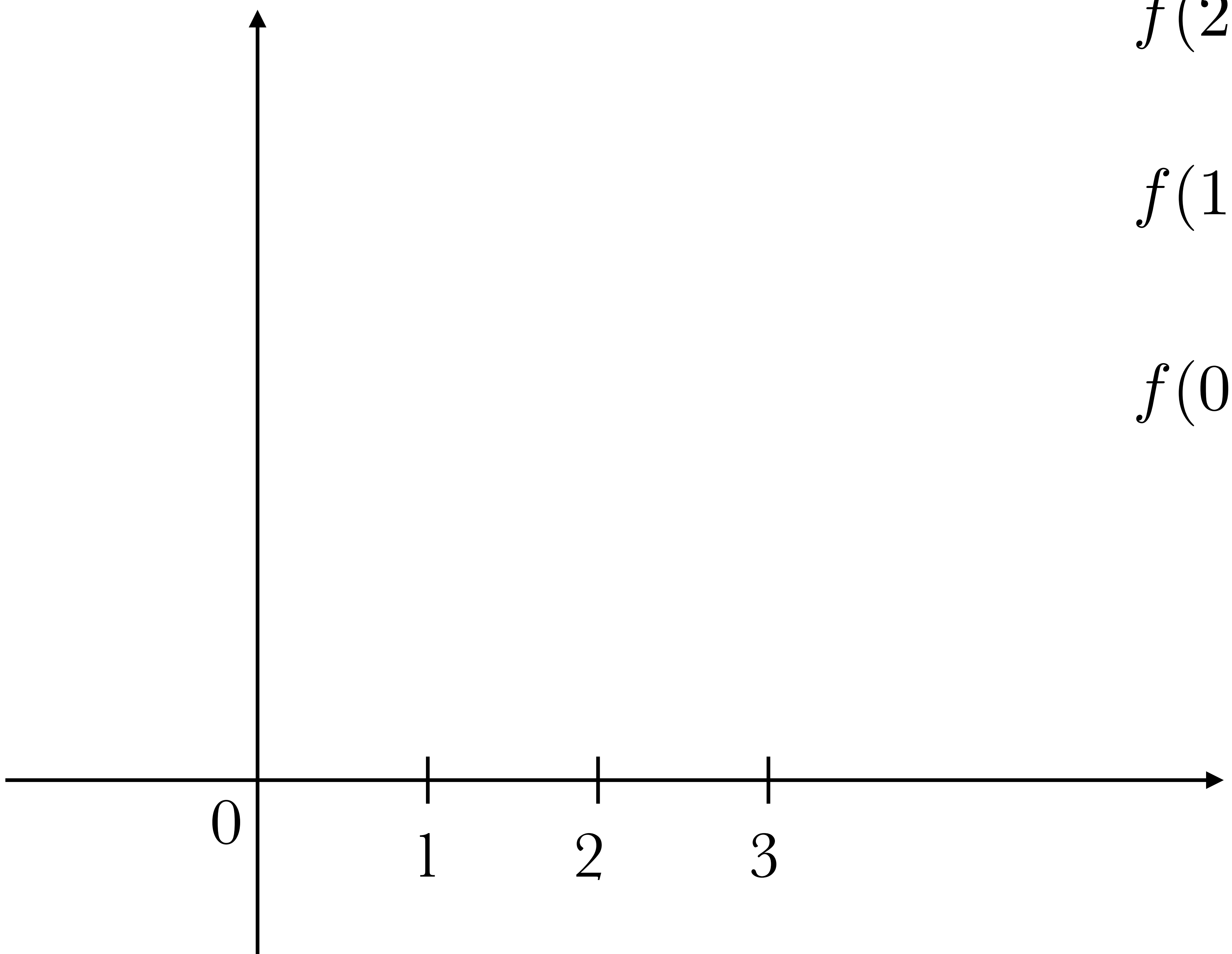
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

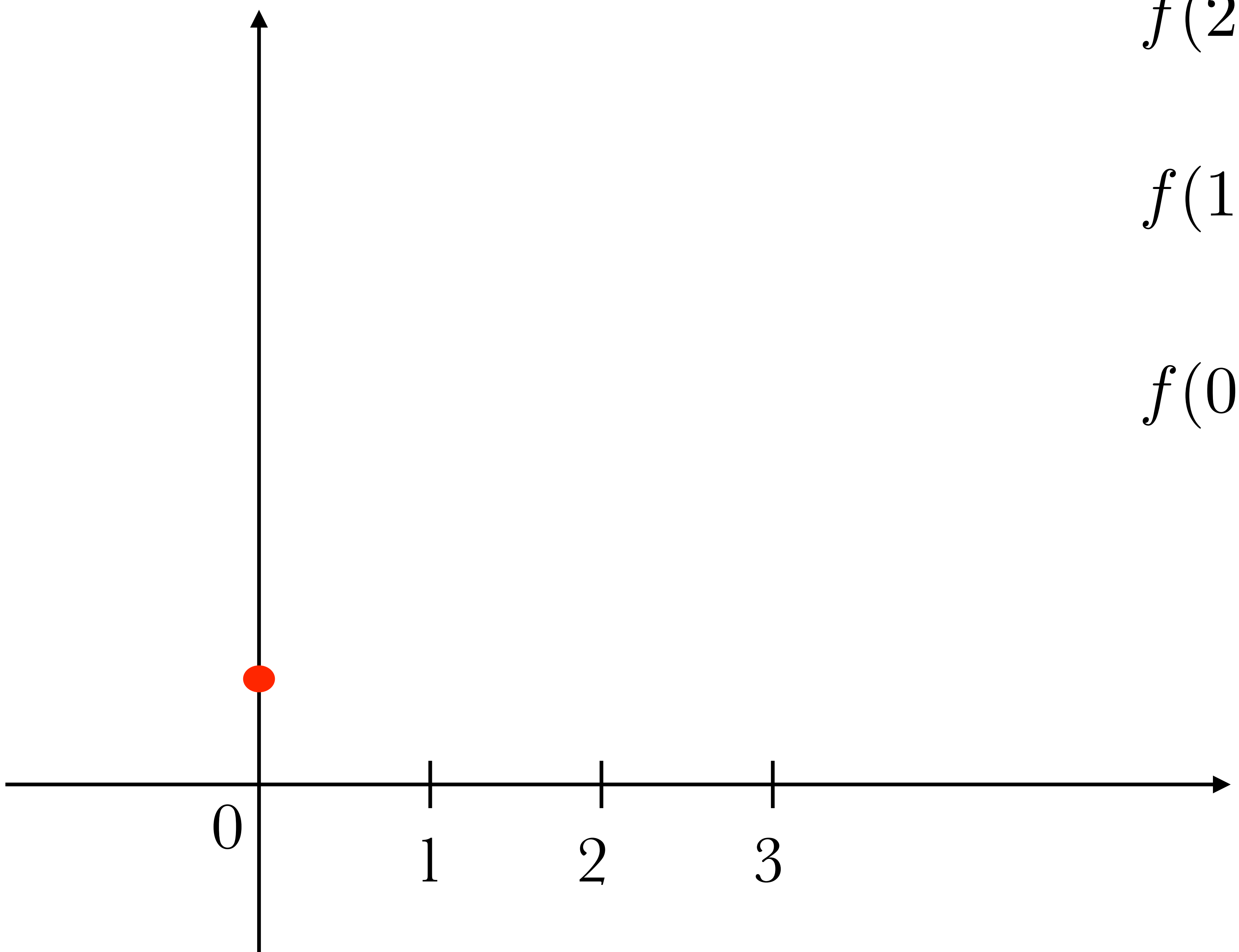
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

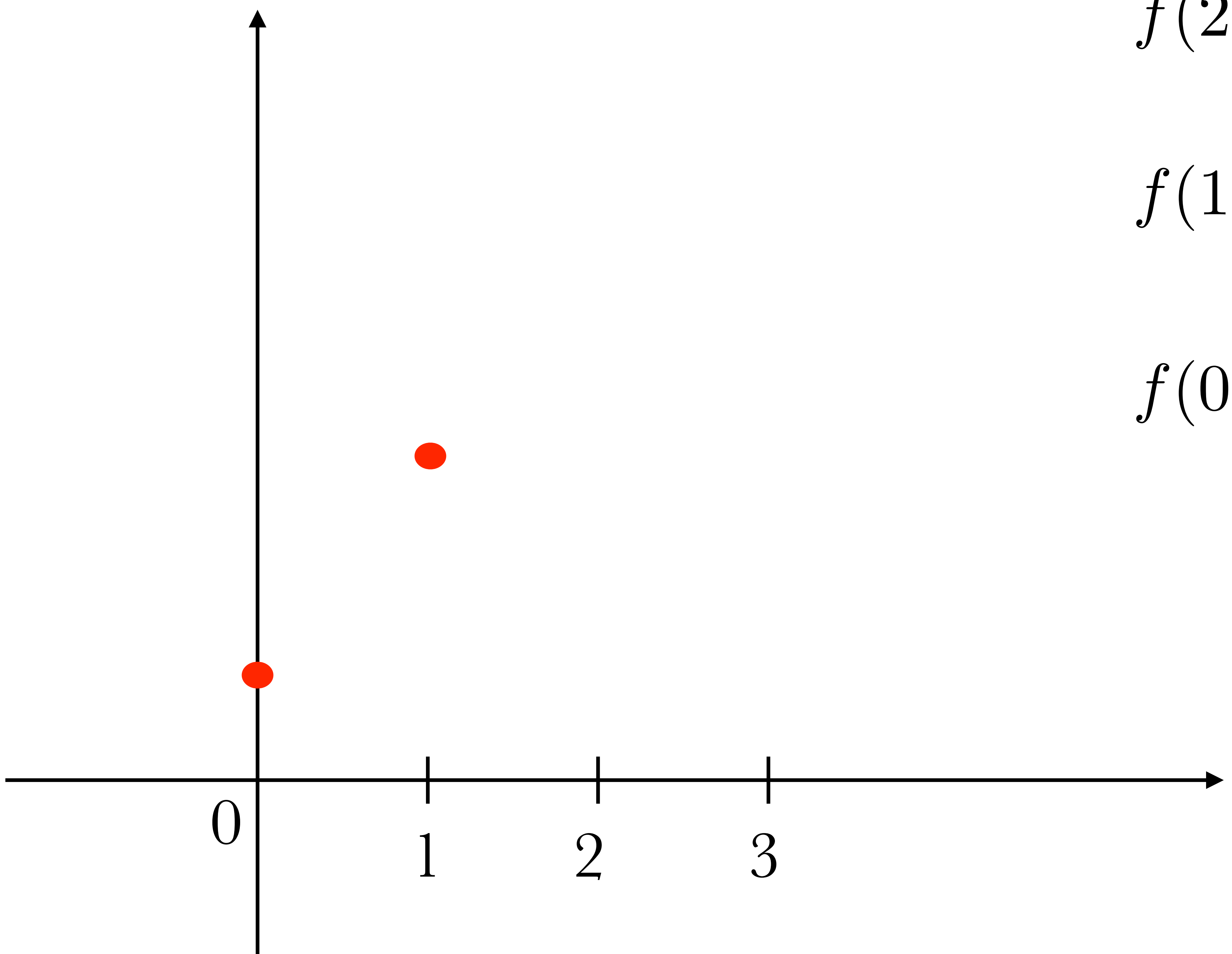
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

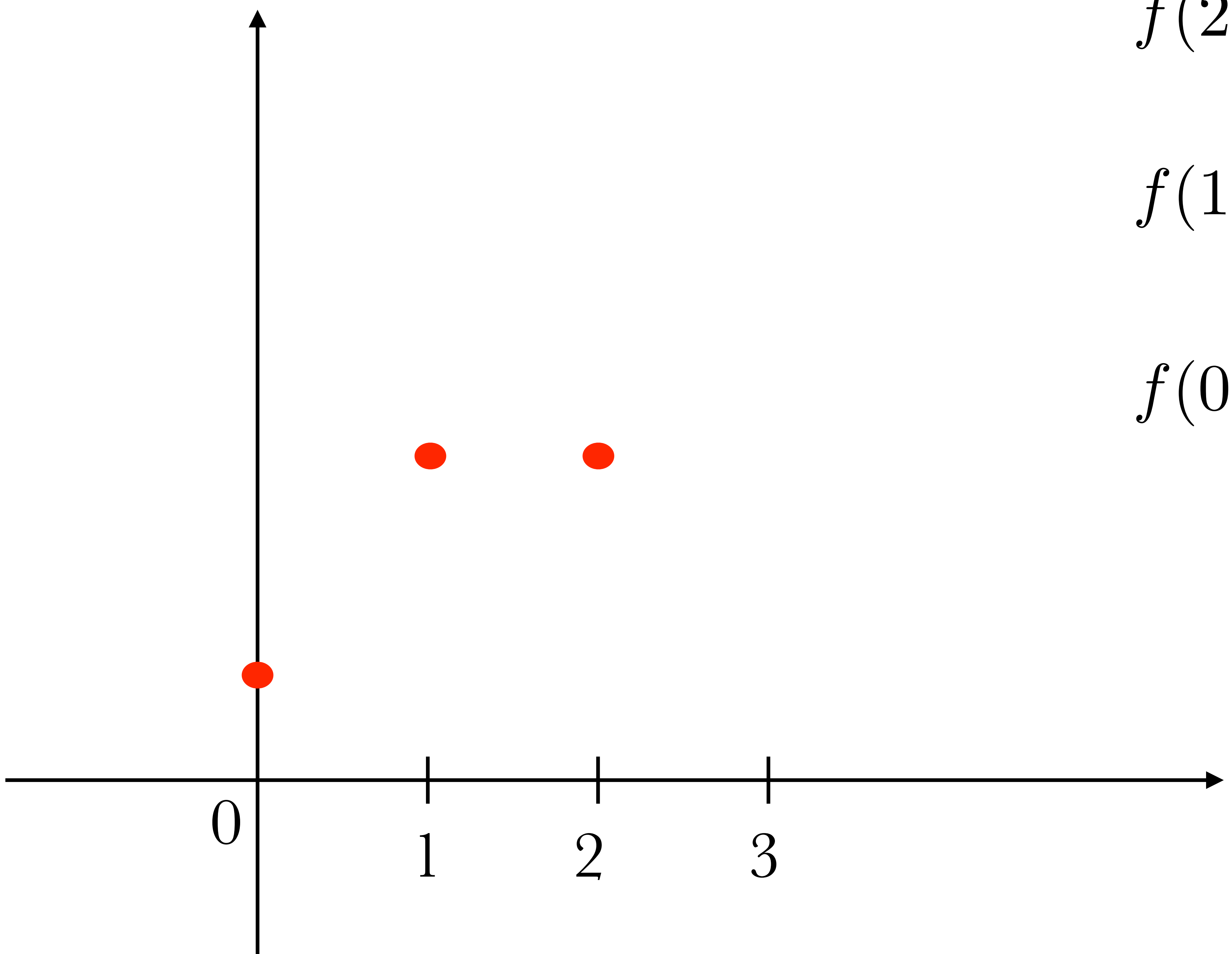
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

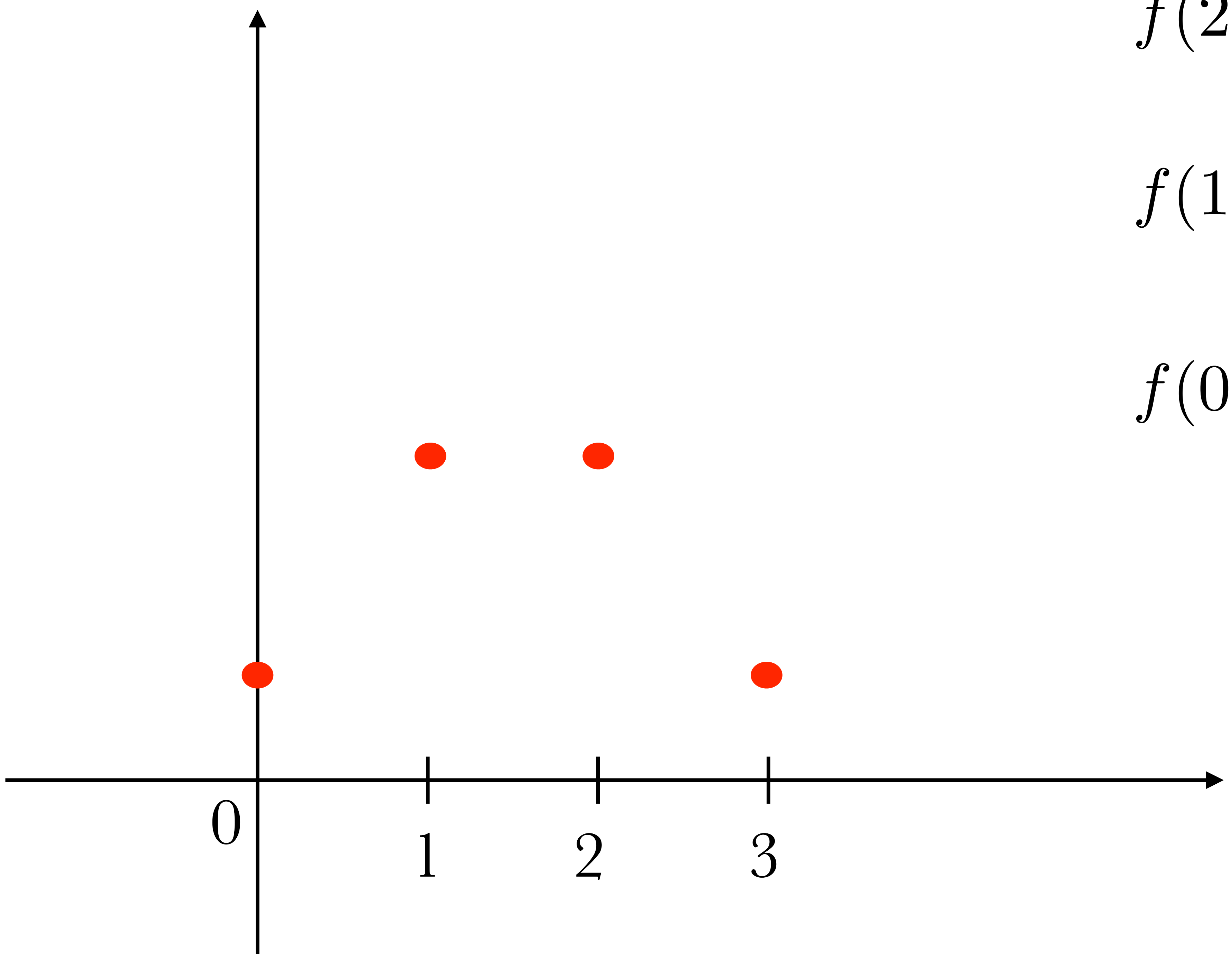
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

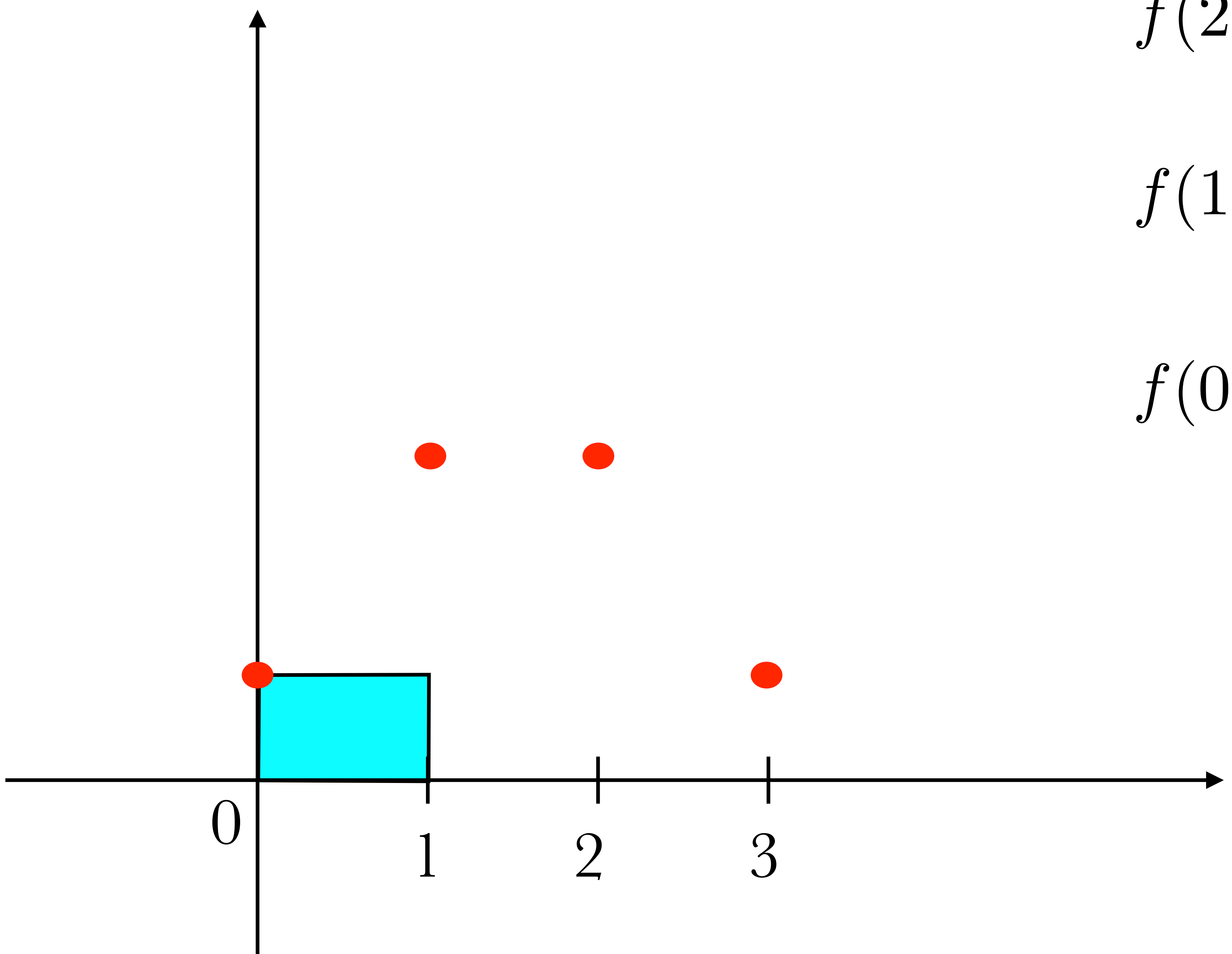
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

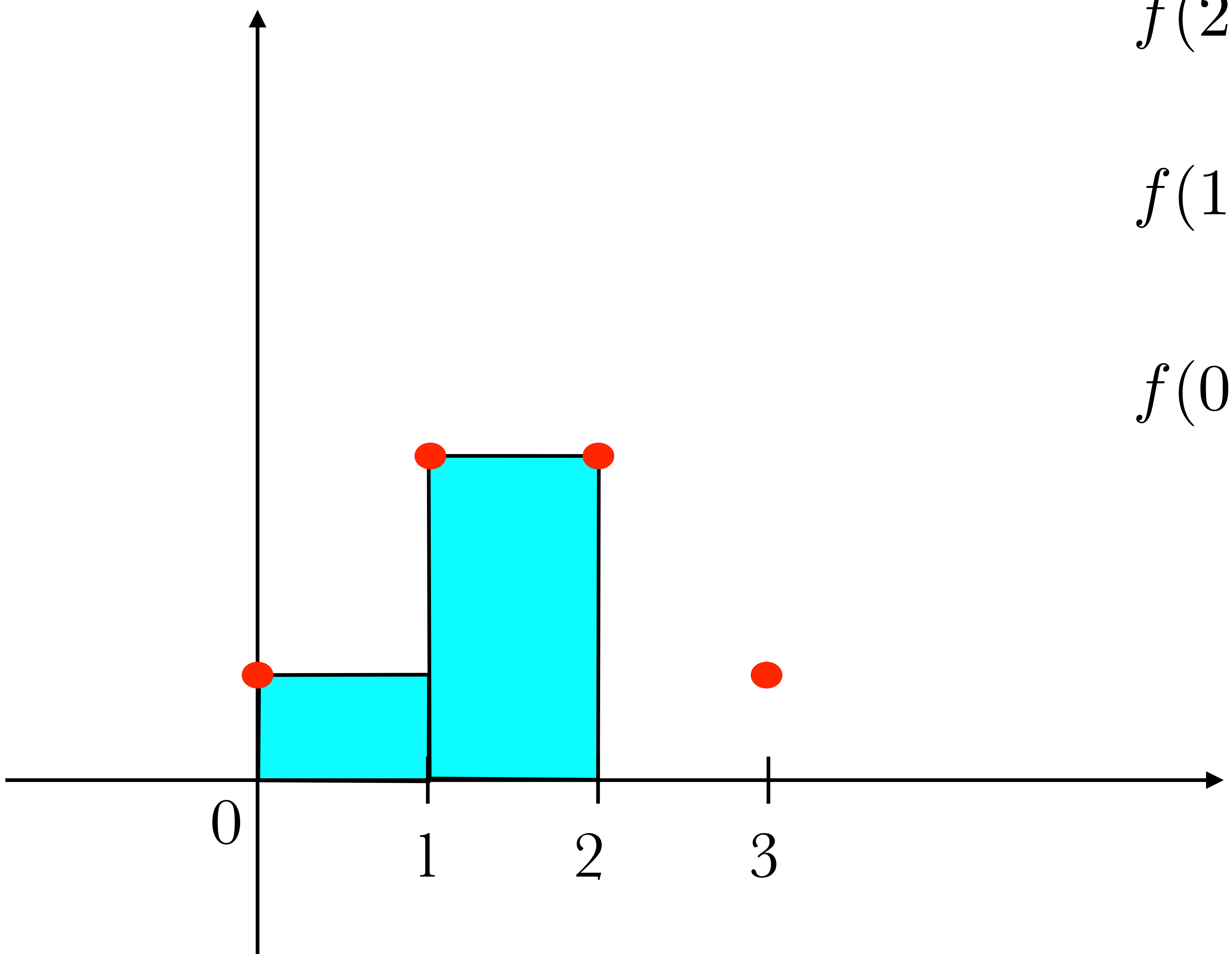
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

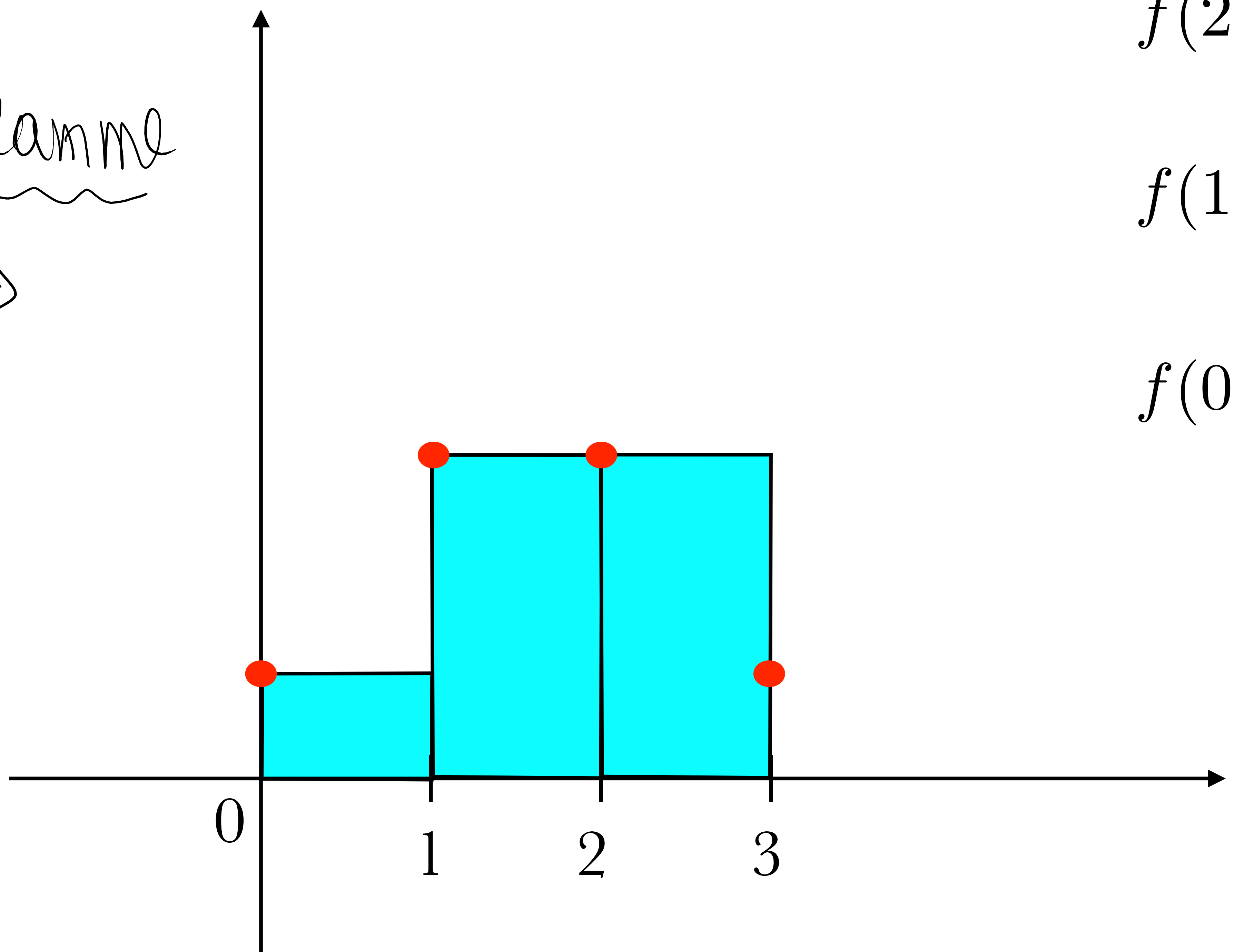
$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

Histogramme



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

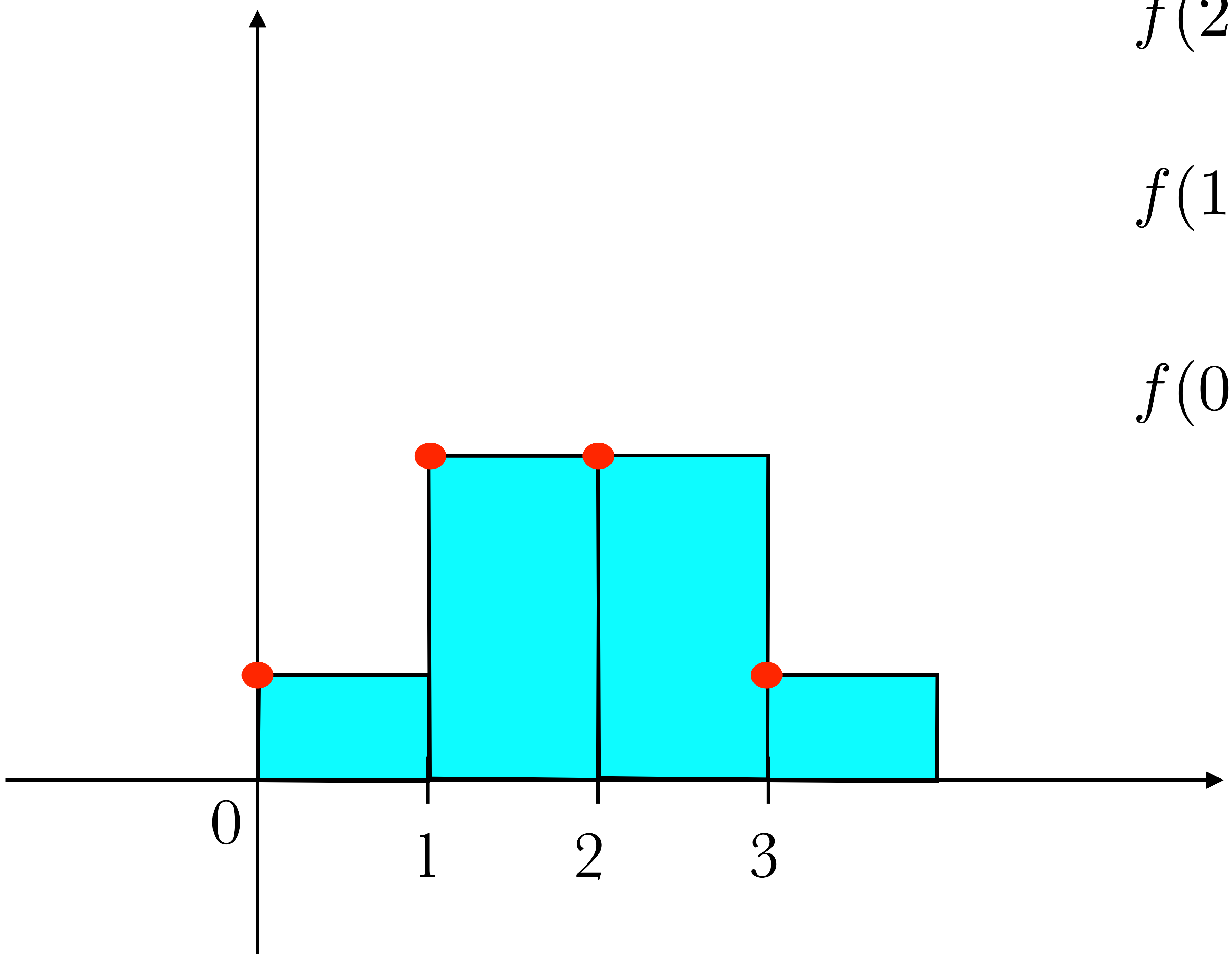
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Faites les exercices suivants

3.1 et 3.2

Q.3.1

Dans l'expérience consistant à lancer deux dés, on s'intéresse au total et à la différence des résultats des deux dés. Décrire l'ensemble des réalisations de ces deux variables aléatoires.

Q.3.2

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, on considère la variable aléatoire X : la somme des résultats des deux dés. Construire un tableau de distribution de probabilités.

3.1 X = total ; Y = différence.

$X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$ $\quad Y(\Omega) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3.2 $X :=$ Somme des deux résultats obtenus.

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$\mathbb{P}(X=i)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1 ✓

Faites les exercices suivants

3.1 et 3.2

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i$$

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i \qquad\qquad X = x_j$$

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i \qquad\qquad X = x_j$$

forment une partition de S

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i \qquad\qquad X = x_j$$

forment une partition de S

on doit nécessairement avoir

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i \qquad\qquad X = x_j$$

forment une partition de S

on doit nécessairement avoir

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = 1$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P(F) = 1 - P(P)$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$
\begin{aligned}
P(F) &= 1 - P(P) \\
&= 1 - p
\end{aligned}
$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p. $\in]0,1[$

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

Calculer $\mathbb{P}(X=k)$; $k \in \{1, 2, \ldots, n\} = X(\Omega)$

$k=1$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\text{"}P\text{"}) = p$.

$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\text{"}F, P\text{"}) = (1-p) \times p$

$\mathbb{P}(X=3) = (1-p)^2 \cdot p$

$1 \leq k < n$

$\longrightarrow \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Aucun Pile

$\longrightarrow \mathbb{P}(X=n) = (1-p)^{n-1} \times p + (1-p)^n$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P) = 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{} + \mathbb{P}(X=2) + \cdots + \mathbb{P}(X=k) + \cdots + \underbrace{\mathbb{P}(X=n)}_{} =$$

$$\underbrace{p + (1-p)p + \cdots + (1-p)^{k-1} \cdot p + \cdots + (1-p)^{n-1} \cdot p}_{} + (1-p)^n =$$

$$p\left\{1 + (1-p) + \cdots + (1-p)^{n-1}\right\} + (1-p)^n =$$

$$\cancel{p}\left\{\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-\cancel{p})} \times 1\right\} + (1-p)^n = 1-(1-p)^n + (1-p)^n$$

$$= \boxed{1} \checkmark$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\})$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\})$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$

$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$

$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\})$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$

$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1 - p)^2 p$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$

$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

Exemple On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1-p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1-p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P(X = n-1) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-2}, P\}) = (1-p)^{n-2} p$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P(X = n - 1) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-2}, P\}) = (1 - p)^{n-2} p$$

$$P(X = n) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, P\} \cup \{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, F\})$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$= 1 - p$$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P(X = n - 1) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-2}, P\}) = (1 - p)^{n-2} p$$

$$P(X = n) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, P\} \cup \{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, F\}) = (1 - p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right)$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right)$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\left(X = x_i\right) + P(X = x_n)$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\left(X = x_i\right) + P(X = x_n)$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\left(X = x_i\right) + P(X = x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X=x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(X=x_i) + P(X=x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X=x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X=x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\left(X=x_i\right) + P(X=x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right) + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X=x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{p}\right) + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{p}\right) + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{p}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= 1-(1-p)^{n-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\cancel{p}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= 1-(1-p)^{n-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{1-(1-p)}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{\cancel{p}}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= 1 - \cancel{(1-p)^{n-1}} + \cancel{(1-p)^{n-1}}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{1-(1-p)}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{\cancel{p}}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= 1 - \cancel{(1-p)^{n-1}} + \cancel{(1-p)^{n-1}}$$

$$= 1$$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i)$$ (jusqu'à x_i)

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque:

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

$F(x)$ est non décroissante (croissante)

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

$F(x)$ est non décroissante

c'est-à-dire $a < b \implies F(a) \leq F(b)$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

$F(x)$ est non décroissante

c'est-à-dire $a < b \implies F(a) \leq F(b)$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

$F(x)$ est non décroissante

c'est-à-dire $a < b \implies F(a) \leq F(b)$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$F(0)$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

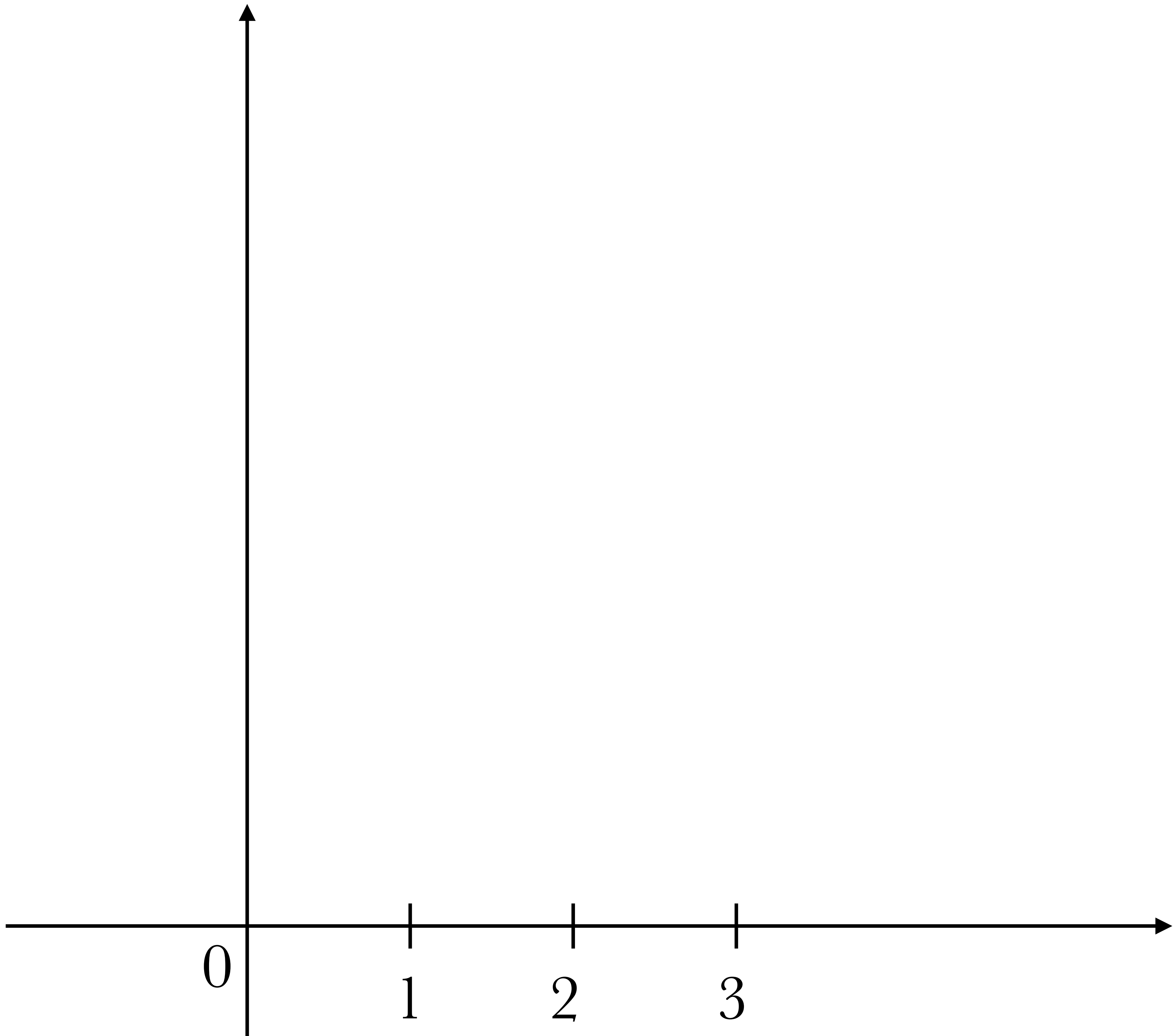
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

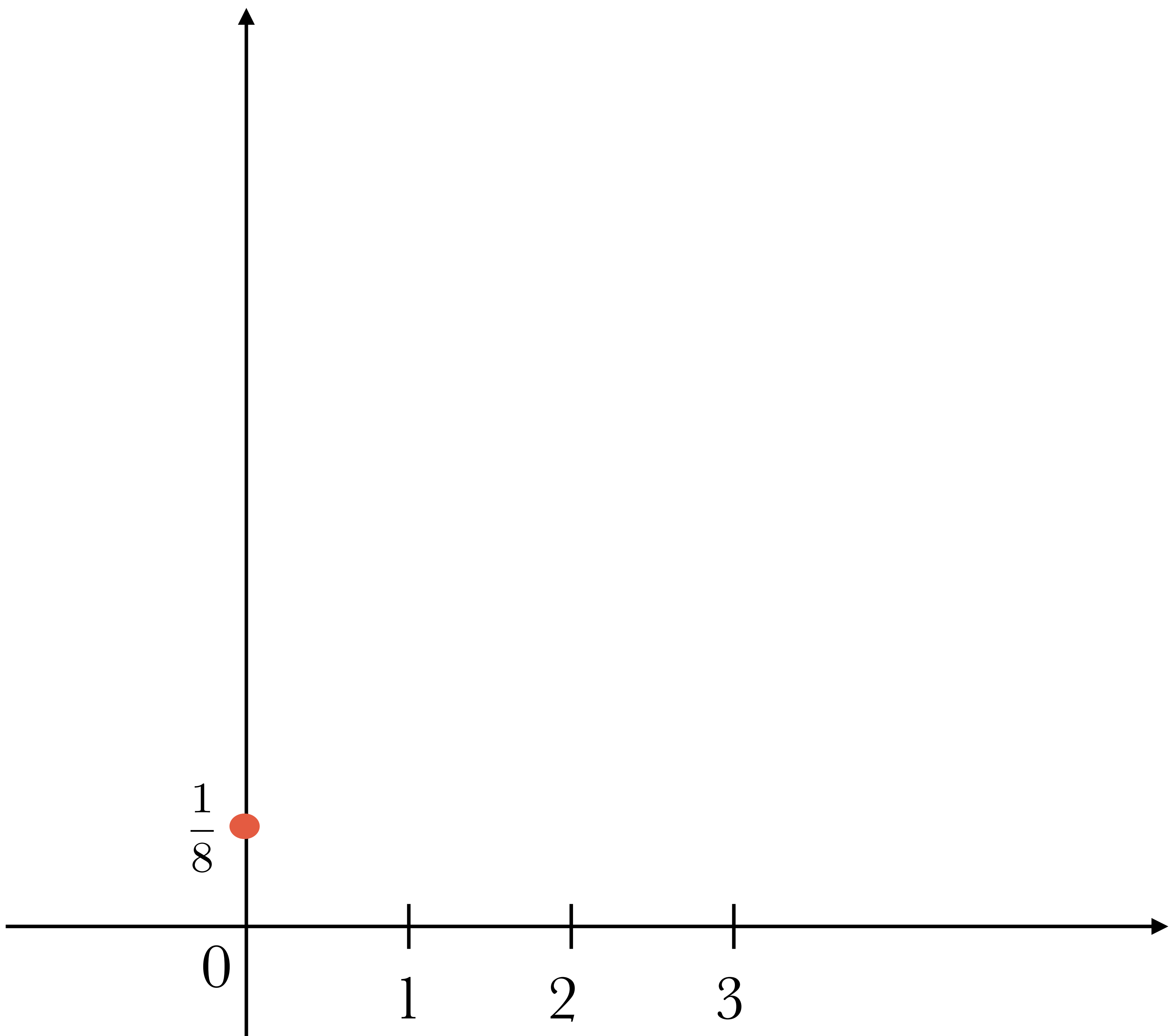
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

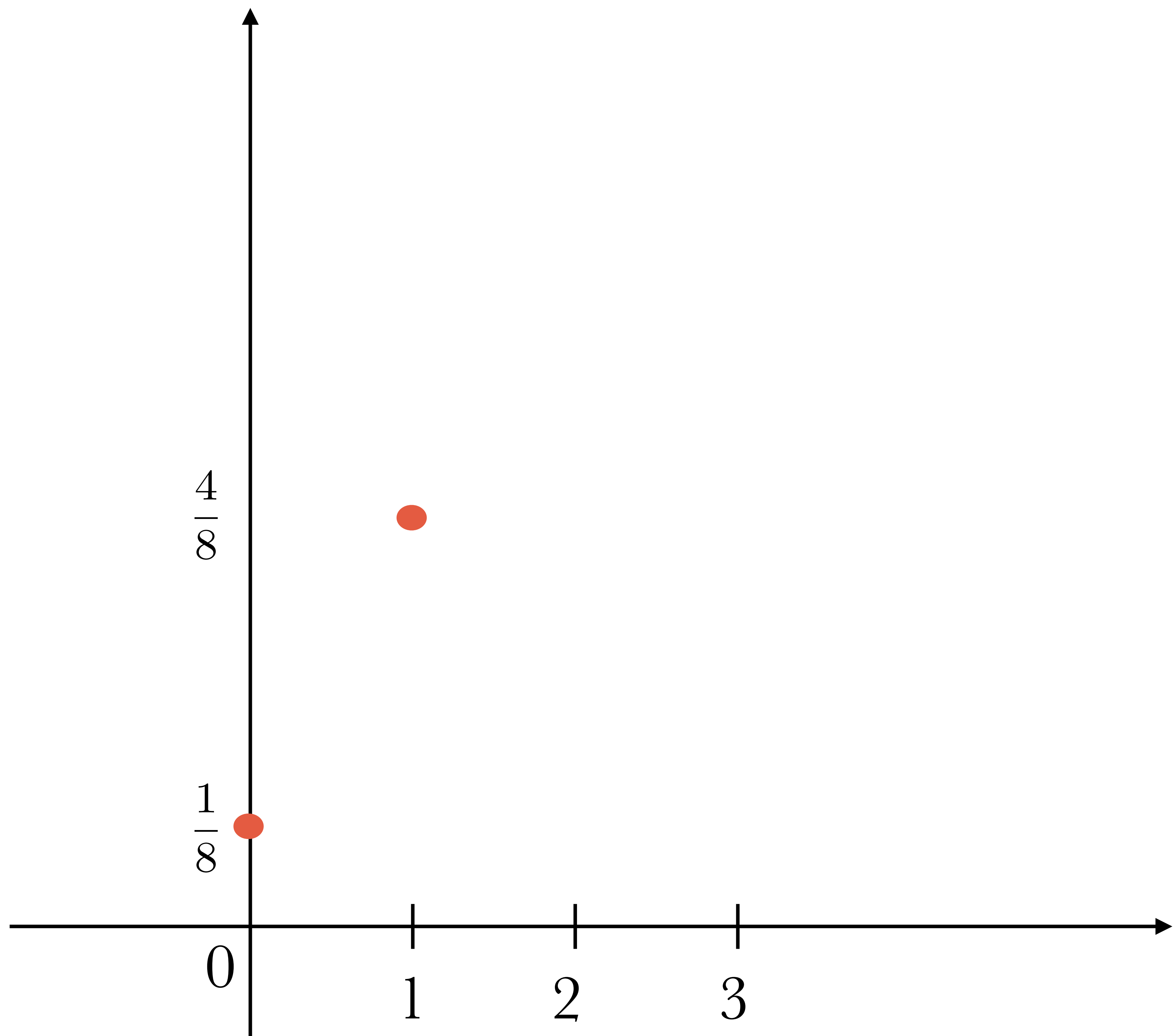
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

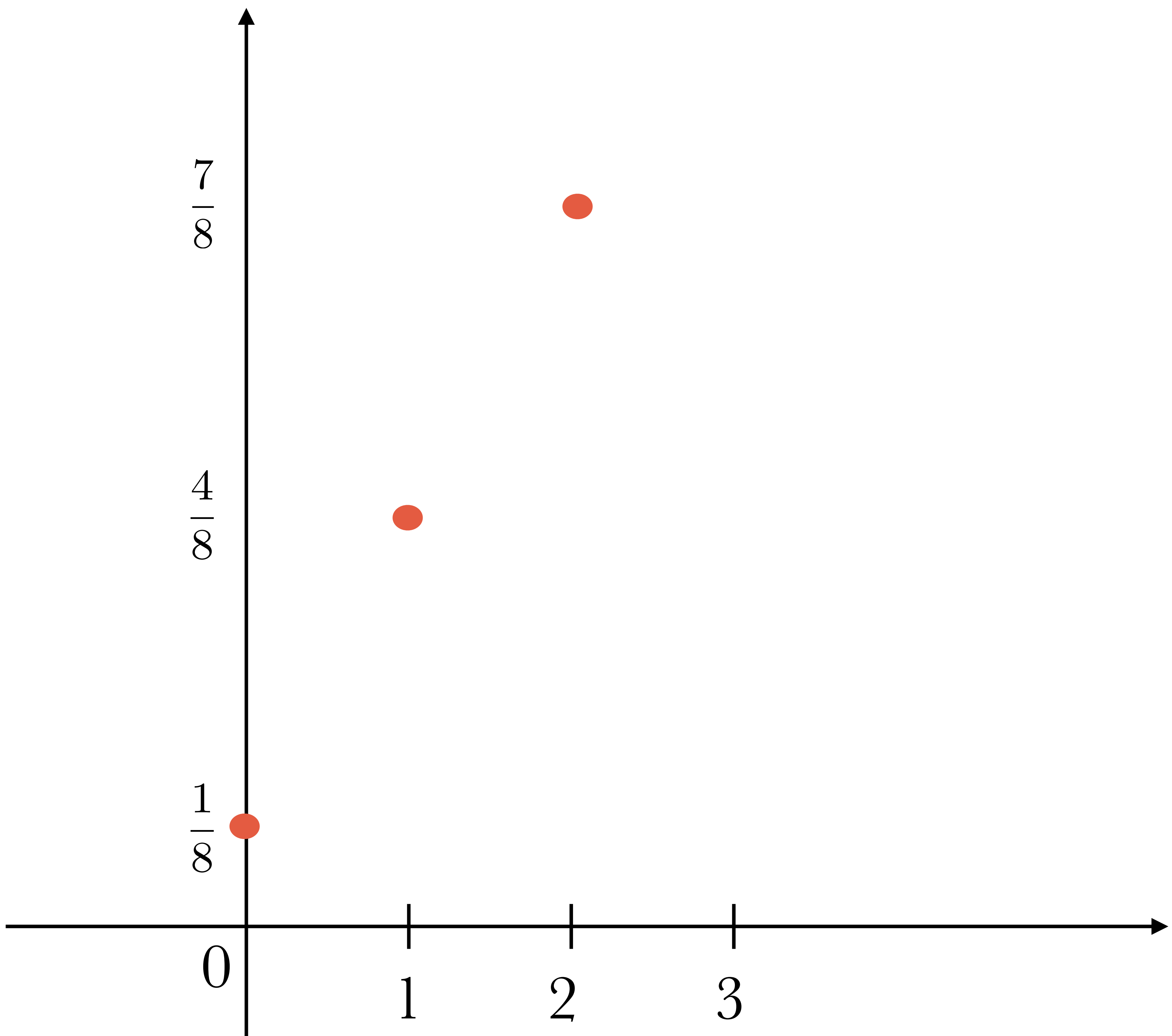
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

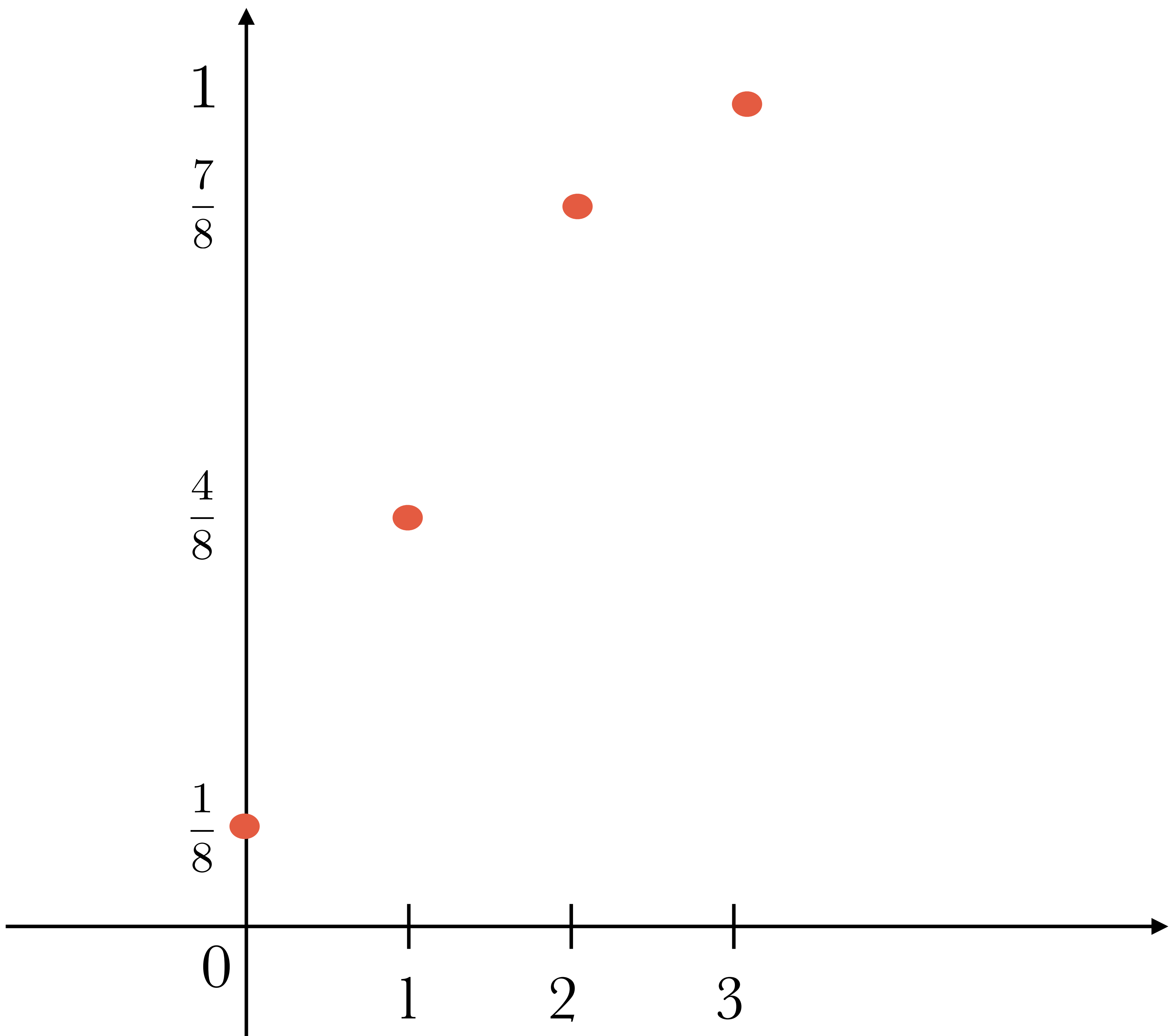
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

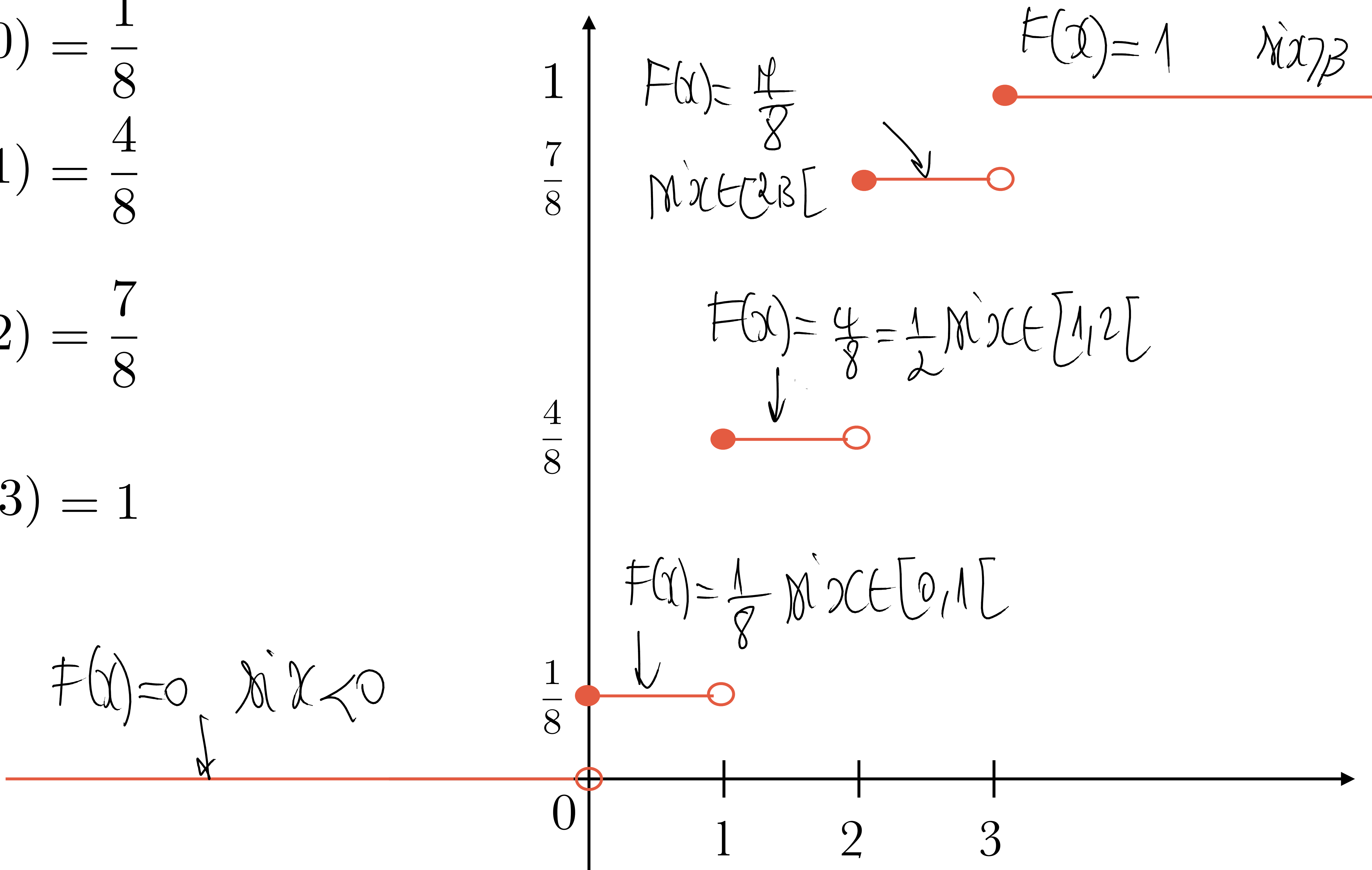
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



$$P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\})$$

$$P(a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\})$$

$$= P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\})$$

$$= P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$P(a < X \le b)$$

$$P(X \le b) = P(\{X \le a\} \cup \{a < X \le b\})$$

$$= P(X \le a) + P(a < X \le b)$$

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$P(a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\})$$

$$= P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}}$$

Faites les exercices suivants

#3.3 à 3.7

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R}$$

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}$$

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

si par exemple

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

si par exemple $\qquad g(x) = ax + b$

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

si par exemple $\qquad g(x) = ax + b$

$$Y = g(X)$$

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

si par exemple $\quad g(x) = ax + b$

$$Y = g(X) = aX + b$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$P(Y = 5)$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$$P(Y = 5) = P(2X + 1 = 5)$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$$P(Y = 5) = P(2X + 1 = 5)$$

$$= P(2X = 4)$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$$P(Y = 5) = P(2X + 1 = 5)$$

$$= P(2X = 4) = P(X = 2)$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$$\begin{aligned} P(Y = 5) &= P(2X + 1 = 5) \\ &= P(2X = 4) = P(X = 2) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Variable aléatoire discrète

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Variable aléatoire discrète
- ✓ Variable aléatoire continue

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Variable aléatoire discrète
- ✓ Variable aléatoire continue
- ✓ Loi de probabilité

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Variable aléatoire discrète
- ✓ Variable aléatoire continue
- ✓ Loi de probabilité
- ✓ Fonction de répartition

Devoir: Section 3.1